

G.I.E Pensamient Matemátic



EXPERIENCIAS DOCENTES

IDEAS Y VISUALIZACIONES MATEMÁTICAS

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

HISTORIA DEL EXPERIMENTO BAROMÉTRICO

MARÍA CAPDEVILLA D'ORIOLA, PIONERA DE LA
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA GEODESIA

EL SÓLIDO HIPERBÓLICO AGUDO

CUENTOS MATEMÁTICOS

MI MEDIA CONJETURA (BASADO EN UN HECHO
IRREAL)

Y ADEMÁS:

JUEGOS MATEMÁTICOS

INVESTIGACIÓN

A REVENUE EQUIVALENCE RESULT IN A DUOPOLISTIC
ELECTRICITY MARKET WHERE ONE OF THE
SUPPLIERS HAS TWO PRODUCTION UNITS

TEOREMA DE HALL Y UN ALGORITMO PARA
DETECTAR SISTEMAS DE REPRESENTANTES
DISTINTOS

MÍNIMOS CUADRADOS GENERALIZADOS PARA
FUNCIONES VECTORIALES EN LA GEOFÍSICA
ESPACIAL

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELING IN
MARITIME GEOMECHANICS

CRÍTICAS

LA PUERTA DE LOS TRES CERROJOS (UNA AVENTURA
CUÁNTICA)

MODELIZACIONES DINÁMICAS EN MATEMÁTICAS. USOS
DEL GEOGEBRA

ENTREVISTA A:



JUAN TARRÉS FREIXENET,
PROFESOR TITULAR DE LA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE
MADRID

Editorial del Número 2

Equipo Editorial

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Con este nuevo número, la revista Pensamiento Matemático cumple su primer año. Tras este año hemos conseguido dar difusión a nuestra publicación que se encuentra incluida en numerosas bases de datos a nivel nacional e internacional. Esto, unido al entusiasmo con el que día tras día pretendemos divulgar las matemáticas, las experiencias docentes en esta materia y la investigación en todas sus áreas, hace que estemos recibiendo numerosas aportaciones desde muchos lugares de España y Latinoamérica.

Introducción

Podemos decir que tras un año de experiencia, nuestra revista llega a su madurez. Todos los que hacemos posible esta publicación, miramos ahora con cierta regocijo al pasado, en aquel primer número 0, en que todo estaba un tanto abierto a la improvisación, pero en el que sin embargo nuestras ganas e ilusión superaban con creces todas las carencias surgidas.

Con este nuevo número, dejamos atrás nuestra “adolescencia” editora, y pretendemos dar el paso a una madurez comprometida con unos contenidos fácilmente accesibles y de calidad. Muchas han sido las implementaciones que hemos llevado a cabo a lo largo de este año, como por ejemplo realizar los trámites adecuados para la indexación de



Número 2 - Pensamiento Matemático

nuestra publicación en bases de datos tan renombradas e importantes como Latindex o Dialnet. Se añade a ello, las importantes labores de difusión de contenidos que hemos realizado tanto dentro de la comunidad pedagógica como fuera.

De este modo, nuestra revista ha sido capaz de llegar a muchos rincones de esta pequeña aldea global en la que vivimos. Hemos recibido visitas de todos los confines del mundo no necesariamente hispano-hablantes. Por poner un ejemplo nos han visitado de lugares geográficos tan remotos y dispares como Japón o Canadá, lo que pone de manifiesto el interés por nuestros contenidos.

Queremos agradecer especialmente la acogida y el interés que esta publicación ha suscitado dentro de la comunidad latinoamericana. Son infinitas las aportaciones y muestras de apoyo que hemos recibido por parte de compañeros hispano-hablantes, lo cual nos reconforta enormemente y nos ayuda a seguir adelante y hacer un trabajo mejor si cabe. No podemos publicar todos los artículos recibidos, pero prometemos tomarlos en consideración para próximas publicaciones ordinarias o especiales si fuera necesario. Por todo ello os damos nuestra gratitud y nuestro más hondo y sincero agradecimiento.

En este número contamos con unos contenidos de gran interés, desde nuestro punto de vista, en cada una de las secciones que forman la publicación. La finalidad de todos ellos se centra en dar a conocer trabajos que relacionan las Matemáticas con otras áreas del conocimiento y que ponen de manifiesto la importancia de las Matemáticas en la sociedad, así como promover el intercambio de experiencias y el diálogo entre profesionales de la enseñanza. Por supuesto este compromiso no debe estar reñido con la presentación de contenidos menos formales, y más cercanos al entretenimiento, sin olvidar aportar contenidos lúdicos y culturales que pueden resultar gratificantes y educativos.

De forma adicional y con la intención de mejorar nuestra publicación, hemos implementado la página web de la misma con el fin de que cualquier lector pueda utilizar los artículos referenciados en varios formatos como BibTex, EndNote, o Refworks.



Base de datos para referenciar.

Experiencias Docentes

El artículo *"Ideas y Visualizaciones Matemáticas"*, nos presenta uno de los trabajos que durante el curso académico 2010-2011 organizó la Cátedra Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid. Se trató del Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas. El material allí utilizado fue el DVD titulado *"Ideas y Visualizaciones Matemáticas"*, editado por esta misma Cátedra y que es comentado en este texto.

La Cátedra Miguel de Guzmán fue creada el 26 de septiembre de 2007 por iniciativa de la Facultad de Ciencias Matemáticas y en el marco de la Fundación General de la Universidad Complutense de Madrid. Tiene por objeto el análisis, la investigación y la docencia de la realidad, problemática y perspectivas de Educación Matemática en España y a nivel internacional.



CD-ROM *"Ideas y Visualizaciones Matemáticas"*

1. Historias de Matemáticas

En la sección de historias matemáticas este número cuenta con distintas aportaciones:

En *"Historia del experimento barométrico"*, se expone cómo ciertos problemas hidráulicos planteados por el ingeniero Baliani hacia 1630 culminaron en el experimento realizado por el matemático Torricelli en 1644. Este último, ferviente galileano, pensaba la matemática como lenguaje con que la naturaleza habla a los hombres. Con este soporte teórico del mundo realizó un experimento físico con el que calibró la presión atmosférica y comprobó la existencia del vacío.

Recuperamos la biografía de *María Capdevila D'Oriola*, catedrática de Matemáticas de Instituto y primera mujer española profesora universitaria. Pese a la escasa documentación que de ella se tiene, profesores de la Universidad de Sevilla, nos muestran un breve repaso a su vida personal y profesional obtenida a partir de esa escasa documentación y a través de conversaciones con



El Experimento de Gaspare Berti en el Convento dei Minimi sul Pincio. Gaspar Schott, *Technica curiosa, sive, Mirabilia artis*, Würzburg 1664.

familiares directos.

Para todos los que hacemos esta revista, resultaba un honor y un inmenso placer contar con las aportaciones de toda una institución de la educación como es el profesor Miguel J. Sevilla. Por ello, considerábamos la necesidad de presentar íntegramente su artículo a pesar de su extensión, en el que se presenta una *"Introducción histórica de la Geodesia"*. Desde los orígenes de la ciencia en las civilizaciones clásicas hasta nuestros días, la Geodesia evolucionó de la mano del desarrollo humano. El profesor Sevilla repasa acertada y certeramente este desarrollo, realizando una exposición sublime de los hechos históricos más significativos acaecidos en dicha evolución.



María Capdevila D'Oriola



Cuadrante acimutal utilizado por Jorge Juan y Antonio de Ulloa (Museo Naval, Madrid).

Para finalizar esta sección, presentamos el artículo *"El sólido Hiperbólico Agudo"*, cuya lectura resulta muy interesante puesto que pone de manifiesto la perspectiva multidisciplinar que los científicos de principios del siglo XVII tenían de la ciencia. En ella se explica cómo la Ciencia avanza paso a paso mediante el pensamiento y los experimentos. Cómo existían en el siglo XVII distintas teorías, entre ellas errores aristotélicos, y cómo se hacían experimentos, de forma pública, que rápidamente se conocían en Europa. Se presenta como muestra del estilo de las demostraciones matemáticas (geométricas) que se efectuaban en el siglo XVII, y por su valor precursor del cálculo infinitesimal.



El sólido hiperbólico agudo (enunciado de los dos primeros lemas) "Opera geometrica" [p.113]

Cuentos Matemáticos

En la sección de relatos contamos con el cuento *“Mi media conjetura”*. Trata sobre un conocido problema abierto de Teoría de Números, la conjetura de Collatz, de sencillo enunciado pero al que todavía no se ha encontrado solución. Se muestra la conjetura en el relato a partir de la relación casual que se establece entre un matemático y una niña, a la que el primero explica la conjetura y propone el reto de demostrarla, completando la prueba que hizo él mismo de una parte de la conjetura.

Los dos personajes que aparecen en el relato son ficticios y la parte de la conjetura que el matemático afirma haber demostrado no está en realidad todavía probada, de ahí el subtítulo del cuento: *“basado en un hecho irreal”*.

Investigación

Dado el carácter multinacional y multilingüístico que pretendemos ofrecer a la comunidad pedagógica, contamos con un trabajo de investigación titulado *“A Revenue Equivalence Result in a Duopolistic Electricity Market where one of the suppliers has two production units”* de Estrella Alonso (Universidad Pontificia Comillas) y Juan Tejada (Universidad Complutense de Madrid) que trata sobre la caracterización del equilibrio bayesiano y monótono de Nash y su estudio en los modelos clásicos uniforme, discriminatorio y de Vickrey.

Desde la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, nos llega el artículo *“Teorema de Hall y un algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos”*, en el que se presentan dos aportes a la combinatoria aplicada: el primero la relación de equivalencia de los Teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth y Hall, el segundo una nueva prueba al Teorema de Hall que sirve como algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos. En cada sección se establecen generalizaciones de los teoremas mencionados y finalmente el algoritmo con su justificación.

Desde la Universidad de La Habana y el Instituto de Geofísica y Astronomía (IGA) nos llega el trabajo titulado *“Mínimos cuadrados generalizados para funciones vectoriales en la Geofísica Espacial”*. Se trata de la continuación de otros dos relacionados con este tema:

- Una presentación de los mínimos cuadrados generalizados para funciones vectoriales (Revista Investigación Operacional vol., 32 , n°. 1, 67–89, 2011).
- Una implementación del ajuste de datos mediante mínimos cuadrados generalizados no lineales para funciones vectoriales (Revista investigación operacional vol., 32 , n°. 3, 265–282, 2011).

El trabajo aporta una visión matemática, en el sentido clásico, que plantea la necesidad de resolver mejor el problema de mínimos cuadrados en Geodesia

espacial. Expone la conceptualización y formulación matemática para crear un algoritmo de ajuste de gran interés y aporta una aplicación a un caso concreto.

Juegos Matemáticos

En esta sección dedicada a propuestas lúdico-educativas podemos encontrar un trabajo de un profesor de Expresión Gráfica y Geometría de la Universidad Politécnica de Madrid que es gran aficionado a las Matemáticas. En este trabajo, titulado *“Triángulos cuadrados y cruces cuadradas: algunos puzzles geométricos de H. E. Dudeney”*, se pretende rescatar del “olvido” temas geométricos con técnicas actuales de visualización, además de recuperar dos atractivos puzzles geométricos estudiados por Henry Ernest Dudeney a finales del siglo XIX o principios del XX, y que por sus interesantes propiedades geométricas pueden ser explorados con claridad, usando herramientas informáticas actuales.



El acertijo del Mercero.

Críticas

Esta sección está dedicada a recoger y comentar herramientas de todo tipo que, relacionadas con las matemáticas, pueden servir para el acercamiento a las mismas. En este número presentamos:

Una crítica del libro *“La Puerta de Los Tres Cerrojos (Una Aventura Cuántica)”* de Sonia Fernández-Vidal. Pese a ser una novela con contenidos físicos y muy pocos contenidos matemáticos, se ha creído interesante reseñar este texto por considerarse que la divulgación científica de calidad es importante y necesaria y debe ser siempre bienvenida.



"La Puerta de Los Tres Cerrojos (Una Aventura Cuántica)" – Sonia Fernández-Vidal.

Una reseña de un trabajo que han realizado profesores de la Cátedra Miguel de Guzmán de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y el Instituto Geogebra de Madrid. Se trata del CD-ROM *"Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del Geogebra"*. La finalidad es dar a conocer este material cuyo objetivo principal es proporcionar a los profesores de Matemáticas de Secundaria una herramienta útil para el aula que acerque las matemáticas a la realidad a través de modelizaciones matemáticas. A su vez introduce algunas de las muchas utilidades del software GeoGebra.



CD-ROM "Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del Geogebra".

Entrevistas

Con motivo de su reciente jubilación, se ha realizado una entrevista a [Juan Tarrés Freixenet](#), profesor de matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Juan tuvo una carrera docente no sólo universitaria, ya que fue también Catedrático de Instituto. Esta amplia trayectoria en la enseñanza hace que sea

muy interesante su visión sobre la formación de los estudiantes con los nuevos planes de estudio, en comparación con la formación que se daba antiguamente a los alumnos.

Otro de los aspectos que cuidó Juan es el de la divulgación de las matemáticas (son memorables los seminarios de historia de las matemáticas que impartió), relacionando las matemáticas con otras disciplinas como la música, de la que era aficionado. Estas matemáticas más recreativas, junto con una rama matemática más teórica como es la Topología y la teoría de la dimensión, conformaron su carrera investigadora. De todas estas experiencias docentes e investigadoras hablamos con él en la entrevista.



Juan Tarrés Freixenet



Esperamos que este nuevo número os guste tanto como a nosotros y os aporte información interesante sobre esta ciencia a la que todos los que hacemos posible esta publicación y sobre todo, vosotros nuestros queridos lectores, amamos sin condiciones.

Concluir poniendo de manifiesto que el próximo número que verá la luz en octubre de 2012, será un número especial en el que incluiremos los artículos más relevantes que se presentarán en la *Segunda Jornada Internacional "Matemáticas Everywhere"*, jornada que organiza el Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático" los días 20 y 21 de junio de 2012 en el incomparable y bello municipio de Castro Urdiales (Cantabria, España). Jornadas a las que os animamos e invitamos a participar. Para más información consultar la web de la jornada <http://www.caminos.upm.es/matematicas/jornadas2012/>

Experiencias Docentes Ideas y Visualizaciones Matemáticas

Antonio Díaz-Cano Ocaña

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Durante el curso académico 2010-2011 la Cátedra Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid organizó el Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas. El material utilizado en este seminario, incluidas las grabaciones de las dieciséis conferencias impartidas, se recopiló en un DVD cuya estructura y contenido se describen en este artículo.

Palabras Clave: Ideas, visualización, educación matemática.

1. Antecedentes

La Cátedra Miguel de Guzmán fue creada en 2007 por iniciativa de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid con el objetivo fundamental de investigar en Educación Matemática. En particular, la reflexión en torno a las ideas y visualizaciones matemáticas es una de las prioridades de la Cátedra.

Durante el curso 2010-2011 las profesoras Capi Corrales Rodríguez e Inés M^a Gómez Chacón pertenecientes a la Cátedra Miguel de Guzmán coordinaron el Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas. A lo largo de las dieciséis conferencias del Seminario, otros tantos matemáticos reflexionaron sobre distintos conceptos, textos y problemas fundamentales en diversos campos de las Matemáticas.

El título del Seminario, *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*, es un fiel reflejo de lo que se pretendía. La palabra *idea* hace referencia a una imagen que existe en la mente y, por su parte, *visualización* es un término utilizado en Matemáticas de distintas formas, pero su sentido en el contexto del Seminario es el recogido por Miguel de Guzmán en su libro titulado “El Rincón de la Pizarra”:

Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. [...] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas.

El Seminario estaba dirigido fundamentalmente a los alumnos que comenzaban sus estudios universitarios en Matemáticas y perseguía, entre otros, el objetivo de ayudarles en la transición del Bachillerato a la Universidad. Pero las distintas conferencias del Seminario, recogidas en un DVD, pueden ser de interés no sólo para los estudiantes de Matemáticas sino también para estudiantes y profesores de otras disciplinas de carácter científico y, en general, para todos aquellos que puedan considerarse aficionados a las Matemáticas.

2. Ficha técnica del DVD

Las dieciséis sesiones del Seminario Ideas y Visualizaciones fueron grabadas y editadas en un DVD por la Cátedra Miguel de Guzmán. Se incluyen tanto las grabaciones de las conferencias como el material utilizado en la presentación de las mismas. La ficha técnica de este DVD se da a continuación.

Editoras: Capi Corrales Rodríguez,
Inés M^a Gómez Chacón

Título: Ideas y Visualizaciones
Matemáticas

Formato: DVD

Idioma: Castellano



Año de edición: 2011

ISBN: 978-84-694-4316-3

Los lectores interesados pueden acceder a todos los contenidos del DVD en la página web: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/ideas/>

3. Estructura y contenido del DVD

Las distintas sesiones del Seminario Ideas y Visualizaciones Matemáticas están divididas en tres grandes bloques: Conceptos, Textos y Problemas.

3.1 Conceptos

Este primer bloque agrupa siete de las conferencias del Seminario en las que se trataron varios conceptos esenciales (número, infinito, límite, ...) para entender las Matemáticas. Se trata de conceptos que han ido evolucionando a lo largo del tiempo y sobre los que han reflexionado los grandes matemáticos de la historia. A continuación sigue el título de estas conferencias junto con el nombre de los profesores que las impartieron:

Número, Capi Corrales Rodrigáñez.

El infinito, Fernando Bombal Gordon.

Límite, José Luis Caramés Casal.

Dimensión, Marco Castrillón López.

Algoritmos y su diseño, David de Frutos / Yolanda Ortega

Espacio abstracto, Juan Tarrés Freixenet.

Incertidumbre, Javier Montero de Juan.

3.2 Textos

El segundo bloque está dedicado a analizar algunos textos clásicos de las Matemáticas que han ejercido una notable influencia en su desarrollo, comenzando, como no podía ser de otra manera, por *Los Elementos de Euclides*. El listado de las seis conferencias de este bloque es el siguiente:

Elementos de Euclides, Mariano Martínez Pérez

Aritmética de Diofanto, Mercedes Sánchez Benito

Disquisiciones Aritméticas de Gauss, Juan Ramón Delgado

Sobre los fundamentos de la geometría riemanniana, Ángel Miguel Amores Lázaro

La topología geométrica dinámica, Francisco Romero Ruiz del Portal

Introducción de Euler, M^a Ángeles Prieto Yerro

3.3 Problemas

El último de estos bloques incluye tres conferencias dedicadas a problemas, entendiéndolos como el planteamiento de situaciones cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos y, de forma muy particular en nuestro caso, métodos matemáticos. Las tres conferencias de este último bloque son las siguientes:

Los sistemas dinámicos de biología, Antonio Brú Espino

Mecánica de fluidos, Gregorio Díaz Díaz

Visualización e Intuición: Investigación en Educación Matemática, Inés M^a Gómez Chacón

Como conclusión, se trata de un documento de gran interés para todo el que tenga aprecio por las Matemáticas y no defraudará a quien decida consultarlo. Obviamente, hay muchos temas que podrían haberse incluido y que no lo fueron por la limitación en el tiempo a un único curso académico, pero la selección de los temas tratados en el Seminario da una excelente panorámica de las Matemáticas.

Sobre el autor:

Nombre: Antonio Díaz-Cano Ocaña

Correo Electrónico: adiaz@mat.ucm.es

Institución: Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Historia del experimento barométrico

Rosa María Herrera

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Ciertos problemas hidráulicos planteados por el ingeniero Baliani hacia 1630 culminaron en el experimento barométrico realizado por el matemático Torricelli en 1644. Este último, ferviente galileano, pensaba la matemática como lenguaje con que la naturaleza habla a los hombres. Con este soporte teórico del mundo realizó un experimento físico con el que calibró la presión atmosférica y comprobó la existencia del vacío.

Palabras Clave: Tubo de Torricelli, Peso del aire, Presión atmosférica, Vacío.

1. Introducción

1.1 El ambiente

El experimento barométrico es de suyo un ejercicio tan extraordinariamente sencillo que resulta casi sorprendente, pero que se halla perfectamente imbricado en un delicado y al mismo tiempo audaz proceso mental de cambio que tuvo lugar en el siglo XVII y encaja perfectamente en la *nueva* concepción de algunos aspectos claves del mundo, que configuraron el nacimiento de la “ciencia nueva”. Este cambio progresivo de mentalidad facilitó la verificación de dos hechos naturales próximos, pero diferenciados: el *peso del aire* y la *presión atmosférica*, y un tercero de mayor calado conceptual: la incontrovertible demostración de la *existencia del vacío*.

El problema inicial es un asunto práctico de índole técnica relacionado con las infraestructuras urbanas¹. Así pues, el experimento nació como resultado de una reflexión teórica que emanaba de la necesidad imperiosa de resolver algunos problemas técnicos asociados a la elevación y el transporte de agua para abastecimiento ciudadano, pero al mismo tiempo como ocasión para encontrar la prueba física irrefutable que los atomistas precisaban para impugnar el ‘horror vacui’ (aversión al vacío) de la naturaleza defendido por los aristotélicos, que era la concepción vigente aceptada. Estas notas son un relato de estos hechos.

1.2 Un precursor

Isaac Beeckam², persona de vasta cultura científica: médico, matemático, físico,... alcanzó relevancia académica como docente y como pensador moderno al defender la idea propuesta por Harvey³ de que la sangre circula. En su singular biografía se cruzan casi todos los grandes de su tiempo, escojo mencionar su fructífera relación con Descartes⁴, y el acceso a documentos inéditos de Stevin⁵ de manos del hijo de este de quien fue profesor. Su voz refiriéndose a la presión atmosférica y la influencia que pudiera tener en los “fenómenos neumáticos” (hace mención explícita a fenómenos de vacío) es una de las huellas iniciales de las que queda rastro [3].

1.3 Galileo: puente entre Baliani y Torricelli

En este contexto, el papel intermediario de Galileo⁶ no es menor, quizá si el desarrollo del problema hubiera seguido otro curso, o se hubiera encaminado por otros derroteros, las cosas hubieran acabado siendo las mismas o parecidas (o no), pero ignoramos ese otro camino ‘virtual’, así es que forma parte del mundo de la pura especulación, y quisiera dejar al lector la posibilidad de pensar o imaginar: ¿cómo habría sido la secuencia de los

¹ Las ciudades referidas son Génova y Florencia

² Isaac Beeckman (1588-1637) científico holandés

³ William Harvey (1578-1657) médico inglés descubrió la circulación mayor de la sangre, que publicó en 1628 en su libro *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*

⁴ René Descartes (1596-1650), matemático, físico y filósofo francés, figura capital en el pensamiento occidental

⁵ Simon Stevin (1548-1620) matemático e ingeniero belga. En 1586 publicó sus estudios de estática y equilibrio de los cuerpos, editó un manual de astronomía y puso en marcha una escuela de ingeniería en la universidad de Leyden

⁶ Galileo Galilei (1564-1642) científico pisano, considerado el padre la ciencia moderna

acontecimientos de haber discurrido por otras vías? El hecho es que el ingeniero genovés Baliani⁷ tenía un problema acuciante que resolver, a propósito del cual intercambió ideas con Galileo, quien a su vez compartió pensamientos, documentos y discusiones con su discípulo Torricelli⁸, que este supo aprovechar en sus propios estudios.

2. El problema de la elevación del agua

2.1 El ingeniero, el matemático y otros protagonistas

El ingeniero, Gianbattista Baliani, invertía mucho tiempo reflexionando sobre el tozudo funcionamiento de las bombas de agua, y buscaba una explicación satisfactoria que le ayudara a resolver los problemas técnicos de su elevación y transporte, problemas con los que a diario habían de vérselas los operarios genoveses.

En el verano de 1630, trabajaba en la ampliación de un acueducto de su ciudad, y para ello había construido un sifón que sirviese para elevar agua sobre una colina de no más de 20 m de altura, pero no encontraba manera de conseguir alcanzar dicha altura, ni algún tipo de razón estructural o accidental, teórica o práctica, que justificara este hecho, por eso decidió consultar a Galileo sobre las condiciones de este tope y la explicación del fenómeno.

En su respuesta, Galileo trataba de explicar el límite recurriendo a un concepto que había forjado él mismo: “la forza del vuoto”, la *fuerza del vacío* concebida como la fuerza que hay que ejercer para vencer la resistencia del vacío a producirse. Según la concepción galileana de aquellos días, no es que la naturaleza no pueda aceptar el vacío (continuidad de la materia aristotélica) es que este se resiste a formarse.

Con la ayuda de los fontaneros florentinos, había comprobado que la altura máxima que una columna de agua alcanzaba mediante una bomba de extracción era aproximadamente de 10,5 metros (18 brazas florentinas), y ese valor le servía para cuantificar la fuerza del vacío. El hecho empírico era, en efecto, el descrito por Galileo, pero la teoría explicativa resultaba algo confusa y quizá inconsistente; aunque nótese que en dicha construcción, el vacío ‘habitaba’ en el mundo real, que no es poco.

⁷ Giovanni Battista Baliani (1582-1666) ingeniero genovés, experto en temas hidráulicos

⁸ Evangelista Torricelli (1608-1647) matemático de la corte florentina

Baliani, no obstante, no acababa de estar cómodo con esta explicación en la que veía, seguramente, carencias, y se atrevió a discrepar abiertamente del maestro. Él sospechaba ya entonces que el aire atmosférico pesa sobre la superficie de la masa de agua considerada, y eso hace que el agua se eleve por el tubo de la bomba hasta la altura de equilibrio, como un contrapeso. Galileo, al modo aristotélico, no aceptaba la idea de que *el aire pese en el aire*, ya que está en su “lugar natural”.

A este propósito, el 24 de octubre de 1630 Baliani le escribió comparando la presión de la atmósfera sobre los cuerpos en la superficie terrestre con la que soportan los cuerpos que se encuentran en el fondo profundo del mar. Y finalizó la magistral analogía aire-agua: ‘y así como situados en el fondo del mar los seres humanos –eliminando la necesidad de respirar– no advertiríamos el peso del agua, sobre la superficie terrestre (en el fondo del océano de aire) tampoco nos es dado percibir este efecto, porque nuestro cuerpo está hecho de tal manera que soporta bien esa uniforme compresión’⁹.



Figura 1. Portada del libro de G.B. Baliani “De Motu Naturali”

⁹ No se trata de una cita literal del original, sino de un resumen traducido

Evangelista Torricelli, matemático de la corte del gran duque de Toscana Ferdinando II (posición que detentó Galileo hasta 1642, año de su fallecimiento), se expresó casi en términos idénticos, y también mediante carta, fechada esta el 11 de junio de 1644, explicó a su amigo y colega el cardenal Ricci¹⁰ los resultados del experimento barométrico que realizó en colaboración con Viviani¹¹ (quizá para Galileo el más entrañable de entre sus alumnos, le acogió en su casa como a un hijo en su última etapa y el joven permaneció junto al maestro hasta su muerte) y en el que constató que la atmósfera ejerce presión sobre la superficie terrestre y que existe el vacío.

Pero hay otros protagonistas, cada uno aportó una idea esclarecedora, realizó una observación sustanciosa o menor, en suma un trabajo coral, que se escenifica en un personaje, el que pone la bandera al hacer cima. No se trata, pues, de relatar el logro aislado y solitario de un espíritu iluminado por una inspiración brillante, como se suele presentar. La ‘escala’ imaginaria creció con los travesaños o peldaños que muchos fueron construyendo, a medida que los escaladores ascendían, soporte frágil, fabricado de pequeñas etapas intermedias de logros.

3. El experimento de Berti y Magiotti

Desde 1640, Berti¹² estudiaba el modo de mejorar la utilidad los dispositivos elevadores de agua (sifones), cuyo nivel en altura Galileo había determinado con bastante buena aproximación en algo menos de 11 metros (como ya se ha visto). Berti junto con su colega Magiotti¹³ habían estudiado meticulosamente sobre este tema ampliamente tratado en la primera jornada de los *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*¹⁴ y en definitiva querían comprobar y experimentar por sus propios medios.

Para ello no tuvieron dudas en montar un aparatoso experimento público en la ciudad de Roma al que asistieron intelectuales como los jesuitas Kircher¹⁵ y Zucchi¹⁶ pertenecientes a la élite cultural europea, el primero se encargaría de transmitir su versión de lo allí sucedido en Alemania, no solo mediante una estricta descripción, sino enriqueciéndola con su propia

¹⁰ Michelangelo Ricci (1619-1682) científico y clérigo amigo de Torricelli, llegó a cardenal

¹¹ Vincenzo Viviani (1622-1703) discípulo y biógrafo de Galileo, amigo y colega de Torricelli

¹² Gaspare Berti (1600-1643) científico benedictino romano alumno de Galileo

¹³ Raffaello Magiotti (1597-1656) jesuita científico discípulo de Galileo

¹⁴ Galileo publicó los *Discorsi*, su última obra, en Leyden (Holanda) en 1638, en Italia hubiese sido demasiado arriesgado intentarlo

¹⁵ Athanasius Kircher (1601-1680) erudito jesuita alemán estudioso de los fenómenos magnéticos

¹⁶ Nicolas Zucchi (1586-1670) científico y jesuita italiano

interpretación. Torricelli estuvo al corriente de este trabajo, pero ni participó ni lo presencié, pues en esos días se hallaba en Arcetri¹⁷ acompañando al anciano y enfermo Galileo y estudiando con él.

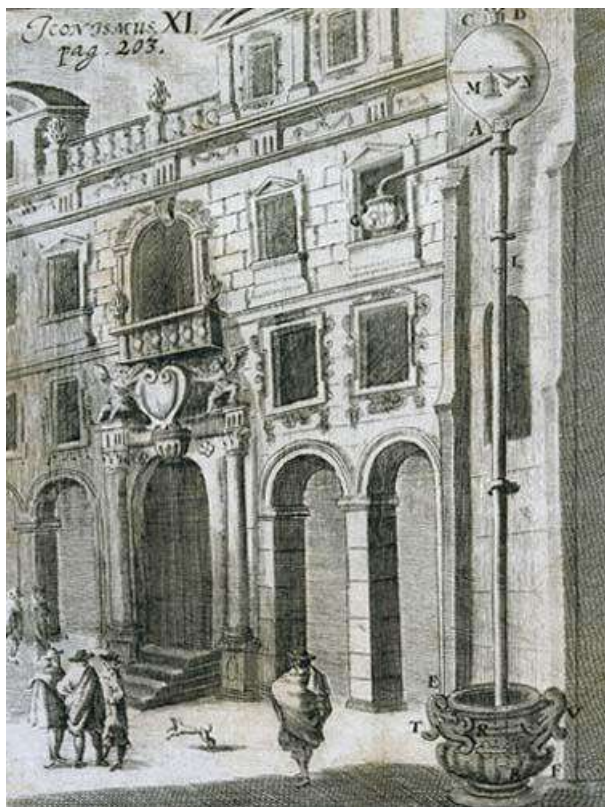


Figura 2. El Experimento de Gaspare Berti en el Convento dei Minimi sul Pincio. Gaspar Schott, *Technica curiosa, sive, Mirabilia artis*, Würzburg 1664

3.1 Descripción de la experiencia

En 1641 Berti montó una tubería de plomo de unos 12 metros de longitud en la fachada de un edificio romano propiedad de su familia. Recubrió la parte superior de la tubería con una bola de vidrio que tenía una apertura de ajuste a dicha tubería. La parte baja del tubo reposaba en el interior de un recipiente con agua. Berti introdujo agua simultáneamente por los extremos superior e inferior, la disposición era tal que, una vez anulada la entrada situada en el extremo superior, el agua entrante por la base, ascendiese; este

¹⁷ Arcetri, situado en las afueras de Florencia, finca el *Giogiello* último hogar de Galileo, allí confinado por la condena del Santo Oficio y por su cada vez más depauperada salud pasó sus últimos 10 años de vida, muy cerca del convento donde vivían sus hijas.

montaje para ser efectivo y fiable debía ser hermético. El experimento confirmó las afirmaciones del maestro, y el agua detuvo su camino ascendente en la altura que Galileo, que había estudiado el caso con los fontaneros florentinos, aseguraba en los *Discorsi* ($\approx 10,5$ m).

Pero, y ¿qué había entre el límite de agua y la parte superior del dispositivo? Aquí surgían multitud de opiniones diversas, cada una sustentada por su ideario correspondiente. Unos apostaban con convencimiento que el tramo que se quedaba sin agua contenía aire (los aristotélicos) y otros sostenían que en la tubería había agua y nada más, el resto era puro vacío.

Los partidarios de la opción “aire” encontraban plausibles varias posibles procedencias de este, por ejemplo, que estuviese inicialmente en suspensión, o que hubiese penetrado debido a la imperfección de los materiales o a la propia construcción de la tubería lo que conducía necesariamente a filtraciones incontroladas.

Además, en el interior de la tubería habían colocado una campanilla, seguramente a instancias de Kircher, que en cierto momento se había accionado desde el exterior, y todos los asistentes pudieron oír con nitidez el sonido, si bien de modo bastante tenue, este hecho servía de argumento a todos. A los aristotélicos, les reforzaba su idea de que había aire, pues se había propagado el sonido, todo cuerpo, opinaban los partidarios de la inexistencia del vacío, adquiere una velocidad inversamente proporcional a la resistencia del medio; en el vacío pues la velocidad habría de ser infinita, una especie de movimiento instantáneo, y así lo proclamaron, no existía posibilidad de duda. Hubo alguna opinión ligeramente discrepante, el propio Maignan¹⁸, quien había preparado la parte experimental de la campanilla, sugirió a Berti la posibilidad de que el cristal hubiese transmitido al exterior las vibraciones causadas por cualquier roce de la campana con la bola; para los partidarios del vacío, el leve sonido no era prueba suficiente, pues opinaban como Maignan que la campana podía haber golpeado las paredes de la bola por algún motivo fortuito y eso habría bastado para hacerla vibrar.

Entre los galileanos, también había dos corrientes de pensamiento que proponían diferente conceptualización del fenómeno y hacían primar distintos aspectos; por un lado, estaban quienes con Galileo explicaban por la fuerza del vacío (*forza del vuoto*) dicha altura y, por otro, los que sostenían que la barrera infranqueable de altura (la altura máxima alcanzable) se debía al peso del aire, aquí se posicionaba Baliani.

¹⁸ Emmanuel Maignan (1601-1676) religioso francés de la orden de los mínimos, profesor de matemáticas, astronomía y filosofía

Berti murió en 1643 y Maggiotti propuso a Torricelli que repitiera el experimento que Berti y él mismo habían efectuado en Roma. Torricelli, matemático quizá más cuidadoso que Galileo, no terminaba de estar de acuerdo con la argumentación propuesta por el maestro, y como además seguramente durante su estancia en Arcetri tuvo acceso a la correspondencia de este con Baliani (como ya se ha indicado, véase 1.3), es fácil que conociera las ideas del genovés que completaran y reforzaran las suyas propias. Así pues, Torricelli que era además buen estudioso de los fluidos debió encontrar en esta concepción una opción certera de avance.

En esta visión del problema para encontrar el peso del aire necesitaba conocer su altura y su densidad relativa. El problema en definitiva era una cuestión arquimediana de equilibrar pesos (columna de aire- columna de agua). Por esta vía se quitaba de encima el incómodo lastre conceptual que suponía la *fuerza del vacío*.

4. El experimento de Torricelli-Viviani

4.1 Los prolegómenos

Torricelli estudió con Galileo el funcionamiento simétrico de las bombas aspirantes y las de desagüe. Los fenómenos hidráulicos que se pueden explicar con aspiraciones se pueden explicar con empujes (depresiones y sobrepresiones, respectivamente). Las presiones son fuerzas que ejercidas en los dos sentidos de la misma dirección se pueden equilibrar.

Pero Torricelli continuó sus reflexiones, y su intercambio estudioso y de ideas con Viviani, así decidieron repetir la experiencia de Berti pero con algunas modificaciones, y se les ocurrió que sería más cómodo emplear líquidos más densos, finalmente escogieron el mercurio (*argento vivo*), 13,6 veces más denso que el agua; esta elección presentaba la ventaja adicional de que los tubos serían mucho más cortos y, por tanto, la experiencia menos engorrosa, posiblemente esta decisión supuso el aspecto creativo crucial.

4.2 El experimento

En la primavera de 1644, Torricelli llevó a cabo el experimento, a saber: introdujo mercurio en el interior de un tubo de 1 m de longitud, abierto por un extremo y cerrado por el otro, una vez que el tubo estuvo completamente lleno invirtió la posición y lo volcó en un recipiente que a su vez contenía mercurio, después observó que la columna descendía parcialmente y se detenía a una altura aproximada de 76 cm. Torricelli interpretó que el espacio

que quedaba libre estaba vacío y que la altura de la columna de mercurio dependía de la fuerza que el aire ejercía sobre la superficie del mercurio de la cubeta.

Repitió la experiencia con diferentes tubos, entre los que cabe destacar como muy interesante la experiencia con un tubo que tenía un gran bulbo en el extremo cerrado, así el espacio vacío era mayor, y de este modo consideró definitivamente corroborados los resultados en esta fase del experimento. La segunda fase de la experiencia es menos conocida, supone una pequeña variación: añadió agua a la cubeta de tal modo que flotara sobre la superficie del mercurio, tras lo cual muy lentamente fue elevando el tubo que contenía mercurio hasta la superficie del agua, el mercurio empezaba a descender y era reemplazado por agua; luego, no había aire previamente. Así, encontraba la prueba física que buscaba para demostrar la existencia del vacío.

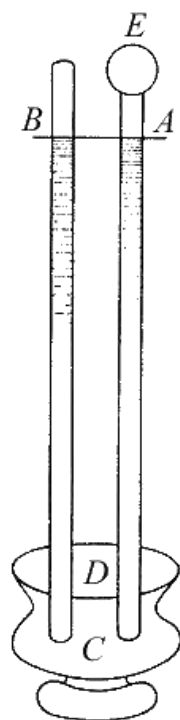


Figura 3. El tubo de Torricelli (1644). Imagen reproducida a partir de la carta que Torricelli escribió a Ricci explicando el experimento

De este modo, también reforzaba la idea de que si realmente la naturaleza aborreciese el vacío, el ‘horror vacui’ aristotélico, en la primera fase del

experimento el mercurio habría llenado el tubo por entero, sin dejar de ocupar los 24 cm que faltaban para completar la altura total del mismo.

En realidad la experiencia no era perfecta, y, por tanto, no era rotundamente exacta esta explicación, Torricelli sabía, o se dio cuenta, de que el espacio por encima del mercurio hasta el extremo cerrado del tubo podía no ser totalmente vacío, entre otras razones por la propia imperfección del instrumento, debido a la deficiencia en la realización técnica del mismo, por ejemplo, el tubo debería contener restos de aire, de vapor de agua... Y así se lo comunicó con sinceridad a su amigo Michelangelo Ricci. Pero también tenía suficiente experiencia científica como para comprender que este hecho no afectaba en modo alguno al éxito del experimento, y que con una técnica más depurada, se habría creado un vacío más perfecto (un mejor vacío).

El experimento en realidad equivalía a una ponderación del aire: la columna de mercurio en la varilla hacía de contrapeso a una columna de aire de la misma sección de la parte baja a la parte alta de la atmósfera. Torricelli escribió a Michelangelo Ricci el 11 de junio de 1644 explicándole pormenorizadamente la experiencia y sus conclusiones:

a) La naturaleza no aborrece el vacío.

b) El peso ejercido por las capas de aire ejercen una presión real sobre el mercurio de la cubeta y esta presión provoca la elevación del mercurio en el tubo. Es decir que la columna de mercurio en el tubo se mantiene debido a la presión atmosférica transmitida a través del mercurio y, al no haber gas, el mercurio se eleva hasta que su peso es suficiente para equilibrar la fuerza que el aire exterior ejerce sobre la superficie de la cubeta.

¿Cuál era la razón del comportamiento de la columna de mercurio en el tubo? ¿Por qué se “detenía” a una determinada altura? En el texto, Torricelli no muestra tener ninguna duda, el peso del aire atmosférico sobre el recipiente con el mercurio actuaba sobre la superficie libre del líquido y eso hacía que el líquido quedase a una altura del tubo, no arbitraria, que era exactamente la altura que equilibraba la presión ejercida por el aire sobre el mercurio del recipiente; de otro modo, la altura aproximada de 76 cm no era un fenómeno debido a “algo” interior al tubo (por ejemplo, la “fuerza del vacío”) sino a un factor externo, la presión del aire sobre la superficie de mercurio. El mismo mecanismo servía para explicar la altura alcanzada por la columna de agua.

c) El resultado de la repetición del experimento del mercurio, permitió a Torricelli observar pequeñas variaciones en la elevación del mercurio, que le indujeron a pensar que estas podían deberse a fluctuaciones en las

condiciones atmosféricas y le puso en la pista de pensar que quizá las fluctuaciones en las condiciones meteorológicas estuviesen relacionadas con las variaciones de la presión del aire atmosférico. De otro modo, que la altura de la columna no solo varía con la presión, sino también con la temperatura del aire.

4.3 Las dudas de Ricci

El 18 de junio de 1644, Ricci respondió la carta que Torricelli le escribió una semana antes (véase 2.1) haciéndole algunas precisiones y preguntas, lo cual se toma como prueba del interés que tenía en estos trabajos.

El 28 de junio de 1664 contestó Torricelli dando cumplidas y elegantes respuestas:

La primera objeción de Ricci consistía en suponer que si la vasija estuviese tapada herméticamente, excepto por el tubo, el aire no ejercería la presión necesaria para que el mercurio permaneciese en el mismo nivel de altura y entonces descendería, pero si no bajaba significaba que el efecto no era el de la presión atmosférica. A lo que Torricelli contestó que si la tapa estuviese en contacto con el mercurio, el mercurio no podría descender porque la tapa lo impediría ejerciendo presión sobre el mercurio del recipiente. Pero si entre la tapa y el mercurio hubiese aire con la misma densidad que el aire del exterior, entonces la altura del mercurio en el tubo permanecería invariable, si por el contrario la densidad era menor, entonces la columna de mercurio descendería, más cuanto menos denso fuera el aire. Como caso límite el mercurio del tubo bajaría hasta el depósito, si entre el mercurio del depósito y la tapa estuviese hecho el vacío.

Como segunda duda Ricci preguntaba cómo es que el peso del aire que debería ejercerse hacia abajo, de hecho, se ejercía en todas direcciones incluso hacia arriba. La respuesta de Torricelli viene a ser lo que conocemos como principio de Pascal: “cualquier fluido transmite la presión que se ejerce sobre su superficie en todas las direcciones en el recipiente indeformable que lo contiene”.

La tercera cuestión que proponía Ricci trataba sobre la presión que sufre un cuerpo que se sumerge en un líquido que desaloja un volumen de agua igual al suyo, análogamente el mercurio debe desalojar un volumen de aire similar, pero claro con un peso mucho menor. Torricelli quizá algo molesto respondió que esta demanda no le parecía pertinente, ya que si bien es cierta la afirmación sobre el agua y el cuerpo sumergido en ella, el mercurio del experimento no estaba sumergido en nada: ni en aire, ni en agua, ni en vidrio, ni en vacío. Así el mercurio era un fluido confinado en un recipiente,

simplemente limitado en un extremo por el vacío -o casi vacío- que no pesa y por el otro extremo limitado por el aire que se distribuye en toda la superficie de tal modo que el peso del metal en el tubo contrarresta el peso del aire.

El 2 de julio siguiente, Ricci dio por buenas o aceptó estas respuestas y escribió a Torricelli dándole las gracias, y pidiéndole disculpas por las molestias, así se zanjó el asunto.

Después se hizo el silencio. No estaban los tiempos en Florencia para mayores riesgos y Torricelli era hombre cauto, este silencio quizá sea una de las razones por las que a veces se podría debatir sobre su originalidad o paternidad estricta, no pretendo entrar en esa polémica, los elementos de juicio esenciales de que dispongo están expuestos aquí, pero no obstante tiendo a pensar que el temperamento taciturno, la prudencia, la falta de salud y otras circunstancias son elementos clave.

4.4 Urbi et orbe

El experimento se difundió por Europa con presteza, quizá entró primero en Francia de la mano de Mersenne¹⁹ seguramente por persona interpuesta. Después se repitió, mejoró, perfeccionó e impulsó nuevos estudios sobre el vacío y sobre la presión atmosférica: Von Guericke²⁰ en 1661 inventó la bomba neumática, Boyle²¹ y Mariotte²², enunciaron la ley de los gases “volumen y presión son inversamente proporcionales”... Pascal²³ refinó la consecución de vacío mediante experiencias espectaculares y de “altura” en las montañas francesas.

5. Cuestión abierta: ¿se podría considerar a Torricelli un precursor de la meteorología?

La palabra barómetro tardó todavía 25 años en aparecer, parece ser que lo hizo en la lista de instrumental para una expedición astronómica a Madagascar que organizó la Academia de Ciencias de París dirigida por Adrien Auzout²⁴. De hecho el primer uso del “tubo de Torricelli”, así se

¹⁹ Marin Mersenne (1588-1648) científico y monje francés, trabajó en teoría de números, pero su aportación más interesante a la ciencia fue el servir de enlace y correo entre científicos

²⁰ Otto Von Guericke (1602-1688) jurista y científico alemán que fue alcalde de Magdeburgo

²¹ Robert Boyle (1627-1742) científico irlandés destaca su interés por el método experimental

²² Ed Mariotte (1620-1684) físico y botánico francés es célebre por su trabajo en la ley del comportamiento de los gases de Boyle

²³ Blaise Pascal (1623-1662) científico y filósofo francés con importantes logros, es célebre la máquina de calcular

²⁴ Adrien Auzout (1622-1691) astrónomo y físico francés frecuentó a Pascal y a Mersenne

designaba, fue para realizar mediciones altimétricas. Cabría preguntarse si puede considerarse Torricelli al menos en cierto sentido precursor de la meteorología, y como respuesta recurrir a su *Lección académica sobre el viento* en la que con delicadas y precisas palabras introduce la noción de “circulación general de la atmósfera”.

6. Breve reflexión final

Defender la existencia del vacío en el siglo XVII no era asunto baladí, y podría incluso considerarse peligroso, pues aunque estaba en la mente de los científicos más ‘avanzados’, algunos personajes importantes rechazaban argumentalmente esta posibilidad. Convenía la prudencia, porque además la doctrina oficial propugnaba la concepción aristotélica del ‘horror vacui’ en la naturaleza, piense el lector que Torricelli era un clérigo relevante en la Italia católica, apostólica y romana. Considérese pues precavido su silencio, su trabajo al fin de cuentas estaba difundiéndose por toda Europa. Los atomistas, como Gassendi²⁵ otro de los importantes galileanos, lo recibieron con extraordinario interés ya que encontraron una confirmación de sus propuestas y al mismo tiempo un soporte extraordinario para desarrollar sus trabajos científicos.

Referencias

- [1] BALIBAR, Françoise, TONCELLI, Raffaella. *Einstein, Newton, Poincaré. Une histoire de principes*, Belin, París, 2008, pp. 9 -44.
- [2] BELLONI, Lanfranco. *Torricelli, Evangelista “Scienziati e tecnologi: dalle origini al 1875, Vol III”*, Mondadori, Milán, 1976 pp. 206-208.
- [3] GALLUZZI, Paolo & TORRINI, Mauricio. *La opere dei discepoli di Galileo Galilei*, Vol. 1: Carteggio, 1642-1648, pp.71-95, Giunti-Barbera, Firenze, 1975.
- [4] GHINASSI, G. *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli precedute dalla vita di lui*, Vol. VI- 11 Faenza, 1864.
- [5] HERRERA, Rosa M. *Biografía de Evangelista Torricelli*, (título provisional), en preparación, Madrid, 2011.

²⁵ Pierre Gassendi (1592-1655) clérigo, filósofo y científico francés, atomista convencido y seguidor de Galileo

- [6] TATON, René. *L'annonce de l'expérience barométrique en France*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications 1963, Vol. 16 n 1. pp. 77-83.
- [7] TORRICELLI, Evangelista. *Lezione accademiche, Settima Lezione sul vento*, Giuiducci e Franchi Florencia, 1715.

Sobre la autora:

Nombre: Rosa M. Herrera

Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com

Profesión: Físico, trabaja como investigadora independiente en APYCE, colaborando con Universidades y otras Instituciones Educativas en el tercer mundo, y como editora (freelance) en las publicaciones tanto de la citada empresa, como en casas editoriales españolas (Grupo Anaya, SM...).

Historias de Matemáticas

María Capdevila D'oriola, pionera de la Matemática española

Juan Núñez Valdés, María Arroyo Castilleja y María Luisa
Rodríguez Arévalo

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

En este artículo se muestra una breve biografía, obtenida a luz de la escasa documentación escrita existente y de conversaciones con familiares directos, de María Capdevila D'Oriola, catedrática de Matemáticas de Instituto y primera mujer española profesora universitaria.

Palabras Clave: María Capdevila, Primera profesora universitaria española, Catedráticas de Instituto.

1. Introducción

Este artículo se encuentra en la línea de glosar las figuras de mujeres españolas pioneras en diversas ramas del conocimiento científico, cuyos méritos no han sido reconocidos por la sociedad en razón de la poca difusión dada a la escasa documentación que sobre ellas se conserva. En algunos artículos anteriores sobre esta temática, dedicados a mostrar la biografías de algunas de estas mujeres en particular, se daban a conocer, respectivamente, las figuras de María del Carmen Martínez Sancho, Felisa Martín Bravo y Matilde Ucelay Maórtua, primeras mujeres españolas doctoras en Matemáticas, en Física y en Arquitectura (véanse (Maraver y Núñez, 2009),

(Carbonell y Núñez, 2010) y (Durán, Escudero, Núñez y Regodón, 2011), respectivamente). En esta ocasión, se comentan los datos biográficos de María Capdevila D'Oriola, catedrática de Matemáticas de Instituto y primera mujer española profesora universitaria.

También se desea aprovechar la figura de María para poner de manifiesto las dificultades de todo tipo, fundamentalmente de género, que sufrieron las mujeres españolas nacidas a principios del pasado siglo XX para poder estudiar una licenciatura y posteriormente desarrollar su profesión.

Desafortunadamente, no se dispone en la actualidad de mucha documentación escrita relativa a la vida y obra científica de María Capdevila D'Oriola (Cabestany (Francia), 1905–Barcelona, 1993). Esta escasez de conocimientos puede explicarse en parte porque el hecho de que María pudiera acceder a estudios secundarios y universitarios puede considerarse algo excepcional en aquella época, dado que en la misma estaba muy interiorizado en la sociedad el que las mujeres debían dedicarse solamente a la crianza de los hijos, la familia y la casa, de ahí que no se destacasen demasiado las escasas mujeres que se atrevían además con otras “actividades” diferentes. Al respecto, pueden consultarse muy breves biografías de María en (Magallón, 2007, Marrero, 2011 y las webs 9 y 14).

En cualquier caso, los autores, aparte de creer interesante por sí misma la posibilidad de presentar reunidos esos escasos datos escritos de los que hablamos, hemos sido también afortunados al haber podido obtener bastante más información a través de un familiar directo de María, su único hijo, José María (al que nos referiremos en muchas ocasiones en las páginas que siguen), aunque, como él mismo nos indica: *“poco puedo decir sobre la actividad científica de mi madre. Lo que voy a contar serán poco más que recuerdos personales y/o familiares, con un valor, me temo, meramente anecdótico.”* En todo caso, pensamos que la redacción de este artículo posibilita que la sociedad pueda reconocer y darle el mérito que se merece a esta mujer, pionera en la educación secundaria y universitaria en nuestro país. De ahí esta contribución.

2. María Capdevila D'Oriola

Cabestany (en catalán; en castellano se escribe con v) es un pequeño municipio de la comarca del Roselló, muy próximo a la ciudad de Perpinyá (Países Catalanes), cuna de dos ilustres personajes muy famosos: uno de ellos, desde el punto de vista literario, es el trovador y caballero Guillem de Cabestany (finales de siglo XII – 1212) y el otro, esta vez desde el punto de vista artístico, es un escultor medieval del siglo XII conocido con el nombre

de “Maestro de Cabestany”.

Sin embargo, desde el punto de vista científico y a pesar de no ser muy conocido por este hecho, Cabestany tiene también a gala el haber sido la localidad en la que nació la catedrática de Matemáticas de Instituto y primera mujer española profesora universitaria: María Capdevila D'Oriola. A glosar su figura van dedicados los siguientes apartados de este artículo.

María Enriqueta Teresa (Marie-Henriette-Thérèse en francés) Capdevila D'Oriola nació en Cabestany el 6 de agosto de 1905, tal como certifica su partida de nacimiento (Acte de Naissance, en francés) que se muestra en la Figura 1, facilitada por su hijo José María.

— 1905 —
 Naissance de
 Capdevila
 Marie-Henriette-Thérèse
 le 6 août 1905

L'an mil-neuf-cent-cinq et le six août à quatre heures du soir. Acte de naissance de Capdevila, Marie-Henriette-Thérèse, enfant d'une femme, née ce matin à deux heures dans la maison d'habitation de sa grand-mère du côté maternel, sise à Cabestany, des maries Capdevila Jean, employé de commerce, âgé de trente-trois ans, domicilié à Barcelone (Espagne), sujet espagnol, et d'Oriola Thérèse, sans profession, âgée de vingt-trois ans, domiciliée avec son mari. Sur la déclaration à nous faite par Chantal Anna sage-femme, âgée de trente-trois ans, domiciliée à Cabestany, qui a présenté l'enfant. Enfants d'Abela Agacintse, propriétaire, âgée de trente-huit ans, mère du nouveau-né, et Salvador Bonaventura, marichal-furant, âgé de soixante-cinq ans, domiciliés à Cabestany. Constaté sur la loi par nous, Maire de la commune de Cabestany et Sahillès, canton Est et arrondissement de Perpignan, département des Pyrénées-Orientales, officier de l'état civil municipal. Le déclarante et les témoins ont signé avec nous le présent acte après lecture faite.

Le Maire,
 Enriqueta Oriola
 Salvador Bonaventura

Figura 1. Partida de Nacimiento de María.

Al respecto de estos datos, parece conveniente indicar que aunque todas las fuentes consultadas coinciden ciertamente en que Cabestany fue el lugar de nacimiento de María, aparecen, no obstante, algunas discrepancias en la literatura respecto a su fecha de nacimiento, ya que si bien la mayoría de ellas sitúan correctamente esa fecha en el año 1905 (web9, por ejemplo), otras, las menos, la sitúan en 1906 (Magallón, 2007, por ejemplo).

También existe bastante discrepancia en la literatura en lo que respecta al nombre completo de María. Algunas fuentes se refieren a ella como María Montserrat (webs 9 y 14 e incluso wikipedia, por ejemplo), mientras que en

otras y sobre todo en la gran mayoría de la documentación escrita encontrada sobre ella se la llama simplemente María. En palabras de José María, su hijo, esta confusión puede deberse a lo siguiente:

“Mi madre fue bautizada en la iglesia parroquial (creo que de Santa María) de Cabestany a los dos días de nacer, en ausencia de mi abuelo que, como representante de la Casa Bayer y viajante de la misma, estaba entonces por América. Mi abuelo había dado orden expresa de que se bautizara a su hija con el nombre de Montserrat, pero el cura, francés, se negó tajantemente a ello, con el pretexto de que Montserrat era simplemente el nombre de una montaña. A lo más que se avino fue a ponerle Marie Henriette Thérèse. Por lo visto, la cólera de mi abuelo, al enterarse de ello, fue terrible y se negó en redondo a que nadie la llamara jamás María (que era el nombre de su madre, con la que no se entendía). Por ello mi madre no se enteró de que se llamaba Marie (o María, en castellano y catalán) hasta que se matriculó en la Universidad de Barcelona, pues en las Damas Negras de Barcelona, donde cursó la enseñanza primaria y la secundaria, respetaron la voluntad de su padre. Yo siempre la he conocido con el nombre de Montserrat -así la llamaba y la conocía todo el mundo, tanto en España como en Francia y así es como a ella le gustaba. Tanto ella como mi abuelo deseaban que se la llamara Montserrat, porque no querían que se la confundiera con su prima hermana María Capdevila Mercenario.”

María (que es como, sin embargo, nosotros la llamaremos en lo que sigue, dado que su segundo y tercer nombre no suelen aparecer en las referencias y normalmente no eran ni siquiera utilizados por ella misma) fue la primera hija del matrimonio formado por Juan Capdevila Lacasa, nacido en Barcelona en 1872 y como ya se ha indicado, representante de la firma Bayer y viajante de la misma, y Thérèse d'Oriola de Paillarés, nacida en Cabestany en 1882. Posteriormente, en 1914, nació la segunda de las hijas del matrimonio, Enriqueta.

Es interesante comentar que el matrimonio de los padres de María, Juan y Thérèse, celebrado en noviembre de 1904 en Cabestany, resultó muy complicado (de hecho tuvieron que esperar para casarse a la mayoría de edad de ella) ya que no contaba con el beneplácito de los padres de Thérèse, que llegaron incluso a desheredar a su hija por su casamiento, aunque posteriormente, en 1956, la madre de Thérèse rectificase esta decisión. Esto hizo que los padres de María, tras su casamiento, resolvieran dejar Cabestany e instalarse en Barcelona, en la calle Córcega, cerca de la confluencia con la Diagonal y el Paseo de Gracia.

Sin embargo, y a pesar de vivir los padres de María en Barcelona, el

nacimiento de ella tuvo lugar en Cabestany, ya que era costumbre entonces que las futuras madres fueran a dar a luz allí dónde residieran sus propias madres (la madre de Thérèse, ya viuda).

Finalmente, existe también cierta discrepancia en la literatura existente sobre la nacionalidad de María. En palabras de José María:

“Al nacer en territorio francés de madre francesa, mi madre siempre fue francesa para Francia, aunque ella no reivindicó dicha nacionalidad hasta después de jubilada, ya que temía perder la nacionalidad española, que necesitaba por ser catedrática de Instituto y ejercer siempre toda su actividad profesional en España. Ella siempre se consideró catalana, con doble nacionalidad, española y francesa, aunque la francesa sólo la ejerció en julio del 36 para huir de la Barcelona roja y luego, ya jubilada, en los años 80, para poder residir temporadas largas con su hermana, en Toulouse, sin tener que pedir permiso de residencia: se sacó entonces la Carte d'Identité Française, a la que tenía derecho por haber nacido en Francia, pero que nunca había pedido antes.

En cuanto a la nacionalidad española, mi madre no tuvo ningún problema, ya que vivió siempre en Barcelona y era hija de un ciudadano español. En aquel tiempo, además, los nombres y a veces incluso los apellidos se castellanizaban automáticamente; por ello los nombres de “Marie Henriette Thérèse” pasaron a ser automáticamente “María Enriqueta Teresa”. Lo que mi madre no logró fue cambiar María por Montserrat, aunque me consta que lo intentó (antes de la Guerra Civil), y, en los documentos privados, ella siempre firmaba “Montserrat.”

En la siguiente figura se muestra la Carta de Identidad Francesa de María, a la que se ha referido su hijo José María.

NOM	CAPDEVILA D'ORIOLA	
Prénoms	Marie Henriette Thérèse	
Né le	6 août 1905	
à	66 - CABESTANY	
NATIONALITÉ FRANÇAISE		
Taille	1 m 60	Signature du titulaire 
Signes particuliers	Port de lunettes	
Domicile	15 rue François ARAGO 66 - BOULETHERRE	
Fait le	28 mars 1990	
par	 Le Sous-Préfet de PRADES F. GUYOT	

Figura 2. Carte de Identitat de María

Pues bien, una vez ya aclaradas estas confusiones referidas al año de nacimiento, nombre y nacionalidad de María, pasamos seguidamente a comentar algunos datos sobre sus primeros estudios, a pesar de que, como ya se ha indicado anteriormente, no se dispone en la actualidad de muchos datos biográficos escritos sobre ella. Tal como su hijo indica, María cursó la enseñanza primaria y la secundaria en el colegio de las Damas Negras de Barcelona (como aclaración, decir que este colegio, actualmente denominado “Escola Infant Jesús” fue fundado en 1860 por unas religiosas, las *Dames de Saint Mour*, procedentes de París, conocidas como las *Damas Negras* en Barcelona, que tenían una mentalidad muy avanzada para su tiempo, tanto en el aspecto pedagógico como en la manera de ser y de actuar. Vestían un hábito de color negro, hablaban francés y fundaron una de las escuelas más antiguas de la ciudad, en la que se practicaba el bilingüismo: español y francés, ya que el catalán no estaba tan extendido por aquella época).

En 1924, María ingresa como alumna en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de la Universidad de Barcelona.



Figura 3. La Universidad Central de Barcelona.

A la pregunta de ¿por qué estudió Exactas?, su hijo José María responde que:

“Sin duda por vocación, aunque mi tía Enriqueta siempre decía que había sido “para fastidiar a su padre”, que decía que las Matemáticas eran cosa de hombres, aunque, al parecer, él había tenido que renunciar a ser médico (como su tío Pi Sunyer, también de Roses) por suspender la asignatura de Matemáticas, de primer curso de carrera”.

María se licencia en esa Facultad de Barcelona (reválida de licenciatura) el 26 de septiembre del 1928, con un brillante expediente en Ciencias Exactas,

pasando posteriormente a cursar las asignaturas del Doctorado en la Universidad Central de Madrid. Ese mismo año de 1928, María fue nombrada catedrática interina de Matemáticas del Instituto Nacional de Zafra (Badajoz).

No puede asegurarse, no obstante, que María sea la primera mujer española catedrática de Matemáticas de Instituto, ya que en ese mismo curso 1928/29, otra mujer española, la toledana María del Carmen Martínez Sancho, obtuvo también la cátedra de Matemáticas del Instituto de El Ferrol (véase Maraver y Núñez, 2009), y de la documentación encontrada sobre ambas no se puede deducir nada al respecto.

Con referencia a la estancia de María en el Instituto de Zafra, los autores hemos intentado recabar tanto directa como indirectamente alguna información relativa a la docencia de María en el mismo, informándonos desde la Secretaría que toda la documentación del centro anterior a 1936 se destruyó a consecuencia de un incendio en el mismo, registrado durante la Guerra Civil.

No obstante, al respecto de esta estancia de María en el Instituto Nacional de Zafra, su hijo refiere la siguiente anécdota:

“Cuando obtuvo la plaza de Zafra (donde creo que inauguró el Instituto), la acompañó mi abuelo a tomar posesión, y mi madre siempre recordaba con aprensión que se había celebrado la inauguración de curso con un vino español (mi madre, procedente de una familia de vinateros roselloneses que la habían desheredado por casarse con un español, por muy catalán que fuese, siempre se negó a probar el vino). Al decir ella que no bebía vino, la tranquilizaron diciendo que le darían manzanilla... que ella confundió en un principio con la infusión del mismo nombre. Además brindaron al parecer con una sola copa que pasaba de boca en boca. Por suerte el obispo del lugar, allí presente, tuvo la deferencia de darle primero la copa a ella, con lo que no tuvo que poner sus labios donde los habían puesto ya los demás comensales.”

Y otra anécdota, bastante curiosa e incluso divertida, relacionada con la estancia de María en Zafra, que ella misma le contó a su hijo pocos años antes de morir, es la siguiente:

Al acabar el curso en Zafra, y volver a Barcelona para trasladarse a Madrid (y luego a París), mi madre le dijo a su padre que sin duda recibiría cartas de un compañero del Instituto de Zafra, pero que no se las mandara porque no le interesaba nada ese señor. Cuando ella volvió a Barcelona encontró a su padre muy preocupado, reticente en explicarle el motivo de su preocupación, aunque al final se lo dijo: Resultaba que mi abuelo se había entretenido leyendo las cartas... y contestándolas, hasta el

punto que el compañero se le había declarado. Sin duda éste fue uno de los motivos que la decidió a irse a poner tierra por medio, e irse a París...

María estuvo en Zafra dos años, en los que aprovechó para prepararse la cátedra de Lengua y Literatura Francesas de Institutos, con el objetivo de ir acercándose a Barcelona, cátedra que ganó por oposición, en 1930, siendo destinada al Instituto de Alcoy (Alicante). Entre la documentación encontrada a este respecto, se encuentra una información publicada en el periódico "La Vanguardia", de fecha viernes 16 de mayo de 1930, en la que aparece una relación, no ordenada alfabéticamente, de 20 nombres de aspirantes admitidos a las oposiciones a plazas de profesor de Francés de los Institutos de Alcoy y femeninos de Madrid y Barcelona, ocupando María el puesto 17 de la misma.

Con referencia a la celebración de esas oposiciones de Francés, José María relata otra de las anécdotas acaecidas a su madre en aquella ocasión:

"Mi madre se indignaba mucho cuando oía hablar de Antonio Machado, porque lo había tenido en el Tribunal de sus oposiciones a Catedrática de Francés y él había estado leyendo ostensiblemente el periódico mientras ella exponía su tema. Además, como le había tocado "La vida y obra de La Fontaine", había tenido que exponer el tema -muy libertino- de sus Cuentos (y el no menos "libertino" de la propia vida del novelista), y Antonio Machado, al final de su exposición, le había reprendido diciéndole que "no eran temas propios para una señorita".

Y también, al respecto de la estancia de María en el Instituto de Alcoy, su hijo José María piensa (aunque no se atreve a asegurarlo con certeza) que fue allí donde sus padres empezaron a conocerse y a hacerse amigos, ya que en ese Instituto también estaba destinado su padre, reforzándose después esa amistad, que luego terminaría en casamiento, en los Primeros Cursos de Verano de Santander, en el año 1935, a los que ambos asistieron.

En 1933, en su afán por continuar acercándose a Barcelona, María ganó también por oposición la cátedra de Matemáticas del Instituto de Figueras (Gerona), aunque es de destacar que antes, durante el curso 1931-32, desempeñó la Auxiliaría de la asignatura "Astronomía General y Física del Globo" de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, siendo por tanto, la pionera en alcanzar esta posición y la segunda mujer en obtener una pensión para temas de Matemáticas concedida por la Junta para Ampliación de estudios, por O.M. de 4 de julio de 1933, para estudiar Teoría de Funciones (en particular la axiomática de los espacios de Hilbert) en Francia, en el

Seminario Matemático de la Universidad de la Sorbona (París), durante nueve meses, con el profesor Gastón Julia (véase Figura 4).

130 100cias@uned

ejemplo la que ejerció la escuela francesa, a través de Comas (y previamente a través de Manuel Bordas y Antonio de Zulueta), tras su paso por el *Laboratoire d'Evolution des Êtres Organisés* de la Universidad de la Sorbonne de París. Delgado da a conocer un amplio perfil biográfico de M. Comas y dice publicaciones de trabajos biológicos suyos, de los que solo anoto dos: (1928) "Le déterminisme du sexe chez un nematode parasite des larves de Chironomes", Academia de Ciencias de París y (1929) "Contribución al conocimiento del determinismo del sexo en *Paramecium contorta* v. Linz.", *Memorias de la RSEHN*, tomo en homenaje a Ignacio Bolívar, 15, 47-52.



Isabel Torres, farmacéutica de farmacia, fue la primera mujer que realizó en Cantabria una investigación que le valió el título de doctora en 1932. En el Departamento Químico de la Casa Salud Valdecilla, Isabel se dedicó entre 1930 y 1932 al análisis de los valores nutricionales de los alimentos que se consumían en el hospital; en posteriores análisis realizados encontrando a mejorar la calidad de la asistencia hospitalaria.

CUADRO 2. Becados por la JAE para temas científicos. Década de 1930

Nombre	Destino	Tema
HERRERA MONTENEGRO, Rosa • Lda. en Farmacia y Ciencias Naturales. • Directora del Laboratorio Foster de la Residencia de Señoritas.	INGLATERRA, 1929: Imperial College of Science and Technology, Londres. FRANCIA-SUIZA, 1930.	• Análisis de alimentos, drogas y aguas. Trabajos sobre el Iodo. • Visita Laboratorios de Química de la Sorbonne, el Instituto del Radio. • Ginebra: Curso en el Instituto Rousseau y en el Laboratorio de Química del Instituto de Higiene.
MARTÍNEZ SANCIO, María del Carmen • Doctora en Matemáticas. • Catedrática de Instituto.	ALEMANIA, 1930.	Geometría multidimensional.
CAPDEVILA D'ORIOLA, María • Lda. en Matemáticas. • Prof. Auxiliar de Astronomía General y Física del Globo, Fac. de Ciencias de la Univ. de Barcelona. • Catedrática de Instituto.	FRANCIA, 1934: Seminario Matemático, Univ. de La Sorbonne, París.	• Desarrollos de la función potencial. Cálculo de probabilidades. • Axiomática del espacio de Hilbert (Prof. Gastón Julia). • Estadística Matemática (Prof. Borel y Darmois).
TORRES SALAS, Isabel Doctora en Farmacia.	ALEMANIA, 1934.	Estudios sobre las vitaminas.
GÓMEZ MARTÍNEZ, María Dolores Prof. Escuela Normal de Maestras de Jón.	FRANCIA-BÉLGICA, 1934.	Metodología de las Ciencias Naturales.
BELTRÁN LOGROÑO, Luisa • Lda. en Farmacia. • Prof. Ayudante de Historia Natural, Fac. de Ciencias, Universidad de Granada. • Auxiliar en el Instituto de Biología Animal, Madrid.	SUIZA, 1934-35: Laboratorio para alimentación de animales, Univ. Té. Federal Zurich.	Análisis de alimentos para la ganadería y otras especies (Prof. Weigner).

Figura 4. Orden Ministerial 4 de Julio de 1933.

En referencia al desempeño de la Auxiliaría de María en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, José María narra la siguiente anécdota:

Cuando mi madre ejerció de profesora de Astronomía en la Universidad de Barcelona quiso ir (y tenía que hacerlo) al Observatorio Fabra, en la ladera del Tibidabo, a observar el firmamento, pero se lo impidieron, según me dijo ella, "porque una mujer honrada no se desplaza de noche, ni siquiera acompañada", cosa que le impidió emular a un astrónomo catalán del Siglo XX, cuyo nombre no recuerdo (que tiene una placa conmemorativa en la Vía Augusta de Barcelona), que participó por lo visto en el descubrimiento de Plutón. Mi madre siempre decía que la Astronomía era una parte de las Matemáticas, y como "prueba" de ello daba el hecho de que Plutón había sido "descubierto" antes por los

matemáticos (teóricamente) que por los astrónomos (empíricamente).

La intención de María al solicitar esa pensión era la de acabar sus estudios de Doctorado en París y poder defender su Tesis Doctoral, cosa esta última que nunca logró. Su hijo José María refiere que:

“A mi madre siempre le pesó no haber podido llegar a doctorarse, mientras mi padre sí era doctor, y con frecuencia la oía decir que era mucho más fácil hacer una Tesis en Químicas que en Matemáticas, ya que, según ella, era mucho más difícil inventar un nuevo teorema que una nueva fórmula para mejorar la manufactura del vino (que fue el tema de la Tesis de mi padre). También le oía decir a menudo a mi madre (muy acoirazada por no ser doctora como mi padre) que otros dos factores habían influido mucho en que no acabara su tesis: el no haber podido residir en el Colegio de España de París, reservado hasta hace relativamente poco para varones, y el hecho de que su padre muriese el 26 de enero de 1931, quedando entonces la familia sin otro apoyo económico que el suyo. Lo primero la había obligado a compaginar sus estudios con dar clases, y se indignaba mucho cuando oía decir que la República, incapaz de permitir a las mujeres acceder al Colegio de España de París, había sido progresista.

El profesor francés Gaston Maurice Julia (Sidi Bel Abes, Argelia, 1893 – París, 1978), director de la estancia de María en París, era en aquel entonces uno de los matemáticos más reputados. Actualmente se le considera el precursor de la *teoría de fractales*, aunque él, directamente, no llegara a trabajarlos (véase Figura 5).

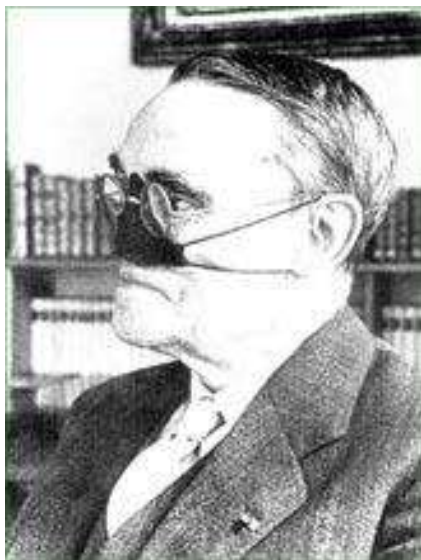


Figura 5. Profesor Gaston Maurice Julia.

Sobre Julia y también en relación con la Tesis no acabada de su madre, José María afirma que:

“El profesor Julia (director de Tesis de mi madre y rosellonés como ella, según creo), era lo que se llamaba en Francia después de la I Guerra Mundial “une gueule cassée”, por haber quedado desfigurado por una bomba de iperita [sustancia vesicante utilizada por primera vez por el ejército alemán durante esta guerra y bautizada por los ingleses como gas mostaza, por su olor], lo que al final le llevó a una muerte prematura, otro motivo por el cual mi madre no pudo acabar su tesis).”

Posteriormente, esta estancia de María en Francia sería ampliada, tal como puede leerse en la edición de La Vanguardia del domingo 17 de marzo de 1935, en su página 12: *“a propuesta de la Junta de Ampliación de Estudios, el ministro de Instrucción pública ha concedido una prórroga de un mes y veintiocho días en la pensión que disfruta para ampliar sus estudios en Francia, a la profesora del Instituto de Primera enseñanza de Figueras doña María Capdevila de Oriola”*.

El día que comenzó la Guerra Civil Española fue una fecha especialmente dolorosa para María. De acuerdo con el relato de José María, su hijo,

“El 18 de julio de 1936, estando ya mi abuela y mi tía de vacaciones en Cabestany, mi madre, ya catedrática de Figueres, se había quedado en Barcelona preparando oposiciones para una plaza en Barcelona. Unas explosiones, que creyó eran petardos anunciadores de la verbena de San Jaime, le impidieron concentrarse, así que salió a pasear. Y lo primero que vio fueron los restos momificados de los frailes de un convento del Paseo de San Juan, que los anarquistas habían desenterrado y fusilado post mortem y dejado apoyados en las paredes del convento. Ni que decir tiene que se fue directa al Consulado Francés, que se ofreció a repatriarla en un barco que hacía el servicio Barcelona-Portvendres y que salvó a muchos, tanto franceses como españoles, de una muerte segura. El Consulado incluso puso un sello en la puerta de su piso acreditando que allí vivían ciudadanos franceses, pero el sello no fue respetado: corrió la voz (cierta) de que allí se había refugiado un sacerdote, el piso fue violado y saqueado y el sacerdote muerto in situ mientras intentaba huir deslizándose por una cañería.”

Durante la segunda República y la Guerra Civil, con la excepción del periodo correspondiente a su estancia en Francia, María fue profesora del Departamento de Ciencias de la Universidad de Barcelona. Sin embargo, con la llegada del régimen franquista, el sector de la educación sufrió un proceso de depuración muy acusado, que afectó a miles de docentes, dejando asimismo de tener validez las carreras docentes después de 1939. Ésta fue la causa por la que la carrera científica de María queda interrumpida tras la

Guerra Civil (para mayores detalles, véase (Grana, 2007)). No obstante, en 1940, María recupera su condición de catedrática de Instituto, con plaza en Figueras, según aparece en el Boletín Oficial del Estado (BOE nº 61 de 1 de Marzo de 1940, páginas 1530-1533) como catedrática de Instituto de séptima categoría (con un sueldo de 10.600 pesetas).

Asimismo, en el BOE nº 64, página 1598 y siguientes, de fecha 4 de Marzo de ese mismo año, 1940, dentro de los Expedientes de Depuración del Profesorado de Instituto, se confirma a María Capdevila como Catedrática del de Figueras (web10). En la siguiente figura puede verse el encabezamiento y páginas correspondientes de ese BOE (en el que, por razones de extensión se han suprimido algunos apartados, así como la casi totalidad de nombres de otros catedráticos y catedráticas, entre ellos los de los ilustres catedráticos, muy conocidos, D. José Ibáñez Martín, D. Pedro Puig Adam, D. Jaime Vicens Vives y D. Guillermo Díaz Plaja).

Ministerio de Educación Nacional
Órdenes de 24 de febrero de 1940 resolviendo los expedientes de depuración del Profesorado de los Institutos que se citan

Ilmo. Sr.: Vistos los expedientes de depuración instruidos por las Comisiones Depuradoras C) de las provincias correspondientes, con arreglo a lo dispuesto en el Decreto núm. 66 de 8 de noviembre de 1936 y disposiciones complementarias;

Examinadas las propuestas de la Comisión Superior Depuradora de Expedientes de Depuración y el informe de la Dirección General de Enseñanza Superior y Media,

Este Ministerio ha resuelto:

Primero. Confirmar en su cargo a los señores siguientes: (aparecen 22 varones más las siguientes mujeres):

Doña María González Sánchez, Profesor del Instituto de Cuenca.

Doña María Martínez Fernández, profesor del Instituto de Cuenca.

Doña Julia Guillén del Rey, profesora del de Castellón de la Plana.

Doña María Teodora Parra Sanz, Catedrático del de Mahón.

Doña Clotilde Nogueras Cabezali, Profesor de ídem.

Doña María Capdevila D'Oriola, Catedrático del de Figueras.

Segundo. La confirmación en sus derechos a los señores siguientes: (6 varones, más la siguiente mujer):

Doña María del Carmen Piernavieja del Pozo, ídem del de Portugalete (ídem).

*Lo digo a V. I. para su conocimiento y efectos consiguientes.
Dios guarde a V. I. muchos años, Madrid, 24 de febrero de 1940.*

IBÁÑEZ MARTÍN.

Ilmo. Sr. Director General de Enseñanzas Superior y Media.

Figura 6. BOE 04/03/1940, página 1598 y siguientes.

Durante un tiempo, ya en sus últimos años de docencia, María Capdevila fue profesora del prestigioso Instituto Nacional de Enseñanza Media “Jaime Balmes” (actual I.E.S. “Jaume Balmes”), de Barcelona, en el que se jubiló el 6 de agosto de 1975. Este instituto tuvo en sus primeros tiempos una serie de profesores muy prestigiosos, tanto varones como mujeres. Entre los primeros, Guillermo Díaz-Plaja Contestí, Pompeu Fabra i Poch, conocido por haber establecido la normativa moderna de la Lengua Catalana, y Hermenegildo Giner de los Ríos, pedagogo y político vinculado a la Institución Libre de Enseñanza, fundada entre otros por su hermano Francisco. Entre las profesoras de ese Instituto de aquellos tiempos, de las más “conocidas” fueron: María de los Ángeles Ferrer Sensat, María Capdevila d'Oriola, Montserrat Ubach Trullás, Pilar Adell Gutiérrez y María Asunción Amat Alfonso (web11).

En las siguientes figuras se muestran una serie de documentos oficiales en los que aparece el nombre de María. El primero (Figura 7), es la Orden de 8 de Octubre de 1966 (BOE del 28) por la que *se acepta a doña María Capdevila D'Oriola la renuncia al cargo de Vocal suplente del Tribunal de Oposiciones a cátedras de Matemática de Institutos Nacionales de Enseñanza Media* (TIFF (Referencia 1966/17200)).

Boletín Oficial del Estado: Gaceta de Madrid núm. 258, de 28/10/1966

Página 13627:

B. O. del E.—Núm. 258	28 octubre 1966	13627
ORDEN de 8 de octubre de 1966 por la que se acepta a doña María Capdevila D'Oriola la renuncia al cargo de Vocal suplente del Tribunal de oposiciones a cátedras de Matemática de Institutos Nacionales de Enseñanza Media. Ilmo. Sr.: Visto la instancia que eleva doña María Capdevila D'Oriola, Catedrática numeraria de Matemáticas del Instituto Jaime Balmes de Barcelona, en aplicación de que se le niega la renuncia al cargo de Vocal suplente del Tribunal de oposiciones a cátedras de la referida disciplina de Institutos Nacionales de Enseñanza Media convocadas por Orden Ministerial de 1 de julio de 1966 (Boletín Oficial del Estado del 8) para el que fue nombrada por otra de 9 de septiembre pasado (Boletín Oficial del Estado del 30). Este Ministerio, encontrando razonadas las causas que alega la interesada, ha tenido a bien aceptar la renuncia que presenta. Lo digo a V. I. para su conocimiento y efectos. Dios guarde a V. I. muchos años. Madrid, 8 de octubre de 1966.—P. D., Angel González. Ilmo. Sr. Director general de Enseñanza Media.	oposiciones a cátedras de la referida disciplina de Institutos Nacionales de Enseñanza Media convocadas por Orden Ministerial de 1 de julio último (Boletín Oficial del Estado del 8) para el que fue nombrada por otra de 9 de septiembre pasado (Boletín Oficial del Estado del 30). Este Ministerio, encontrando razonadas las causas que alega la interesada, ha tenido a bien aceptar la renuncia que presenta, nombrando Vocal titular del referido Tribunal en sustitución del señor García Lomá a doña María Martínez Fernández, Catedrática numeraria del Instituto Nacional de Enseñanza Media de Vega de Matute de Madrid, perteneciente al primer tercio del Escalafón. Lo digo a V. I. para su conocimiento y efectos. Dios guarde a V. I. muchos años. Madrid, 8 de octubre de 1966.—P. D., Angel González. Ilmo. Sr. Director general de Enseñanza Media.	ORDEN de 8 de octubre de 1966 por la que se acepta a doña María Esther Alvarez Carro la renuncia al cargo de Vocal titular del Tribunal de oposiciones a cátedras de Ciencias Naturales de Institutos Nacionales de Enseñanza Media y se nombra en sustitución a don José Gerardo Pérez. Ilmo. Sr.: Visto el escrito que eleva doña María Esther Alvarez Carro, Catedrática numeraria de Ciencias Naturales del Instituto Nacional de Enseñanza Media femenino de Ve-

Figura 7. BOE del 28 de Octubre de 1966.

Otro documento es una Orden resolviendo instancia suscrita por ella, en el que se dispone que doña María Capdevila d'Oriola, Catedrático de Lengua francesa del Instituto Nacional de Segunda enseñanza de Alcoy, sea incluida en el Escalafón general de Catedráticos de Instituto con el número, categoría y sueldo anual que se indican (Gaceta de Madrid núm. 46, de 15/02/1934. Páginas 1252 a 1253: TIFF (Referencia 1934/01307).

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES

ORDENES

Hmo. Sr.: La Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones científicas eleva a este Ministerio la siguiente propuesta sobre concesión de pensión a doña María Capdevila:

“Recibida en esta Junta una instancia suscrita por doña María Capdevila d'Oriola, Catedrático de Matemáticas del Instituto Nacional de Segunda enseñanza de Figueras, solicitando se le autorice para ausentarse los nueve meses de pensión que le fueron concedidos por Orden ministerial de 4 de Julio de 1933, y teniendo en cuenta que ha sido favorablemente informada por el Di-

Figura 8. Orden del Ministerio de Instrucción Pública.

Finalmente, en la página 514 de (Negrín, 2005) aparece un Anexo de 28 páginas en el que se muestran los Expedientes (de depuración) resueltos del Cuerpo de Catedráticos de Institutos: ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN, LEGAJO 18460. En la página 525 de esa publicación, en ese Anexo, bajo el número 530 y acompañado de la referencia P Logroño 3/8/1939 X, aparece el nombre de María Capdevila.



Figura 9. María Capdevila.

Pasando ahora a comentar algunos datos de la vida personal de María, indicar que contrajo matrimonio con José María Gallart Sanz, en la catedral de Logroño, poco antes de acabar la Guerra, el 12 de marzo de 1939, y de allí se fueron a Barcelona, donde María, al encontrar su piso saqueado y todavía con restos de sangre del sacerdote asesinado, decidió, con su madre, que había vuelto de Cabestany, acabar las obras de una *torre* [en Cataluña, se llaman "torres" a las casas unifamiliares de una o dos plantas] que estaba ya iniciada antes de la Guerra en Horta, un municipio agregado a Barcelona pero entonces todavía muy alejado de la gran urbe, donde se ubica el "Bosque de Can Gallart" (al que también nos referiremos más adelante en este artículo).

Puede parecer extraño que José María y María se casaran en Logroño. La razón la explica José María (hijo) indicando que:

"Desde Francia, mi madre volvió a España por Irún, y se reincorporó a la docencia de las Matemáticas en el Instituto de Logroño, no recuerdo si desde octubre del 36 o algo más tarde. Allí hizo amistad con otros catedráticos de ese instituto, en especial con el Sr. Estévez, catedrático de Geografía e Historia, que después de la Guerra se trasladó a Barcelona y allí siguió hasta su prematura muerte. Yo guardo un gran recuerdo de él, ya que venía con frecuencia a nuestra casa de la calle Dante 61 (entonces 17, ya que había muy pocas casas) y me daba clases de Geografía e Historia de España, materias en las que yo iba flojo ya que cursaba el Baccalauréat Français en el Lycée Français de Barcelona, entonces en la calle Moyá 4, en la sede que había sido del Colegio Alemán hasta mayo de 1945."

El marido de María, José María, era un farmacéutico zaragozano, doctor en Química (leyó su Tesis en la Universidad de Ciencias de Zaragoza, bajo la dirección de D. Antonio Rius, una eminencia de la época) y catedrático de Física y Química del I.E.S. "Ausiàs March" de Barcelona, que falleció el 24 de abril de 1988. Como ya se ha indicado varias veces, el matrimonio tuvo un único hijo, Josep María Gallart y Capdevila, actualmente psiquiatra de reconocido prestigio, que fue galardonado en 1964 con el premio "Pi i Molist" por la Academia de Ciencias Médicas de Cataluña y Baleares y con el VIII premio "Doctor Martí i Julià" del Instituto de Estudios Catalanes, en 1967. Sobre su padre, José María recuerda que:

"Mi padre, aragonés de Zaragoza, estudió Farmacia mucho después de la Guerra (Civil), y lo tuvo que hacer "por libre", en Santiago, por oponerse algunos catedráticos de Barcelona a examinarlo si no asistía a clase, cosa que le era imposible por dar clases en el Instituto Menéndez Pelayo (junto con mi madre), del cual era también por entonces

Secretario. Le oí comentar a menudo que las asignaturas de Farmacia que no le habían convalidado las había estudiado en el Shangai o Transiberiano, que era cómo llamaban al tren que iba de Barcelona a Santiago y que tardaba unas 24 horas... “

Entre los compañeros de carrera de María, que posteriormente llegaron a ser amigos suyos, su hijo José María únicamente recuerda al arquitecto Antonio Munné, que primero había cursado Exactas, que fue quien dirigió las obras de la "torre de Horta", anteriormente mencionada, así como las del edificio de la farmacia donde ejerció su padre hasta septiembre de 1972, compaginándolo con su trabajo de catedrático de Instituto. José María recuerda que el propio Munné afirmaba que,

“Mi madre le había salvado la vida: Él había logrado salir de Cataluña en 1937 y pasarse a la zona nacional por la frontera vasco-navarra, pero al llegar a ella, en lugar de ser recibido como un héroe fue internado en un campo de concentración como presunto espía, y, de no haber sido por mi madre que alertó a mi padre, hubiera muerto allí de desnutrición y desesperación. Cuando mi padre, que no lo conocía, fue a rescatarlo, estaba catatónico y medio muerto, en palabras de mi padre.”

Pasando ahora a otro tema, no se conoce nada, desafortunadamente, de la posible obra científica de María, salvo las referencias a los temas de investigación en Matemáticas a cuyo estudio se dedicó durante su estancia en París con el profesor Juliá. Salvo eso, no se encuentra nada en la literatura relacionado con su posible investigación, logros matemáticos o aportaciones tanto a las Matemáticas como a la docencia de éstas. Su hijo José María indica que él no conserva nada y ni siquiera sabe con exactitud si María llegó a publicar algún libro o algún artículo de investigación o incluso si tuvo papeles sin publicar. El haber trabajado bajo la dirección del profesor Juliá en París podría hacer pensar que María pudiera haberse implicado en la investigación sobre los *Conjuntos de Juliá*, pero como decimos, no se ha encontrado ninguna mención a esta posible obra científica de María en la literatura, si bien ello no empaña, en nuestra opinión, el enorme mérito de esta mujer por haber conseguido, pese a las enormes dificultades que en la época padecían las mujeres en general, objetivos claramente impensables para una mujer, como pertenecer al cuerpo de catedráticos de Instituto, ganando por oposición varias cátedras y de diferentes disciplinas (en su afán por acercarse a Barcelona), ser una de las pocas mujeres en obtener una pensión para salir al extranjero y sobre todo, ser la primera mujer española profesora universitaria. Sólo por eso merecería ser recordada. De ahí que de alguna forma, los autores la consideramos *pionera de la Matemática española*, como reza en el título de este artículo.

María Capdevila murió en Barcelona el día 4 de octubre de 1993. La figura 10 muestra la página del Libro de Familia donde aparece certificado ese fallecimiento.

Marido

Don Jose Pau GALTART SANZ
 falleció en Longjumeau provincia de Essonne,
 el 24 de abril de 1988
 otorgó testamento

Tomo 75 Registro Civil de Paris
 Pág. 82

El Encargado del Registro,
Jose Maria ULRICH

Mujer

Doña María Capdevila D'Oriola
 falleció en BARCELONA, provincia de BARCELONA,
 el 4 de octubre de 1993
 otorgó testamento

Tomo 75 Registro Civil de BARCELONA
 Pág. 82

El Encargado del Registro,
Concepción Quintana Osuna
 8 OCT. 1993

Figura 10. Libro de Familia de María.

Asimismo, en la página 32 del diario “La Vanguardia” del día siguiente, apareció publicada una esquela, en la que se inserta una brevísima reseña de su vida (véase (web14)).

Y el día 9 de Febrero de 2009 apareció publicada la siguiente necrológica sobre María, en catalán y en español (véase (web14)):

DILLUNS 9 DE FEBRER DE 2009

Maria Capdevila d'Oriola, Q.E.P.D. - Bosc de Can Gallart

La senyora Maria Capdevila, mare del Sr. Josep Ma. Gallart va morir fa uns anys. De tota forma la seva decidida actuació va permetre mantenir, conservar i fer prosperar el Bosc que ara coneixem com de "Can Gallart". Aquest bosc no pretén ser "versallesc" sinó "anglés", natural, i ecològic. Els veïns que la recordem, la tenim per una gran persona que a la vegada era senzilla en el tracte i molt afable. A continuació hi ha un text públic en referència a l'activitat matemàtica de la Sra. Maria Capdevila.

María Capdevila d'Oriola : primera profesora universitaria matemática Nacida en Cabestany (Francia) en 1906 y residente en Barcelona, se licenció en Ciencias (reválida de licenciatura en 1928) y cursó las asignaturas del doctorado en la Universidad Central de Madrid; fue nombrada catedrática interina de Matemáticas del Instituto Nacional de Zafra en 1928, más adelante, ganó la oposición a cátedra de Lengua y Literatura francesas del Instituto de Figueras. Es de destacar que desempeñó la Auxiliaría de la asignatura "Astronomía General y Física del Globo" de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona en el curso 1931-32, siendo por tanto, una de las pioneras en alcanzar esta posición y la segunda en obtener una pensión para temas de Matemáticas concedida por la Junta para Ampliación de estudios, por O.M. de 4 de julio de 1933, para estudiar Teoría de Funciones en Francia con el profesor Julia.

Figura 11. Necrológica de María aparecida en La Vanguardia.

Asimismo, el lunes 17 de Noviembre de 2008 apareció en (web13), bajo el epígrafe “Novedades del Carmel, barrio de Barcelona”, la siguiente información (traducida del catalán) en la que Maite Fandós, Regidora de Convergencia y Unió, hace un llamamiento a defender “el pulmón verde” del Bosc de la Finca de Can Gallart, al tiempo que propone cambiar el nombre de ese bosque por el de María Capdevila. Este llamamiento de la Regidora se debió a que María, en sus últimos años, ayudó mediante aportaciones económicas a mantener y conservar el “Bosc de Can Gallart”, en el Barrio de Horta de Barcelona (web13):

CiU ha denunciado que el Plan de Reforma del Carmel del bipartito y ERC “hacen desaparecer el Bosque de la finca de Can Gallart-Capdevila para hacer pisos” y ha exigido que “se desafecte este pulmón verde para el barrio. La concejal de CiU en Horta-Guinardó, Maite Fandós, también pide que se “abra a la ciudadanía este espacio que permitiría mejorar la calidad ambiental y atmosférica de los vecinos y vecinas de la zona”.....Maite Fandós ha exigido al Gobierno Municipal que “mantenga este bosque y que por lo tanto deje el Bosque de Can Gallart sin afectación” dentro del Plan del Carmel. “Hace falta mantener el bosque y abrirlo a la ciudadanía”, ha dicho Fandós que además propone que este espacio verde “reciba el nombre de Bosc de Maria Capdevila, matemática y astrónoma que ejerció de profesora en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, una de las primeras mujeres de ciencias de nuestro país”.

Como curiosidad, indicar también que la compañía aérea catalana *Catalonian Airlines* bautizó su Boeing 757-300 con el nombre y apellidos de María, para honrar de esta forma su comunidad de nacimiento y los estudios de Astronomía que ella había realizado.

Precisamente, esta faceta de astrónoma de María queda también remarcada en el libro “*Catalanes del segle XX*” (Godayol 2006) en el que se considera a María como “*la Hipatia del Segle XX*”, por su amor por las Matemáticas y la Astronomía.

Los autores no deseamos terminar este artículo sin volver a reiterar el enorme mérito que a su juicio poseen varias mujeres españolas pioneras en las disciplinas de Ciencias (también las hay en las de Letras, por descontado), que por su esfuerzo, tenacidad e interés, y sorteando miles de dificultades, pudieron realizar estudios universitarios y poner su granito de arena para que la consideración actual de la mujer en la sociedad sea equiparable a la del varón, a pesar del escaso conocimiento que esa sociedad posea de las mismas. Valga como ejemplo la vida aquí comentada de María Capdevila, de la que únicamente se ha ocupado la Exposición “*Mujeres Matemáticas i Dones de*

Ciència” (perteneciente al catálogo de exposiciones itinerantes del Institut Català de les Dones y presentada por primera vez en el Museu de la ciència i de la Tècnica de Catalunya (web12)).

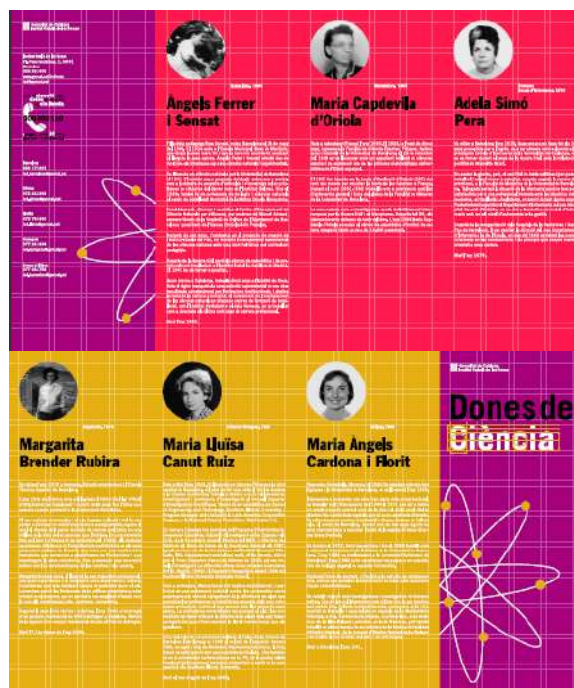


Figura 12. María Capdevila en uno de los paneles de la Exposición.

Y también para terminar se incluyen a continuación algunas de las escasas fotos existentes de María, todas ellas tomadas después de su jubilación, salvo las dos primeras, que corresponden a su infancia, cedidas por su hijo José María y una prima de éste, Marie Thérèse.



Figura 13. María con sus padres Juan y Thérèse.



Figura 14. María cuando tenía dos o tres años.



Figura 15. María, años después de su jubilación.



Figura 16. María con sus nietos Edgar, Ana y Pablo.



Figura 17. María con su hermana Enriqueta.



Figura 18. María con su nuera Pilar.



Figura 19. Enriqueta y María.

Agradecimientos:

Los autores desean agradecer muy sinceramente a D. José María Gallart Capdevila, hijo de María Capdevila, no sólo la gran cantidad de información que nos ha suministrado sobre la vida de su madre, sino también la amabilidad y exquisito trato que en todo momento nos ha dispensado. Sin ninguna duda, sus aportaciones han resultado de gran ayuda para la elaboración de este artículo.



Figura 20. María con su hijo, el tantas veces citado José María, en la piscina del apartamento de Roses, junto a la playa de la Almadraba.

Referencias

- [1] CARBONELL, Carmen y NÚÑEZ, Juan Núñez. *100 años de derechos: la primera mujer española doctora en Física*. Acta (C.D.) del II Congreso Universitario Nacional "Investigación y Género". Universidad de Sevilla, Junio de 2010, 781-792 (ISBN: 978-84-693-7982-0).
- [2] DURÁN, María José, ESCUDERO, Ana María, NÚÑEZ, Juan y REGODÓN, Elena. *La arquitectura, un lugar para las mujeres*, Actas (CD) del III Congreso Universitario Nacional "Investigación y Género". Universidad de Sevilla, 16 y 17 de Junio de 2011, 1392-1407.

- [3] GODAYOL, Pilar et al., “Catalanes del segle XX”. Editorial Eumo, Barcelona, 2006 (en catalán).
- [4] GRANA, Isabel. *Las mujeres y la Segunda Enseñanza durante el Franquismo*. Hist. educ., 26, 2007, 257-278.
http://campus.usal.es/~revistas_trabajo/index.php/02120267/article/viewFile/747/921
- [5] MAGALLÓN, Carmen (2007). *El Mundo Contemporáneo*.
<http://web.educastur.princast.es/proyectos/coeduca/wp-content/uploads/2007/01/La%20Edad%20Contemporanea.pdf>
- [6] MARAVER, Rocío y NÚÑEZ, Juan. *La labor de Carmen Martínez Sancho en el Instituto Murillo de Sevilla: una etapa muy fructífera*, Matematicalia 5:1 (2009).
- [7] MARRERO, Isabel (2011). *Las primeras mujeres matemáticas en la Universidad española*. Boletín de la Universidad de Almería 14:2 (2011), 16 - 17.
- [8] NEGRÍN, Olegario (2005): *La Depuración del Profesorado de los Institutos de Segunda Enseñanza*. Hist. educ., 24, 2005, 503-542.
http://campus.usal.es/~revistas_trabajo/index.php/02120267/article/viewFile/6702/6692
- [web9] <http://hemeroteca.lavanguardia.com/preview/1989/10/19/pagin32/33749987/pdf.html?search=%22Montserrat%20Capdevila%22>
(Esquela de María Capdevila. La Vanguardia, martes 5 de octubre de 1993, página 32).
- [web10] <http://www.filosofia.org/hem/dep/boe/194003.htm>
(BOE nº 61 del 1 de Marzo de 1940).
- [web11] http://es.wikipedia.org/wiki/Instituto_Balmes
(Sobre el Institut Jaume Balmes. Cent cinquanta anys d'història). Barcelona, 1995.
- [web12] <http://www.gencat.net/icdona/docs/calendari2007.pdf>
(Exposición “Mujeres Matemáticas i Dones de Ciència”).
- [web13] http://politica.e-noticies.es/ciu-denuncia-que-el_ayuntamiento-quiere-hacer-desaparecer-un-bosque-22790.html
(Novedades del Carmel, barrio de Barcelona”, 17 noviembre 2008).

[web14]http://www.dbd.cat/index.php?option=com_biografies&view=biografia&id=4032

(Biografía en catalán de María Capdevila).

Sobre los autores:

Nombre: Juan Núñez Valdés

Correo Electrónico: jnvaldes@us.es

Institución: Licenciado y doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Es Profesor Titular de Universidad del Departamento de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas de dicha Universidad. Su investigación se centra en la Teoría de Lie y en la Matemática Discreta. También ha publicado artículos sobre Matemática recreativa, Historia y Divulgación de las Matemáticas.

Nombre: María Arroyo Castilleja

Correo Electrónico: maria_ac_90@hotmail.com

Institución: Alumna de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y Estudiante Interna del Departamento de Geometría y Topología de la misma, bajo la dirección del profesor anteriormente citado, con el que colabora en artículos biográficos de mujeres matemáticas y de divulgación de las Matemáticas en general.

Nombre: María Luisa Rodríguez Arévalo

Correo Electrónico: ml.rodriiguezarevalo@gmail.com

Institución: Alumna de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y Estudiante Interna del Departamento de Geometría y Topología de la misma, bajo la dirección del profesor anteriormente citado, con el que colabora en artículos biográficos de mujeres matemáticas y de divulgación de las Matemáticas en general.

Historias de Matemáticas

Introducción Histórica a la Geodesia

Miguel J. Sevilla de Lerma

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

En este artículo presentamos un recorrido evolutivo a lo largo de la historia de la Geodesia, haciendo especial énfasis en los logros obtenidos así como los personajes que escribieron con letras de oro el desarrollo de esta ciencia.

Palabras Clave: Geodesia, historia.

1. La Geodesia. Su objeto

La Geodesia es una de las Ciencias más antiguas cultivada por el hombre. El objeto de la Geodesia es el estudio y determinación de la forma y dimensiones de la Tierra, de su campo de gravedad, y sus variaciones temporales; constituye un apartado especialmente importante el establecimiento de sistemas de referencia, orientación de la Tierra en el espacio y la determinación y representación de posiciones de puntos de su superficie.

Etimológicamente la palabra Geodesia, del griego $\gamma\eta\delta\alpha\iota\omega$ (divido la tierra), significa la medida de las dimensiones de la Tierra, en su acepción moderna también engloba el estudio del campo de gravedad de la Tierra y de los planetas.

La Geodesia es una ciencia básica, con unos fundamentos fisicomatemáticos y con unas aplicaciones prácticas en amplias ramas del saber, como en Topografía, Cartografía, Fotogrametría, navegación e ingenierías de todo tipo sin olvidar su interés para fines militares. Está íntimamente relacionada con la Astronomía y la Geofísica, apoyándose alternativamente unas ciencias en otras en su desarrollo, en sus métodos y en la consecución de sus fines.

Todo el proceso de **determinación de posiciones** geodésicas, con el establecimiento y mantenimiento de sistemas de referencia terrestres y espaciales,

está íntimamente ligado con la forma y dimensiones de la Tierra, por lo tanto el problema de la determinación de la figura de la Tierra no es puramente teórico sino que tiene una proyección práctica en lo referente al cálculo de coordenadas de puntos y a la resolución de problemas geométricos sobre su superficie.

La parte teórica del problema general de la **figura de la Tierra** consiste en el estudio de las superficies de equilibrio de una hipotética masa fluida, sometida a acciones gravitatorias y a un movimiento de rotación. Por una parte habrá que efectuar numéricamente una comprobación de que las formas teóricas que se establezcan sean compatibles con la realidad, y por otra, a partir de la observación, habrá que calcular los parámetros que definan su forma y sus dimensiones. Aquí los conceptos físicos y geométricos están interrelacionados, la teoría del potencial y las ecuaciones integro diferenciales juegan un papel principal.

En Geodesia la superficie matemática de la Tierra es el **geoide**, superficie equipotencial en el campo de la gravedad terrestre que se toma como cota cero en la determinación de altitudes ortométricas. La materialización aproximada del geoide sería una superficie que envolviera la Tierra y que resultase de la prolongación de la superficie media de los mares a través de los continentes, siendo normal a todas las líneas de fuerza del campo gravífico terrestre (Figura 1). La determinación del geoide se convierte así en uno de los objetivos fundamentales de la Geodesia. Queda incluido como objeto de la Geodesia el estudio y medida del nivel del mar y sus variaciones temporales y espaciales.



Figura 1. Imagen de la Tierra desde el espacio. Foto tomada por los astronautas del Apollo XVII el 7 dic. 1972, en su vuelta del viaje a la Luna. Era la primera vez que una misión observaba el Polo Sur terrestre.

El estudio de las **mareas terrestres** y variaciones periódicas de la vertical también es objeto de la Geodesia, cuyas conclusiones al respecto son de sumo interés para la Astronomía y la Geofísica. Se estudian fundamentalmente las acciones atractivas del Sol y la Luna sobre la Tierra, la teoría del movimiento de estos astros es bien conocida. La observación del fenómeno consiste en la medida de las desviaciones provocadas en la vertical física, en sus componentes vertical y horizontales. En definitiva se trata de determinar el campo de gravedad de la Tierra y planetas y sus variaciones temporales.

Éste es el objeto de la Geodesia en su forma general, sin embargo no debemos olvidar otros fines prácticos de lo que podríamos llamar Geodesia regional

o utilitaria. Nos referimos a su aplicación a la formación de cartas o **mapas** en su más amplio sentido, incluyendo desde la carta topográfica fundamental de un país a las cartas o mapas especiales para fines concretos. En estos menesteres la Geodesia debe proporcionar la infraestructura geométrica necesaria y efectuar mediciones precisas de distancias, ángulos, altitudes, orientaciones, observaciones a satélites, etc. La formulación matemática se trata en la Teoría de **Redes Geodésicas**. Como ejemplos, las cartas hidrográficas para la navegación o las cartas planimétricas de empleo en agrimensura o catastro implican, cada una de ellas, una Geodesia particular con métodos apropiados. Tanto la medida geométrica de emplazamiento de radiofaros, torres de control, antenas, como los apoyos de base para la construcción de túneles, acueductos o autopistas incumbe en parte a la Geodesia. También debemos incluir los estudios del medio ambiente, búsqueda de recursos mineros y energéticos, sobre todo para fijar áreas de explotación y zonas de prospección para concesiones. Éstas y otras necesidades civiles hacen que se desarrollen métodos precisos y se utilicen tanto las técnicas clásicas como los modernos satélites artificiales.

Mención aparte debemos hacer al estudio de **deformaciones de la corteza**. La precisión alcanzada por los instrumentos de medida geodésicos es tan alta que pueden detectarse movimientos de la corteza del orden del milímetro. Esto abre un nuevo campo de actuación en el que entran de lleno los estudios de control de zonas activas de la corteza, los parámetros determinados pueden utilizarse como precursores de desastres naturales como en el caso de terremotos o erupciones volcánicas y su conexión con la geodinámica del planeta.

Citemos por último las grandes aplicaciones de la **microtriangulación** o fijación de posiciones relativas de puntos con precisiones del orden de la décima de milímetro. Esta precisión es necesaria en el control de ciertas instalaciones tales como fábricas de funcionamiento automático, centrales nucleares, instalación de radiotelescopios y en el estudio de deformación de presas, de grandes estructuras, etc. (Figura 2)

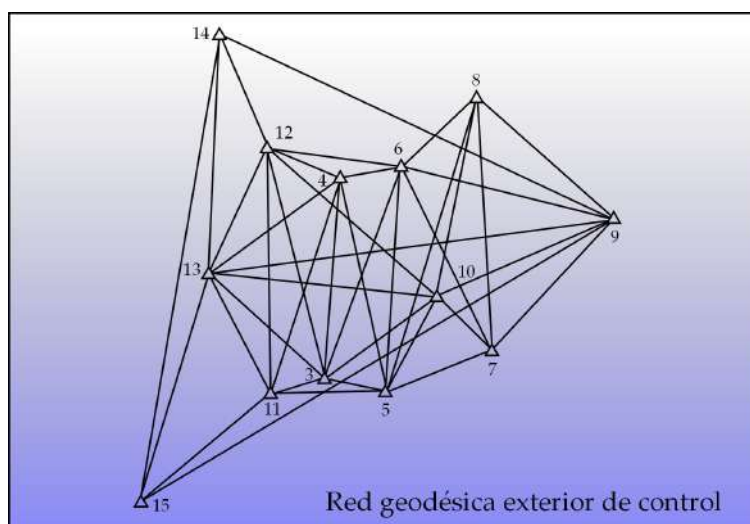


Figura 2. Red de control de la presa de El Atazar.

2. Divisiones de la Geodesia

Los objetivos de la Geodesia pueden alcanzarse siguiendo diversos métodos de trabajo a partir de distintos tipos de datos obtenidos directa o indirectamente, siendo así que atendiendo a ellos podemos distinguir tres grandes ramas.

Astronomía Geodésica.- Es aquella parte de la Geodesia que con métodos y observaciones astronómicas trata fundamentalmente de obtener la dirección de la vertical; determina, pues, coordenadas astronómicas, latitud Φ , longitud Λ (o el tiempo t) y acimutes astronómicos α . Con los datos obtenidos trata de determinar el geoide como figura de la Tierra por el método de nivelación astrogeodésica, y efectuar la reorientación de redes geodésicas en la compensación con puntos Laplace. Las determinaciones astronómicas, tanto su teoría como sus métodos, son a veces incluidas dentro de la Astronomía de posición. Los métodos de pasos meridianos y de alturas iguales son los más comúnmente empleados.

Geodesia Geométrica.- Es aquella rama de la Geodesia en la que los datos de observación están constituidos por las medidas de ángulos y distancias en la superficie terrestre. Estos datos son referidos a un elipsoide de referencia para construir las triangulaciones en el caso de la Geodesia clásica bidimensional o bien estudiados en coordenadas cartesianas en el caso de la Geodesia tridimensional. También son necesarias las determinaciones de altitudes de puntos sobre una superficie de cota cero. El conocimiento de la geometría del elipsoide de revolución es fundamental.

Geodesia Mecánica.- Es aquella rama de la Geodesia que, basada en la teoría del potencial, trata de las medidas de la gravedad, del estudio del campo exterior y de la obtención de la forma de la Tierra; sus datos fundamentales son las medidas de la gravedad efectuadas generalmente en superficie, y las perturbaciones observadas en el movimiento de un satélite artificial. Está relacionada con la Geodesia geométrica, con la Geofísica, con la Astronomía y con la Mecánica Celeste. Suele subdividirse en Gravimetría, Teoría del Campo y consecuencias.

No obstante esta división, hoy día los métodos globales de la Geodesia actúan en conjunto con datos geométricos y dinámicos a fin de alcanzar sus objetivos de forma conjunta en la llamada **Geodesia Integrada**.

Desde el punto de vista temático, la Geodesia puede dividirse en diversas secciones o capítulos que, aunque relacionados unos con otros, algunos de ellos han adquirido entidad propia. Así, entre otros, tenemos.

Teoría de la figura de la Tierra.- Constituida por los principios de la teoría del potencial y teoría de figuras de equilibrio aplicados al campo de gravedad terrestre.

Teoría de redes geodésicas.- Incluye el estudio de las triangulaciones y trilateraciones, el cálculo y compensación de redes geodésicas de una, dos y tres dimensiones y el cálculo de coordenadas, con el análisis estadístico de los resultados.

Nivelación.- Trata de todo lo referente a la medida de altitudes y establecimiento de redes altimétricas.

Teoría de la rotación de la Tierra.- Estudia el movimiento de rotación de la Tierra, en un sistema de referencia fijo en el espacio (precesión y nutación) y en un sistema de referencia fijo al cuerpo (velocidad de rotación y movimiento del polo) y está íntimamente ligada a la Astronomía en lo referente a los sistemas de tiempo y nutación y a la Geofísica con los modelos del interior de la Tierra. Sus principales datos son las determinaciones astronómicas clásicas, los resultados de la Geodesia Doppler, GNSS, láser y VLBI. Modernamente se incluye también el estudio de la dinámica lunar y planetaria.

Gravimetría.- Trata de las determinaciones de la gravedad, sus reducciones, cálculo de anomalías y establecimiento de redes gravimétricas; sirve de base para aplicaciones geodésicas y geofísicas.

Geodesia Física.- Está constituida por aquellas teorías y métodos encaminados a la determinación del geoide, con datos dinámicos o gravimétricos, mediante un análisis del problema de contorno de la teoría del potencial. Describe los modelos terrestres de comparación para el establecimiento de la figura de la Tierra, calcula y utiliza fundamentalmente las anomalías gravimétricas. También estudia el campo exterior de la gravedad.

Mareas terrestres.- Estudia las desviaciones periódicas de la vertical debidas a las acciones gravitatorias del Sol y la Luna y sus efectos sobre el geoide y deformaciones de la Tierra, tanto desde un punto de vista teórico como numérico y experimental.

Geodesia tridimensional.- Trata el problema de la forma y dimensiones de la Tierra en un sistema de referencia tridimensional, aquí el elipsoide sólo será una superficie auxiliar de la que puede prescindirse. Su evolución actual se dirige al estudio de cuestiones de holonomía con sistemas de referencia móviles.

Geodesia espacial.- Esta nueva rama de la Geodesia trata principalmente con satélites artificiales cuya observación resulta más cómoda y precisa que la tradicional. Aplica técnicas tridimensionales y resuelve todos los problemas de la Geodesia tanto geométricos como dinámicos. En los cálculos emplea frecuentemente técnicas de colocación por mínimos cuadrados. Incluiremos también en la Geo-desia espacial los métodos propios de la VLBI. En esta parte se incluye el modelado y determinación de órbitas de satélites y el desarrollo de sus técnicas de observación.

Ya con entidad independiente, tenemos:

Cartografía.- Trata del establecimiento de cartas de todo tipo y engloba todas las fases de trabajo, desde los primeros levantamientos hasta la impresión final de los mapas. Se incluyen los Sistemas de Información Geográfica.

Topografía.- Trata del estudio y aplicación de los métodos necesarios para llegar a representar el terreno con todos sus detalles, naturales o no, en él existentes, así como de los instrumentos utilizados.

Fotogrametría.- Técnica que trata de estudiar y definir con precisión las formas, dimensiones y posiciones en el espacio, de un objeto cualquiera, utilizando esencialmente una o varias fotografías del mismo, en nuestro caso del terreno.

Desde 2003 la Geodesia se establece sobre tres pilares: Forma geométrica de la Tierra, Orientación de la Tierra en el espacio y Campo de Gravedad de la Tierra. La precisión estipulada fue de 10^{-9} .

3. Métodos Geodésicos

Los métodos geodésicos no son otra cosa que la aplicación al estudio de la Tierra de la metodología científica de "Observación, Cálculo y Comprobación". Se observa un fenómeno, con teorías físicas y el uso de la Matemática se establece un modelo que lo represente y después se comprueba lo cercanos que este modelo y sus consecuencias están de la realidad observada.

Como ya se ha dicho, la Geodesia pretende conocer la forma y dimensiones de la Tierra y la representación de puntos de su superficie, interesa, pues, conocer para cada punto de la superficie terrestre unas coordenadas que lo determinen que generalmente serán bien cartesianas (x, y, z) o bien geográficas (φ, λ, h) en un cierto sistema de referencia bien definido.

Para la **determinación de las coordenadas geográficas** puede pensarse en principio en la observación astronómica, esto puede ser válido para obtener las coordenadas de puntos individuales en número reducido, pero es evidente que pretender, por este procedimiento, asignar coordenadas a todos los puntos de la superficie terrestre es prácticamente imposible. Para subsanar este problema, la Geodesia clásica adopta una superficie matemática como figura de la Tierra y recubre dicha superficie con una red de triángulos de forma que conociendo las coordenadas de un vértice puedan calcularse las de los demás utilizando para ello simples medidas de ángulos o de distancias, o de ambas cosas.

Efectivamente, si suponemos por un momento la Tierra esférica, sea A un punto de coordenadas (φ, λ) conocidas (por ejemplo por observación astronómica); para calcular las coordenadas de otro punto B de la misma superficie consideremos el triángulo de posición PAB que los puntos A y B forman con el polo P de la esfera; si medimos la distancia AB entre ambos puntos y el acimut en A de la dirección AB , respecto del polo P , en el triángulo anterior conoceremos tres elementos: los lados AB , medido, y $PA = 90 - \varphi$, dato, y el ángulo en A medido. Resolviendo entonces este triángulo con las fórmulas clásicas de la trigonometría esférica, podremos conocer el lado PB que dará la latitud de B y el ángulo en P que siendo la diferencia de longitudes nos dará la longitud de B . (Figura 3)

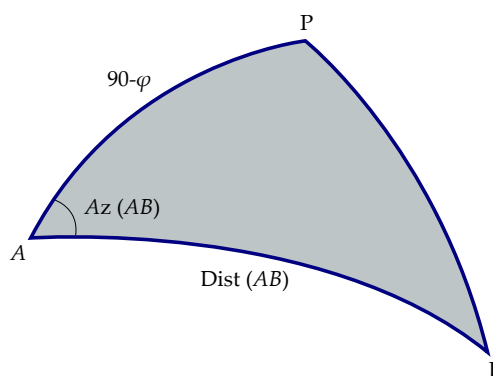


Figura 3. Cálculo de coordenadas

Con este sencillo procedimiento podrían determinarse las coordenadas de más de un punto y tendríamos la base para efectuar una representación car-

tográfica. Después de haber resuelto una red de grandes triángulos o red de primer orden, se plantearía otra red de triángulos más pequeños, denominada de segundo orden, apoyada en la anterior y así sucesivamente con un tercer y un cuarto orden hasta llegar a los trabajos de relleno propios de la Topografía. Esta es la teoría de redes geodésicas con infinitud de aplicaciones.

Mención aparte debemos hacer de la **altitud** h , tanto en su definición como en su determinación. Desde un punto de vista geométrico nos dará idea de la distancia de dicho punto a una cierta superficie de referencia. La elección de dicha superficie y de la línea sobre la que se toma dicha distancia son otros tantos problemas que la Geodesia debe resolver, debiendo dar, además, la definición precisa de altitud, concepto que vendrá a relacionar los aspectos geométricos y dinámicos de la Geodesia. Generalmente todo esto se conoce con el nombre de **nivelación**.

Evidentemente, las técnicas de cálculo no son tan sencillas como la expuesta anteriormente para el modelo esférico, pero hoy día esto no es problema: la Matemática nos proporciona los métodos de cálculo (por ejemplo sobre un elipsoide) y las computadoras lo ejecutan.

Al suponer los vértices de una red geodésica fijos, podemos obtener, en la fase de observación, más datos de los estrictamente necesarios para su cálculo, esta superabundancia de datos unida al hecho de que las observaciones en esencia son magnitudes aleatorias, nos permitirá aplicar técnicas estadísticas para obtener como resultado un conjunto único y geométrico de valores de las coordenadas de los puntos y una estimación de la precisión alcanzada. Esta fase se conoce con el nombre de **compensación** de la red.

La Geodesia clásica trata de resolver el problema de la figura de la Tierra siguiendo el proceso siguiente:

- a) Determinación de un elipsoide de revolución como figura aproximada de la Tierra.
- b) Determinación del geoide sobre este elipsoide dando sus ondulaciones o cotas del geoide sobre el elipsoide.
- c) Determinación de las posiciones de puntos de la superficie topográfica terrestre con relación a la superficie del geoide mediante nivelación. En la determinación de este elipsoide que será el que mejor se adapte a la forma de la Tierra, se utilizarán observaciones astronómicas y geodésicas principalmente datos gravimétricos y de satélites artificiales, siguiendo distintos métodos para la resolución del problema. Se denominará **elipsoide de referencia**.

En todos sus aspectos la Geodesia clásica presupone, o bien el conocimiento de la figura de la Tierra para la determinación de puntos de su superficie, o bien el conocimiento de dichos puntos para la determinación de la forma. En este sentido, se entiende por forma de la Tierra el **geoide**, que puede determinarse por diversos métodos y, si se elige convenientemente el elipsoide de referencia, la experiencia demuestra que las diferencias entre una y otra superficie son pequeñas alcanzando raramente el centenar de metros.

Para la determinación del geoide y del campo de gravedad de la Tierra se necesitan medidas de la gravedad, estas se obtienen con los instrumentos y métodos propios de la **Gravimetría**. (Figura 4)

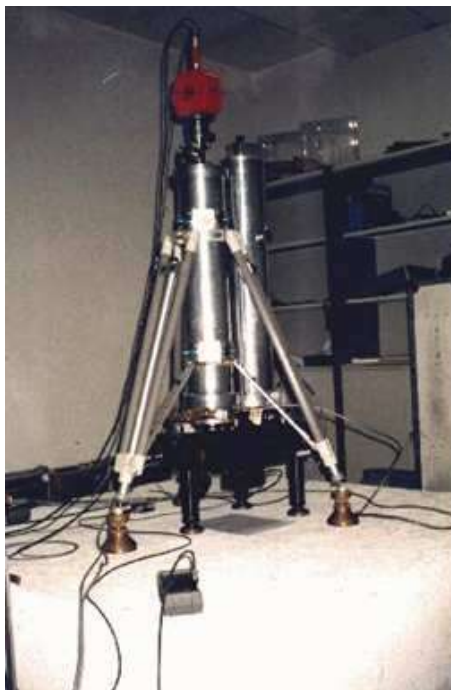


Figura 4. Gravímetro.

La metodología geodésica también incluye técnicas tridimensionales. El cálculo riguroso de una triangulación en el espacio fue emprendido por Bruns en 1878, pero es Martín Hotine quien en 1956 propone las bases en las que se asentará la Geodesia tridimensional, plenamente realizada mediante la Geodesia espacial con la utilización de satélites artificiales. Con los satélites se dispone en las cercanías de la Tierra de puntos de observación y medida que podrán ser situados en aquellos lugares que nos interese independientemente de la geografía de la zona.

La Geodesia **tridimensional** persigue el estudio de la figura de la Tierra y del potencial exterior sin hipótesis previas sobre su forma, es decir, evitando la engorrosa utilización del elipsoide como figura aproximada. La parte geométrica de esta rama de la Geodesia consiste en el establecimiento de un inmenso poliedro cuyos vértices estén dados por sus coordenadas cartesianas tridimensionales en un sistema de referencia cuyo origen sea el centro de gravedad de la Tierra y cuyo eje principal sea su eje de rotación convencionalmente establecido. La parte dinámica de la Geodesia espacial consiste en el análisis de las perturbaciones que en el movimiento de un satélite introduce la forma de la Tierra y conocidas aquellas determinar ésta.

La Geodesia clásica suponía en sus consideraciones teóricas que sus objetivos, forma de la Tierra, posiciones de puntos de su superficie y campo de gravedad, no variaban con el tiempo salvo por el efecto periódico de marea. Sin

embargo, la Geodesia moderna ha llegado a un estado de desarrollo tal que la precisión alcanzada nos dice que, como indica la teoría, ya no pueden seguirse considerando invariables los objetos de estudio. Por consiguiente, se hace necesario investigar a fondo problemas **geodinámicos** y esto ya puede hacerse fundamentalmente por dos razones: porque se dispone de potentes ordenadores electrónicos que permiten tratar matemáticamente grandes series de datos y porque, además, pueden utilizarse los **satélites artificiales** para la obtención de un número prácticamente ilimitado de tales datos de observación.

En líneas generales habrá que establecer un sistema de referencia bien definido, una red geodésica de puntos de referencia cuyo movimiento pueda ser estudiado, conociendo para ello su posición en función del tiempo. En esta red podremos obtener un conjunto de observables básicos, tales como ángulos, distancias, diferencias de distancias, velocidades, aceleraciones, etc., con los cuales podremos emprender el estudio de una gran cantidad de problemas astro-nómicos, geodésicos y geofísicos, entre los que podemos destacar la rotación de la Tierra y el movimiento del polo junto con los mecanismos de excitación, la disipación de energía y los posibles orígenes geofísicos de las irregularidades observadas. También podremos estudiar los movimientos de la corteza terrestre, tanto debidos a mareas como a la tectónica de placas, incluyendo los movimientos sísmicos y sus efectos además de las posibles interacciones entre las masas continentales, atmosféricas y oceánicas.

4. Noticia Histórica

La historia de la Geodesia desde un punto de vista geométrico puede sintetizarse siguiendo la historia de la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra. Veremos cómo durante muchos siglos se ha tratado este problema con los continuos intentos de medir distancias sobre su superficie cada vez más precisas. Los métodos de cálculo necesarios para determinar las dimensiones los daba la Matemática y es el desarrollo de esta ciencia el que permite el avance de la Geodesia. Podemos distinguir varias etapas en este empeño: La primera etapa va desde los orígenes hasta consideración de la Tierra como un cuerpo esférico (500 a.C.), la segunda está dedicada a la determinación del radio de esta esfera; que dura 20 siglos, en la etapa siguiente se da un gran paso al considerar la Tierra como un elipsoide de revolución determinando sus semiejes y por último la definición y determinación del geoide como figura de la Tierra, que ha llegado hasta nuestros días.

El estudio y evolución de la Geodesia ha planteado grandes problemas matemáticos en todas las épocas, y en la historia de esta ciencia aparecen los más eminentes científicos de la Humanidad, quienes han aportado sus conocimientos y contribuido a su desarrollo. Al mismo tiempo, o quizá por ello, la Geodesia ha sufrido los avatares y controversias del desarrollo cultural de los pueblos y en muchos casos la influencia de ciertas filosofías e incluso de la propia Teología, sobre todo en la Edad Media, ha sido manifiestamente negativa.

En primer lugar debemos decir que no está admitida la existencia de civilizaciones superdesarrolladas en tiempos remotos en pueblos antiguos del Asia

Central: chinos, sumerios, asirios, etc., que poseyeran una cultura más vasta que la actual y que por lo tanto tuvieran grandes conocimientos acerca de la figura de la Tierra así como del resto del Universo.

4.1. Grecia

Las primeras referencias griegas sobre la forma de la Tierra son más poéticas que científicas, no hay más que leer los poemas de **Homero (900 a.C.)**. En sus poemas heroicos resume todos los conocimientos cosmográficos y geográficos de la época y del pueblo heleno, en gran desarrollo, con una gran imaginación. Supone la Tierra plana y limitada en todos sus sentidos por las aguas del océano, coloca en medio a Grecia y en particular al monte Olimpo correspondiente a la Tessalia. En los confines del horizonte supone misteriosas columnas que sirven de sustentáculo a los cielos; bajo el suelo a gran profundidad sitúa a Tártaro morada de los enemigos de los dioses y fuera de los confines misteriosos de la Tierra el caos o la inmensidad. Esto no es ni más ni menos que la interpretación de la naturaleza por un espíritu de imaginación brillante.

Tales de Mileto (639-546 a.C.), fundador de la trigonometría y que predijo eclipses de Sol, decía que la Tierra era un disco redondo flotando en un océano sin límites. **Anaximandro de Mileto (610-547 a.C.)**, discípulo de Tales, dice que es un cilindro que ocupa el centro de todo lo creado y construye la primera carta geográfica conocida. Para su discípulo **Anaxímenes de Mileto (550-480 a.C.)** y para el discípulo de éste, **Anaxágoras de Clazomene (500-428 a.C.)**, el Sol no es un dios sino un disco muy delgado (por lo que fue puesto en prisión y liberado por Pericles) y la Tierra es otro disco o trapecio suspendido en el aire, pero reconoce la forma esférica de la Luna que refleja la luz del Sol. **Jenofantes de Colofón (570-475 a.C.)** suponía la Tierra plana e ilimitada. **Hecateus de Mileto (550 -476 a.C.)** presenta su reconocido mapa del mundo al que le atribuye forma de disco.

Los filósofos griegos afirmaban que la Tierra era esférica 500 años a. C. y se apoyaban en que la forma geométrica más perfecta era la esfera. **Parménides (515-440 a.C.)** y **Empédocles (493-433 a.C.)** emitieron por primera vez la idea de la esfericidad de la Tierra y su aislamiento en el espacio. **Pitágoras de Samos (569-470 a.C.)** llegó a decir que la Tierra no podía tener otra forma y que además estaba aislada en el espacio e inmóvil. **Filolao (480-400 a.C.)**, de la escuela pitagórica, opina que la Tierra gira alrededor de sí misma produciendo los días y las noches y se desplaza, como el Sol, la Luna, los planetas y a mayor distancia el cielo con las estrellas fijas, alrededor del fuego central, alma del mundo; también se desplaza el Antichton (hemisferio opuesto). Sin embargo, **Leucipio (460-370 a.C.)** y **Demócrito de Abdera (460-370 a.C.)** suponían otra vez que era un disco plano sostenido por el aire. **Hicetas (400-335 a.C.)**, **Heráclides (388-315 a.C.)** y **Efanto (510 a.C.)** atribuían a la Tierra un movimiento de rotación y pensaban que por lo menos la Tierra, Mercurio y Venus se movían alrededor del Sol. Heráclides hace hipótesis sobre el sistema heliocéntrico establecido después por Aristarco y Saleuco.

Platón (427-347 a.C.), que admite que la Tierra es redonda, la supone aislada e inmóvil en el centro del mundo. **Eudoxio de Gnido (409-356 a.C.)**, discípulo

de Platón, da la teoría de las esferas de cristal para explicar el movimiento de los planetas y estrellas (supone veintiséis) con ejes en distintas direcciones y movimientos diversos, **Calipo (370-310 a.C.)** llega a treinta y tres esferas y **Aristóteles (384-322 a.C.)**, a cincuenta y cinco. La teoría aristotélica sostiene:

1. La Tierra es esférica porque tal es la forma aparente de los demás astros, tal es también la forma que toma un cuerpo, como una gota de agua, sometido a la sola presencia de sus partes y tal es la forma que nos revela la sombra terrestre en los eclipses de Luna.
2. Las dimensiones de la Tierra no deben ser desmesuradas puesto que con el cambio de lugar varían el aspecto y número de las estrellas visibles.
3. La Tierra no debe moverse en el espacio, ya que su movilidad hipotética no se refleja en la posición constante de los demás astros, la altura de un astro variaba de igual forma a la misma hora en cualquier parte de la Tierra. Esta teoría tuvo una vigencia de siglos dado que era admitida por la mayor parte de las religiones.

El geógrafo **Dicearco (350-285 a.C.)** supone la Tierra esférica y refiere sus medidas al meridiano y al paralelo en Rodas introduciendo así las coordenadas esféricas y su mapa del mundo incluye los territorios de Alejandro Magno. El geómetra **Euclides (325-265 a.C.)** enuncia las leyes del movimiento diurno y hace observar que entre las Osas hay una estrella que no se mueve, supone a la Tierra en el centro del universo. **Arquímedes (287-212 a.C.)** da un gran impulso a las Matemáticas y evalúa la circunferencia terrestre. **Piteas (380-310 a.C.)** intuye que las mareas son producidas por los astros pero no lo explica, además realiza determinaciones precisas de latitudes.

En contra de las teorías aristotélicas aparecen las revolucionarias de **Aristarco de Samos (310-230 a.C.)** que eliminó todas las esferas y estableció el sistema heliocéntrico, la oposición de **Aristóteles** y **Cleantes (331-232 a.C.)** silenciaron estas teorías hasta los tiempos de **Copérnico**. Su discípulo **Apolonio de Pérgamo (262-180 a.C.)**, el gran especialista en cónicas, volvió al sistema geocéntrico, introduciendo la teoría de los epiciclos pero no introdujo estas curvas en la Astronomía. Parece que fue el descubridor de la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano que desde entonces fue una gran herramienta en Geodesia y Cartografía.

Admitida la esfericidad de la Tierra, el problema era determinar sus dimensiones. **Eratóstenes de Cyrene, (276-195 a.C.)**, bibliotecario de la Biblioteca de Alejandría fundada por el rey de Egipto Ptolomeo Soter, fue el primero en determinar 240 años a.C. el radio terrestre al medir la longitud del arco de meridiano entre Siena (actual Asuan) y Alejandría. Obtuvo para la longitud de la circunferencia terrestre un valor de 250.000 estadios (unos 39.375 Km. 1 estadio = 157,5 metros) lo que da un radio de unos 6.267 Km. Eratóstenes se dio cuenta de que en el solsticio de verano, el Sol iluminaba en Siena los pozos hasta el fondo, por lo que en ese momento se encontraba en el cenit en su culminación. En ese mismo instante midió la altura del Sol en Alejandría, que suponía estaba en el mismo meridiano que Siena. La distancia cenital determinada con el gnomon, de unos $7^{\circ} 12'$ ($1/50$ de circunferencia), no era otra cosa que el ángulo que en

el centro de la Tierra esférica subtendía el arco de meridiano Siena-Alejandro. También conocía Eratóstenes la distancia entre ambas ciudades que encontró en la Biblioteca de Alejandro (5000 estadios = 787,5 Km.); así tenía todos los datos para determinar el radio de la Tierra ($R=5000 \times 50 \times 157,5 / 2\pi$). Las hipótesis y medidas de Eratóstenes no eran exactas, por ejemplo entre Siena y Alejandro hay una diferencia de longitudes de cerca de 3° , pero si su método, conocido como *método de los arcos*, que fue utilizado durante muchos siglos (Figura 5).

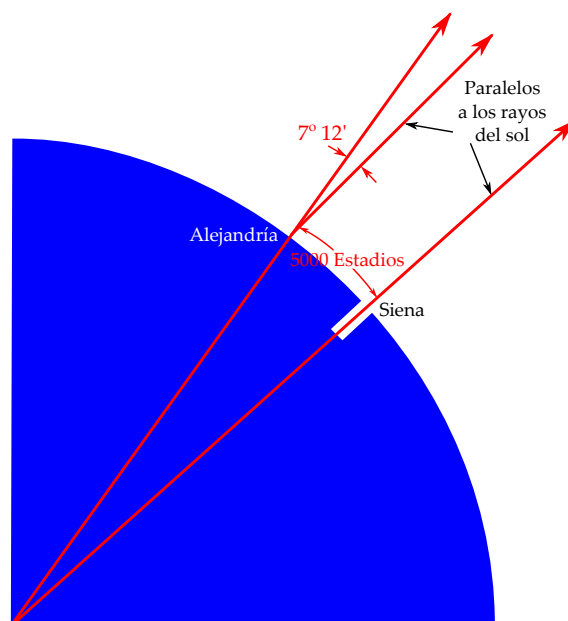


Figura 5. Esquema del método de los arcos.

Este método de los arcos fue aplicado por **Posidonio (135-51 a.C.)** que midió el arco entre Rodas y Alejandro, sustituyendo el Sol por la estrella Canopus, cuando la estrella estaba en el horizonte de Rodas tenía una distancia cenital de $1/48$ de circunferencia en Alejandro por lo que la separación angular de las dos ciudades era de $7^\circ 30'$. La distancia entre ambas ciudades la puso en 5000 estadios y obtuvo un valor de 240.000 estadios (unos 37.800 Km.) para la circunferencia lo que da un radio de unos 6.016 Km. Respecto al valor actual del radio medio terrestre de 6.371 Km el valor de Eratóstenes se desvía un 1,6 % y el de Posidonio un 5,8 %.

El gran astrónomo de esta época fue **Hiparco de Nicea (190-120 a.C.)** que piensa que la Tierra es esférica y que está inmóvil en el centro del mundo, inventa la trigonometría esférica e introduce en Grecia la graduación sexagesimal, descubre la precesión de los equinoccios, conoce el valor de la inclinación de la eclíptica, determina la duración del año trópico y construye el primer mapa de posiciones precisas de estrellas, entre otros trabajos astronómicos, Además se le considera el fundador de la Astronomía observacional.

En tiempos de Julio Cesar (46 a.C.), que mandó hacer un levantamiento cartográfico del Imperio Romano y estableció el calendario juliano preparado por el astrónomo **Sosigenes (50 a.C.)**, son de destacar los geógrafos **Estrabón**

(55 a.C. – 25 d.C.) y **Plinio el Viejo (23-79 d.C.)** que observa las mareas en Cádiz y que murió observando la erupción del Vesubio en el año 79 d.C. La Geodesia avanzó muy poco en esta época, salvo por su aplicación a las mediciones para la construcción de acueductos, vías y ciudades. **Menelao de Alejandría (70-130 d.C.)** realiza observaciones astronómicas en Roma incluyendo ocultaciones de estrellas por la Luna, y escribe varios tratados sobre los triángulos esféricos.

El mayor geógrafo y astrónomo de este tiempo (Marco Aurelio era el emperador de Roma) fue el egipcio **Claudio Ptolomeo (85-165 d.C.)**, que admitió el valor del radio terrestre de Posidonio y además lo transmitió a su posteridad. Autor de los trece volúmenes del *Almagesto* de cuyo original no se dispone pero sí se tienen las traducciones hechas al árabe por el sirio Hunaim Ibn Ishaq en el siglo IX y al latín por **Gerardo de Cremona (1114-1187)** en el siglo XII en Toledo. Ptolomeo ideó el sistema planetario geocéntrico basado en sus observaciones desde el templo de Serapis en Alejandría. Construyó un mapa del mundo y las posiciones terrestres las representaba por la latitud y longitud. La autoridad de Ptolomeo traspasó su época. En la Figura 6 puede verse el mapa del mundo atribuido a Ptolomeo.

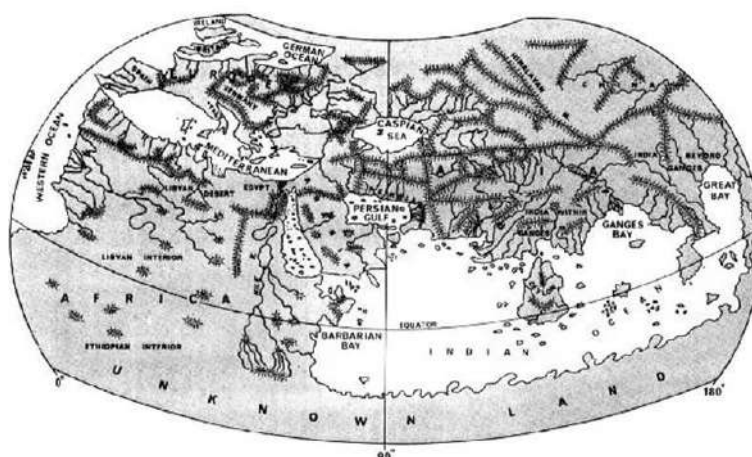


Figura 6. Mapa del mundo según Ptolomeo.

4.2. Edad Media

Las ideas aristotélicas impregnaron la Edad Media en Europa, se admitía la esfericidad de la Tierra, pero se explicaba muy mal. Se suponía la Tierra cubierta de agua excepto la parte habitada (ecumene), en las antípodas era imposible vivir "boca abajo". La historia de esos siglos está moteada por los avances y descubrimientos de matemáticos y astrónomos que no dejan de considerar los problemas geodésicos en sus trabajos; un resumen de los conocimientos matemáticos de la época es realizado por el geómetra **Papús de Alejandría (290-350)** autor del famoso teorema de geometría proyectiva. También debemos citar el trabajo del inglés **Beda el Venerable (672-735)** que escribió un compendio de cosmografía y relacionaba las mareas con los movimientos de la Luna. Es de destacar la medida del arco de meridiano realizada por el monje budista chino

I Hsing (681-727), aunque sus resultados no fueron buenos por errores en las medidas.

Las aportaciones árabes a la Geodesia son muy reducidas, aunque merecen destacarse las expediciones organizadas en las llanuras de Palmira y Zinjar, cerca de Bagdad y Al Raqqa, por el califa **Al-Mamún (786-833)**, hijo del Haroun al-Raschid, (inspirador de las mil y una noches, 830), para determinar la longitud del grado (obtiene 40.245 Km. de circunferencia, $R = 6.405$ Km.), y los trabajos del matemático **Al-Kuarizmi (780-850)** que publicó un mapa del mundo conocido y determinó el radio de la Tierra, además de introducir en las matemáticas los numerales hindúes 1,2,... y de cuyo nombre se tomó la palabra algoritmo tantas veces usada después.

El astrónomo **Al-Battani (858-929)** hacia el año 900 publica un tratado de geografía dando las posiciones de las principales ciudades; sirviéndose de la trigonometría publica tablas astronómicas de uso común. Los astrónomos árabes **Aboul Wefa (939-998)** y **Ben Younis (979-1039)** recalculan las constantes astronómicas y **Alhazen (966-1039)** escribe un tratado de óptica. El sabio árabe **Al-Biruni (973-1048)** también midió el radio de la Tierra cerca del mar Caspio por un procedimiento distinto al de Al-Mamun pero con resultados muy parecidos. En 1154, en Sicilia, aparece la gran compilación de *Geografía Universal* y el mapamundi de **Al Idrisi (1098-1166)**, nacido en Ceuta, formado en Córdoba y nombrado Cartógrafo Real por el rey Roger II de Sicilia.

Las primitivas enseñanzas griegas, de maestros de la categoría de Pitágoras, Eudoxio, Aristóteles, Eratóstenes, Hiparco y Ptolomeo, entre otros, sobrevivieron gracias a la civilización árabe, y en el siglo XIII, a través de España, llegaron a Europa en las traducciones al latín hechas en el reinado de **Alfonso X de Castilla (1221-1284)**.

Un caso digno de mención es el de **Roger Bacon (1214-1294)**, creador de la óptica, estudia la refracción, gran problema de las observaciones, trata la Astronomía y la Geografía y considera las mareas terrestres como el resultado de la atracción lunar.

4.3. Siglos XV y XVI

Pasado este tiempo, surge la época de las grandes exploraciones. En primer lugar fue, posiblemente, el viaje de **Marco Polo (1254-1324)** de 1271 a 1295 el que sirvió a **Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482)** para la confección de un mapa (Figura 7) que quizá influyó en la decisión de **Cristóbal Colón (1451-1506)** de cruzar el Atlántico navegando hacia el oeste. Pero Toscanelli, cometió un gran error pues tomaba como radio de la Tierra el determinado por Posidonio y transmitido por Ptolomeo, que era algo menor que el radio de Eratóstenes, y como en sus mapas se apoyó Colón no es de extrañar que éste creyera que el Cipango y el Catay estaban más cerca (1025 leguas) de lo que realmente resultó (3150). Según relata en su tercer viaje, Colón se percató de que la Tierra no era esférica, pero no supo explicarlo.

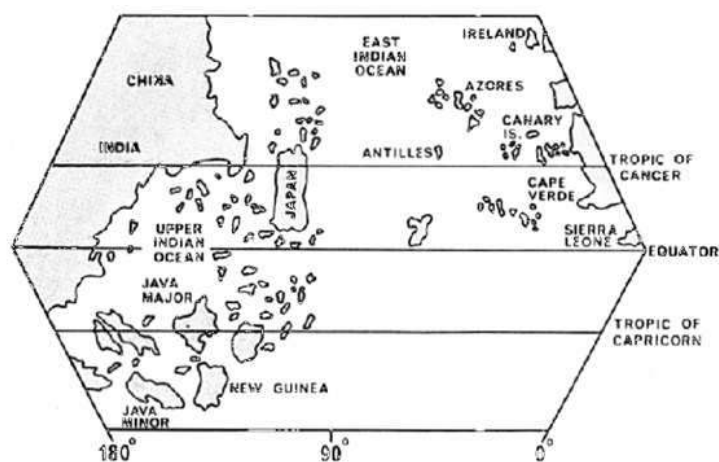


Figura 7. Mapa de Toscanelli.

Después de Colón, **Vasco de Gama (1469-1524)** llega al sur de África y **Fernando de Magallanes (1480-1521)** y **Juan Sebastián Elcano (1476-1526)** dan la vuelta al mundo.

Las necesidades de navegación, principalmente, hicieron que se organizaran verdaderas escuelas de cartógrafos, quienes con los conocimientos, muchas veces imprecisos, aportados por la Geodesia confeccionaron gran cantidad de mapas, algunos de los cuales adquieren gran renombre, como los de **Juan de la Cosa (1462-1510)**, primera representación del continente, o los del italiano **Américo Vespucio (1415-1512)** quien obtuvo los primeros mapas de la costa oeste de América del norte y dio nombre al continente.

Hasta finales del siglo XV no aparecen en Europa nuevas ideas en el terreno de la Geodesia o de la Astronomía. Quizá deba recordarse al cardenal alemán **Nicolás de Cusa (1401-1464)** que se hizo famoso por su idea del Universo infinito y que estudió el movimiento diurno de la Tierra. Otros como **Peurbach (1423-1461)**, **Waltherus (1430-1504)** y **Regiomontano (1436-1476)** hicieron algunos intentos para evolucionar las ideas con sus tratados de matemáticas y astronomía, y **Leonardo da Vinci (1452-1519)** que, además de un artista confirmado, fue un gran científico, presenta un método para determinar el radio de la Tierra, sugiriendo ya ideas sobre la isostasia y las mareas terrestres. El gran astrónomo de esta época es **Nicolás Copérnico (1473-1543)** quien en su obra "*De Revolutionibus Orbium Coelestium*" de 1543, dedicada al Papa Pablo III, da la teoría heliocéntrica del sistema solar, esta teoría vino a revolucionar el pensamiento de la época anclado en las ideas aristotélicas; se entablaron duras polémicas y se logró indirectamente que la atención de los astrónomos y geodestas se dirigiese por este camino. Proliferaron las observaciones, se construyeron observatorios y en general la Astronomía tuvo el apoyo de gobiernos y particulares que de otra manera difícilmente lo hubiese logrado. Naturalmente, la Geodesia y la navegación se beneficiaron enormemente de los resultados que se estaban obteniendo, pues pronto dispusieron de un mejor conocimiento de las posiciones de los cuerpos celestes indispensables para sus fines de posicionamiento y orientación. La teoría heliocéntrica pronto fue admitida por el mundo científico; la razón se imponía a la Teología, aunque no sin grandes

sacrificios: el italiano **Giordano Bruno (1548-1600)** fue ejecutado por hereje al admitir las ideas copernicanas y **Galileo Galilei (1564-1642)** fue obligado a retractarse de las mismas en uno de los procesos más famosos de la historia: La inquisición procesó a Galileo el 12 de abril de 1633, ya tenía 69 años y estaba casi ciego, abjuró de las teorías heliocéntricas sin embargo fue condenado a un arresto domiciliario perpetuo en su casa de Arcetri; gobernaba la Iglesia el Papa Urbano VIII. **Galileo** fue nombrado profesor de Matemáticas en la universidad de Pisa, su ciudad natal, por sus trabajos sobre el centro de gravedad de los sólidos; desde allí se fue a Padova donde realizó sus principales trabajos, aplica el antejo, inventado por **Giovanni Battista Della Porta (1535-1615)** en 1589, a las observaciones astronómicas y enuncia las primeras leyes de la mecánica con los importantes conceptos de velocidad y aceleración, también establece las leyes de la caída de los graves. Dio clases particulares de Topografía y escribió su Tratado sobre la esfera también llamado Cosmografía donde incluye un estudio de la figura de la Tierra. Perteneció a la Academia dei Lincei fundada en el año 1603. Murió el día de Navidad de 1642, el mismo día en que nació Newton.

Si bien en el siglo XVI no se registraron grandes avances en la Geodesia teórica no ocurrió lo mismo en la construcción de instrumentos y en Cartografía. Los mapas y los planos eran un instrumento de gobierno, administración y uso militar. Este avance tuvo su inicio en el llamado “Grupo de Lovaina” en el que se integran las figuras de los matemáticos y médicos Jacobo Deventer (1500-1575) y **Gemma Frisius (1508-1555)** y el multifacético **Mercator**. El emperador Carlos V encargó a Deventer, que era un gran operador de campo, constructor de instrumentos y que parece que utilizó las triangulaciones en sus cálculos, un mapa de Flandes y en 1543 lo nombró cartógrafo personal que continuo con Felipe II. En cuanto a Frisius también era buen amigo de Carlos V quien apoyo firmemente su producción instrumental y cartográfica. En esta época el cosmógrafo oficial de Carlos V fue el sevillano **Alonso de Santa Cruz (1505-1567)**.

Sin embargo el cartógrafo por excelencia de esta época, cuyos mapas satisfacían las necesidades de la navegación, fue el flamenco **Gerhard Kaufmann (1512-1594)** más conocido por **Mercator**. En la Figura 8 puede verse el mapa del mundo de Mercator, un desarrollo cilíndrico conforme que constaba de 34 hojas grabadas en cobre en 1569. También debemos destacar la obra del cartógrafo **Abraham Ortelius (1527-1598)** titulada *Teatrum Orbis Terrarum* que constaba de 70 mapas principalmente de Europa.

También Mercator fue cosmógrafo del emperador desde 1542. En 1544 fue acusado de herejía por la Inquisición y pasó ocho meses encarcelado en su pueblo natal, Rupelmonde. Sus obras se incluyeron en el Index y sus mapas fueron recortados. Mercator creó un taller de construcción de instrumentos y Carlos V le encargó diversos aparatos por mediación de su secretario el cardenal Granvela, a quien Mercator dedicó un globo terráqueo de 41,5 centímetros de diámetro en 1541; al quedar satisfechos con esos instrumentos Carlos V le encargó más instrumentos principalmente de uso militar (cuadrantes, un anillo astronómico, relojes de Sol, compases y brújulas) y otros instrumentos novedosos (un gnomon esférico, un cuarto de círculo y un anillo astronómico de cinco círculos), aparatos que fueron entregados al emperador en 1553 y en agradeci-

miento le nombró miembro de su séquito remunerado, privilegio que continuó con Felipe II. En 1575 nombró Felipe II geógrafo real al ya citado Abraham Ortelius.

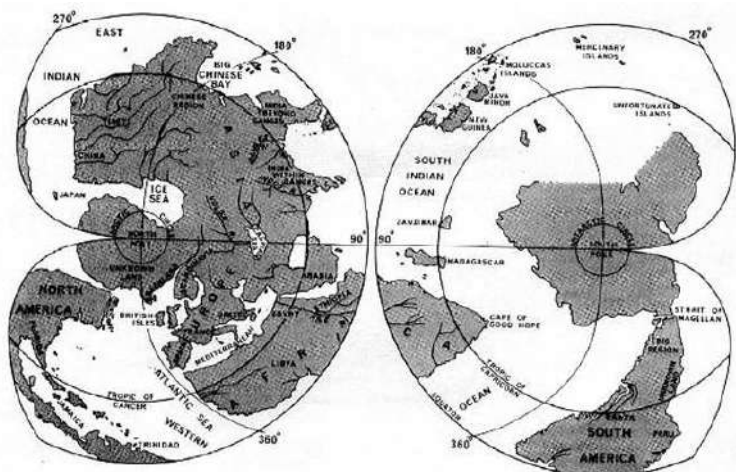


Figura 8. Mapa del mundo de Mercator.

El gran observador de esta época es **Ticho Brahe (1546-1601)** que, además, determinó un valor del radio de la Tierra de 6382 Km. con medidas en la red de Uraniburgo, pero vuelve al sistema geocéntrico. No obstante, sus observaciones del planeta Marte permitieron a **Johannes Kepler (1571-1630)** enunciar sus dos primeras leyes sobre el movimiento de los planetas publicadas en su "*Astronomia Nova*" de 1609, Kepler adoptó el sistema de Copérnico, propuso un método para determinar el radio terrestre que consistía en medir la distancia entre dos puntos alejados sobre la superficie de la Tierra y los ángulos formados por la recta que los une con las verticales en ambos extremos; y otro método para determinar diferencias de longitudes basado en la observación de eclipses de Sol. Fue profesor de Matemáticas en Graz de 1594 a 1600, allí estudia los volúmenes de cuerpos de revolución engendrados por cónicas hasta que se traslada a Praga, utiliza logaritmos decimales y notación decimal. En los países católicos la Inquisición incluye en el Index de libros proscritos las obras de Copérnico, Galileo y Kepler, entre otros, y esta situación se mantiene nada menos que hasta 1822 en que intenta producirse una reconciliación entre la razón y la fe. Pero hubo de esperarse hasta el 31 de octubre de 1992 cuando el Papa polaco Juan Pablo II reconoció oficialmente que la Iglesia Católica dejaba de considerar hereje a Galileo revocando su sentencia.

Un invento matemático viene a ayudar de forma definitiva la realización de cálculos geodésicos y astronómicos. Se trata de los logaritmos inventados por **Neper (1550-1617)** en 1595, estos no eran ni decimales ni neperianos. Las tablas de logaritmos decimales de números y de funciones trigonométricas con 14 cifras decimales fueron publicadas por **Briggs (1561-1630)** en 1624 y los logaritmos neperianos fueron introducidos por **Euler** en 1748.

En cuanto a las medidas del arco cabe destacar que el médico del rey francés Enrique II, **Jean Fernel (1497-1558)** en 1525 midió la distancia entre París y

Amiens contando las vueltas que daban las ruedas de su carruaje y con un cuadrante obtuvo un radio terrestre de 6398.57 Km.

4.4. Siglo XVII

Las investigaciones y los trabajos geodésicos continúan, pero con unas bases mucho más científicas que antes. **Stevin (1548-1620)** intuye la gravedad e introduce la notación decimal. La refracción es estudiada por los matemáticos **Fermat (1601-1665)** y **Descartes (1596-1650)** quien en 1637 publica las leyes por las que se rige. También Descartes presenta su teoría de los torbellinos para explicar el Universo.

Las medidas del arco continúan. En 1615 el holandés **Willebrord Snellius (1580-1626)** realizó la primera *triangulación* precisa y estudió la refracción; midió un arco entre Bergen op Zoom y Alkmaar utilizando 33 triángulos con una base cerca de Leyden en cuya Universidad era profesor de Matemáticas, obtiene un radio terrestre de 6.137,5 Km. Este método, cuyos principios fueron dados por **Gemma Frisius (1508-1555)** en 1533, perduró hasta el siglo XX con las mejoras aportadas por los instrumentos de observación y medios de cálculo. También se efectúan mediciones en Inglaterra por **Richard Norwood (1590-1675)** que en 1633 mide el arco entre Londres y York con una cadena de agrimensor, obtiene un radio terrestre de 6.391,7 Km, y en Italia por los jesuitas **Giovanni Battista Riccioli (1598-1671)** y **Francesco María Grimaldi (1618-1663)** quienes utilizaron, en 1645, el método de Kepler usando por primera vez ángulos cenitales recíprocos, aunque tuvieron problemas con la refracción atmosférica. En España aparece, en 1615, un mapa de Aragón realizado por **Juan Bautista de Labaña (1555-1625)** en el que se utilizan las triangulaciones para los levantamientos.

En 1670 en Francia, el abate **Jean Picard (1620-1683)** mejora los procedimientos de observación al aplicar a los instrumentos goniométricos un anteojo provisto de *retículo* formado por dos hilos en cruz (Figura 9). Realizó importantes estudios sobre nivelación refiriendo las altitudes al nivel del mar, introduciendo así el método de nivelación trigonométrica. Por encargo de la Academia de Ciencias de París, que había sido fundada en 1666 por iniciativa del Ministro de Luis XIV Colbert y del Cardenal Richelieu, y para dotar a Francia de mapas precisos, Picard midió, en 1670, con una triangulación de 13 triángulos, el arco de París entre Malvoisine (al sur de París) y Sourdon (al sur de Amiens). Determinó el radio terrestre y su resultado (6365 Km. de radio) fue de trascendental importancia pues sirvió a **Newton** para calcular la distancia a la Luna, que venía dada en unidades del radio terrestre, y comprobar su Ley de Gravitación Universal. Newton suponía que la fuerza de atracción que mantiene la Luna en su órbita alrededor de la Tierra es la misma que la fuerza que actúa sobre los cuerpos de la superficie terrestre, entonces sólo tenía que comparar la fuerza de atracción con la gravedad obtenida por **Galileo**. Los precursores de la Ley de Newton parecen ser el italiano **Borelli (1608-1679)** y los ingleses **Horrox (1619-1641)** y **Robert Hooke (1635-1703)** que dedicó gran parte de su obra al estudio de la gravedad. También disponía Newton de la matemática necesaria, puesta a punto por él mismo, por **René Descartes (1596-1650)** y por **Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716)** principalmente.

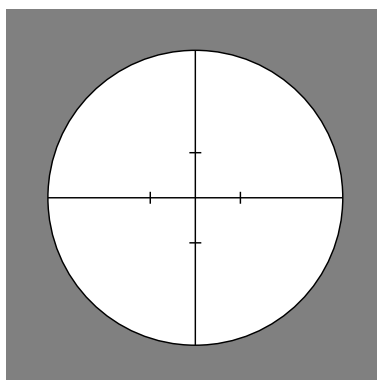


Figura 9. Retículo de anteojo.

Isaac Newton (1642-1727) nació en Woolsthoepe, Lincolnshire, el día de Navidad de 1642, su padre, pequeño propietario agrícola ya había muerto dejando a la viuda en condiciones económicas muy deficientes. Ingresó en la Universidad de Cambridge en 1661 y se graduó en 1665. En 1669 sustituyó a su maestro **Barrow (1630-1677)**, de quien recibió posiblemente las primeras ideas sobre el cálculo infinitesimal, como catedrático de Matemáticas en dicha Universidad. En 1672 fue elegido miembro de la Royal Society de la que fue Presidente desde 1703 hasta su muerte, fue enterrado en Westminster. También fue elegido miembro del Parlamento en 1689. Su principal obra "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" está fechada el 8 de mayo de 1686 y en 1713 aparece la segunda edición. El primer libro está dedicado a las leyes del movimiento y sus aplicaciones, el segundo libro trata del rozamiento y el tercero trata del Sistema del Mundo con la atracción universal y sus aplicaciones. Se cree que Newton ya tenía su Ley de la Gravitación Universal en 1666 pero no la publicó porque no se verificaba con los valores del radio terrestre entonces admitidos. El valor obtenido por Picard sirvió para dicha verificación. La Geodesia refrendaba la Ley más importante de la Mecánica. La aplicación de su Ley a la teoría de figuras de equilibrio le permitió concluir que la Tierra no era una esfera sino que debía ser un *elipsoide de revolución* achatado por los polos del eje de rotación. **Newton** trata el problema de la figura de la Tierra en las proposiciones XVIII, XIX y XX del libro tercero de su Principia, también en esta obra da la primera explicación correcta del fenómeno de las mareas y efectuó cálculos precisos de las mismas.

Ya en 1672 **Jean Richer (1630-1691)** había observado que el péndulo astronómico es más lento en Cayena (Guayana francesa), cerca del ecuador, que en París y **Christian Huygens (1629-1695)**, el gran experto en relojes, que utilizó el primer reloj de péndulo preciso, interpretó estas variaciones diciendo que la gravedad aumenta del ecuador a los polos porque la Tierra es aplanada en esa dirección, lo que se verifica para el elipsoide de Newton. En 1673 había publicado Huygens su obra "*Horologium Oscilatorium*" donde presenta la teoría matemática del péndulo que utiliza como regulador de la marcha de los relojes; con estos instrumentos se produjo un avance en precisión en la medida de diferencia de longitudes. Aunque sus ideas sobre la gravedad no son muy afortunadas llega a la conclusión de que la Tierra en rotación es un elipsoide achatado por los polos, pero el aplanamiento que calcula es muy pequeño.

También son debidas a él las primeras teorías sobre la naturaleza ondulatoria de la luz, la reflexión y la refracción.

4.5. Siglo XVIII

El siglo XVIII marca un salto cualitativo en el estudio de la figura de la Tierra pues el elipsoide sustituye a la esfera. Este siglo está dedicado en primer lugar a la medida de la longitud del grado para determinar el aplanamiento de la Tierra y en segundo lugar al desarrollo teórico de la Geodesia Dinámica. En este siglo, llamado siglo de las luces, y fruto de la Ilustración, comienzan a cultivarse los métodos racionales que se terminarán imponiendo a las creencias tradicionales. Los métodos experimentales aportan datos reales de la naturaleza de las cosas y así sucede con los problemas geodésicos, produciéndose también un avance en los instrumentos y métodos de observación. El despotismo ilustrado favorece la creación de Academias, en las que la discusión de problemas científicos es su razón de ser. Finaliza el siglo con otro hecho importante como es la adopción del Sistema Métrico Decimal.

Giovanni Domenico Cassini (I) (1625-1712), italiano de nacimiento y astrónomo de profesión fue nombrado director del observatorio de París en 1671 por Luis XIV. Observa que el planeta Júpiter aparece aplanado y dice que la Tierra también debe serlo, pero no dice cómo. En 1693 se comienza bajo su dirección la prolongación del arco de Picard por el norte hasta Dunkerque y por el sur hasta Colliure, los trabajos se interrumpieron y fueron continuados de 1700 a 1718 por su hijo **Jacques Cassini (II) (1677-1756)**, el astrónomo **Giacomo Filippo Maraldi (1665-1729)** y el matemático y académico **Philippe de La Hire (1640-1718)**. También La Hire junto con Picard fueron los primeros en publicar observaciones continuas de mareas realizadas en Brest (Francia) en 1679 durante un corto periodo de diez días. Con los resultados de las seis mediciones distintas realizadas a lo largo de 36 años se obtenía que la longitud de un arco de un grado disminuía desde el ecuador hacia el polo norte y se concluía que el elipsoide terrestre debía ser alargado en el sentido del eje de rotación, lo que contradecía el resultado obtenido por Huygens y Newton. Por aquel entonces **James Bradley (1693-1762)** descubre la aberración de la luz en 1727 y la nutación en 1737 aunque la publicó en 1747, también publicó unas tablas de refracción muy utilizadas.

La controversia fue zanjada en favor de las conclusiones newtonianas al comparar los resultados experimentales obtenidos por dos expediciones organizadas por la Academia de Ciencias de París, a propuesta del académico **d'Anville (1697-1782)**, con el fin de medir la longitud de un grado de meridiano en las proximidades del polo de y otro en el ecuador.

La expedición a Laponia, a 76 grados de latitud norte (entre las ciudades de Kittis y Tornea), de 1736 a 1737, estaba formada por los académicos **Pierre Louis de Maupertuis (1698-1759)** (matemático de 30 años) y **Alexis Claude Clairaut (1713-1765)** (también matemático de 23 años), acompañados de **Pierre Charles Le Monnier (1715-1799)** (astrónomo de 21 años) y **Charles Etienne Louis Camus (1699-1768)** (matemático de 37 años) a los que se unieron **Reginald Outhier (1694-1774)** (abate de 42 años), **Anders Celsius (1701-1744)** (pro-

fesor de astronomía de 35 años) y **Anders Hellant (1717-1789)** (astrónomo que además actuó de interprete), de la Universidad de Upsala.

Respecto a la expedición al ecuador sabemos que en 1734 la Academia de las Ciencias de París, remite, para que lo eleven a Patiño (Ministro de Felipe V), un memorial acerca de la medición de un arco de meridiano en América, en el que *“...sólo piden a la Corte de España órdenes para que los gobernadores de Sto. Domingo, Portobelo, Panamá, Quito y los demás de América protejan y favorezcan una empresa tan útil y para que estén libres de sospechas que puedan solicitar alguna introducción en el comercio u otras perjudiciales a los intereses de España...”*

Una Real Orden de Felipe V del 20 de agosto de 1734 ordenaba *“elegir a dos de sus más hábiles oficiales, que acompañasen y ayudasen a los académicos Franceses en todas las operaciones de la Medida, no sólo para que así pudiese hacerse con mayor facilidad y brevedad, sino también para que pudiesen suplir la falta de cualquier Académico, o de todos, temible en tantas navegaciones, y diferencias de climas, y para continuar, y aún hacer enteramente ellos solos en caso necesario la Medida proyectada, para dar después cuenta de ella a la Academia Real, participando además en la mitad de los gastos de la expedición. También ordenó que eligiesen dos personas en quienes concurrieran no sólo las condiciones de buena educación, indispensables para conservar amistosa y recíproca correspondencia con los académicos franceses, sino la instrucción necesaria para poder ejecutar todas las observaciones y experiencias conducentes al objeto, de modo que el resultado fuese fruto de sus propios trabajos, con entera independencia de lo que hicieran los extranjeros”*.

La expedición a Perú, a 2 grados de latitud sur, de 1736 a 1744 estaba integrada por los académicos **Louis Godin (1704-1760)** (astrónomo de 32 años), **Charles Marie de La Condamine (1701-1774)** (químico y geógrafo de 35 años), **Pierre Bouguer (1698-1758)** (matemático de 38 años), **Joseph de Jussieu (1704-1779)** (botánico), **Jean Seniergues (1704-1739)** (cirujano conflictivo), **Jean Joseph Verguin (1701-1777)** (ingeniero y geógrafo), **Godin des Odonnais (1713-1792)** (agrimensor, sobrino de Louis Godin), **Teodore Hugot (relojero)**, **Jacques Couplet (geógrafo ayudante)** y el dibujante **Jean Louis de Morainville (1707-1765)**. También participaron los guardiamarinas españoles **Jorge Juan de Santacilia (1713-1773)** (marino de 23 años) y **Antonio de Ulloa y de la Torre Guiral (1716-1795)** (marino de 20 años), los más jóvenes de la expedición y el criollo **Pedro Vicente Maldonado (1704-1748)**. La Real compañía de Guardiamarinas fue fundada por José Patiño Intendente de la Marina de Felipe V en 1717.

Para las medidas astronómicas utilizaron el sector astronómico o sector cenital de 30° con un radio de 20 pies, construido por Graham en Inglaterra con micrómetro; este aparato no funcionó bien y Godin y Jorge Juan tuvieron que construir sus propios instrumentos. Para las medidas de ángulos horizontales utilizaron el cuarto de círculo o cuadrante acimutal (Figura 10) provisto de micrómetro; lograron cierres mejores de 12 segundos de arco. Las bases se midieron con las toesas del Perú que al ser de hierro tenían grandes dilataciones. También midieron diferencias de longitudes mediante la ocultación de los satélites de Júpiter. Hicieron nivelación barométrica y geodésica y midieron la gravedad con péndulos.



Figura 10. Cuadrante acimutal utilizado por Jorge Juan y Antonio de Ulloa (Museo Naval, Madrid).

Dada la relevancia histórica que tuvieron Jorge Juan y Antonio de Ulloa en el desarrollo, no sólo de la Geodesia, sino de la ciencia en España recomendamos leer sus biografías en algunas de las referencias dadas en la bibliografía. Es de destacar que la medida del grado del Perú es una de las primeras misiones geodésicas de carácter internacional ya que participaron grupos de diversos países; para su desarrollo fueron necesarios acuerdos entre los Reyes Luis XV de Francia y Felipe V de España, realizados en 1734 a iniciativa del rey francés; en la preparación de estas relaciones tuvo un importante papel el canciller francés Conde de Maurepas y el Ministro español José Patiño. También hubo acuerdo entre Francia, Suecia y Rusia para la expedición a Laponia.

Los resultados de las mediciones fueron 362.800 pies (56.753 toesas) (56.767, 788 toesas obtenidas por Jorge Juan) para el arco ecuatorial y 367.100 pies (57.438 toesas) para el polar. Como la longitud del grado resultó mayor en el polo que en el ecuador se confirmaron las conclusiones newtonianas obteniendo un elipsoide con un aplanamiento de $1/304$. Desde entonces la Tierra se considera, en segunda aproximación, como un elipsoide de dos ejes achatado por los polos del eje de rotación (Figura 11). Sobre este aplanamiento dijo **Voltaire** sobre **Maupertuis** “*Il avait aplati la Terre et les Cassini*”, pues fueron tres generaciones de Cassinis las que estuvieron involucradas. La forma de elipsoide de dos ejes fue corroborada por otras medidas de arco realizadas por Maupertuis y **Pierre Charles Le Monnier (1715-1799)** en el arco de Picard y por Cassini de Thury el abad **Nicolas Louis de La Caille (1713-1762)** en el arco de Dunkerque a Perpignan. **Cesar François Cassini (III) (1714-1748)**, también llamado Cassini de Thury era hijo de Jacques Cassini y aunque colaboró con su padre en la medida del paralelo de París, admitió el achatamiento polar y los errores de su padre. Fue director del observatorio de París y comenzó la construcción de un mapa preciso de Francia a escala $1/86400$ (En realidad fueron cuatro las generaciones de los Cassini pues **Jean Dominique Cassini (IV) (1748-1845)** también astrónomo y cartógrafo, nació, remodeló y dirigió el Observatorio de París y continuó los trabajos cartográficos de su padre Fue encarcelado por la Asamblea Nacional durante 7 meses, dimitió de sus cargos y

se retiró a Thury).

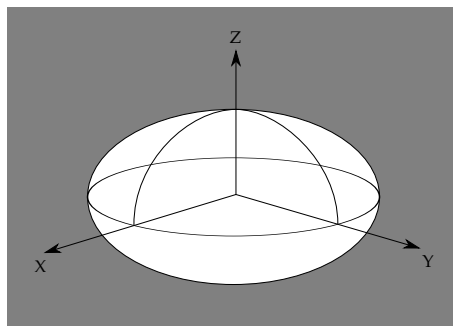


Figura 11. Elipsoide terrestre.

El problema desde entonces es determinar las dimensiones de la Tierra obteniendo valores numéricos del semieje mayor y del aplastamiento del elipsoide terrestre, lo que por entonces consistía en medir el mayor número de arcos de meridiano y de paralelo que se pudiera y obtener los parámetros resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones.

Un hecho importante de la expedición al Perú es que **Bouguer** se da cuenta de que las coordenadas astronómicas obtenidas por observación y corregidas, y las geodésicas obtenidas por cálculo no coincidían y aprovecha la ocasión para medir la desviación de la vertical producida por el Chimborazo no explicándose los resultados obtenidos a no ser que la montaña tuviera “grandes huecos en su interior”. Esto mismo les ocurrió más tarde a **Giovanni Batista Beccaria (1716-1781)** y Zach en los Alpes, a Maskelyne en Escocia, a Mechain en Montjuich y a Pratt en el Himalaya. Tuvo que esperarse hasta que en 1855 Pratt y Airy dieran la teoría de la isostasia para explicar estas desviaciones.

En 1740 **Daniel Bernouilli (1700-1782)** escribió un trabajo sobre las mareas basado en la ley de Newton, y usando observaciones mejoró los valores dados por Newton.

En 1742 el escocés **Colin Mac Laurin (1698-1746)**, que había leído una tesis a los 17 años sobre “*El poder de la gravedad*”, estudiando las mareas, demuestra que el elipsoide de revolución aplastado puede ser una figura de equilibrio de una masa fluida y homogénea sometida a su propia gravitación y dotada de un movimiento de rotación, también obtiene la correspondiente ley de gravedad. En 1743 el ya citado francés **Clairaut**, que a los 18 años fue aceptado como miembro de la Academia Francesa, publica su “*Théorie de la figure de la Terre*” que puede considerarse como el origen de la Geodesia Dinámica; da un teorema según el cual el aplastamiento del elipsoide terrestre está relacionado con el semieje y la gravedad. También encontró Clairaut una importante relación entre el acimut de una geodésica y el radio del paralelo.

Para determinar el semieje y el aplastamiento de la Tierra otras muchas medidas de la longitud del grado fueron realizadas desde entonces: En 1751 los jesuitas **Christopher Maire (1697-1767)** y **Rudjer Josip Boscovich (1711-1787)** miden un arco en Rusia y otro en los Estados Pontificios bajo los auspicios del Papa Benedicto XIV. En 1750 **Joseph Liesganig (1719-1799)** mide un arco en

Austria y otro en Hungría. El abate **Nicolás Louis de La Caille (1713-1762)** y **Thomas Maclear (1794-1879)** miden en 1752 un gran arco en África del Sur. En 1768 los ingleses **Charles Mason (1730-1786)** y **Jeremiah Dixon (1733-1779)** miden el arco del paralelo de 39 grados en los Estados Unidos empleando un método de proyecciones ciertamente ingenioso. En 1769 el astrónomo **Nevil Maskeline (1732-1811)** mide el arco de Escocia y estudia la desviación de la vertical. En todos los casos había controversias en los resultados debido a la no-existencia de una unidad de medida universalmente admitida y a la falta de definición y uso de sistemas de referencia globales.

La Asamblea Constituyente de Francia crea por Decreto de 26 de marzo de 1791 la "*Commission Général des Poids et Mesures*" que decidió la adopción del Sistema Métrico Decimal. El metro quedó definido en función de la longitud del meridiano terrestre. Para dar la longitud del metro **Delambre (1749-1822)** y **Pedro Andrés Mechain (1744-1804)** miden el meridiano de Francia entre Dunkerque y Perpignan. Los españoles **Gabriel Ciscar (1760-1829)** y **Agustín de Pedrayes (1744-1815)** intervinieron en las discusiones previas a la preparación de este sistema métrico, celebradas en París entre 1793 y 1800. El resultado de esta operación fue publicado por Delambre en una obra titulada "*Les bases du système métrique décimal*". En 1895 la Comisión se transforma en "*Convention International du Mètre*". El Sistema Métrico Decimal se adoptó en España en 1849 por una Ley de Isabel II.

El desarrollo de la Matemática complementa perfectamente el desarrollo geodésico. **Leonhard Euler (1707-1783)**, a quien se deben las primeras teorías sobre el movimiento de cuerpos rígidos en particular las ecuaciones de la rotación, demostró en 1758 que en una Tierra absolutamente rígida el eje instantáneo de rotación debía girar en forma cónica alrededor del eje principal de inercia con un periodo de 305 días (periodo euleriano); también es suyo un teorema sobre los radios de curvatura de las secciones normales de un elipsoide y el acimut de las mismas que sigue siendo de aplicación en los cálculos geodésicos. La representación isométrica de superficies fue estudiada por Euler utilizando por primera vez las coordenadas curvilíneas. Menos conocido por sus actividades geodésicas es **Henry Cavendish (1731-1810)** quien con su experimento de la balanza de torsión obtuvo un buen valor de la constante de gravitación y con ella calculó la densidad media de la Tierra de $5,48 \text{ g/cm}^3$. **Gaspar Monge (1746-1816)** y **Meusnier (1754-1793)** definen los elementos fundamentales de las curvaturas de superficies y las propiedades de las líneas traza-das sobre ellas llegando a teoremas clásicos de la teoría de superficies de aplicación geodésica.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) en 1749 estudia el equilibrio de una masa fluida en rotación e inicia el estudio del movimiento de rotación de la Tierra en su obra "*Precession des équinoxes*". Su alumno **Pierre Simon Laplace (1749-1827)** estudia la estabilidad del sistema solar y en 1773 publica su primera memoria sobre mecánica celeste; en su segunda memoria de 1799 incluye la teoría matemática de las mareas dando el desarrollo que hoy día lleva su nombre, además, estableció las ecuaciones hidrodinámicas de propagación de las ondas de marea en los océanos, ecuaciones que no han podido ser integradas hasta el advenimiento de los ordenadores. En 1786 publicó su memoria sobre la figura de la Tierra; establece la ecuación en derivadas parciales de segundo

orden que verifica la función potencial, que también lleva su nombre, con el uso de las funciones armónicas. Son importantes sus aportaciones a la teoría de probabilidades. También colaboró en la revisión de los trabajos geodésicos de la prolongación del meridiano de París a España. En 1817 es nombrado por Luis XVIII presidente de la comisión del mapa de Francia. También Laplace estudió la refracción atmosférica y fue el introductor de las curvas de nivel para representar el relieve en los mapas.

Trabajos también importantes son los emprendidos por **Joseph Louis Lagrange (1736-1813)** quien en 1788 publica la primera edición de su "*Mécanique Analytique*", estudia en profundidad el problema de los tres cuerpos. También obtiene las ecuaciones del movimiento del polo. En 1790 es nombrado director de la comisión de pesas y medidas y propone la medición del meridiano entre Dunkerque y Barcelona.

En 1772 el matemático **Heinrich Lambert (1728-1777)** publica su obra sobre las representaciones cartográficas del elipsoide sobre el plano; de particular importancia son sus trabajos sobre la representación conforme dando las expresiones analíticas de su famosa representación cónica conforme utilizada desde entonces en multitud de trabajos geodésicos y cartográficos. Esto estaba muy relacionado con sus estudios sobre los desarrollos de funciones hiperbólicas. En 1785 **André Marie Legendre (1752-1833)** introduce la noción de potencial y funda la teoría de funciones esféricas y en 1787 publica su memoria sobre observaciones trigonométricas donde aparece su famoso teorema de resolución plana de triángulos esféricos. En sus cálculos utiliza el método de mínimos cuadrados. También dirigió los trabajos geodésicos de otra medida del paralelo de París. Desde el punto de vista práctico el matemático y astrónomo **Jean Charles de Borda (1733-1799)** perfecciona los instrumentos geodésicos con la introducción del círculo repetidor y la regla bimetalica y realiza la unión geodésica Greenwich-París. También perteneció a la comisión del metro. El físico francés **Gustav Gaspard Coriolis (1792-1843)** estudia las aceleraciones que sufren los cuerpos en movimiento en la superficie de la Tierra.

Es a partir de esta época cuando la Geodesia clásica comienza a estructurarse. Se hace necesario establecer las definiciones precisas de aquellos conceptos continuamente manejados y de cuyo entendimiento y comprensión depende su desarrollo lógico y coherente. Algunos de estos conceptos presentan lo que podemos llamar definiciones puramente descriptivas que, sin ser precisas, sirven para localizar el concepto, o dicho de otro modo, para tener una idea de él; tales son la mayor parte de las definiciones que aparecen en tratados o cursos elementales; no obstante, la Geodesia como ciencia en sí, exige definiciones rigurosas.

Un problema presente en los cálculos geodésicos es el de la reducción de datos a la superficie del elipsoide. Las observaciones se hacen en la superficie física de la Tierra y los cálculos en la superficie del elipsoide, es por tanto preciso reducir las medidas de una superficie a otra. Cuando se hace una observación angular con teodolito, cuyo eje principal se supone orientado en la dirección de la normal al elipsoide, se están midiendo los ángulos formados por secciones normales. La observación se hace desde el punto estación al punto visado situado en la superficie de la Tierra pero interesa la dirección del pie de la normal al elipsoide que pasa por el punto visado; las secciones normales en

el punto estación que pasan por el punto visado y por su proyección sobre el elipsoide no coinciden. El ángulo formado por estas dos secciones normales es la corrección que hay que aplicar a las observaciones y que se llama corrección por altitud del punto visado.

Supuestos ya los puntos sobre el elipsoide surge otro problema. Las observaciones se hacen midiendo los tres vértices de un triángulo de forma recíproca, entonces los lados del triángulo sobre el elipsoide serían las secciones normales entre los vértices, pero como en la superficie del elipsoide las secciones normales recíprocas no coinciden nos encontraríamos con un triángulo de seis lados, lo que es absurdo. Es preciso decidir cuales son los lados del triángulo y como no tenemos puntos privilegiados las secciones normales no nos sirven. Es necesario entonces tomar otras curvas sobre la superficie del elipsoide tales que entre cada dos puntos sean únicas y se decidió tomar aquellas a lo largo de las cuales la distancia entre los puntos sea mínima. Desde entonces estas líneas se conocen como líneas *geodésicas* de la superficie, nombre lógico al aparecer en su origen para resolver un problema geodésico. Las líneas geodésicas como mínima distancia entre dos puntos fueron introducidas por **Johann Bernoulli (1667-1748)** en 1697. La ecuación de las geodésicas la obtuvo por primera vez Euler en 1732, pero parece que fue **Joseph Liouville (1809-1882)** quien les dio el nombre de geodésicas en 1844. Evidentemente, las observaciones deberán, en consecuencia, corregirse por el ángulo que forma la sección normal y la línea geodésica de un punto a otro, esta segunda corrección se llama corrección por línea geodésica. La Matemática tuvo que resolver todos estos problemas proporcionando las teorías y las fórmulas oportunas y con este punto de partida lo que se desarrolló fue la propia geometría diferencial de superficies. Las principales aportaciones a este problema son debidas a Monge y Gauss.

Una cosa quedó clara después de los trabajos de **Snellius** y **Picard** y es que con medidas de ángulos y distancias podían obtenerse posiciones de puntos sobre la superficie de la Tierra y determinarse sus dimensiones. Pronto proliferaron, debido principalmente a necesidades cartográficas con fines militares, civiles y de navegación, las invenciones de nuevos instrumentos de observación y se perfeccionaron los teodolitos para la medida de ángulos.

El primer teodolito fue construido por el óptico inglés Ramsden en 1787 (En la Figura 12 puede verse un teodolito reiterador).

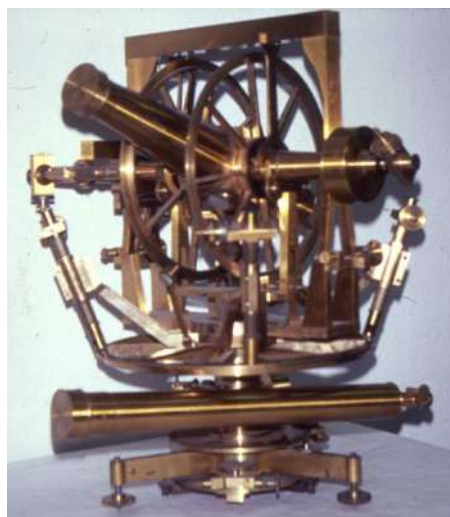


Figura 12. Teodolito reiterador.

4.6. Siglo XIX

La primera gran operación geodésica en el siglo XIX fue la [prolongación hacia España del meridiano de Francia](#), preparada por **Mechain**, por encargo del “Bureau des Longitudes”, en la que intervinieron por parte de Francia **Domingo Francisco Arago (1786-1853)** y **Juan Bautista Biot (1774-1872)** y por parte de España el valenciano **José Chaix (1765-1809)** y el gallego **José Rodríguez y González (1770-1824)**. **Arago** fue un eminente astrónomo, físico y geodesta; secretario del “Bureau des Longitudes” y director del observatorio de París; profesor de Análisis y Geodesia en la escuela politécnica. En 1848 fue Ministro de Marina y de Guerra y abolió la esclavitud en las colonias francesas. Colaboró con **Biot** en la medida del índice de refracción del aire; en 1840 descubrió la cromosfera solar.

Las medidas de grandes arcos de meridiano y paralelo se sucedieron a lo largo de este siglo. Como hemos dicho, entre los años 1806 y 1808 **Biot** y **Arago** por parte francesa y **Chaix** y **Rodríguez** por parte española prolongaron el meridiano de Francia en España y enlazaron las islas de Ibiza y Formentera con el continente. En 1817 **Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793-1864)** y **Tanner** comienzan la medida del arco del Danubio al Ártico que terminan en 1849. En 1819 aparece calculado el elipsoide de **Walbeck** en Rusia. En 1823 el inglés **George Everest (1790-1866)** mide el arco de la India y en 1830 publica los datos de su elipsoide. Este mismo año **Georges Biddell Airy (1801-1892)** calcula su elipsoide con arcos de meridiano y paralelo de Gran Bretaña. En 1866 el Coronel norteamericano **Alexander Ross Clarke (1828-1914)** obtiene los elementos de su primer elipsoide que se utiliza en América del Norte y en 1880 publica el segundo. Un gran impulso instrumental es el dado por el geodesta francés **Françoise Perrier (1833-1888)** en 1868 con los círculos acimutales para la observación de triangulaciones de primer orden, que son construidos por los hermanos **Brünner**. En 1885 **Eduard Jäderin (1852-1923)** emplea los hilos en suspensión para la medida de bases geodésicas.

Con los trabajos realizados a lo largo del siglo se han determinado entre otros los siguientes elipsoides por el método de los arcos:

<i>Nombre</i>	<i>Año</i>	<i>a</i>	<i>1/α</i>
Comisión del metro	1799	6375,737	333,29
Delambre	1810	6376,985	308,64
Walbeck	1819	6376,896	302,8
Airy	1830	6377,5634	299,324964
Everest (UK y USA)	1830	6377,2763	300,8017
Everest (Ind.-Paquist)	1830	6377,301	300,8017
Bessel	1841	6377,397155	299,1528129
Struve	1860	6378,297	294,73
Clarke	1866	6378,2064	294,978698
Clarke	1880	6378,249145	293,465
Helmert	1906	6378,2	298,3

Es en el siglo XIX cuando la mayor parte de los científicos de elite establecen y desarrollan las bases de la Geodesia matemática y experimental.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), astrónomo, geodesta y matemático, nació en Brunswick, se doctoró en la Universidad de Helmstedt con la demostración del teorema fundamental del álgebra. Fue profesor de Astronomía y director del observatorio de Gotinga desde 1807 hasta su muerte en esta ciudad. Inventó el heliógrafo, determinó el coeficiente de refracción por medida de distancias cenitales y estableció el método de alturas iguales para determinar simultáneamente la latitud y la longitud. Diseñó, calculó y compensó, utilizando por primera vez en Geodesia el método de *mínimos cuadrados*, la red geodésica del reino de Hannover en 1821 y, como consecuencia del tratamiento de los problemas relativos al cálculo de triangulaciones encontrados en estos trabajos, como se dijo antes, dio las bases, en su *“Disquisitiones circa superficies curvas”* de 1828, de la geometría diferencial de superficies de uso obligado en Geodesia geométrica y dinámica: introdujo las coordenadas geodésicas sobre una superficie, el concepto de curvatura total y su teorema egregium. Con los estudios sobre aplicabilidad de superficies y la introducción de la esfera de curvatura media resolvió los problemas geodésicos directo e inverso y en 1822 estableció las bases de la transformación conforme entre el elipsoide y la esfera que conduciría posteriormente al fundamento matemático de la proyección UTM. Los principios del método de mínimos cuadrados habían sido establecidos por **Mayer** en 1748, **Laplace** en 1787 y **Legendre** en 1805. Gauss expone este método junto con la distribución normal de errores de observación en su obra *“Teoria Motus Corporum Coelestium”* en 1809 aunque ya lo había aplicado en 1801 para calcular la órbita del asteroide Ceres, es de destacar que Gauss no dedicaba mucho tiempo a publicar sus investigaciones.

Gauss inició en 1823 la medida de un arco de meridiano entre Altona y Gotinga y otro de paralelo en Hannover, estos trabajos geodésicos en Alemania fueron continuados por **Bessel** y **Baeyer (1794-1885)** que llegaron a cubrir todo el territorio alemán por una red geodésica que enlazaría con los trabajos efectuados en Francia, en los países bálticos y en los países de la Europa Central, haciendo posible el enlace con los [trabajos geodésicos realizados en Rusia](#).

También Gauss estableció el fundamento teórico de la Geodesia con la definición de la superficie matemática de la Tierra como la superficie equipotencial del campo de la gravedad más próxima a la superficie de los mares en equilibrio. Posteriormente, en 1872, el matemático alemán **Johann Benedict Listing (1808-1882)** dio a esta superficie el nombre de *geoide*. La superficie del elipsoide servía para realizar cálculos matemáticos pero no era suficientemente precisa como figura de la Tierra, además aparecían las llamadas desviaciones relativas de la vertical, ángulos que forman las correspondientes normales al geoide con las normales al elipsoide, dando estas diferencias otro método para determinar los parámetros del elipsoide terrestre que es conocido como *método de las áreas*.

El problema de la determinación de la figura matemática de la Tierra quedaba planteado en la obtención de una superficie equipotencial del campo de la gravedad, por consiguiente había que determinar la función geopotencial. Esta función está formada por el potencial gravitatorio de las masas de la Tierra y por el potencial centrífugo debido al movimiento de rotación. La función que representa este último potencial es muy sencilla y no presenta problemas, sin embargo la función potencial gravitatorio es más complicada y es a la que se le ha prestado toda la atención. En el exterior de las masas de la Tierra la función

potencial es una función armónica por tanto para determinarla debemos integrar una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico eligiendo unas adecuadas condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno vienen dadas por la ecuación fundamental de la gravimetría que viene a relacionar el potencial perturbador (diferencia entre el geopotencial y el potencial de un modelo terrestre de comparación) y su derivada según las líneas de fuerza del campo con las anomalías de la gravedad, y estas pueden obtenerse sin dificultad sobre la superficie de la Tierra. Se llega así al establecimiento del clásico problema de Hilbert o tercer problema de contorno de la teoría del potencial: determinar una función armónica en el exterior del volumen limitado por una superficie conociendo los valores que sobre esta superficie toma una combinación lineal de dicha función y su derivada según la normal exterior a dicha superficie. El principio de Dirichlet dice que este problema tiene solución y esta es única.

Sin embargo, no seamos optimistas. El problema que presenta la Geodesia no es exactamente el problema de Hilbert. En primer lugar la superficie de contorno sobre la que se conocen los datos es la superficie física de la Tierra, que es desconocida. En segundo lugar la dirección en la que se conoce la derivada del potencial perturbador en un punto no es la normal a la superficie física de la Tierra sino la dirección de la normal a la superficie equipotencial que pasa por ese punto. Nos encontramos, por tanto, ante un problema de contorno de frontera libre y derivada oblicua. Que se sepa este problema no ha sido resuelto todavía por la Matemática de forma completamente satisfactoria para tratar el problema que nos ocupa.

Se comprende fácilmente que este problema llamara la atención de los matemáticos y que se tratara de darle solución, si no exacta si al menos aproximada.

También en el siglo XIX se realizaron [trabajos geodésicos en América, en Asia y en África](#). Los trabajos geodésicos en América del Norte condujeron a la medida de largos arcos de meridiano y a la obtención del elipsoide de **Hayford** que posteriormente fue adoptado por la UIGG como Elipsoide Internacional.

En el siglo XIX la teoría del potencial fue desarrollada con multitud de teoremas. **Jorge Gabriel Stokes (1819-1903)** publicó en 1849 una memoria titulada "*On the variation of gravity at the surface of the Earth*", (Trans. of the Cambridge Phil. Society, VIII, Part V, 1849, pp 672-695). Allí aparece el primer desarrollo de la función potencial y se demuestra que si la superficie exterior de un cuerpo es una superficie de nivel, el potencial es independiente de la repartición interior de la materia (Teorema de Stokes). Stokes resuelve el problema de contorno con su famosa fórmula integral y determina el potencial perturbador a partir de anomalías de la gravedad. Como la gravedad se mide en la superficie física de la Tierra debe reducirse al geoide lo que precisa conocer las densidades de la corteza terrestre. Toda esta teoría está basada en dos hipótesis aproximativas: que la superficie de contorno es una esfera y que fuera de esta esfera no hay masas. Hubo que esperar más de cien años para que el geodesta ruso **Mikhail Sergeevich Molodensky (1909-1991)** pudiera plantear el problema en la propia superficie de la Tierra, aunque, debido a los imponderables antes citados, también da soluciones aproximadas, coincidiendo la solución de Stokes con el primer término de la aproximación.

Mientras esto sucede, la matemática va preparando el camino para los desarrollos posteriores. **Georg Green (1793-1841)** da sus famosas identidades, **Henry Poincaré (1854-1912)**, demostró que el aplanamiento terrestre tenía un límite y formuló la rotación de un modelo de Tierra constituido por un manto elástico y un núcleo líquido y presentó su famosa relación entre el potencial perturbador, la gravedad normal y la ondulación del geoide, que permite determinar los puntos del geoide por sus distancias al elipsoide de referencia. Los estudios sobre mareas realizados por **Laplace** fueron continuados por **William Thomson** más conocido por **Lord Kelvin (1824-1907)** que desarrolló una teoría de mareas para una Tierra elástica e introdujo el análisis armónico en este campo. **George Darwin (1845-1912)**, hijo de Charles Darwin, aplicó las teorías de Lord Kelvin que fue su maestro y se le considera el creador de la teoría de mareas terrestres para una Tierra fluida y viscosa, estudia la fricción en el interior de la Tierra y predice la existencia de mareas de carga sobre la corteza elástica. **John Henry Pratt (1809-1871)** presenta su modelo isostático el 23 de octubre de 1854 y **Airy** presenta el suyo el 25 de enero de 1855, ambos en la Royal Society de Londres. El astrónomo francés **Hervé Faye (1814-1903)** dio una interesante interpretación de las anomalías de la gravedad basándose en las ideas de Pratt y Airy.

Otro gran matemático, geodesta y astrónomo fue **Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)**, director del observatorio de Königsberg, que midió el arco prusiano en 1838, determinó el primer valor fiable del aplanamiento de la Tierra y cuyo elipsoide de 1840 ha formado parte de algunos datums europeos. **Jean Baptiste Fourier (1786-1830)** nos da sus métodos de análisis armónico y la famosa transformada de tantas aplicaciones posteriores a la Geodesia. **Legendre** trabaja en el mismo sentido.

Bernhard Riemann (1826-1866), con sus teoremas sobre la transformación conforme, y **Élie Cartán (1869-1951)** inician los fundamentos de la moderna geometría diferencial que continuada con los trabajos de **Antonio Marussi** está teniendo amplia repercusión en Geodesia tridimensional diferencial; el estudio de referencias móviles y coordenadas geodésicas holónomas es de uso obligado en gradiometría y base de los modelos matemáticos que se aplican en el trabajo con satélites gradiométricos para el estudio fino del potencial gravitatorio terrestre.

En 1888 **Karl Friedrich Küstner (1856-1936)** observa variaciones periódicas de la latitud de un observatorio determinada por el método de **Talcott** y el experimento Berlín-Waikiki de 1891-92 demuestra que el eje de rotación de la Tierra no está fijo en la corteza. Para el estudio de este interesante fenómeno se crea en 1899 el *Servicio Internacional de Latitudes*.

Las ondas electromagnéticas fueron estudiadas por **James Clerk Maxwell (1831-1879)** y el francés **Hippolyte Louis Fizeau (1818-1896)** fue el primero en medir la velocidad de la luz de forma precisa en 1849. La aplicación de las ondas electromagnéticas a la medida de distancias en Geodesia fue iniciada por **Albert Abraham Michelson (1852-1931)**, después en 1948 el sueco **Erik Bergstrand** inventó el geodímetro y **Trevor Lloyd Wadley (1920-1981)** en 1956 el telurómetro. Ahora estos instrumentos están muy perfeccionados con el concurso de la tecnología láser y la informática.

En 1851 **Jean Bernard Foucault (1819-1868)** demostró la rotación de la Tierra con el experimento de su famoso péndulo.

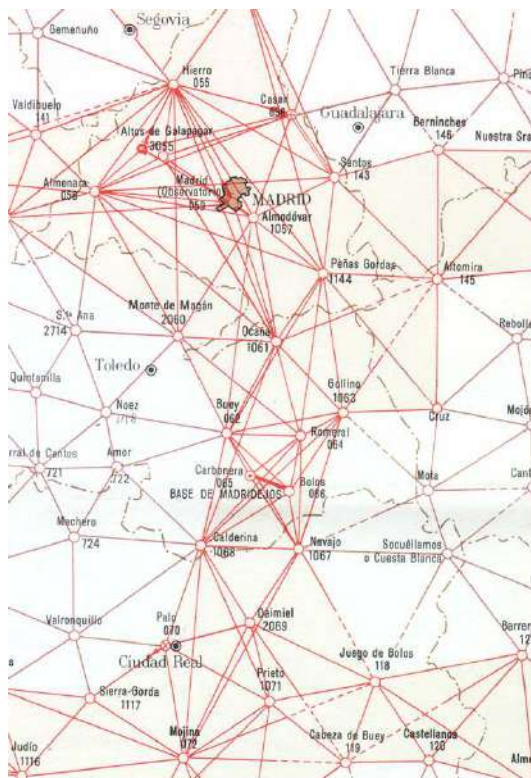


Figura 13. Red geodésica del centro de España.

Mención aparte merecen los [trabajos geodésicos realizados en España en el siglo XIX](#), especialmente dirigidos a la formación del Mapa Nacional (Figura 13). La importancia y necesidad para España de este Mapa fue advertida en diversas ocasiones por la [Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid](#). Esta es la época en la que sobresale un insigne geodesta, Don [Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero \(1825-1891\)](#) (Figura 14) que, además de la invención de su famosa regla, de una forma u otra sintetiza los avances geodésicos españoles en este siglo.

Por un Decreto de 3 de noviembre de 1856, firmado por Narvaez, se crea la Comisión Nacional de Estadística, en cuyo reglamento se dice “Corresponde a la primera sección: La carta geográfica de España. Los planos topográficos para su aplicación catastral. La carta forestal y geológica...”

Es de destacar que en ciertas ocasiones las previsiones iban por delante de los hechos, pues en 1862 ya se dispone por el Ministerio de Estado el enlace de las redes de Portugal y Francia con la de España. También es digno de mencionar que por Decreto de 18 de mayo de este mismo año se crea el negociado de cálculos en la Junta General de Estadística dotándosele de personal y medios propios y preconizando el uso del método de mínimos cuadrados.

Para la realización del Mapa de España como misión fundamental, por De-

creto de 12 de septiembre de 1870 firmado por el Regente D. Francisco Serrano y propuesto por el Ministro de Fomento D. José Echegaray, entonces Académico y más tarde Presidente de la Real Academia de Ciencias, se creó el Instituto Geográfico dentro del ministerio de Fomento. Con la misma fecha se nombra Director General de dicho Instituto al coronel de Ingenieros, D. Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero.



Figura 14. Retrato de D. Carlos Ibáñez.

También en el siglo XIX se realizan los [trabajos geodésicos de enlace de Europa con África](#), una de las operaciones geodésicas de más envergadura del siglo no sólo en España sino en toda Europa, y en la que también participó D. Carlos Ibáñez. Los trabajos de observación comenzaron el día 9 de septiembre de 1879 y se dieron por terminados el día 4 de octubre del mismo año. Entre otros instrumentos se utilizó un círculo meridiano portátil fabricado por los hermanos Brünner en París y un anteojito acodado de pasos Repsold de 1868. La labor del General Ibáñez en la dirección de estos trabajos fue reconocida por el Gobierno con la concesión del título de Marqués de Mulhacén en 1889.

4.7. Siglo XX

Dada la gran cantidad de trabajos geodésicos realizados en este siglo sólo reseñaremos los hechos más sobresalientes. Comienza el siglo con la aparición de la obra de **Friedrich Robert Helmert (1843-1917)** "*Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*", que viene a sintetizar los trabajos

geodésicos hasta entonces y que ha servido y sirve como libro de referencia inexcusable. **Helmert** es el introductor del método de *nivelación astrogeodésica* para la determinación del geoide a partir de desviaciones de la vertical. En 1900 crea el Sistema Gravimétrico de Viena y en 1901 da su fórmula de la gravedad normal.

En 1900 comienzan las medidas de mareas terrestres con péndulos horizontales.

En 1903 se realizan las primeras observaciones gravimétricas en el mar con barómetros por **Oscar Hecker**.

En 1904 **Kühnen** y **Furtwänder** miden la gravedad absoluta en Potsdam y su valor es aceptado como origen del sistema mundial, aunque en 1950 se demostró que su valor era 14 miligales mayor del real. En 1906 aparece la balanza de torsión de **Lorand Eötvös (1848-1919)** y las investigaciones isostáticas de **Hayford** y **Helmert**.

En 1909 el geodesta norteamericano **John Fillmore Hayford (1868-1925)** con datos de la red geodésica de los Estados Unidos y aplicando el *método de las áreas* con la hipótesis isostática de Pratt, publica los resultados de su elipsoide que posteriormente es adoptado como elipsoide de referencia Internacional. Se establece el sistema de gravedad de Potsdam.

En 1910 **Poincaré** resuelve el problema del movimiento del polo para una Tierra con núcleo líquido.

En 1911 aparecen los trabajos de **Augustus Edward Hough Love (1863-1940)** que describen la marea de una Tierra elástica por medio de los llamados números de Love que sirven para caracterizar las deformaciones producidas por las fuerzas de marea.

En 1914 **Schweydar (1877-1959)** realiza la primera observación de mareas terrestres con un gravímetro y en 1921 aparece el famoso desarrollo armónico de **Doodson (1890-1968)** del potencial de marea.

En 1919 se funda la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG).

En 1923 se desarrollan las medidas de gravedad con péndulos submarinos por el geodesta holandés **Félix Andries Vening-Meinesz (1887-1966)**.

En 1924 se utilizan los hilos invar para la medida de bases. En este mismo año se adopta el elipsoide Internacional de **Hayford** por la Asociación Internacional de Geodesia en la Asamblea de Madrid.

En 1928 **Vening-Meinesz** publica un libro con las fórmulas que llevan su nombre y que determinan las componentes de la desviación de la vertical a partir de medidas gravimétricas. En 1929 presenta un aparato tripendular para la medida de la gravedad en el mar. También aparecen los primeros gravímetros de muelle de **Ising** y **Lejay**.

En 1930 el geodesta italiano **Giovani Cassinis** calcula la fórmula de la gravedad normal que es adoptada como fórmula internacional. Se perfeccionan los péndulos horizontales. Se realizan experiencias con gravímetros marinos y se utiliza el péndulo reversible para medidas absolutas en Washington y Teddington por **Clark**, **Heyl** y **Cook**.

En 1935 **Nicolás Stoyko** descubre las variaciones estacionales de la velocidad de rotación de la Tierra.

En 1936 aparecen los cálculos de un geoide gravimétrico de **Harold Jeffreys (1891-1989)** e **Hirvonen**. Se desarrolla la teoría de errores en nivelación por **Jean Vignal**. Se presentan correcciones a las observaciones de gravedad en plataformas móviles por **Bowie**. Se estudia el problema de contorno de la Geodesia Física por **Krassowsky** y **Michailov**.

En 1937 **Kukkamäki** estudia la refracción y la nivelación con importantes resultados.

Las observaciones de eclipses de Sol y de ocultaciones de estrellas por la Luna proporcionan datos suficientes para la determinación de los parámetros del elipsoide terrestre y para la unión en un mismo sistema de referencia de puntos de la superficie terrestre alejados. Las observaciones de estos fenómenos proliferan en la primera mitad del siglo XX. Son de destacar los métodos empleados por **John O'Keefe (1916-2000)** del U.S Army Map Service para la observación de ocultaciones y los métodos para la observación de eclipses de **Atkinson**, **Kukkamäki**, **Linblad**, **Tadeusz Banachiewicz (1882-1954)**, **Platzeck**, **Mairzegui**, **Gaviota**, el austriaco afincado en los Estados Unidos **William Markowitz (1907-1998)** con su famosa cámara lunar y nuestros más cercanos **José María Torroja (1919-1994)** y **Vicente Bongera**.

La primera campaña de observación de un eclipse de Sol con fines geodésicos fue organizada por **Banachiewicz** en el eclipse del 19 de junio de 1936 observando desde Japón, Siberia y Grecia. Siguió el eclipse del 9 de julio de 1945 observado por expediciones finlandesa y sueca. El eclipse del 20 de mayo de 1947 fue observado también por astrónomos escandinavos desde Brasil y Costa de Oro. El eclipse del 4 de mayo de 1948 fue observado por astrónomos norteamericanos desde diferentes lugares. La Universidad Complutense de Madrid comenzó su participación en la observación de eclipses con fines geodésicos con el eclipse del 25 de febrero de 1952 desplazando una expedición a Cogo (Guinea Ecuatorial) en el que se ensayó por primera vez el método fotométrico afocal de **Torroja-Bongera** con registro cinematográfico. Posteriormente se volvió a participar en la observación del eclipse de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) en el que llegaron a montarse 36 expediciones de diversos países. Los resultados españoles, obtenidos con un método perfeccionado del anterior llamado focal o parcial, fueron de primera calidad. También observaron Torroja y Bongera el eclipse de 1959 en El Aaiun (Sahara Occidental).

En 1940 aparecen los trabajos del geodesta finlandés **Weikko Alexanteri Heiskanen (1895-1971)** sobre aplanamiento de elipsoides de dos y tres ejes, sobre cartas de anomalías de la gravedad y sobre correcciones isostáticas siguiendo la hipótesis de Airy. Algunos elipsoides determinados por el método gravimétrico en esta época son

También se utiliza el método de las áreas y métodos mixtos. Elipsoides relevantes determinados en el siglo XX, los últimos nombrados según el Sistema de Referencia Geodésico que representan, son

En 1943 el sueco **Bergstrand** inventa el geodímetro, primer distanciómetro con ondas de luz, que empieza a utilizarse en 1950.

<i>Nombre</i>	<i>Año</i>	<i>1/α</i>
Helmert	1908	298,2
Helmert	1915	296,7
Bowie	1917	297,4
Heiskanen	1928	296,7
Heiskanen	1957	297,4

<i>Nombre</i>	<i>Año</i>	<i>a</i>	<i>1/α</i>
Hayford Internacional	1924	6378,3880	297,00
Heiskanen	1919	6378,4000	298,20
Jeffreys	1948	6378,0990	297,10
Krassowsky	1940	6378,2450	298,30
Hough	1959	6378,2700	297,00
Oxford	1959	6378,2010	297,65
Fischer	1960	6378,1660	298,30
GRS67	1964	6378,1600	298,25
GRS80	1980	6378,1370	298,26
WGS84	1984	6378,1370	298,26
T/P IERS	1992	6378,1363	298,26

Cien años después de los trabajos de Stokes se produce el último avance en el conocimiento de la figura de la Tierra; este es debido a los trabajos de M. S. Molodensky y sus colaboradores del Instituto de Geodesia, Fotogrametría y Cartografía de Rusia. Estos científicos plantean el problema de contorno de la Geodesia Física en la propia superficie física de la Tierra, evitando por una parte el considerar la esfera como figura aproximada y por otra el conocimiento de las densidades de su interior. Demuestran que el potencial exterior de la Tierra puede ser determinado a partir de medidas en su superficie. Sin embargo, al no estar resuelto el problema matemático general que nos garantice existencia y unicidad de solución del problema de contorno de frontera libre y derivada oblicua, obliga a estos geodestas a realizar otro tipo de aproximaciones. El problema de la frontera libre lo resuelven trabajando en una superficie matemáticamente bien definida que no se aparta mucho de la superficie topográfica, y el problema de la derivada oblicua queda resuelto por medio de unos cambios de variable que introduce en una ecuación integral. En este método el geoide, o cuasigeoide, es un subproducto, que sirve para mantener la estructura geodésica necesaria para dotar a todos los puntos de la Tierra de un sistema de altitudes acorde con la realidad física del planeta.

En 1945 aparecen publicados los trabajos de **Mikhail Sergeevich Molodensky (1909-1991)** no solamente sobre la determinación de la figura de la tierra sino sobre Geodesia tridimensional que también fue desarrollada por **Martín Hotine (1898-1968)** en 1956, aunque fue **Heinrich Bruns (1848-1919)** su introductor en 1878. Se efectúan triangulaciones Shoran.

En 1946 se realizan las primeras medidas con gravímetros absolutos de caída libre en Sevres por Volet. El geodesta finlandés **Yrjö Väisälä (1892-1971)** publica el método de triangulación estelar.

En 1947 se realiza la medida óptico interferométrica de bases de calibración

con el aparato de **Väisälä**.

En 1948 el también geodesta finlandés **Lauri Tanni** publica el primer mapa del geoide mundial obtenido por aplicación de la fórmula de Stokes. Por su parte **Guy Bomford (1899-1996)** y **James de Graaff-Hunter (1881-1967)** calculan un geoide a partir de desviaciones de la vertical.

En 1950 el japonés **Hitoshi Takeuchi (1920-2004)** resuelve por primera vez numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna las deformaciones elásticas de una Tierra no homogénea.

En 1950 se aplica la triangulación Hiran con precisión de 5 metros. Aparecen los niveles automáticos, los gravímetros de muelle de alta precisión y los gravímetros marinos Graf y LaCoste.

En 1950 a 1953 van apareciendo los ya citados trabajos de **Antonio Marussi (1908-1984)** sobre la denominada Geodesia Intrínseca que pronto se integra en la Geodesia Diferencial; el tensor de Marussi es básico en el estudio de problemas geodésicos de contorno.

En 1954 el sudafricano **Wadley** inventa el telurómetro, primer distanciómetro con microondas, que empieza a utilizarse en 1957.

En 1957 se utiliza la cámara lunar de **Markowitz**.

En 1957, el 4 de octubre se lanza el primer satélite artificial de la Tierra por los rusos, el **Sputnik 1**, el Sputnik 2 fue lanzado un mes después y en febrero de 1958 se lanza el primer satélite norteamericano **Vanguard I**.

En 1958 comienza la Geodesia por Satélites con las cámaras Baker-Nunn y fotografía con fondo de estrellas. La Geodesia espacial es la Geodesia basada en la utilización de objetos del espacio fuera de la superficie terrestre. En general la Geodesia espacial prescinde de la utilización del elipsoide de referencia y se obtienen posiciones de puntos independientemente de la dirección de la vertical. Con la Geodesia espacial se ha realizado el enlace de continentes alejados y se ha conseguido el establecimiento de un único sistema de referencia mundial donde se tienen las coordenadas tridimensionales de los puntos; se ha mejorado el conocimiento de la figura de la Tierra con modelos del geoide muy precisos; se ha avanzado en la determinación del centro de masas de la Tierra y se ha logrado un profundo conocimiento del movimiento de rotación de la Tierra.

En los años cincuenta se extiende el uso de la estadística en la compensación de redes con los trabajos de **Triensta**, **Arne Bjerhammar (1917-2011)**, **Wolf**, etc., y se establece el Datum Europeo ED50. Aparece el geoide astrogeodésico de Bomford, el geoide gravimétrico de **Heiskanen** y la red gravimétrica mundial de Woolard y Morelli. Se determinan los primeros armónicos del geopotencial por **O'Keefe**. Se finaliza la medida del arco desde Ciudad del Cabo a El Cairo.

En 1960 se lanzan los satélites ECHO I, ANNA 1B, Geos1 y 2, Diademe1-2, Oscar 14 y Timation.

En 1963 se crea el International Polar Motion Service, con sede en Mizusawa. Aparecen los gravímetros absolutos de **Sakuma** y **Faller**. Aparece el primer modelo de Mekometer.

En 1964 se lanzan los primeros satélites Doppler Transit por los EEUU que quedan operativos para uso civil en 1967. También en 1964 se lanza el ECHO II y en 1966 el Pageos. En 1965 se lanza el satélite Doppler y láser Bacon Explorer C de la NASA (que en 2012 continua activo).

En 1965 la Asociación Internacional de Geodesia crea la Subcomisión de Satélites Artificiales para el Oeste de Europa. De 1966 a 1976 se realiza la primera gran operación europea de Geodesia por Satélites denominada **WEST** (Western European Satellite Triangulation). Participan 17 países europeos con un total de 40 estaciones, entre ellos España a través de la Cátedra de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la UCM con dos cámaras balísticas, un equipo de tiempo Rhode Schwarz y un comparador Grubb Parsons. Se utilizaron los satélites pasivos ECHO I, ECHO II y Pageos. Como resultado de esta operación España quedó geodésicamente unida a Europa con dos vértices situados en la terraza de la Facultad de Ciencias. Las coordenadas de la estación en Madrid en este primer sistema europeo son $40^{\circ}27'03''$, $356^{\circ}16'33''$. Estos vértices, verdaderos símbolos del avance científico de la época, fueron destruidos cuando la Facultad de Matemáticas pasó al nuevo edificio en la Ciudad Universitaria.

En 1967 se establece el sistema de referencia geodésico 1967 con nueva fórmula para la gravedad normal. Se presenta el gravímetro absoluto de lanzamiento vertical de **Cook**, y los primeros gravímetros absolutos portátiles de **Faller** con precisiones de 5 centésimas de miligal.

En 1968 aparece el gravímetro superconductor de **Goodkind**.

En 1969 el Apollo 11 deposita en la Luna los reflectores láser y se miden distancias desde los observatorios de Lick y McDonald. También en 1969 se mide la primera gran base por VLBI entre Haystack y Greenbank.

En 1965-1970 se utilizan las cámaras balísticas en Geodesia por satélites. Se perfeccionan los equipos Doppler, se continúan lanzando satélites geodésicos y se desarrolla el receptor Mark I para VLBI. Aparecen las investigaciones de **Kaula** sobre teoría de satélites geodésicos, de **Bjerhammar** e **Hirvonen** sobre la Geodesia sin hipótesis, de **Kaula**, **Bjerhammar** y **Helmut Moritz** sobre investigaciones estadísticas del campo de gravedad y los de **Willem Baarda (1917-2005)** y **Bjerhammar** sobre fiabilidad de redes geodésicas. También se estudia la refracción geodésica por **Tengstrom**, la colocación mínimo cuadrática por **Krarp** y **Moritz** y la determinación de movimientos recientes de la corteza por **Boulanger**. Los modelos de geopotencial llegan al orden y grado 16 como el SE II. Se perfecciona el seguimiento Doppler de satélites. El movimiento del polo se determina con observaciones Doppler.

En 1970-1980 el avance de la Geodesia es espectacular. Se termina y adopta la IGSN71, Red Gravimétrica Internacional Estandarizada. Aparecen los sistemas de levantamiento inercial. Los gravímetros absolutos portátiles con precisión de 1 centésima de miligal. La gravimetría a bordo de helicópteros. También aparece el Terrameter, distanciómetro experimental de láser bicolor. Se despliega el sistema Doppler Tranet-2 y se perfeccionan los receptores Doppler como los JMR y los Magnavox. En cuanto a la VLBI se desarrollan los equipos Mark II y III y el primer sistema móvil.

También en estos años setenta se perfecciona el seguimiento láser a la Luna con nuevos reflectores depositados allí por los satélites Apollo14 y 15 y el Lunakhod II. El lanzamiento de satélites continúa con el DIAL, el Oscar 19, el PEOLE, los satélites láser STARLETTE (1975) y LAGEOS I (1976) que son unas esferas de 24 centímetros de diámetro con 60 reflectores y un peso de 47 Kg. En 1975 se lanza el primer satélite altimétrico Geos-3 y en 1978 el también altimétrico Seasat-1 de vida efímera (47 días).

En 1978, el 22 de febrero fue lanzado el primer satélite GPS del Bloque I, el PRN4.

Otros importantes avances en estos años los constituyen las investigaciones sobre movimientos recientes de la corteza con resultados experimentales en el este de Europa. Se obtienen perfiles de marea gravimétrica. Aparecen modelos de marea oceánica. Modelos de funciones covarianza del campo de gravedad. Se investiga la solución de grandes sistemas de ecuaciones (**Meissl**) y la Geodesia cuatridimensional (**Mather**). Se determina el WGS72 como sistema Geodésico Mundial y se termina la fase II de la retriangulación europea RETRIG con el sistema ED-79 (**Kobold**). Los modelos de geopotencial llegan al grado y orden 36 con los GRIM-2 y GEM-10B. Los sistemas de posicionamiento por satélites Doppler y láser llegan a precisiones relativas de 2 decímetros. Estas precisiones también son alcanzadas con medidas VLBI intercontinentales. Los parámetros de rotación de la Tierra quedan determinados con precisiones de 2 centésimas de segundo de arco.

En 1980-1990 se desarrolla la gravimetría marina y aerotransportada con precisiones de 1 miligal. Se contrastan los primeros gradiómetros. Se trabaja con seguimiento satélite a satélite. Se continúa y perfecciona el seguimiento láser de satélites y de la Luna. Se establecen las primeras redes geodésicas mundiales con VLBI para la definición del sistema de referencia de orden cero.

Se siguen lanzando satélites geodésicos como los Navstar 6 a 13 de GPS, los Nova 1 a 3, el Oscar 30, el Bulgaria 1300, el Meteor-3, el Geosat (1985-1990) de la NASA para determinar el geoide marino, el japonés láser Ajisai (1986), el Geo-IK y los rusos ETALON 1 y 2 (1989). El primer satélite GPS del Bloque II fue lanzado en febrero de 1989. Por su parte se desarrollan y comercializan receptores portátiles GPS de más de 10 fabricantes.

En esta década las investigaciones se dirigen fundamentalmente a la Geodesia integrada, Geodesia operativa, optimización de redes, rotación de la Tierra y determinación del geoide. Se realizan campañas de comparación de gravímetros absolutos en Sevres. Se establecen los Datums Norteamericanos NADS-83 y NAVD-87. Se determina y comienza a usarse el Sistema Geodésico Mundial WGS84. También se establece el Sistema Europeo ED87 y la Red Europea Unificada de Nivelación UELN-73. En la gravimetría se comienza la Red internacional de Bases de gravimetría absoluta IAGBN. Se obtienen los primeros resultados de la topografía marina a partir de altimetría de satélites. En el GPS también se logran levantamientos estáticos y cinemáticos con precisiones centimétricas relativas. En cuanto a modelos de geopotencial, se obtienen desarrollos hasta orden y grado 360 como el OSU86F.

Un objetivo de los trabajos de los años ochenta es aumentar la precisión de las determinaciones geodésicas, cualquiera que sea la técnica utilizada. La

determinación de geoides regionales comienza a lograrse con precisiones internas de 20 centímetros, las técnicas espaciales de posicionamiento alcanzan precisiones relativas de 1 centímetro y los parámetros de rotación de la Tierra se determinan con precisiones de la milésima de segundo de arco.

Es en la década de los ochenta cuando prácticamente todas las operaciones geodésicas de relieve tienen carácter internacional. Así surgen proyectos de diversa índole que se desarrollan en conjunto, entre ellos podemos citar: MERIT-COTES, WEDOC, WEGENER-MEDLAS, ADOS, Crustal Dynamics, etc.

En 1990-2000 continúan los desarrollos iniciados en la década anterior, presentándose ya resultados tangibles de gran precisión. Se establecen las redes continentales por técnicas GPS y las redes nacionales de orden cero. Un buen ejemplo es la red **IBERIA 95** establecida por los Institutos Geográficos de España y Portugal (Figura 15).



Figura 15. Red GPS Iberia95.

Se desarrollan métodos y comienza a aplicarse la nivelación con GPS y geoides. El GPS y la distanciometría de alta precisión permiten innumerables aplicaciones de la Geodesia a la Ingeniería. Se desarrolla el GPS cinemático para el posicionamiento en tiempo real de vehículos en movimiento en conjunción con redes permanentes de GPS que proporcionan en todo momento y lugar cobertura de datos para posicionamiento relativo.

La investigación se dirige al control de calidad de las redes GPS con el estudio de la propagación de errores de todo tipo. También se investiga el modelado de fuerzas no gravitacionales y los métodos gradiométricos.

Aparecen en estos años los modernos modelos de geopotencial como los estadounidenses OSU91A de 1992 y el EGM96 de 1996, y los GPM98 de Wenzel en 1998, entre otros. En paralelo aparecen los recientes trabajos sobre la determinación del geoides en los países desarrollados. Entre ellos destacaremos el Geoides Europeo determinado por el grupo del Prof. **Wolfgang Torge** y el Geoides Ibérico IBERGEO95, que es el primer geoides gravimétrico de la península.

sula Ibérica y su entorno, determinado en España por **Miguel. J. Sevilla** en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

En la Geodesia Espacial continúan los avances en VLBI, GPS y los modernos sistemas DORIS, PRARE y DGPS para aumentar la precisión y facilidad de seguimiento de satélites y posicionamiento de estaciones. Se lanzan nuevos satélites láser como el LAGEOS-2 (1999), el francés ESTELLA (1993) y el GFZ-1 (1995), también se lanzan satélites GPS del bloque II y se prepara el bloque III, La constelación de satélites GPS queda completamente operativa con 24 satélites, operados por la USAF proporcionan un recubrimiento global las 24 horas del día en todo tiempo. Los satélites están equipados con relojes atómicos de cesio y transmiten señales de tiempo precisas en frecuencias radio en banda L, desde 1998 se incorpora la nueva banda L2C. Van provistos de reflectores láser para órbita de precisión. Señales de cuatro satélites permiten obtener la posición del receptor. La órbita de estos satélites es casi circular ($i = 0,006$), con un perigeo de 26.408 Km. Una inclinación de $64,8^\circ$ y un periodo: 718 minutos (11h 58m), su peso es de unos 930 Kg.

Pero la novedad de los años noventa es el uso de satélites medioambientales altimétricos de amplio espectro, en 1991 se lanza el ERS-1 de la ESA (Agencia Europea del Espacio), en 1992 el TOPEX/Poseidon, misión conjunta de EE.UU. y Francia, en 1995 el ERS-2 de la ESA con 2516 Kg de carga que finalizó su misión en septiembre de 2011. En 1998 se lanza el GFO de la NASA, continuador del Geosat para estudio de la topografía del océano, finaliza en 2008. Estos satélites, además de servir como satélites de recursos y oceanográficos, proporcionan a la Geodesia medidas altimétricas con las que se perfeccionan los modelos de geopotencial, los geoides marinos y la determinación precisa de la SST (superficie topográfica del mar).

4.8. Siglo XXI

En 2000, el 15 de julio, se lanza con éxito el minisatélite alemán CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) para aplicaciones geocientíficas. Este satélite con un GPS a bordo tiene un seguimiento satélite a satélite en alta y baja órbita de modo continuo. Un acelerómetro de tres ejes en el centro de gravedad del satélite mide directamente las aceleraciones perturbadoras no gravitacionales y se obtiene una señal gravimétrica limpia; terminó su vida útil el 21 de septiembre de 2010. Tenía por misión determinar las características globales altamente precisas de larga longitud de onda del campo de gravedad de la Tierra y las variaciones temporales de este campo: Estimaciones globales del campo magnético principal y el de la corteza de la Tierra y la variabilidad espacio temporal de estos campos con gran exactitud. También obtener un gran número de datos de refracción de la señal GPS causados por la atmósfera e ionosfera, que pueden convertirse en temperatura, vapor de agua y contenido electrónico con buena distribución global.

En 2001, el 7 de diciembre, fue lanzado con éxito el satélite JASON-1 con fines geodésicos y oceanográficos como sucesor del TOPEX/Poseidon. Es una misión conjunta entre la NASA y el CNES francés. Su misión es para previsión oceánica, estudio de la altura de las olas y la velocidad del viento en superficie,

topografía del fondo del mar y fenómenos climáticos. Lleva a bordo altímetros y radiómetros, para posicionamiento lleva sistemas DORIS, láser y GPS.

En 2002, el 1 de marzo, se lanzó el satélite ENVISAT de la ESA sucesor de los ERS1 y 2, con más de 10 instrumentos a bordo es el mayor satélite de observación de la Tierra lanzado hasta la fecha. Sus objetivos son los mismos del JASON 1 y produce, además, imágenes SAR (Radar de Apertura Sintética). Comparando interferométricamente dos imágenes del SAR de la misma área tomadas por el satélite en dos tiempos separados se puede determinar, si existe, el desplazamiento de la superficie en la dirección de la emisión del satélite. También va provisto de sistema de seguimiento láser y DORIS.

En 2002, el 17 de marzo, se lanzó la misión por satélites GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment), es un sistema de dos satélites bajos con seguimiento satélite a satélite lo que proporciona información sobre variaciones temporales de la gravedad debidas al desplazamiento de masas de la Tierra, esto que permitirá controlar por primera vez las variaciones del nivel del mar para mejorar la determinación del geoide y otras aplicaciones oceanográficas e hidrológicas. Las misiones gravimétricas CHAMP y GRACE representan un desarrollo revolucionario en la determinación del campo de gravedad de la Tierra pues por primera vez se tienen sensores del campo de gravedad en el espacio. Entre sus resultados merecen destacarse los modelos precisos de geopotencial (por ejemplo EIGEN CG03C de 2005).

En 2003, el 12 de enero, se pone en órbita el satélite ICESAT para el estudio de las zonas polares y el 8 de octubre de 2005 fracasó el lanzamiento del CRYOSAT-1 con fines análogos.

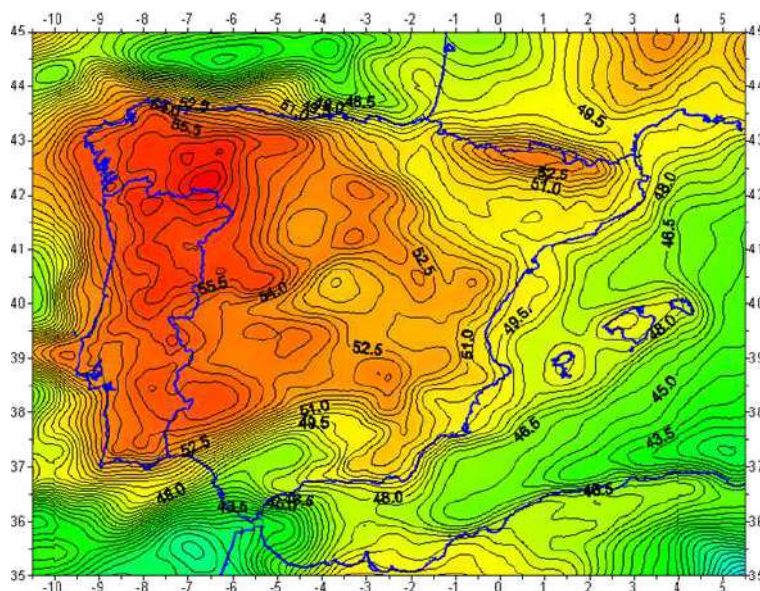


Figura 16. IBERGEO2006.

En 2006 se determinó un nuevo geoide en la península Ibérica denominado IBERGEO2006 (Figura 16) que viene a mejorar el IBERGEO95, amos del mismo autor. Los parámetros geodésicos de la zona de trabajo son: Sistema de

referencia WGS84, un área de 10 grados en latitud de $35 < \varphi < 45$ y 16 grados en longitud de $-10,5 < \lambda < 5,5$. En la zona central la longitud de un arco de meridiano de 1 grado es de 111,0346 Km. ($10^\circ = 1110,346$ Km.) y la de un arco de paralelo de 1 grado 85.39385694 Km. ($16^\circ = 1366,312$ Km.) con una relación entre arcos de 1,300264874. Los intervalos de las mallas resultantes son de 2,17 Km. $\times$ 2,67 Km. teniéndose en total 262144 puntos del geoide.

Las mejoras de este geoide han sido posibles por las siguientes razones:

1. Disponer de un nuevo modelo de geopotencial, el CG03C publicado por el GeoForschungsZentrum (GFZ) de Potsdam.
2. Disponer de valores absolutos de la gravedad.
3. Disponer de nuevos datos gravimétricos en España y Portugal y nuevos datos marinos. 22.909 datos más que en 1995.
4. Nuevo cálculo de anomalías aire libre a partir de gravedades medidas con los nuevos programas REDGRA con fórmulas precisas y todo referido al sistema WGS84.
5. Nueva validación de anomalías con gráficos parciales y otros métodos avanzados.
6. Utilizar un modelo digital del terreno más denso que el de 1995 sobre todo en zonas montañosas (MDT200).
7. Utilizar para comparación anomalías obtenidas a partir de datos de satélites ERS1-2 y TO-PEX/POSEIDON en zonas marinas.
8. Obtener la malla de anomalías de cálculo con anomalías Bouguer completas y después pasar a anomalías Helmert añadiendo la corrección por lámina Bouguer tomando las altitudes de una malla previamente calculada.
9. Disponer de una red de puntos de control GPS en el sistema ETRF89 y de nuevos parámetros de transformación de coordenadas del ED50 al WGS84 proporcionados por los Institutos Geográficos de España y Portugal.

Después de eliminar una corrección de Helmert, se ha aplicado colocación para obtener una superficie de referencia de altitudes ajustada a más de 13.220 puntos GPS/Nivelación de la red española de nivelación de alta precisión REDNAP. Los resultados han dado una desviación típica de 3,6 centímetros y una precisión relativa de 0,62 ppm. Este último producto se conoce como IEBERGE02008.

En 2007, el 27 de julio se adopta por Decreto el Sistema ETRF89 (European Terrestrial Reference System) como Sistema de Referencia Geodésico Oficial de España.

En 2008, el 20 de junio, se lanza el JASON-2 OSTM (Figura 17) como sucesor del TOPEX/Poseidon y JASON 1. Este satélite lleva a bordo tres altímetros, un radiómetro de microondas y sistemas de posicionamiento GPS, láser y DORIS. Con la información de estos satélites se ha comprobado la elevación del nivel

del mar que tanto está influyendo en la variación del clima, de 1992 a 2012 se ha obtenido una variación de 3,21 milímetros por año.



Figura 17. JASON 2.

En 2008 aparece el supermodelo de geopotencial EGM2008 de orden y grado 2160 determinado por la National Geo intelligence Agency (NGA) de los Estados Unidos, con precisiones sin precedentes. Utilizando este modelo el NGS de los EEUU ha determinado el modelo de geoide gravimétrico USGG2009 de EEUU, en una malla de $1' \times 1'$, que es el geoide más moderno publicado, con precisiones de 3 cm respecto a observaciones GPS/Nivelación.

En los años 2003 y 2009 entran en uso los nuevos Sistemas de Referencia Celestes y Terrestres (ICRS e ITRS) con nuevas teorías de precesión nutación, preparados por el IERS (International Earth and Reference Systems Service) para la determinación de los parámetros de orientación de la Tierra y lograr con sus productos altas precisiones en los cálculos astrométricos y geodésicos.

En 2009, el 17 de marzo se pone en órbita la misión GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) (Figura 18). El Instrumento principal es un gradiómetro electrostático de gravedad con seis acelerómetros altamente sensibles montados por pares (a 50 cm) a lo largo de tres ejes perpendiculares. Mide gradientes de la gravedad para perfeccionar la determinación del geoide con precisión centimétrica y del campo de gravedad. Lleva GPS y láser para posicionamiento preciso. Como resultados de las misiones descritas el IC-GEM (International Centre for Global Earth Models) dispone de 122 modelos de geopotencial la mayoría de libre disposición en <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>. En 2011 se obtiene el primer geoide de alta precisión con datos GOCE.

En 2010, el 8 de abril se lanza el satélite CRYOSAT-2. Es el primer satélite de la ESA dentro del Living Planet Programme, con la misión de observación de los hielos polares para estudios del calentamiento global y clima.

En 2010, el 20 de mayo se lanza el último satélite GPS del: Bloque IIF que ya incorpora la nueva frecuencia L5.



Figura 18. GOCE.

En 2010 se va completando la constelación rusa para posicionamiento y navegación GLONASS, cuyo desarrollo comienza en 1976, operada por el Ministerio de Defensa de la Federación Rusa y Roscosmos. Consta de 24 satélites en 3 planos orbitales separados 120° , los 8 satélites de cada plano están separados 45° . Las órbitas tienen un perigeo de 25518 Km. una inclinación de $64,8^\circ$ y un periodo de 11h 15m 44s. Llevan relojes de cesio y reflectores láser para órbitas precisas. También se aumenta la constelación china BeiDou para posicionamiento y navegación regional con 4 satélites en órbita estacionaria, el último satélite de este tipo se lanzó el 11 de abril de 2011, se espera que para 2020 se disponga de 35 satélites.

El 15 de agosto de 2011 se pone en órbita el HY-2 (HaiYang, que significa océano en chino). Este satélite estará en una órbita a 963 Km de altitud con una inclinación de $99,3^\circ$. El objetivo es controlar la dinámica del océano con sensores de microondas para detectar vientos de superficie, altitudes de la superficie y temperaturas. Llevará un altímetro de dos frecuencias en bandas Ku y C, un escaterómetro de microondas. Es gestionado por la Academia China de Tecnología Espacial.

El 28 de noviembre de 2011 se lanza el GLONASS-130, último hasta la fecha.

En 2012, el 9 de enero se pone en órbita el satélite chino ZY-3.

En 2013 puede estar operativo el sistema de navegación por satélites europeo GALILEO. Tiene por objeto dotar a Europa de su propio sistema de navegación por satélites y crear una estructura global para servicios múltiples. Será completamente autónomo y coordinado con GPS y GLONASS. Ya se han lanzado dos satélites experimentales de la familia GALILEO, los GIOVE A y B (2008) para estudios de calibración y transmisiones y el primer satélite de la serie en 2011. En este proyecto participa España con una aportación del 10%. Cuando la constelación esté completa contará con 30 satélites, 27 operativos y 3 en reserva. Se moverán en tres planos orbitales con 9 satélites en cada plano separados 40° . Las órbitas circulares tienen un semieje de 23617 Km, una in-

clinación de 56° . Llevan a bordo relojes de rubidio y máseres de hidrógeno de última generación y emite señales en 10 bandas para diversas aplicaciones.

En proyecto y desarrollo están las siguientes misiones de Geodesia por Satélites: SARAL (2012) misión altimétrica oceanográfica. SENTINEL-3 (2013) misión de control de la Tierra y oceanografía operativa. JASON-3 (2014) misión altimétrica y oceanográfica continuadora del JASON 2. JPSS (2016) Satélite polar operativo para estudio del medio ambiente (Previos NPOESS y NPP). SWOT (2016) misión oceanográfica e hidrológica para estudios de depósitos de agua. JASON CS (2017) satélite continuador del JASON 2. WSOA (2006) Altimetro interferométrico en banda Ka. WITEX Microsatélites de baja cota para altimetría. ALTGPS Altimetría del mar con GPS, en estudio.

Para una puesta al día en cuanto a los desarrollos futuros de la Geodesia recomendamos consultar con la [Asociación Internacional de Geodesia](#) que continúa celebrando sus Asambleas Generales cada cuatro años en conjunción con las reuniones de la [Unión Internacional de Geodesia y Geofísica](#). Las directrices y publicaciones emanadas de la mencionada Asociación marcan las pautas del desarrollo moderno de la Geodesia y a ellas remitimos al lector para una continua actualización.

Referencias

- [1] AIG: Travaux de L'association Internationale de Géodésie (Tomos 1 al 30). Bureau Central de la AIG. París, 1995.
- [2] Conmemoración del centenario del General Ibáñez e Ibáñez de Ibero. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1991.
- [3] BEUTLER, G., DREWES, H., y VERDUN, A.: The New structure of the International Association of Geodesy viewed from the perspective of History. The Geodesist's Handbook 2004. Journal of Geodesy 77, pp. 566-575, 2004.
- [4] BLACHUT, T. J. y BURKHARDT, K. B. R.: Historical development of Photogrammetric Methods and Instruments. Am. Soc. for Phot and Rem. Sen. 1988.
- [5] CSTG: Misiones, Sistemas y Proyectos futuros. Boletín de la CSTG N° 8. 240 pp., (Sevilla, M. J. Tr. Ed.). Comisión VIII de la Asociación Internacional de Geodesia. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut. Munich. (RFA), 1987.
- [6] CSTG: Proyectos GPS para Geodesia y Geodinámica. Boletín de la CSTG N° 10. 264 pp., (Sevilla, M. J. Tr. Ed.) Comisión VIII de la Asociación Internacional de Geodesia. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut. Munich. (RFA), 1989.
- [7] CSTG: Nuevas Misiones por Satélites para Estudios de la Tierra Sólida Boletín de la CSTG N° 11. 263 pp., (Sevilla, M. J. Tr. Ed.) Comisión VIII de la Asociación Internacional de Geodesia. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut. Munich. (RFA), 1989.

- [8] EHRNSPERGER, W.: Final Report on the Wertern European Satellite Triangulation WEST. Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung. Helt Nr. 37. Munich, 1978.
- [9] EKMAN, M.: A concise history of the theories of tides, precession nutation and polar motion (from antiquity to 1950). *Bul. Int. Mareé*, 109, pp 7795-7848, 1991.
- [10] FERREIRO, L. D.: *Measure of the Earth*. Basic Books New York. 2011
- [11] FISCHER, I.: The figure of the Earth – changes in concepts. *Geophys. Surveys* 2, 3-54. 1975.
- [12] FISCHER, I. K.: *Geodesy ? What's that*. Universe Inc. New York, 2005.
- [13] GUEDJ, D.: *La Medida del Mundo*. Ed. Península, 2001.
- [14] HOARE, M. R.: *The quest for the true figure of the Earth*. Science, Tech. And C. ASHGATE. 2005.
- [15] HAASBROEK, N. D.: *Gemma Frisius, Tycho Brahe and Snellius and their triangulations*. Publ Netherl Geodetic Comm, Delft, 1968.
- [16] IBÁÑEZ DE IBERO, Carlos: *El origen y progresos de los instrumentos de Astronomía y Geodesia*. Discurso leído en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas u Naturales en 1863, Madrid.
- [17] KEHLMANN, Daniel: *La medición del mundo: un fascinante encuentro entre la literatura y la ciencia* Maeva, 2006.
- [18] KING-HELE, D.: The shape of the Earth. *Scientific American*, vol. 217 N° 4, pp. 67-76, 1967.
- [19] *La forma de la Tierra. Medición del Meridiano 1736-1744*. Museo Naval, Madrid 1986.
- [20] LAFUENTE, A. y MAZUECOS, A.: *Los caballeros del punto fijo*. Ediciones del Serbal. 1987.
- [21] LEVALLOIS, J. J.: *Géodésie Générale*. Eyrolles. Paris, Tomo I. 1970.
- [22] LEVALLOIS, J. J.: The history of the International Association of Geodesy. *Bulletin Géodésique*, Vol. 54: 249-313, 1980
- [23] LEVALLOIS, J. J.: *Mesure de la Terre: 300 ans de Géodésie français*. Presses Ponts et Chaussées. París, 1988.
- [24] *Libros Preciosos*. Biblioteca de Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid, 2011.
- [25] MARTÓNEZ UTESA, M^a Carmen: *Ciencia y Milicia en el siglo XIX en España: El General Ibáñez e Ibáñez de Ibero*. Monografía N° 9. Instituto Geográfico Nacional. Madrid, 1995.
- [26] MERINO, Miguel: *Figura de la Tierra*. Anuario del Observatorio de Madrid, 1863.

- [27] NUÑEZ DE LAS CUEVAS, R.: Cartografía española del siglo XIX. En "Historia de la cartografía española". Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1982.
- [28] PERRIER, G.: Petit Histoire de la Géodésie. Alcan, París.
- [29] RUIZ MORALES, M. y RUIZ BUSTOS, M.: Forma y dimensiones de la Tierra. Ediciones del Serbal, Barcelona, 2000.
- [30] RUIZ MORALES, Mario: Los cosmógrafos Flamencos y Carlos V. Mapping nº 63, pp.20-36, 2000.
- [31] RUIZ MORALES, Mario: Las Medidas de la Tierra Departamento de Expresión Gráfica en Arquitectura y en la Ingeniería Área de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría Mapping Julio, 2006.
- [32] SEVILLA, M. J. y NÚÑEZ, A.: Determinación del elipsoide terrestre por el método de las áreas. Técnica Topográfica. Vol. IV, Nº 13, pp. 4-13. Madrid, 1976.
- [33] SEVILLA, M. J.: Geodesia por Satélites y Navegación. Técnica Topográfica. Vol. XII, Nº 54, pp. 7-16. (IAG Nº 129). Madrid, 1983.
- [34] SEVILLA, M. J.: Astronomía Geodésica. Topografía y Cartografía. Vol. I. Nº 6, pp. 30-39. (IAG Nº 139). Madrid, 1984.
- [35] SEVILLA, M. J.: Cartografía Matemática. Topografía y Cartografía. Vol. II. Nº 6, pp. 11-22. (IAG Nº 151). Madrid, 1986.
- [36] SEVILLA, M. J.: Mecánica Celeste Clásica. CSIC-UCM. Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIG), ISBN 84-87488-00-5. 289 páginas. Madrid, 1989.
- [37] SEVILLA, M. J.: El GPS y las Misiones al Planeta Tierra. Topografía y Cartografía. Vol. VII. Nº 39, pp. 9-19. Madrid, 1990.
- [38] SEVILLA, M. J.: El impacto de los desarrollos tecnológicos en la formación físico-matemática del Topógrafo. Topografía y Cartografía. Vol. IX, Nº 52, pp. 23-32. Madrid, 1992.
- [39] SEVILLA, M. J.: A New gravimetric geoid in the Iberian Peninsula. Bureau Gravimétrique International, BGI Bulletin D'information Nº 77 and International Geoid Service, IGeS Bulletin Nº 4 (IAG special issue "New Geoids in the World"), pp.163-180. Toulouse (Francia), 1995.
- [40] SEVILLA, M. J.: Actualización de Cálculos Astronómicos I.A.G. Cursos y Seminarios Nº 8. ISBN 84-87488-08-0. 190 páginas. CSIC-UCM. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid, 2003.
- [41] SEVILLA, M. J.: IBERGEO 2006: Nuevo geoide centimétrico de la península Ibérica. Topografía y Cartografía Vol. XXIII nº 135. pp. 3-10. Madrid, 2006.
- [42] SEVILLA, M. J.: Cálculos de Precesión y Nomenclatura I.A.G. Cursos y Seminarios Nº 9. ISBN 978-84-87488-09-2. 130 páginas. CSIC-UCM. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid, 2009.

- [43] SEVILLA, M. J.: La Geodesia: de Jorge Juan a nuestros días. En Jorge Juan y la Ciencia Española. Publicación de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, pp. 59-69. Madrid, 2010.
- [44] SMITH, J. R.: Introduction to geodesy: the history and concepts of modern geodesy. Wiley New York, 1997.
- [45] SOLER, T.: A profile of General Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero: first president of the International Geodetic Association. Journal of Geodesy, Vol. 71 pp. 176-188, 1997.
- [46] SOLER, T. y RUIZ MORALES, M.: Letters from Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero to Aimé Laussedat: new sources for the history of nineteenth century geodesy. J. Geodesy 80, pp. 313-321, 2006.
- [47] TODHUNTER, I.: A history of the mathematical theories of attraction and of the figure of the earth. Dover Pub. Inc. New York, 1962.
- [48] TORGE, W.: The International Association of Geodesy (IAG) - More than 139 years of International Cooperation. Chronique I.U.G.I. N° 225, pp 4-12, 1995.
- [49] TORGE, W.: The International Association of Geodesy 1862 to 1922: from a regional project to an international organization. Journal of Geodesy Vol. 78, pp. 558-568, 2005.
- [50] TORROJA, J. M.: La Astronomía en el problema de la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra. Madrid, 1959.
- [51] TORROJA, J. M.: La obra científica de Jorge Juan. Revista Matemática Hispano Americana, N° Extra dedicado a Jorge Juan. Madrid, 1973.
- [52] TORROJA, J. M.: Jorge Juan y los antecedentes de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Revista de la Real Academia de Ciencias exactas, Físicas y Naturales, de Madrid, Tomo LXVII, cuaderno 1°. Madrid, 1973.
- [53] TORROJA, J. M.: Una discusión sobre la figura de la Tierra. En "CCL Aniversario de la medición del arco de meridiano", pp. 11-18. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1988.
- [54] TORROJA, J. M.: La gravitación universal y sus consecuencias. En "Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII", pp. 75-112. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1988.
- [55] TORROJA, J. M.: La personalidad científica del General Ibáñez e Ibáñez de Ibero, pp. 11-32, Historia de la Ciencia, RACEFN., Madrid, 1991.
- [56] TORROJA, J. M.: La Geodesia en el siglo XIX. En "Historia de la Matemática en el siglo XIX", pp. 275-300. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1994.
- [57] VANICEK, P. y KRAKIWSKY, E. J.: Geodesy: The concepts. North Holland P.C. Amsterdam. 1986.

- [58] VV.AA: La forma y Dimensiones de la Tierra. Medición del meridiano (1736-1744). Museo Naval Madrid 1987.
- [59] VERDÚ VÁZQUEZ, A.: Enlaces Geodésicos Intercontinentales. Investigación sobre los enlaces Occidentales Europa-África. Tesis doctoral Universidad Politécnica. Madrid 2007.
- [60] WANG, Y.M.; SALEH, J.; LI, X. y ROMAN, D. R. (2012) The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009): model development and evaluation. J Geod (2012) 86, pp. 165-180.

5. Complementos

5.1. Prolongación hacia España del meridiano de Francia (J. M. Torroja)

Las gestiones oficiales para esta operación se inician por parte del Ministro francés de Asuntos Exteriores **Talleyrand** con participación de los respectivos embajadores en París y Madrid y en las que intervino por parte española **José Chaix**, entonces subdirector del Observatorio Astronómico de Madrid.

Enviado por el “*Bureau des Longitudes*”, llegó **Mechain** a Barcelona el 5 de mayo de 1803 iniciando inmediatamente los reconocimientos para comprobar la posibilidad de las visuales y fijar el emplazamiento de los vértices desde los que deberían efectuarse las observaciones. En estos trabajos contó con la eficaz colaboración de **Fausto Vallés**, Barón de la Puebla. Recorrieron la costa valenciana y visitaron las islas. En la sierra del Espadán, el 12 de septiembre de 1804 enfermó **Mechain**, falleciendo el 20 del mismo mes en la casa del Barón de la Puebla, en Castellón, en cuyo cementerio descansan sus restos. A propuesta de **Laplace** el Bureau acuerda que la operación sea realizada por **Biot** y **Arago**.

Las operaciones geodésicas en Francia se completaron con la medida de un arco de $12^{\circ}13'$ del paralelo de París efectuada entre 1818 y 1823, con una nueva red que habría de servir de base para la nueva “*Carta de Francia*” que debía reemplazar a la de Cassini, que se completó en 1865 con el enlace de Francia con Inglaterra, bajo la dirección de **Legendre** entre 1845 y 1870 y una nueva medida de la meridiana de Francia entre 1870 y 1892.

5.2. Trabajos geodésicos realizados en Rusia (J. M. Torroja)

Los trabajos geodésicos en Rusia comenzaron por iniciativa del Zar Alejandro I quien invitó a dirigirlos a **José Rodríguez y González**, conocido por su participación en el enlace de las islas Baleares con la triangulación de la península en colaboración con **Biot** y **Arago**. En el libro de actas de la Universidad de Santiago, de la que **Rodríguez** era catedrático, se lee:

“Tuvo este Claustro la mayor satisfacción al ver con cuantas instancias fue V. convidado p^a que tomase a su cargo el importante destino de la

dirección del depósito geográfico del vasto Imperio de todas las Rusias, que S.M.I. sabe grangearse la estimación de los sabios atrayendo a sus dominios los de todas las naciones. Pero si bien este Cuerpo se honra en que un catedrático suyo hubiese merecido tantas distinciones, no puede menos que confesar cuanto se complace al ver que con firme y heroica resolución supo V. preferir a estas ventajas el destino de Profesor de Astronomía en el Rl. Museo de Ciencias Naturales y el encargo de la organización del Observatorio de Madrid con que S.M. acaba de agraciarme.”¹

Tras la renuncia de **José Rodríguez y González**, los trabajos geodésicos en Rusia fueron efectivamente iniciados bajo la dirección de **Federico Guillermo Struve** astrónomo alemán al servicio del Zar y el general Tenner, que observaron una cadena de 258 triángulos que cubrían un arco de meridiano de $25^{\circ}20'$ desde el Danubio hasta el norte, enlazada posteriormente con las redes europeas.

La Asociación Internacional de Geodesia en su reunión celebrada en Stuttgart en 1898 acordó se repitieran las medidas del arco efectuadas en el siglo XVIII en Laponia y Perú. Las nuevas medidas se hicieron en el norte de Suecia y Rusia entre 1899 y 1902 y en Perú entre 1899 y 1906 por la Sección de Geodesia del Servicio Geográfico Francés.

5.3. Trabajos geodésicos en América, en Asia y en África (J. M. Torroja)

Los trabajos geodésicos en América del Norte han presentado especiales dificultades a causa de la enorme extensión del territorio a cubrir. Para ello se ha medido un arco del paralelo de 39° de latitud norte de más de cuatro mil kilómetros de longitud, con una diferencia de longitudes entre sus extremos de $48^{\circ}46'$, así como un arco de 164 km. del meridiano de 98° W. En estos trabajos se llegaron a efectuar observaciones hasta distancias de 294 km. Esta amplia red de triángulos está dotada de numerosas observaciones astronómicas que dan mayor solidez al sistema, y han permitido efectuar un cálculo de conjunto de las redes de todo el continente desde el Canadá hasta Méjico a partir de un punto astronómico fundamental único. El elipsoide obtenido por **Hayford** en 1909 a partir de estas redes americanas fue adoptado por la UIGG como Elipsoide Internacional.

No han sido menores las dificultades en la India por su gran extensión. A partir de 1823 se iniciaron los trabajos geodésicos dirigidos sucesivamente por **Lambton, Everest, Wagh y Walker**, llegando a cubrir el territorio por una red homogénea de cerca de 25.000 km.

Respecto a las observaciones en África fueron iniciadas por **La Caille** en 1750 con la medida de un arco de un grado en el Cabo de Buena Esperanza. En el norte de este continente, en Argelia, comenzaron los trabajos en 1854 que terminarán en 1869 bajo la dirección del capitán **Perrier**, observándose una red

¹Ramón María Aller: D. José Rodríguez González (O matemático de Bermeo) Archivos de Seminario de Estudios Galegos (1929).

de triángulos que más tarde se unirá, en memorable operación, a la que más adelante nos referiremos, con la triangulación española.

5.4. Trabajos geodésicos realizados en España en el siglo XIX (J. M. Torroja)

Dejando aparte la época gloriosa de la cartografía mallorquina representada especialmente por el magnífico “Atlas” de **Abraham Cresques**, la necesidad de disponer de un mapa general de España fue ya apreciada por Felipe II, quien encargó a su cosmógrafo **Pedro de Esquivel**, catedrático de Matemáticas de Alcalá que *“recorriese y marcase por vista de ojos todos los lugares, ríos arroyos y montañas por pequeñas que fuesen, en su actual situación”*. Inicia los trabajos en 1566 pero muere Esquivel sin terminar el trabajo y encomendó el Rey su continuación sucesivamente a **Diego de Guevara** que también falleció poco después, y a su secretario **Alonso de Herrera**. Tanto los instrumentos utilizados como la mayor parte del trabajo se perdieron en el incendio del Escorial de 1671. El “Atlas del Escorial”, de veinte hojas, puede corresponder a este trabajo de **Esquivel**.

En 1743 los jesuitas **Martínez y de la Vega** prepararon un mapa de España, cuyo original se conserva en la Real Sociedad Geográfica. Dibujado a escala 1:400.000 representa el territorio de la península excepto la parte noroeste.

Pocos años más tarde, en 1751, el ilustre marino **Jorge Juan y de Santacilia**, que había participado en la medida de un arco de meridiano en el Perú, presentó un *“Método de levantar y dirigir el mapa o plano general de España, con reflexiones a las dificultades de pueden ofrecerse, por Don Jorge Juan, Capitán de Navío de la Real Armada”*. Da instrucciones detalladas sobre los métodos e instrumentos que utilizar *“que podrían construirse en Londres o en París”* y el personal necesario según sea la duración que quiera darse a la realización del proyecto. Agrupa el personal en compañías formadas por un Director particular, *“cuatro hombres inteligentes”*, dos subalternos *“no tan inteligentes”* y un *“delineador”*. Existirá además un *“Director General, que habrá de residir en la corte, al que se dotará del material necesario a fin de que averigüe la latitud y longitud de la corte”* y *“como los instrumentos concedidos al Colegio Imperial son muy propios para estas observaciones del Director General, se podrá valer de ellos”*. Pero este proyecto de Jorge Juan no se llevó a la práctica por el cese de su mentor el Marques de la Ensenada.

A fines del siglo XVIII el rey Carlos IV, firma en San Ildefonso, con fecha 19 de agosto de 1796, unas *“Ordenanzas del Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos del Estado y del Real Observatorio”*, en el artículo 7 adjudica al nuevo Cuerpo *“la formación de la Carta geométrica del Reyno”*. Tampoco esta disposición llegó a tener efectividad.

No podemos dejar de citar la meritoria labor cartográfica de **Tomás López**, **Vicente Tofiño**, de la Real Academia de la Historia, **Dionisio Alcalá Galiano**, **Felipe Bouzá**, **Domingo Fontán** y **Francisco Coello de Portugal**.

Tomás López (1730-1802) había sido enviado a París donde trabajó con los cartógrafos **La Caille** y **Jean Baptiste Bourguignon D’Anville (1697-1792)**. Formó numerosos mapas sin apoyo geodésico lo que dio lugar a defectos no des-

preciables. Su obra fue recogida por sus hijos, también cartógrafos, en un “Atlas geográfico de España” publicado en 1804. Por el contrario, **Vicente Tofiño (1732-1795)** observó una triangulación a lo largo de toda la costa como preparación de su “Atlas marítimo de España” (1789). Publicó además un “Derrotero de las costas de España en el Mediterráneo y en sus correspondientes de África para inteligencia y uso de las cartas esféricas”. **Dionisio Alcalá Galiano (1762-1805)** preparó un nuevo proyecto para la formación de un mapa de España que no tuvo mayor éxito. Ni lo tuvo el plan propuesto por **Felipe Bouzá (1759-1833)** a la Real Academia de la Historia.

Domingo Fontán (1788-1866) Catedrático de la Universidad Compostelana observó una red geodésica con una base en Lugo y dos mil vértices que habría de servirle de apoyo para la formación de la “Carta geométrica de Galicia” a escala 1:100.000 publicada en 12 hojas. En 1834 recibió el encargo de preparar una “Carta general del Reino”. El año siguiente se trasladó a Madrid como Catedrático de Astronomía y Director del Observatorio Astronómico. Pero lamentablemente la situación en que había quedado el Observatorio tras su ocupación por las tropas de Napoleón le impidió dar sus clases.

Más importante es la obra cartográfica de **Francisco Coello de Portugal (1822-1898)**. Ingeniero Militar, nacido en Jaén, cuya afición a la cartografía le llevó a dejar el Ejército para dedicarse de lleno a la formación de sus mapas que debían servir de complementos al “Diccionario geográfico-estadístico-histórico de España y sus posesiones”, publicado en 1845 por **Pascual Madoz**, nacido en Pamplona en 1806 y que llegó a ser Ministro de Hacienda. Para ello, además de recoger la información que pudo lograr en España en diversos centros, algunos de ellos militares, en los que hubo de vencer numerosas dificultades por parte de los correspondientes organismos directivos, se trasladó a París donde consultó la existente en el Depósito de la Guerra de Francia y en la Sociedad Geográfica de aquella capital.

Con esta información publicó un “Atlas de España y sus posesiones de Ultramar por D. Francisco Coello, Teniente Coronel, Capitán de Ingenieros”. Presentó su Atlas en varias formas. En una de ellas cada mapa va dentro de una carpeta de cartón en cuyo reverso se lee: “Condiciones de la suscripción. El Atlas general de España y sus posesiones de Ultramar constará de 65 hojas que se repartirán en el orden siguiente”. Incluye a continuación una relación que empieza por Madrid (provincia), la cuarta es un plano de Madrid, dos de Canarias, una de las islas Baleares, dos de la isla de Cuba, otras se refieren a las posesiones de África, Islas Marianas, Puerto Rico, tres de las Filipinas, un mapa general histórico y una “carta general de reunión”. Indica a continuación “En cada hoja, además del mapa de la provincia, figuran los planos particulares de sus principales poblaciones, y extensas noticias estadísticas e históricas, escritas por D. Pascual Madoz”, y sigue “Los precios por suscripción iguales en Madrid y en las provincias, son los que expresa la tarifa siguiente: Precio de cada mapa sin doblar en papel grueso 20rs. Id. doblado en papel más delgado, y con carpeta, 20rs. ...”

Es inconcebible que este Atlas fuera obra de un solo hombre y editada, prácticamente, a sus expensas, por lo que no es de extrañar que su publicación se suspendiera en 1875. De las 65 hojas previstas sólo se publicaron 32, correspondientes a distintas provincias, varias generales de la península y las de las posesiones de África, Puerto Rico, Cuba e Islas Marianas.

La labor de **Coello** fue calurosamente elogiada en el extranjero, especialmente en Francia, por geógrafos de la categoría de **Prudent** y **Marcel**, y por el alemán **Reichthofen** que dijo que los mapas de Coello “*deben reputarse como los mejores que existen de esta clase, y merecen especial mención los relativos al grupo complementario de las islas Filipinas, acerca de los cuales nada se ha hecho después que los supere.*”

D. Francisco **Coello** de Portugal fue miembro de la Real Academia de la Historia y Presidente de la Real sociedad Geográfica, entre cuyos fundadores figuró.

Es evidente el interés de la labor de estos cartógrafos en especial la de **Coello**, pero la realidad es que la formación de un Mapa Nacional debía ser una “*empresa nacional*” que había de ser emprendida por algún organismo nacional con esa misión y con los medios económicos necesarios.

5.5. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. (J. M. Torroja)

La Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales comprendió esta necesidad y en su libro de actas y en la correspondiente a la Sesión Ordinaria del día 31 de mayo de 1852 se lee:

“La misma sección de Ciencias Exactas con fecha 30 de Mayo presenta el informe pedido por la Academia acerca de los apuntes que sobre el levantamiento trigonométrico de la carta general de España había remitido el gobierno; cuyo tenor es el siguiente:

Ningún asunto de mayor interés ni de más reconocida utilidad puede ocupar a esta Corporación. La España se ha quedado atrasada respecto a todas las demás Naciones de Europa en el conocimiento exacto y circunstanciado de su suelo, a pesar de que él es la base material, por decirlo así, sobre la que deben descansar y apoyarse las mejoras y las perfecciones de infinitos ramos de la administración pública, y los progresos seguros y bien entendidos de su industria y de su bienestar. El honor mismo del país reclamaría..., que no se deje pasar más tiempo sin que con la energía de una voluntad decidida y con el noble empeño de vencer todo género de obstáculos cualquiera que sean los sacrificios que lleven consigo, se emprenda una obra tan necesaria y se adopten al plantearla todas las precauciones capaces de asegurar su éxito...

Bajo dos aspectos distintos puede considerarse el asunto sobre el que versa este informe. El modo de formar una carta geográfica envuelve en sí cosas que son puramente científicas o facultativas y otras que se refieren al sistema de ejecutar los trabajos, a la manera de plantearlos, y al orden según el cual debe procederse a fin de que no se malgasten el tiempo ni los recursos que en ellos hayan de emplearse...

De esta reflexión se desprende la importancia de que la formación de la carta geográfica sea un asunto a que el Gobierno de S.M. afecte determi-

nadas personas y recursos proporcionados bajo la condición de presentar cada año el resultado de lo que se hubiere adelantado en el precedente y el programa de lo que se hubiera de hacer en el venidero.

La Academia no mira como de su incumbencia descender a la organización de este personal, ni al cálculo de estos recursos; pero sin embargo no puede menos que hacer presente a V.E. que si se ha de realizar el pensamiento de la carta geográfica es preciso que desde luego se ocupen en llevarle a cabo varias comisiones que trabajando a la vez en diferentes parajes del Reino se encaminen a unir unas a otras sus operaciones y que tengan en la capital un centro de dirección destinado además a recoger los datos que ellas suministren y a ejecutar los cálculos que deben ser su resultado... cuanto mayor sea la actividad con que se ejecuten los trabajos y menor el tiempo que se tarde en concluirlos, tanto más grande será el ahorro de gastos y la economía de esfuerzos para llegar a obtener un resultado final satisfactorio.

Todo aconseja, pues, a juicio de la Academia que la formación de la carta geográfica de España se emprenda con ánimo resuelto de llevarla a cabo en el más corto plazo posible, así para lograr la seguridad de obtenerla como para hacer menos costosa su adquisición siendo, en el sentir de esta Corporación, hasta peligroso adoptar rumbos en semejante materia que lleven en su lentitud el sello de su ineficacia...

La historia de las tentativas hechas, hasta ahora en España para levantar la carta geográfica debe servir ya de lección y de enseñanza para resolver con acierto este difícil problema. En ella se ven varios pasos dados en diferentes épocas hacia tan importante fin sin ningún éxito y con pérdida de sacrificios cuantiosos..."

En la Gaceta de Madrid de 16 de enero de 1853 aparece un Real Decreto de fecha 11 del mismo mes, en cuya "Exposición a S.M." se lee

"La formación de la carta geográfica de España es una empresa científica de las más importantes, por no decir la primera de su género, y a la que conviene á V.M. consagrar activa atención, suficientes recursos y un decidido empeño."

Y entre las disposiciones del Real Decreto, figuran las siguientes:

"Artículo 1º. Bajo la inmediata dependencia del Ministro de Fomento se establecerá la Dirección de la Carta Geográfica de España, compuesta de una Junta permanente y los subalternos y auxiliares necesarios.

Artículo 3º. El Presidente de la Junta será como tal director general de todas las operaciones y comisiones relativas a la carta geográfica de España."

En otro Real Decreto de la misma fecha

*“Atendiendo a los méritos y circunstancias que concurren en el Mariscal de campo D. **Manuel de Monteverde**, Director que ha sido de la Escuela del Cuerpo de Estado Mayor del Ejército. He venido en nombrarle Director de la Carta Geográfica de España, con el carácter, consideración y atribuciones señaladas para dicho cargo en Mi Real Decreto de fecha de ayer.”*

Don **Manuel Monteverde y Bethencourt** era miembro de esta Real Academia de Ciencias desde 1851. De esta Comisión formaron parte también los Académicos Sres. **García San Pedro** como Vicepresidente, **Terrero, Luxán, Fernández de los Senderos, Subercase y Aguilar**. A ella se agregó el también Académico D. **Carlos Ibáñez**, por nombramiento del mes de noviembre de 1853.

Por otro Real Decreto de 14 de octubre del mismo año, 1853, publicado en la Gaceta del día 16 se disponía que

“La dirección del mapa de España a cargo de la Junta creada por Mi Real decreto de 14 de enero de este año, estará en lo sucesivo bajo la inmediata dependencia del Ministerio de la Guerra”.

5.6. Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero. (J. M. Torroja y M. J. Sevilla)

El mapa de España que por aquel entonces se proyectaba había de apoyarse en una red geodésica y ésta a su vez en una base que habría de medirse con la máxima precisión posible. Para estudiar las soluciones dadas a este problema en 1854 fueron comisionados al extranjero D. **Carlos Ibáñez** y D. **Frutos Saavedra**. Resultado de este viaje fue el proyecto de un *“Aparato para medir bases geodésicas”* que fue posteriormente construido bajo la dirección de Ibáñez en París por **J. Brunner**. Después de otros viajes a París y Bruselas, Ibáñez vuelve a España el 18 de Febrero de 1957.

Con este aparato, llamado *“Regla de Estadística”* o *“regla de platino”*, se midió una base en Madridejos (Toledo) durante los meses de mayo a octubre de 1858 por Ibáñez y Saavedra con la colaboración de los capitanes de Estado Mayor D. **Fernando Monet** y D. **Cesáreo Quiroga**. En 1859 se publicó un extenso tratado con el título *“Experiencias hechas con el aparato de medir bases perteneciente a la comisión del Mapa de España”*. Empieza con una *“Advertencia preliminar”* firmada por *“Carlos Ibáñez Coronel grad. Com. de Ingenieros y Frutos Saavedra, Coronel grad. Cap. de Artillería”*. La obra consta de once capítulos seguidos de seis apéndices. El aparato se compone de una regla de platino que forma termómetro metálico con otra de latón, descansando ambas en un banco de hierro. Después de una descripción minuciosa y de sus correcciones estudia con todo detalle su utilización en el campo.

Los resultados de esta memorable operación fueron expuestos con todo detalle en un nuevo volumen titulado *“Base central de la triangulación geodésica de España”* publicado en 1865, y el mismo año apareció una traducción al francés por el coronel A. **Laussedat**, profesor de la Escuela Politécnica de París, quien

enviado por el gobierno francés, había asistido como observador a la medida de la base. Fue también traducida al alemán. En esta operación se logró una extraordinaria precisión, con un error probable del orden de 1:5.800.000 de la longitud obtenida que era de 14.662.885 metros, mientras que el error logrado en aquella época en el extranjero era de 1:1.200.000.

El éxito de esta operación fue unánimemente reconocido en España y en el extranjero. En 1859 se le concede la cruz de Comendador de Carlos III, en 1860 la encomienda de Isabel la Católica y en 1961 la Cruz de la Orden de San Hermenegildo. Este mismo año, el 11 de mayo de 1961, ingresa D. **Carlos Ibáñez** en la Real Academia de Ciencias, Sección de Exactas a los 36 años de edad, leyó su discurso el 8 de marzo de 1963 que versó sobre *"El origen y progresos de los instrumentos de Astronomía y Geodesia"*, y ocupó el sillón nº 20. En una sesión celebrada por la Academia de Ciencias de París, de la que Ibáñez era miembro corresponsal, el 2 de febrero de 1891, su Secretario, Mr. Bertrand comentó:

"L'Espace, en abordant la Géodésie scientifique, dépassait pour son coup d'essai la précision obtenue jusqu'alors par les plus habiles observateurs. Les noms d'Ibáñez et de Saavedra étaient désormais inséparables dans l'histoire de la Science."

No se conformó Ibáñez con el éxito logrado con esta regla, sino que proyectó una nueva monometálica, de hierro, que, si bien no permitía lograr la precisión de la anterior, pues el error probable logrado era de 1:2.207.000 de la longitud medida *"es más que suficiente, puesto que el error probable obtenido fuera de España, con los aparatos más perfectos en trabajos geodésicos de mayor importancia científica es doble del que se acaba de calcular"*. Y en cambio tenía la ventaja de una mayor sencillez en su manejo y por tanto mayor rapidez en la medida. Sobre esta nueva regla publicó en 1869 una obra titulada *"Nuevo aparato de medir bases geodésicas"*. A esta regla se la conoce como *"Aparato de Ibáñez"* según denominación del ministro de la Guerra.

Con esta nueva regla se midieron bajo su dirección tres bases en la red geodésica de las islas Baleares, descrita en una nueva obra que constituyó un voluminoso tratado titulado *"Descripción geodésica de las Islas Baleares"*, publicada en 1871. La red está constituida por 783 triángulos de los que 61 constituyen la red de primer orden, apoyada en tres bases medidas, una en Mallorca, de 2.100 metros de longitud, la segunda en Ibiza, de 1.664 metros y la tercera en Menorca, de 2.360 metros. El error probable de estas medidas fue del orden de 1:2.200.000 de la longitud medida, con lo que mejoraba los resultados logrados en aquella época en las bases medidas en distintos países de Europa... Además con las reglas europeas se venían midiendo unos 60 metros a la hora y con la segunda de Ibáñez de 1868 se llegaban a medir hasta 200 metros a la hora. D. Carlos Ibáñez recibió por estos hechos los mayores elogios de la época. En 1880 se mide con la regla de Ibáñez la base geodésica de Aarberg en Suiza con una precisión de 1:3.000.000 de la longitud medida de 2.400 metros.

También Ibáñez se preocupó por la nivelación y en 1864 publicó unos *"Estudios sobre nivelación geodésica"* en colaboración con D. **Joaquín Barraquer**, a quien en 1881 contestó Ibáñez en su discurso de ingreso en esta Academia. En su dilatada vida de geodesta Ibáñez de Ibero publicó más de 75 trabajos, me-

morias e informes, en los que refleja de forma pormenorizada todos los logros conseguidos. Más información sobre el General Ibáñez puede encontrarse en Soler (1997).

5.7. Trabajos geodésicos de enlace de Europa con África. (J. M. Torroja y M. J. Sevilla)

Del libro de Actas de la RACEFN se entresacan algunas frases de la sesión del día 17 de diciembre de 1879. Hay primero una *“propuesta de los señores Aguilar, Saavedra y Merino de corresponsal extranjero a favor del comandante del Estado Mayor del Ejército francés Mr. Perrier, miembro del Boureau de Longitudes y Jefe de la Comisión encargada de prolongar los trabajos geodésicos de la Carta de Francia.”*

El General Ibáñez pidió la palabra y dijo: que la propuesta de Académico corresponsal, a favor de Mr. Perrier,

“... le imponía el grato deber de dar noticia sucinta a la Academia de los trabajos geodésicos recientemente verificados por los franceses y españoles para enlazar las triangulaciones española y argelina y prolongar de este modo por encima del Mediterráneo la meridiana que desde las islas Shetland, a los 61° de latitud, desciende hasta nuestras Baleares, y parecía aquí detenida desde los tiempos de Arago y Biot por obstáculos infranqueables.”

“Por resultado de los trabajos llevados a cabo en años anteriores, tanto en las cumbres de nuestras elevadas cordilleras de la vertiente mediterránea, como en las mucho más deprimidas de la Argelia, habíase adquirido poco a poco la convicción de que, a pesar de la gran distancia que medía entre las vertientes establecidas en una y otra, el mencionado enlace podía insertarse con posibilidades de buen éxito, lo cual motivo en el verano de 1878 el reconocimiento expreso de las localidades, que geodésicamente debían empalmarse, y un primer ensayo de triangulación por los procedimientos, o con medios de trabajo ordinarios.

En representación de Francia Mr. Perrier, Comandante de la E. M. y Jefe de los trabajos geodésicos que se están verificando en Argelia, y de España, el Sr. Ibáñez, como Director del Instituto Geográfico, pusieron en relación científica, sin pérdida de momento; celebraron largas discusiones, examinaron minuciosamente las dificultades del problema que se les había encomendado resolver y adoptaron entre otros algo menos importantes y como secundarios, los siguientes acuerdos previos.”

“1º. Emplear idénticos instrumentos para la mensuración en las estaciones Francesas y Españolas...”

“2º. Sin renunciar al uso de los heliotropos empleados en las triangulaciones ordinarias... durante el día, apelar al auxilio de la luz eléctrica producida por máquinas de Gramme, con motores de vapor para verse recíprocamente y poder trabajar de noche.”

“3°. Completar las operaciones propiamente geodésicas y estrictamente necesarias, con la determinación astronómica de la diferencia de longitudes entre dos vértices Español y Argelino, y determinación también de las latitudes geográficas de estos vértices y azimutes de dos direcciones cualesquiera...”

*“En cumplimiento de lo así prevenido, el Sr. Ibáñez, a quien sus múltiples ocupaciones y la necesidad de presidir en el extranjero otras conferencias internacionales de carácter también científico e indeclinables... designó para dirigirlos en su primera parte o en cuanto al dominio exclusivo de la Geodesia se refería al **Sr. Coronel D. Joaquín Barraquer**, nuestro compañero electo, individuo del Instituto Geográfico; y al **Sr. Merino**, astrónomo del Observatorio y del mismo Instituto para la dirección de los Astronómicos posteriores necesariamente a los geodésicos...”*

“... el Sr. Ibáñez manifestó: que los vértices que debían geodésicamente relacionarse eran los de Mulhacen y Tetica de Bares, en España, con los de Sabiha y Filhausen en la Argelia distantes los dos primeros uno de otro cosa de 80 kilómetros y unos 250 o 270 de los africanos...”

*“...en los primeros días de septiembre hallábanse organizadas las dos estaciones geodésicas de Mulhacen y Tetica y en sus puestos los observadores: D. Joaquín Barraquer, Jefe de la expedición, D. **Juan Borrés**, Capitán de Ingenieros y D. **Priamo Cebrian**, Teniente de Artillería en la primera, y D. **Vicente López Puigcerver**, Comandante de E.M. y D. **Clodoaldo Peña**, Teniente de Artillería en la segunda. Las observaciones comenzaron en seguida y a fin de mes podían ya darse como terminadas con éxito verdaderamente asombroso...”*

“... el mismo Sr. Invitó al Sr. Merino para que enterase a la Academia de lo por él ejecutado...”

“El Sr. Merino comenzó por manifestar que sólo tomaba la palabra cediendo a las instancias del Sr. General Ibáñez a quien exclusivamente a su entender y en la parte que a él se refería correspondía hablar en público de este asunto...”

“... había sido preciso instalar en el vértice denominado Tetica y en área reducidísima a 2000 metros de altitud, un círculo meridiano, construido con gran esmero por los hermanos Brunner de París, un péndulo astronómico, para la observación de pasos meridianos de estrellas del Sr. Hipps de Neuchatel, un cronógrafo relacionado eléctricamente con el péndulo...”

*“La instalación de la estación astronómica completada con un excelente teodolito Repsold, confiado especialmente al **Sr. Esteban** y destinado a la determinación de la latitud del vértice y azimut de un lado de la triangulación española, comenzó en 4 de octubre...y pudo darse por terminada seis días después, pero cuando aún no estaba ultimada desatóse una furiosa borrasca que redujo a la inacción a los observadores y comprometió*

en términos alarmantes el éxito de la operación y la conservación de los preciosos y delicados instrumentos..."

"El 15 viendo que el temporal empeoraba en vez de abandonar, y considerando que seis noches de observación bastaban para dar por terminada la diferencia de longitudes entre Tetica y Sabiha, el Sr. Perrier dio la señal de despedida y concluyó la operación."

"El Sr. Presidente después de manifestar a las Sres. Ibáñez y Merino el agrado con que la Academia les había escuchado, les invitó a redactar una nota de los trabajos geodésicos y astronómicos realizados...que pudiera publicarse en la Revista..."

Y en efecto en la Revista de la Academia correspondiente al año 1880 (tomo 21 n° 3) se publicó un interesante trabajo con el título *"Enlace geodésico y astronómico de Europa y Africa"* dividido en dos partes: *"Primera operación. Enlace geodésico"* firmada por **Carlos Ibáñez** y *"Segunda operación. Enlace astronómico"* por **Miguel Merino**.

En estos artículos amplían la información dada en la sesión antes citada con interesantes datos sobre el traslado de los instrumentos y su instalación en los vértices Mulhacén y Tetica y sobre el desarrollo e incidencias durante la observación. Reproduce en particular el texto del telegrama que el General Ibáñez de Ibero recibió en París el día 20 de septiembre enviado el día antes por el Coronel **Barraquer**, que decía: *"Ha caído hoy a las 11,30 de la mañana, un rayo en los aparatos eléctricos cuyos desperfectos ignoro todavía. Preparo la retirada"...* "Más, por fortuna y honra nuestra -sigue diciendo el artículo que comentamos- la retirada no se verificó, y allí permanecieron hasta los primeros días de octubre, cuantos tenían precisión de permanecer, no sólo para rematar el trabajo comenzado, sino para recoger el material de campaña, y volver a Madrid sin considerable deterioro."

Las últimas observaciones se realizaron el día 29 de septiembre y la operación si dio por terminada el 3 de octubre de 1879. El error de cierre de los triángulos obtenido fue del orden de un segundo de arco y en la diferencia de longitudes del orden de la centésima. Termina así la operación geodésica más importante del siglo XIX. Los resultados obtenidos fueron los de las tablas correspondientes a la Figura 19.

DIRECCIONES.			TRIANGULOS.		
Vértices.	Observados á las lunas.	Correcciones.	Vértices.	Ángulos.	Superficies.
Filhaoussen.	M'Sabiha 0° 0' 0",000	+ 4",24	Filhaoussen.	17° 52' 26",914	Hectáreas.
	Tetica 60 51 17,49	- 1,094	Tetica... 89 39 16,212		Esférica... 1066180
	Mulhacen 78 43 43,18	+ 0,130	Mulhacen... 72 29 11,201		Plana... 1066020
M'Sabiha..	Tetica 0 0 0,000	- 0,787	Suma... 180 0 54,327		Diferencia... 160
	Mulhacen 16 19 51,25	+ 0,091	Exceso... 54,162		
	Filhaoussen 95 8 43,77	- 6,58	Error... + 0,165		
Mulhacen..	Tetica 0 0 0,000	- 9,334	M'Sabiha... 78 48 45,849		
	Mulhacen 287 30 31,315	+ 8,15	Mulhacen... 22 28 45,269		Esférica... 1392336
	M'Sabiha 309 59 22,894	+ 1,84	Filhaoussen 78 43 39,070		Plana... 1392112
Tetica... .	Mulhacen 0 0 0,000	-10,219	Suma... 180 0 70,188		Diferencia... 224
	Filhaoussen 89 39 9,803	- 3,81	Exceso... 70,730		
	M'Sabiha 113 40 18,966	- 1,91	Error... - 0,542		
			M'Sabiha... 16 19 52,128		
			Tetica... 113 40 27,275		Esférica... 856236
			Mulhacen... 50 0 25,932		Plana... 856121
			Suma... 180 0 45,335		Diferencia... 115
			Exceso... 43,498		
			Error... + 1,837		
			Filhaoussen 60 51 12,156		
			M'Sabiha... 95 8 37,977		Esférica... 1182393
			Tetica... 24 1 11,063		Plana... 1182237
			Suma... 180 0 61,196		Diferencia... 156
			Exceso... 60,068		
			Error... + 1,128		

Figura 19. Resultados del enlace.

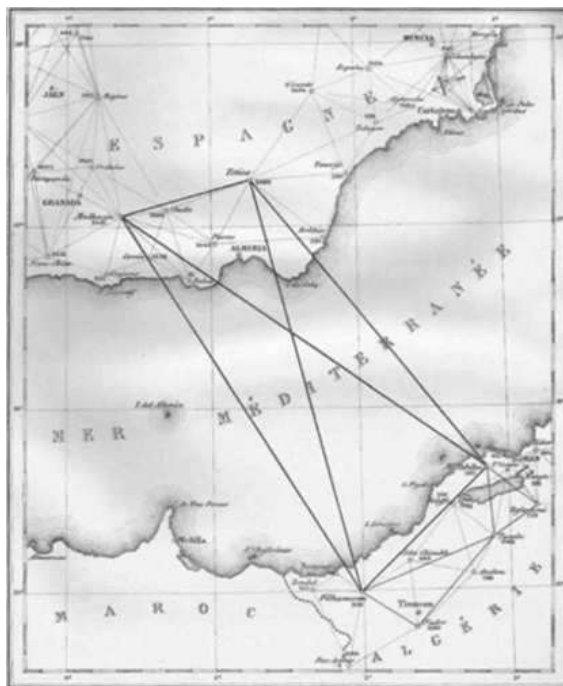


Figura 20. Plano general del enlace

5.8. UIGG (Unión Internacional de Geodesia y Geofísica)

Es una organización internacional no gubernamental, una de las tres primeras Uniones creadas el 28 de julio de 1919 en Bruselas durante la Asamblea

Constituyente del Consejo Internacional de Investigación (predecesor del Consejo Internacional de Uniones Científicas, ICSU, creado en 1931). Los países fundadores fueron nueve: Australia, Bélgica, Canadá, Estados Unidos de América, Francia, Italia, Japón, Portugal Reino Unido e Irlanda. España se adhirió en 1922 y en 1925 contaba ya con 31 países miembros.

En la actualidad 75 países son miembros de la UIGG. 32 de Europa, 18 de Asia, 11 de África, 4 de América del Norte y Central, 6 de América del Sur y 4 de Oceanía.

En su estructura inicial la Unión comprendía seis secciones: Geodesia, Sismología, Meteorología, Magnetismo y Electricidad Terrestre, Oceanografía Física y Volcanología. Una séptima sección de Hidrología Científica fue creada en 1922. El término sección fue sustituido por el de Asociación en la quinta Asamblea General celebrada en Lisboa en 1933.

La UIGG es una de las 20 Uniones Científicas actualmente agrupadas en el seno del ICSU.

La UIGG se consagra al estudio científico de la Tierra y a sus aplicaciones a las necesidades de la sociedad, tales como los recursos minerales, la reducción de los efectos de los desastres naturales y a la protección del medio ambiente.

La UIGG es una organización de carácter puramente científico. Tiene como objetivos la promoción y la coordinación de los estudios físicos, químicos y matemáticos de la Tierra y de su entorno espacial. Estos estudios incluyen la forma de la Tierra, sus campos gravimétrico y magnético, la dinámica de la Tierra tomada como un todo y la dinámica de los medios que la componen, su estructura interna, su constitución y su tectónica, la generación de magmas, el volcanismo y la formación de rocas, el ciclo hidrológico que comprende las nubes, los hielos, los océanos, la atmósfera, la ionosfera, la magnetosfera bajo todos sus aspectos y las relaciones Tierra-Sol así como los problemas correspondientes para la Luna y los planetas. Las actividades de la UIGG engloban todos los estudios de la Tierra hechos con los satélites artificiales y las demás técnicas que implican el empleo de medidas a gran altitud.

La UIGG celebra Asambleas Generales cada 4 años. La primera fue en Roma en 1922 y la última en Melbourne en 2011. La Asamblea de 1924 se celebró en Madrid y la próxima será en el año 2015 en Praga. Más información en <http://www.iugg.org/>

5.9. Asociación Internacional de Geodesia (IAG)

En abril de 1861 el General prusiano **Johann Jakob Baeyer (1794-1885)**, un colaborador de Bessel en la medida del arco prusiano del este (1831-1836), envió al ministro de la Guerra de Prusia un documento sobre *“El tamaño y figura de la Tierra: un memorándum para la medición de un arco centro-europeo”* que dedicó a la memoria de Alexander von Humboldt. El objeto de esta propuesta era conectar los numerosos observatorios astronómicos de Europa Central por redes de triangulación para determinar desviaciones de la vertical y con ello la estructura relativa del geoide. Este proyecto científico implicó colaboración internacional para los levantamientos, recolección y evaluación de los datos así

como para el análisis de los resultados. El Rey de Prusia ordenó que el plan de **Baeyer** se pusiera en marcha. En 1862 tuvo lugar la conferencia inaugural en Berlín y a finales de este año 15 Estados europeos firmaron su participación en esta organización. En 1864 se creó a propuesta de **Baeyer** la “*Mitteleuropäische Gradmessung*” con Alemania, Austria, Bélgica, Holanda, Dinamarca, Italia, Suecia, Suiza y Rusia. En 1867 se adhieren España y Portugal y la asociación cambia su nombre por el de “*Europäische Gradmessung*” a la que se sumó Francia en 1873. Así comienza la organización internacional del “*Arco Europeo*” que se reconoce como origen de la Asociación Internacional de Geodesia. El Bureau Central del “*Arco Europeo*” comenzó sus trabajos en 1866 con **Baeyer** como Presidente. En 1870 se estableció el Instituto Geodésico Prusiano que cobijó al Bureau Central. Después de la muerte de **Baeyer** en 1885 fue nombrado Director **Friedrich Roberto Helmert** en 1886 quien añadió nuevos objetivos a la Organización.

El primer Presidente de la Asociación Internacional de Geodesia (después de **Baeyer**) fue el General D. **Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero** cuyo prestigio hizo que fuera reelegido cada tres años desde 1874 hasta su muerte en 1891.

En 1884 se adopta el meridiano de Greenwich como origen de longitudes y en GMT.

En 1895 se unen a la AIG Estados Unidos y Japón.

En 1916 expiraron los acuerdos internacionales que no fueron renovados, con esto y con la muerte de **Helmert** en 1917 termina este primer periodo de colaboración internacional.

De 1917 a 1922 la AIG queda reducida a las naciones neutrales en la 1ª Guerra Mundial: Dinamarca, Holanda, Noruega, España, Suecia y Suiza.

En 1919 se organiza la ciencia internacional en muchas áreas de forma no gubernamental. Así nace el International Research Council (IRC) que en 1931 pasa al International Council of Scientific Unions (ICSU) donde entre otras se encuentra la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (UIGG) dentro de la cual existe una sección conocida desde 1932 como Asociación Internacional de Geodesia (IAG).

La historia de la IAG está muy bien documentada por ejemplo en Levallois (1980), Soler (1997) y Beutler et al. (2004). Los objetivos y organización de la IAG se publican cada cuatro años en “*The Geodesist's Handbook*” que pueden consultarse en <http://www.gfz.ku.dk/iag/>.

Dentro de la Asociación Internacional de Geodesia existe un conjunto de servicios de ayuda a las organizaciones geodésicas de todo el mundo y a los geodestas particulares que relacionamos a continuación.

1. Bureau International des Poids et Mesures (**BIPM**),
<http://www.bipm.org/en/scientific/tfg/>
2. IAG Bibliographic Service (**IBS**) <http://www.bkg.bund.de/>
3. International Altimetry Service (**IAS**), <http://ias.dgfi.badw.de>
4. International Centre for Earth Tides (**ICET**),

<http://www.astro.oma.be/ICET/>

5. International Centre for Global Earth Models (**ICGEM**),
<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>
6. International Digital Elevation Model Service (**IDEMS**),
<http://www.cse.dmu.ac.uk/EAPRS/iag/>
7. International DORIS Service (**IDS**), <http://ids.cls.fr/>
8. International Earth Rotation and Reference Systems Service (**IERS**),
<http://www.iers.org>
9. International Geoid Service (**IGeS**). <http://www.iges.polimi.it>
10. International GNSS Service (**IGS**),
<http://igsceb.jpl.nasa.gov/>
11. International Gravity Field Service (**IGFS**), www.igfs.net
12. Bureau Gravimétrique International (**BGI**), <http://bgi.cnes.fr>
13. International Laser Ranging Service (**ILRS**), <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>
14. International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (**IVS**),
<http://ivscc.gsfc.nasa.gov>
15. The Permanent Service for Mean Sea Level (**PSMSL**),
<http://www.pol.ac.uk/psmsl>
16. Global Geodetic Observing System (**GGOS**), <http://www.ggos.org>
17. Communication and Outreach Branch (**COB**), <http://www.iag-aig.org>

En 2012 se celebra el 150 aniversario de la IAG. La próxima Asamblea Científica de la IAG se celebrará en Potsdam (Alemania) en septiembre de 2013. Más información en <http://www.iag-aig.org/>.

Sobre el autor:

Nombre: Miguel J. Sevilla de Lerma

Correo electrónico: sevilla@mat.ucm.es

Institución: Catedrático de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

El sólido hiperbólico agudo

Rosa María Herrera

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Torricelli consideró el cálculo del volumen de sólido hiperbólico agudo como el mejor logro en sus trabajos con 'indivisibles curvos'. Fue publicado en la *Opera geometrica*. Aquí se presenta como muestra del estilo de las demostraciones matemáticas (geométricas) que se efectuaban en el siglo XVII, y por su valor precursor del cálculo infinitesimal. Es un ejemplo significativo para aproximarse al pensamiento torricelliano.

Palabras Clave: Torricelli, Indivisibles, Sólido hiperbólico agudo

1. Un método geométrico nuevo

El interés del sólido hiperbólico agudo estriba posiblemente en que valida, de forma vistosa, la construcción de los indivisibles curvos. En ese sentido el método de cálculo de su volumen revela la intuición matemática de su autor, Evangelista Torricelli¹, su gran conocimiento de la geometría y su finura como matemático.

El artículo se estructura como sigue: en los primeros apartados se explica someramente la creación de los indivisibles, después en el siguiente epígrafe se describe el hiperboloide de Torricelli. Y en el último se resume la exposición del cálculo del volumen del sólido hiperbólico agudo, tal como lo

¹ Evangelista Torricelli (1608-1647), religioso, matemático y físico italiano de origen romañolo, fue discípulo de Galileo y su sucesor matemático de la corte florentina

dio Torricelli por definitivo², utilizando los dibujos que él mismo hizo y que aparecieron publicados con los cinco lemas y la demostración en el estilo riguroso en que él lo hizo.

2. Cavalieri: los indivisibles

El método de los *indivisibles* fue ideado por Cavalieri³ para hallar áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos. Parece que buscaba un procedimiento más general y más refinado para abordar estos problemas que el usado regularmente en su tiempo. Este ingenioso acercamiento a estas tareas geométricas supuso un avance porque introdujo una nueva visión de este tipo de cálculos que eran conocidos desde la Antigüedad.

En el curso del tiempo esta nueva forma de abordar el problema daría paso al cálculo diferencial. Como herramienta de trabajo los indivisibles son más modestos, pero suponen un anticipo en la búsqueda de sistemas menos farragosos y más precisos de cálculo.

En esta línea, el método tuvo, en mi opinión, la riqueza de introducir un hábito distinto al de la exhaustión (el método del ‘agotamiento’) con que se procedía para hallar áreas y volúmenes desde que los griegos pusieron en circulación esta técnica (es célebre el uso de Arquímedes de este procedimiento para calcular la longitud de una circunferencia inscribiendo en la misma polígonos regulares).

Cavalieri publicó sus trabajos con el título *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bologna, 1635). En esta obra, de lectura bastante farragosa,⁴ presenta al lector un procedimiento que consiste en descomponer los objetos que estudia en unos elementos esenciales que llama ‘indivisibles’.

Aunque no dio una definición precisa de indivisible, se da por hecho que los indivisibles de rectas son puntos (de inviable operatividad). En las figuras planas los indivisibles son líneas, y la superficies son totalidades de líneas; de modo análogo, los sólidos están constituidos por una totalidad de indivisibles superficiales. Pero los indivisibles de Cavalieri aún no se parecían a la forma

² Los dibujos que ilustran los teoremas corresponden a los que figuran en la *Opera geometrica* realizados verosímilmente por el propio Torricelli

³ Bonaventura Cavalieri (1598-1647) matemático italiano nacido en Milán, religioso alumno de Galileo Galilei (1564- 1642). Galileo también trabajó en indivisibles, pero no quedó nada escrito sobre ellos, no obstante la escritura de sus estudios sobre la caída de los graves dan idea de que usó un método de este tipo para escribir la fórmula.

⁴ Esta afirmación la hago remitiéndome a lecturas solventes de historia de la matemática, pues no he pasado de echar un ojo a los textos originales, sin detenerme en la lectura más que ocasional y sin ninguna reflexión, en ese sentido la aseveración es tal vez un poco osada por mi parte.

que componían, las partes no se asemejaban a la totalidad en su concepción, quizá por eso no imaginó los indivisibles curvos en sólidos.

En el siglo XVII, las áreas y los volúmenes no venían normalmente dados por un número, sino mediante una comparación entre magnitudes geométricas. Así la técnica de los indivisibles era conforme a este estilo y dos figuras planas tienen el mismo área si sus indivisibles son iguales (el mismo razonamiento es válido para los volúmenes).

3. Torricelli: los indivisibles curvos

Torricelli, aplicado estudioso de los indivisibles en que tan denodadamente trabajaba su maestro y amigo, no tuvo problemas para imaginar como candidatos a indivisibles a los bordes de las figuras planas ‘redondeadas’ o curvilíneas que estudiaba o las superficies (matemáticas) de los sólidos, por eso ideó, aparentemente sin ‘reparos’ y sin los escrúpulos (de índole conceptual) de Cavalieri, los *indivisibles curvos*. Inventó estos ‘elementos’ no al estilo actual, es decir, no los definió formalmente, y en consecuencia no encontró necesario demostrar que estaban bien definidos, que tenían sentido y que su existencia estaba garantizada, no hay ningún teorema al respecto, los imaginó y los nombró. De este modo, los indivisibles curvos pasaron a existir una vez su autor comprobó que funcionaban fehacientemente, entonces los mostró al mundo.

Como la soltura y la habilidad con las herramientas y la confianza en la utilidad de las mismas requieren maduración, adquirió destreza y dominio sobre las características y las propiedades de los indivisibles al trabajar en distintos casos que le interesaban y así manejaba áreas y volúmenes de figuras curvas, hasta que dio con la mejor figura, la más ‘bonita y sorprendente’; y en estudiar su hallazgo puso todo su talento y su ingenio de matemático fino y experimentado, este sólido le servía no solo como muestra de talento y lucimiento de matemático, sino que consolidaba el interés de sus indivisibles a la comunidad matemática de su tiempo y al mundo.

Denominó a este sólido *hiperbólico agudo*. Para construirlo hizo girar una hipérbola equilátera sobre la asíntota vertical tomada como eje Y, lo que como sólido suponía un volumen finito. Aquí quizá cabría detenerse un momento para que el lector, situándose en la mentalidad torricelliana, encontrase un punto clave y de llamada a su propia reflexión y a la revisión de determinados conceptos (y quizá también de ciertas concepciones): la asociación de una superficie infinita, con un volumen finito; y manejar también otras nociones próximas: ilimitado, limitado...

Torricelli parece que estaba convencido de que era la primera persona que

se inventó un objeto geométrico de estas características, pero es muy probable que Fermat⁵ ya hubiera rozado estos temas en sus trabajos con hipérbolas, y Roberval⁶ también debió investigar en el asunto, pues le gustaba estar a la última y era un pensador inquieto, avanzado y polemista además de un buen matemático, ignoro si es posible rastrear antecedentes en periodos precedentes con visos de verosimilitud de algún cuerpo geométrico ilimitado, que no puede ser contenido en una esfera, y que tiene un volumen finito.

El sólido hiperbólico agudo de Torricelli se apoya sobre un cilindro de base. El matemático pensó el sólido como una secuencia de 'hojas' cilíndricas contenidas unas en el interior de otras paralelamente. Estos planos cilíndricos son los indivisibles curvos del sólido.

El siguiente paso sería demostrar que el cuerpo formado por el sólido hiperbólico agudo con un cilindro en la base es equivalente al cilindro ACOH (véase Fig. 8) y tienen el mismo volumen y en consecuencia además de ser infinitamente largo, el sólido hiperbólico agudo junto con el cilindro situado en su base tienen un volumen finito.

4. Construcción del sólido hiperbólico de Torricelli

En la Fig. 1 aparece esquematizada la idea de partida, en el siguiente epígrafe muestro la secuencia de presentación del teorema y los cinco lemas tal y como aparecen en la *Opera geométrica*. (La demostración se puede seguir en dicha obra.)

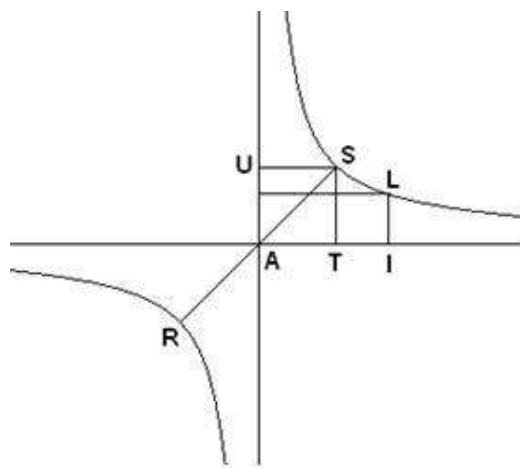


Figura 1. Hipérbola equilátera

⁵ Pierre de Fermat (1601-1665) abogado y matemático francés

⁶ Gilles P. de Roberval (1602-1675) religioso y matemático francés

Sea una hipérbola equilátera en la que se toma como eje las asíntotas, (escrita en forma de ecuación $y = a/x$) Conviene elegir $a = 1$ como valor de la constante. Entonces $AI \cdot IL = AT \cdot TS$. Sea S un punto tal que $TS = SU$; para cada punto L de la hipérbola se cumple que $AI \cdot IL = TS^2$. Sea AS el semieje de la hipérbola, que es la diagonal del cuadrado de lados AT y TS, por el teorema de Pitágoras tenemos que $AS^2 = 2 TS^2 = 2 AI \cdot IL$.

Haciendo girar esta hipérbola en torno a la asíntota vertical (AB), véase Fig. 8, se origina un sólido de longitud infinita. Añadiendo un cilindro a la base de diámetro igual al eje de la hipérbola y de altura igual a la asíntota horizontal (AC), véase Fig. 8, Torricelli demuestra que el volumen de este cilindro así obtenido es igual al volumen del sólido obtenido al girar la hipérbola alrededor de la asíntota vertical.

Antes de presentar el trabajo a la comunidad matemática, Torricelli le comunicó a su amigo y maestro en el estudio de los indivisibles, Cavalieri, el hallazgo; quien según parece quedó encantado con el asunto -los historiadores coetáneos escribieron al respecto en un estilo muy laudatorio-. Además como paso previo a su publicación lo había expuesto en círculos matemáticos y Mersenne⁷ ya lo conocía seguramente casi dos años antes de que saliera a la luz.

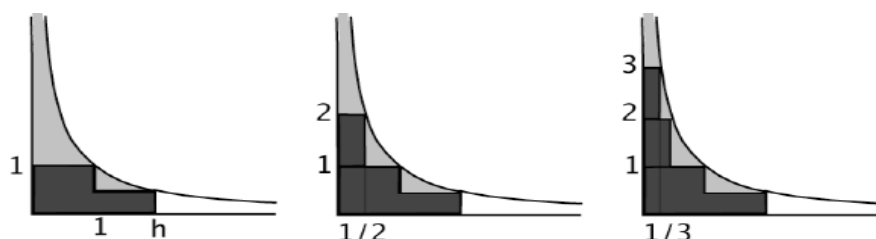


Figura 2. Imagine el lector un giro de una hipérbola alrededor de la asíntota vertical, dicho giro origina un sólido hiperbólico agudo, al que después Torricelli añadirá un cilindro de base.

Detalle de la construcción de los indivisibles curvos.

⁷ Marin Mersenne (1588-1648) clérigo y matemático francés

5. Volumen del sólido hiperbólico agudo

El sólido hiperbólico agudo estaba formado por un cilindro de base, más el sólido de revolución obtenido al hacer girar la hipérbola alrededor de la asíntota vertical. Torricelli se imaginó ‘hojas’ cilíndricas paralelas congruentes (unas dentro de otras), cada una de ellas un indivisible curvo. (Véase en la Fig. 8 NLIO). Para que no quedara ninguna duda de la paternidad de los indivisibles curvos en sólidos subrayó por escrito este hecho y afirmó contundente que su método con los indivisibles curvos no seguía el ejemplo de ningún predecesor.

[...] Il nostro metodo procederà con gli indivisibili curvi senza seguir l'esempio di alcun predecessore [...]



Figura 3. Documento. El sólido hiperbólico agudo (enunciado de los dos primeros lemas) ‘Opera geometrica’ [p.113]

Teorema del sólido hiperbólico agudo. En este teorema se establece la equivalencia entre un sólido de longitud infinita engendrado por una hipérbola que gira en torno a su propio eje y un cilindro de altura finita. La demostración se basa en cinco lemas:

En el *primer lema* considera una hipérbola con asíntotas AB y AC, haciéndola girar sobre el eje AB obtiene el sólido hiperbólico agudo. Después considera en el sólido así construido un rectángulo, por ejemplo, el DEFG. Llama AH al semieje de la hipérbola, y por ser la hipérbola equilátera, el área del cuadrado construido sobre AH es igual al área de cualquier rectángulo DEFG que gira alrededor de la asíntota AB.

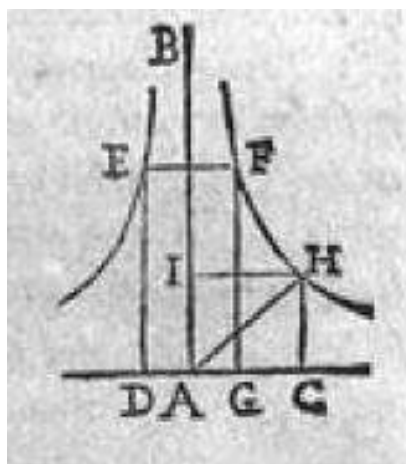


Figura 4. Ilustración Lema I sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el *segundo lema* demuestra que todos los cilindros inscritos en el sólido hiperbólico agudo en torno al eje común AB son isoperimétricos (sus superficies laterales son iguales).

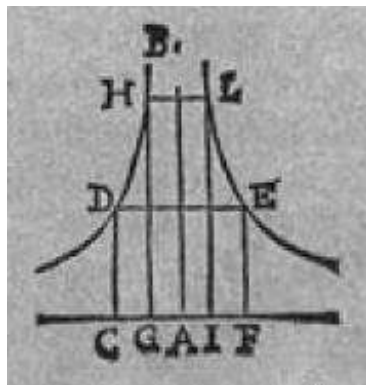


Figura 5. Ilustración Lema II sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el *tercer lema* demuestra que los volúmenes de todos los cilindros isoperimétricos descritos antes se relacionan entre sí como los diámetros de sus bases.

En el *cuarto lema* demuestra que la superficie lateral del cilindro GIHL es $\frac{1}{4}$ de la superficie de la esfera AEFC.

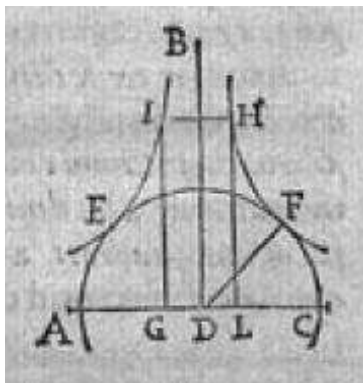


Figura 6. Ilustración Lema IV sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.114]

En el *quinto lema* demuestra que la superficie de cada cilindro CHIL inscrito en el sólido agudo como en la figura anterior, es equivalente al círculo de radio DF.

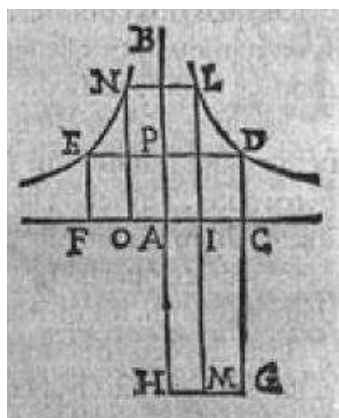


Figura 7. Ilustración para el teorema del sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.115]

En definitiva en el *teorema* por fin demuestra que el sólido infinitamente largo FEBDC constituido por el sólido hiperbólico agudo EBD y por su cilindro de base FEDC, es equivalente al cilindro ACGH de altura AC.

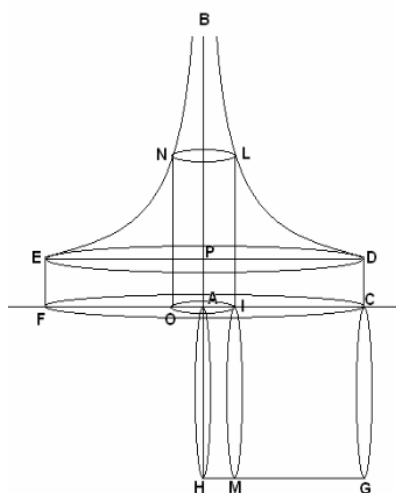


Figura 8. El sólido hiperbólico agudo equivale en volumen al cilindro ACOH

El segmento $AC = PD$ altura del cilindro $ACGH$ resulta de cortar la hipérbola mediante un plano perpendicular al eje AB (véase Fig. 5).

La demostración descansa sobre el quinto lema, la superficie lateral del cilindro inscrito, por ejemplo, el $GIHL$ es igual al círculo de radio DF (véase Fig. 7).

Esta conclusión es decisiva para construir el cilindro $ACGH$, que Torricelli considera la suma de un número infinito de círculos. En la Fig. 8 la superficie lateral del cilindro $OILN$ es igual al círculo que pasa por el punto I . Esta conclusión es cierta para cada cilindro inscrito, a cada uno le corresponderá un círculo de radio constante DF que pasa por uno de los infinitos puntos del segmento AC .

Torricelli pensó el cilindro $OILN$ como *indivisible curvo*. Tomó un punto cualquiera (I) de la recta AC . La superficie lateral de este cilindro viene dada por el producto de la circunferencia de radio AI ($2\pi AI$) por la altura (LI). Esto es, $2\pi AI \cdot LI$. Esta superficie lateral es igual a $AS^2\pi$, es decir, el área del círculo de radio AS . Si se construye un cilindro $ACGH$ que tiene como base el círculo de diámetro $AH = RS$ (el eje de la hipérbola) y altura el segmento AC , la superficie lateral del cilindro es $OILN$ que es igual al área del círculo IM . Puesto que esto es cierto, si se toma el punto I , tenemos que todas las superficies cilíndricas construidas en AC serán igual a todos los círculos de CA , y por tanto el área del sólido hiperbólico agudo $BLDCFENB$ es igual a la del cilindro $ACGH$.

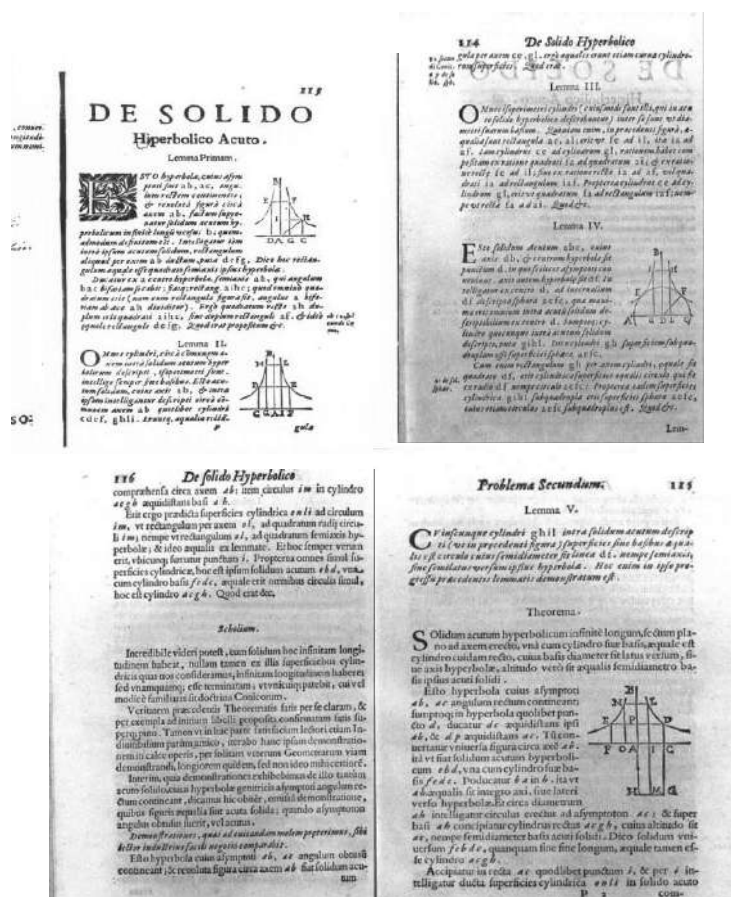


Figura 9. Los cinco lemas y el teorema del sólido hiperbólico agudo 'Opera geométrica'.

Referencias

- [1] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp.241, 146, 485, Alianza Editorial, Madrid, 2010.
- [2] HERRERA, Rosa M. *Biografía de Evangelista Torricelli*, (título provisional), en preparación, Madrid, 2011.
- [3] ITARD, Jean. *La lettre de Torricelli à Roverbal d'octobre 1643*, Revue d'histoire des sciences, Vol. 28, nº 2, pp. 113 – 124, 1975.
- [4] TORRICELLI, Evangelista. *Opera geometrica*, pp. 93-135, Landi e Masa, Florencia (Italia), 1644.
- [5] MUSEO DE LA CIENCIA GALILEO,

<http://www.museogalileo.it/>.

Sobre la Autora:

Nombre: Rosa M. Herrera

Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com

Profesión: Físico, trabaja como investigadora independiente en APYCE, colaborando con Universidades y otras Instituciones Educativas en el tercer mundo, y como editora (freelance) en las publicaciones tanto de la citada empresa, como en casas editoriales españolas (Grupo Anaya, SM...).

Cuentos Matemáticos

Mi media conjetura

(basado en un hecho irreal)

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Mi media conjetura muestra la paradoja subyacente en la conjetura de Collatz y en general en muchas conjeturas matemáticas, especialmente en el área de la teoría de números: su enunciado puede ser entendido por un niño, su demostración se resiste a matemáticos de todas las épocas.

Palabras Clave: Conjetura de Collatz, Teoría de números

- Hola.
- Hola. ¿Cómo te llamas?
- María.
- ¿Cuántos años tienes?
- Nueve. Y tú, ¿cómo te llamas?
- Javier.
- ¿Cuántos años tienes?
- Cuarenta y tres.

- ¿Tienes hijos?
- No.
- ¿Estás casado?
- No.
- ¿Tienes novia?
- No.
- Entonces no has hecho nada.
- Sí preciosa, una vez hice algo importante. Demostré la conjetura de Collatz.
- ¿Qué es la conjetura de Collatz?
- A ver si te lo puedo explicar. ¿Sabes lo que es un número par y un número impar?
- Sí, me lo enseñaron el año pasado en el cole.
- ¿Sabes multiplicar?
- Sí.
- ¿Sabes dividir?
- Sí, por una cifra.
- Entonces creo que sí te lo puedo explicar. Elige un número, no hace falta que sea muy grande.
- El tres.
- ¿Es par ó impar?
- Impar.
- Entonces multiplícalo por tres y súmale uno.

- A ver...tres por tres nueve más uno diez. Da diez.
- ¿Diez es par ó impar?
- Par.
- Si es par divídelo entre dos.
- Diez entre dos...cinco. Impar.
- Entonces como antes, multiplícalo por tres y súmale uno.
- Tres por cinco quince, más uno dieciséis. Par. Lo divido entre dos, ¿no? Dieciséis entre dos ocho. Ocho entre dos cuatro. Cuatro entre dos, dos. Dos entre dos es uno.
- Fíjate, has acabado en el uno. Eso es lo que pensaba Collatz: Da igual en qué número empieces, siempre terminas en el uno.
- ¿Y eso es lo que tú demostraste?
- Bueno, en realidad yo demostré la mitad de la conjetura: vi que siempre se termina en uno ó en infinito. Si eres capaz de demostrar que nunca se termina en infinito, habrás probado la mitad que falta.
- ¿Y cómo puedo hacer eso?
- ¿Te gustan las matemáticas?
- Sí.
- Entonces tienes que estudiar mucho para acabar con buenas notas el colegio y el instituto y, cuando tengas dieciocho años, empezar a estudiar matemáticas. Si te aplicas bien, cuando tengas veintitrés años ya estarás preparada para intentarlo. Si lo consigues, te harás muy famosa y te darán muchos premios y ganarás mucho dinero. ¿Estás dispuesta a hacer todo eso?
- María ven aquí, no molestes a ese señor.
- Adiós.
- Adiós, princesa.

(Este hombre está un poco loco. ¿Cómo va a terminar en infinito? Al infinito no se puede llegar. Se lo diré a mi profe cuando vuelva al cole y me tendrán que dar muchos premios y mucho dinero y ya no tendré que estudiar nunca más. ¡Qué suerte he tenido de conocer a ese señor tan raro!)

Sobre el autor:

Nombre: Javier Rodrigo Hitos

Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es

Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático.
Universidad Pontificia Comillas

Investigación

A Revenue Equivalence Result in a Duopolistic Electricity Market where one of the suppliers has two production units

Estrella Alonso
Juan A. Tejada

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Abstract

In this paper we will model the electricity market auction as a two-person game with incomplete information under the assumption that bidders are asymmetric in units production, risk neutral and with unknown values.

We characterize the strictly monotone bayesian Nash equilibrium and we rank a family of auction models which contains the classic models Uniform, Discriminatory and Vickrey auction models.

Acknowledgment: The authors gratefully acknowledge the support of the project MTM 2008-06778-C02-02.

1 Introduction

Gradually since the 1990s, several countries have liberalized their electricity markets, initially in state hands. In these countries, power companies compete to generate in the Electricity Market and they take their electricity production to auction [Fehr y Harbord(1998)]. Each power company bids an amount of electricity units and a unit price for each hour (or half hour) of the following day. In view of the supply, the Market Operator (the auctioneer) ranks the bids from the lowest to the highest and then distributes the demand among the lowest bids, until the demand has been fully met. The price paid to each company taking part in the dispatch of the demand, depends on the auction

model adopted for the transaction. There are two main auction models: the Uniform auction model and the Discriminatory auction model.

In the Uniform auction model, the unit price received by a company supplying the market is the same for all companies: the highest accepted bid. In the Discriminatory auction model each company dispatching in the market receives its own bid. Much debate has been going on about the advantages and disadvantages of these auction models [Ausubel and Cramton (2002), Fabra (2001); Fabra, Fehr and Harbord (2002); Fabra, Fehr and Harbord (2003)] but no clear conclusion has been reached.

Some papers argue in favour of the Uniform model [Wolfram (1999)] whilst others favour the Discriminatory model [Federico and Rahman (2001)]. There are other auction models used in contexts outside the Electricity Market such as the Vickrey auction model [Vickrey (1961)].

This paper will consider a parametric family of auction models which contains the three classic models mentioned. We will make a comparative analysis of the auction models belonging to the parametric family, identifying the preferred model of the companies or the Market Operator.

In this paper the valuations are private, so we model the Electricity Market as a game with incomplete information.

The organization and the achievements of this work are:

We define a parametric family of auction models, which contains as particular cases, the Uniform, the Discriminatory and the Vickrey auction models. We define the hypotheses in Section 2, which includes that one of the suppliers has two production units.

In Section 3, we obtain bayesian Nash equilibria for every auction model belonging to the parametric family. Once the equilibria have been determined, we calculate the expected revenue for the companies and the payment the Market Operator expects to make in Section 4. These expressions are not dependent on the choice of auction model belonging to the vertices of $\mathcal{GAM}$ and we obtain a revenue equivalence result.

2 The Market Model

We assume the following hypotheses in the market model:

There are two risk neutral suppliers where one of them, called supplier 1, has two production units denoted by subindexes $\tilde{1}$, $\hat{1}$. The other supplier, called supplier 2, has only one production unit, denoted by subindex 2. Both suppliers compete to provide the electricity required and they have the same perfectly divisible capacity $k_{\tilde{1}} = k_{\hat{1}} = 1$ and $k_2 = 2$.

The cost function of production unit $i \in \{\tilde{1}, \hat{1}, 2\}$ is $g(q_i, \theta_i) = q_i \theta_i$, where $q_i \in [0, 1]$ is the amount dispatched by production unit i .

The type θ_i (where $\theta_{\tilde{1}} = \theta_{\hat{1}} = \theta_1$ and θ_2) which is private information to supplier $i \in \{1, 2\}$, is an independent realization of a uniformly distributed

continuous random variable in $[0, 1]$. Supplier i and only supplier i , observes the realization of θ_i and it gathers the uncertainty that company j has about the production cost of company i .

The demand of a period is price-inelastic, known with certainty and is represented by the parameter D .

Each supplier simultaneously and independently submits a bid: $(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ is the bid of supplier 1 (one component by each production unit) and $b_2 \in [0, 1]$ is the bid of supplier 2, specifying the minimum unit-price offer at which it is willing to supply the whole of the capacity of each production unit.

A strategy for production unit $i \in \{\tilde{1}, \hat{1}, 2\}$ is a strictly monotone and differentiable function $b_i(\cdot) : [0, 1] \times [0, 1]$.

Let's refer to this market model as the **Asymmetric Model in production units**.

Once the Market Operator has received the bids, it allocates the electricity distribution in such a manner that the production unit with the lowest bid will dispatch first. If its capacity is not enough to satisfy the entire demand, then the production unit with the second lowest bid will dispatch second. If its capacities are not enough to satisfy the entire demand, then the production unit with the highest bid will satisfy the residual demand. Hence the amount that the supplier $i \in \{1, 2\}$ dispatches is given by the following function:

$$Q_1(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \min(2, D) & \text{if } M < b_2 \\ \min(1, D) & \text{if } m < b_2 < M \text{ and } D < 3 \\ 1 + \min(1, D - 3) & \text{if } m < b_2 < M \text{ and } 3 < D \\ 0 & \text{if } b_2 < m \text{ and } D < 2 \\ \min(2, D - 2) & \text{if } b_2 < m \text{ and } 2 < D \end{cases}$$

$$Q_2(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \min(2, D) & \text{if } b_2 < m \\ 0 & \text{if } m < b_2 < M \text{ and } D < 1 \\ \min(2, D - 1) & \text{if } m < b_2 < M \text{ and } 1 < D \\ 0 & \text{if } M < b_2 \text{ and } D < 2 \\ \min(2, D - 2) & \text{if } M < b_2 \text{ and } 2 < D \end{cases}$$

Where $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$.

All aspects of this game and the auction model used, are assumed to be common knowledge.

The price paid to each supplier depends on the auction model adopted

for the transaction. There are three classic auction models: **Uniform auction model, Discriminatory auction model and Vickrey auction model.**

In the Uniform auction model, the unit-price received by production unit i is equal to the highest accepted bid. All production units in the market receive the same unit-price.

In the Discriminatory auction model, the unit-price received by production unit i is equal to its own bid b_i . All production units dispatching into the market could receive a different unit-price.

In the Vickrey auction model, the rule used by the Market Operator to establish the price is more complicated than in the previous two models. The unit price received by production unit i dispatching in the market is equal to the unit price of the electricity unit needed to cover the demand if the supplier who has the production unit i removes its bid.

This paper discusses not only the three classic models, but in fact we will also consider a parametric family of auction models which contains the three classic models as particular cases. This family is a set of auction models whose profit function for supplier i is:

$$B_1(\theta_1, b_{\hat{1}}, b_{\tilde{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_{\hat{1}}^1 m + \gamma_{\tilde{1}}^1 M + \beta_1^1 b_2 + \varphi - \phi_1 \theta_1 & \text{if } M < b_2 \\ \gamma_{\hat{1}}^1 m + \gamma_{\tilde{1}}^1 M + \beta_2^1 b_2 + \varphi - \phi_2^1 \theta_1 & \text{if } m < b_2 < M \\ \gamma_{\tilde{1}}^1 m + \gamma_{\hat{1}}^1 M + \varphi - \phi_3 \theta_1 & \text{if } b_2 < m \end{cases}$$

2.1.a)

$$B_2(\theta_2, b_{\hat{1}}, b_{\tilde{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_{\tilde{1}}^2 m + \beta_{\hat{1}}^2 M + \varphi - \phi_1 \theta_2 & \text{if } b_2 < m \\ \gamma_2^2 b_2 + \beta_1^2 M + \varphi - \phi_2^2 \theta_2 & \text{if } m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \varphi - \phi_3 \theta_2 & \text{if } M < b_2 \end{cases}$$

2.1.b)

Where $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$

$$\gamma_{\hat{1}}^1, \gamma_{\tilde{1}}^1, \gamma_{\hat{2}}^1, \gamma_{\tilde{2}}^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \beta_1^1, \beta_{\tilde{1}}^1, \beta_{\hat{1}}^1, \beta_1^2, \beta_{\tilde{1}}^2, \beta_{\hat{1}}^2, \varphi \in [0, \infty)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\hat{1}}^1 + \gamma_{\tilde{1}}^1 + \beta_1^1 + \varphi &= \phi_1, & \gamma_{\hat{1}}^1 + \gamma_{\tilde{1}}^1 + \beta_2^1 + \varphi &= \phi_2^1, & \gamma_{\hat{1}}^1 + \gamma_{\tilde{1}}^1 + \varphi &= \phi_3 \\ \gamma_1^2 + \beta_{\tilde{1}}^2 + \beta_{\hat{1}}^2 + \varphi &= \phi_1, & \gamma_2^2 + \beta_{\tilde{1}}^2 + \varphi &= \phi_2^2, & \gamma_3^2 + \varphi &= \phi_3, & \gamma_{\hat{1}}^1 + \gamma_{\tilde{1}}^1 &= \gamma_1^2 \\ \beta_{\tilde{1}}^2 + \beta_{\hat{1}}^2 &= \beta_1^1, & \gamma_{\hat{1}}^1 + \gamma_{\tilde{1}}^1 &= \gamma_3^2 \end{aligned}$$

The parameters ϕ_1 , ϕ_2^1 , ϕ_2^2 and ϕ_3 are determined by the demand. If $D \leq 1$, then $\phi_1 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = \phi_3 = 0$. If $D = 1 + \alpha$, with $\alpha \in (0, 1]$, then $\phi_1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = \alpha$, $\phi_3 = 0$. If $D = 2 + \alpha$, with $\alpha \in (0, 1]$, then $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = 1 + \alpha$, $\phi_3 = \alpha$. If $D = 3 + \alpha$, with $\alpha \in (0, 1]$, then $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 1 + \alpha$. If $D \geq 4$, then $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 2$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 2$.

This family of auction models verifies two principles required for an electricity auction, which are:

- The bid made by a production unit is the minimum price at which it is willing to supply the whole of its capacity. The Market Operator cannot pay a company a price lower than its own bid.
- The production unit that has made the lowest bid should enter the market first and if it cannot satisfy all the demand, then the others production units should enter the market to dispatch the residual demand.

Let's refer to this parametric family of auction models as The **General Auction Model** ($\mathcal{GAM}$).

Clearly, if we fix the values of the parameters then the auction model used for the transaction is completely determined. The values of the parameters depend on the size of the demand. Therefore we will analyze the following cases:

Case 1 The three production units have enough capacity to supply the whole demand, i.e., $D \leq 1$. In this case, the production unit with the lowest bid is the only one to dispatch. In fact, Case 1 is a particular case of single-unit (D) auction. Therefore, we know beforehand that the Revenue Equivalence Theorem is applicable. The expected revenue for each supplier is $P_i(\theta_i) = D \frac{(1-\theta_i^2)}{2}$ and the Market Operator expects to pay $P_{MO} = \frac{2}{3}D$.

Case 2 Supplier 2 has enough capacity to supply the whole demand with its unique production unit. However the supplier 1, who has enough capacity too, needs its two production units for this, i.e. $1 < D = 1 + \alpha \leq 2$, with $\alpha \in (0, 1)$. In this case if bidder 2 is the bidder with the lowest bid, then bidder 2 is the only one to dispatch. If bidder 2 puts its bid between the two bids of bidder 1 then: one of the production unit of supplier 1 dispatches all its capacity and bidder 2 dispatches the residual demand α . Finally, if the bid of bidder 2 is the highest of the three bids, then bidder 2 doesn't dispatch any electricity units.

Then, substituting $\phi_1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = \alpha$ and $\phi_3 = 0$ into the expressions 2.1.a) and 2.1.b), the $\mathcal{GAM}$ is reduced to a parametric family with profit function for supplier $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned}
 B_1(\theta_1, b_{\hat{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \\
 &= \begin{cases} \gamma_1^2 m + (\gamma_1^2 - \gamma_1^1) M + (1 + \alpha - \gamma_1^2) b_2 - (1 + \alpha) \theta_1 & \text{if } M < b_2 \\ \gamma_1^2 m + (1 - \gamma_1^1) b_2 - \theta_1 & \text{if } m < b_2 < M \\ 0 & \text{if } b_2 < m \end{cases} \\
 B_2(\theta_2, b_{\hat{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \\
 &= \begin{cases} \gamma_2^2 b_2 + (1 + \alpha - \beta_1^2 - \gamma_1^2) m + \beta_1^2 M - (1 + \alpha) \theta_2 & \text{if } b_2 < m \\ (\alpha - \beta_1^2) b_2 + \beta_1^2 M - \alpha \theta_2 & \text{if } m < b_2 < M \\ 0 & \text{if } M < b_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

where $(\gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^2) \in [0, 1] \times [\gamma_1^{\tilde{1}}, 1 + \alpha] \times [0, \min\{\alpha, 1 + \alpha - \gamma_1^2\}]$, $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$.

Case 3 The capacity of both suppliers is needed to satisfy the demand, but possibly the three production units wouldn't be necessary, i.e., $2 < D = 2 + \alpha < 3$, with $\alpha \in (0, 1)$. In this case, if supplier 2 has the highest bid then the three production units enter the market: the two production units of supplier 1 despatch all its capacity and supplier 2 despatches the residual demand α . Otherwise, if supplier 2 doesn't have the highest bid, the production unit of supplier 1 with the highest bid does not enter the market.

Then, substituting $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = 1 + \alpha$ and $\phi_3 = \alpha$ into the expressions 2.1.a) and 2.1.b), the $\mathcal{GAM}$ is reduced to a parametric family with profit function for supplier $i \in \{1, 2\}$:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}}m + (\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{1}})M + (2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2)b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_1 & \text{if } M < b_2 \\ \gamma_1^{\tilde{1}}m + \gamma_1^{\hat{1}}M + (1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^{\hat{1}} - \gamma_1^{\tilde{1}})b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - \theta_1 & \text{if } m < b_2 < M \\ (\gamma_3^2 - \gamma_1^{\hat{1}})m + \gamma_1^{\hat{1}}M + \alpha - \gamma_3^2 - \alpha\theta_1 & \text{if } b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^2b_2 + (2 - \alpha + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2)m + \beta_1^2M + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_2 & \text{if } b_2 < m \\ (1 + \gamma_3^2 - \beta_1^2)b_2 + \beta_1^2M + \alpha - \gamma_3^2 - (1 + \alpha)\theta_2 & \text{if } m < b_2 < M \\ \gamma_3^2b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - \alpha\theta_2 & \text{if } M < b_2 \end{cases}$$

where

$$(\gamma_3^2, \gamma_1^{\hat{1}}, \gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^2) \in [0, \alpha] \times [0, \gamma_3^2] \times [0, 1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^{\hat{1}}] \times [\gamma_1^{\tilde{1}}, 2 - \alpha + \gamma_3^2] \times [0, \min\{2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}, 1 + \gamma_3^2\}]$$

$m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$.

Case 4 The capacity of three production units suppliers is needed to satisfy the demand but there is excess overall capacity, i.e. $3 \leq D = 3 + \alpha < 4$, with $\alpha \in (0, 1)$. In this case, one production unit of supplier 1 despatches all its capacity and the other production unit of supplier 1 despatches at least the residual demand α . If supplier 2 doesn't have the highest bid, then it despatches all its capacity and otherwise it despatches $1 + \alpha$.

Then, substituting $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = 2$ and $\phi_3 = 1 + \alpha$ into the expressions 2.1.a) and 2.1.b), the $\mathcal{GAM}$ is reduced to a parametric family with profit function for supplier $i \in \{1, 2\}$:

$$B_1(\theta_1, b_{\bar{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_{\bar{1}}^1 m + (\gamma_{\bar{1}}^2 - \gamma_{\bar{1}}^1) M + (1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_{\bar{1}}^2) b_2 + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_1 & \text{if } M < b_2 \\ \gamma_{\bar{1}}^1 m + \gamma_{\hat{1}}^1 M + (\gamma_3^2 - \gamma_{\bar{1}}^1 - \gamma_{\hat{1}}^1) b_2 + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - (1 + \alpha) \theta_1 & \text{if } m < b_2 < M \\ (\gamma_3^2 - \gamma_{\bar{1}}^2) m + \gamma_{\hat{1}}^1 M + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - (1 + \alpha) \theta_1 & \text{if } b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\bar{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_{\bar{1}}^2 b_2 + (1 - \alpha + \gamma_3^2 - \beta_{\bar{1}}^2 - \gamma_{\bar{1}}^2) m + \beta_{\bar{1}}^2 M + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_2 & \text{if } b_2 < m \\ (1 - \alpha + \gamma_3^2 - \beta_{\bar{1}}^2) b_2 + \beta_{\bar{1}}^2 M + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_2 & \text{if } m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + 1 + \alpha - \gamma_3^2 - (1 + \alpha) \theta_2 & \text{if } M < b_2 \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} (\gamma_3^2, \gamma_{\bar{1}}^1, \gamma_{\hat{1}}^1, \gamma_{\bar{1}}^2, \beta_{\bar{1}}^2) &\in [0, 1 + \alpha] \times [0, \gamma_3^2] \times [0, \gamma_3^2 - \gamma_{\bar{1}}^1] \times \\ &\quad [\gamma_{\bar{1}}^1, 1 - \alpha + \gamma_3^2] \times [0, 1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_{\bar{1}}^1] \end{aligned}$$

$m = \min(b_{\bar{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\bar{1}}, b_{\hat{1}})$.

Case 5 Demand exceeds overall capacity, i.e. $4 \leq D$. In this case there is no competition. Both companies are guaranteed to dispatch their entire capacity. The revenue for each supplier is 2 and the Market Operator pay 4. Obviously this is a trivial case.

3 Bayesian Nash Equilibrium

The following proposition gives the bayesian Nash equilibria for any auction model belonging to the General Auction Model.

Proposition 1. *If the hypotheses of the Asymmetric Model in production units hold and an auction model belonging to $\mathcal{GAM}$ is used, then:*

Region I) *If $\phi_3 = \phi_2^1$, $\phi_1 = \phi_2^2$, $\gamma_{\bar{1}}^1 = 0$, $\gamma_{\bar{1}}^2 = \gamma_3^2$, $\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_{\bar{1}}^2 - \gamma_{\bar{1}}^2 = 0$ then there exist infinite bayesian Nash equilibria are given by*

$$(b_{\bar{1}}^*(\theta_1), b_{\bar{1}}^*(\theta_1), b_{\bar{1}}^*(\theta_2)) = (b_{\bar{1}}^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$$

where $b_{\bar{1}}^*(\theta_1)$ is any strictly monotone and differentiable function verifying $b_{\bar{1}}^*(\theta_1) \leq b^*(\theta_1) \forall \theta_1 \in [0, 1]$.

Region II) *Otherwise if one of the following expressions is true*

- $\gamma_{\bar{1}}^1 \neq 0$ or $\gamma_3^2 \neq 0$
- $\gamma_{\bar{1}}^2 = 0$ and $\gamma_{\bar{1}}^1 = \gamma_1^2$
- $\gamma_{\bar{1}}^1 = \gamma_3^2 = 0$ and $\gamma_{\bar{1}}^2 = (1 + k) \gamma_{\bar{1}}^1$, $(1 + k) \phi_2^1 = \phi_1 + k \phi_3$, for any $k \in \mathbb{R}$

then the unique symmetric bayesian Nash equilibrium is given by:

$$\left(b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = (b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$$

where $b^*(\theta_i)$ in **Region I** and **Region II** is given by:

a) If $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = 0$ then $b^*(\theta_i) = \theta_i$

b) If $\gamma_3^2 = 0$ and $\gamma_1^2 \neq 0$ then

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_1 - \phi_3)\theta_i + \gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \phi_1 - \phi_3}$$

c) If $\gamma_1^2 \neq \gamma_3^2 \neq 0$ then

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_3 - \phi_1)\theta_i - \gamma_1^2 + (\gamma_3^2) \frac{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2} (\gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2)\theta_i) \frac{\phi_1 - \phi_3}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}$$

d) If $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 \neq 0$ then

$$b^*(\theta_i) = \theta_i + \frac{\gamma_1^2 \left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(\phi_1 - \phi_3)}{\gamma_1^2}}\right)}{\phi_1 - \phi_3}$$

Region III) If the parameters don't belong to **Region I** or **Region II** then the bayesian Nash equilibria are solutions of the following system of differential equations:

$$\begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}} \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ (\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}) \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \gamma_1^2 \left(1 - (b_1^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^2) \left((b_1^*)^{-1}(t) - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \\ + (\phi_2^2 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) \\ + (\phi_3 - \phi_2^2) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Proof. See appendix □

We will deduce the Bayesian Nash equilibrium for each non trivial case from Proposition 1:

3.1 Case 2

In this case, the parametric family of auction models is determined by the values of the parameters belonging to the region $RC2 = \{(\gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^2) \in [0, 1] \times$

$\left[\gamma_1^{\tilde{1}}, 1 + \alpha\right] \times [0, \min\{\alpha, 1 + \alpha - \gamma_1^2\}]$. There are eight auction models on the vertices of this region

Model	$\gamma_1^{\tilde{1}}$	γ_1^2	$\beta_1^{\hat{2}}$
A	0	0	0
Vickrey	0	0	α
Uniform	0	$1 + \alpha$	0
B	1	1	0
C	1	1	α
Discriminatory	1	$1 + \alpha$	0

with the following bayesian Nash equilibria

Model/Equilibrium	$\left[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right]$
A	$[\theta_1, \theta_1, \theta_2]$
Vickrey	$[\theta_1, \theta_1, \theta_2]$
Uniform	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$
B	$\left[\frac{1+(1+\alpha)\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\theta_2}{2+\alpha}\right]$
C	$\left[\frac{1+(1+\alpha)\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\theta_2}{2+\alpha}\right]$
Discriminatory	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$

3.2 Case 3

In this case the parametric family of auction models is determined by the values of the parameters belonging to the region

$$RC3 = \left(\gamma_3^2, \gamma_2^{\hat{1}}, \gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^{\hat{2}}\right) \in [0, \alpha] \times [0, \gamma_3^2] \times [0, 1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{1}}] \\ \times [\gamma_1^{\tilde{1}}, 2 - \alpha + \gamma_3^2] \times [0, \min\{2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2, 1 + \gamma_3^2\}]$$

. There are eighteen auction models on the vertices of this region:

Model	γ_3^2	$\hat{\gamma}_2^1$	$\tilde{\gamma}_1^1$	γ_1^2	$\hat{\beta}_1^2$
A1	0	0	0	0	0
Uniform	α	0	0	0	0
A2	α	α	0	0	0
B1	0	0	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	0
B2	α	0	1	1	0
B3	α	α	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	0
C1	0	0	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	1
C2	α	0	1	1	1
C3	α	α	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	$1 + \alpha$
D1	0	0	$1 - \alpha$	$2 - \alpha$	0
Discriminatory	α	0	1	2	0
D2	α	α	$1 - \alpha$	2	0
Vickrey	0	0	0	0	1
V1	α	0	0	0	$1 + \alpha$
V2	α	α	0	0	$1 + \alpha$
U1	0	0	0	$2 - \alpha$	0
U2	α	0	0	2	0
U3	α	α	0	2	0

with the following bayesian Nash equilibria

Model/Equilibrium	$[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)]$
A1	$[\theta_1, \theta_1, \theta_2]$
Uniform	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)} \right]$
A2	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)} \right]$
B1	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha} \right]$
B2	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}} (1 - (1-\alpha)\theta_i)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}}{3 - 2\alpha}$
B3	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3\alpha-3}{2\alpha-1}} (1 - \alpha - (1-2\alpha)\theta_i)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}}}{3 - 3\alpha}$
C1	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 + 1 - \alpha}{3 - 2\alpha} \right]$
C2	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}} (1 - (1-\alpha)\theta_i)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}}{3 - 2\alpha}$
C3	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3\alpha-3}{2\alpha-1}} (1 - \alpha - (1-2\alpha)\theta_i)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}}}{3 - 3\alpha}$
D1	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2} \right]$
Discriminatory	$\left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)} \right]$
D2	$\left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)} \right]$
Vickrey	$[\theta_1, \theta_1, \theta_2]$
V1	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)} \right]$
V2	$\left[\frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)} \right]$

$U1$	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2} \right]$
$U2$	$\left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)} \right]$
$U3$	$\left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)} \right]$

3.3 Case 4

In this case the parametric family of auction models is determined by the values of the parameters belonging to the region $RC4 = \{(\gamma_3^2, \gamma_2^1, \gamma_1^1, \gamma_1^2, \beta_1^2) \in [0, 1+\alpha] \times [0, \gamma_3^2] \times [0, \gamma_3^2 - \gamma_2^1] \times [\gamma_1^1, 1-\alpha + \gamma_3^2] \times [0, 1-\alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^1]\}$. There are twelve auction models on the vertices of this region. We will also consider the discriminatory auction model which is not located in any of the vertices of $RC4$.

Model	γ_3^2	γ_2^1	γ_1^1	γ_1^2	β_1^2
A1B1	0	0	0	0	0
Vickrey	0	0	0	0	$1-\alpha$
U1D1	0	0	0	$1-\alpha$	0
UN	$1+\alpha$	0	0	0	0
V1	$1+\alpha$	0	0	0	2
U2	$1+\alpha$	0	0	2	0
B2	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0
C2	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	$1+\alpha$	$1-\alpha$
DI	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	2	0
B3A2	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	0	0
Uniform	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	0	2
D2U3	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	2	0
Discriminatory	$1+\alpha$	α	1	2	0

with the following bayesian Nash equilibria

Model/Equilibria	$[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)]$
A1B1	$[\theta_1, \theta_1, \theta_2]$
Vickrey	$[b_1^*(\theta_1), \theta_1, \theta_2]$ with $b_1^*(\theta_1) \leq \theta_1 \forall \theta_1 \in [0, 1]$ strictly monotone and differentiable
U1D1	$[b_1^*(\theta_1), \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}]$ with $b_1^*(\theta_1) \leq \theta_1 \forall \theta_1 \in [0, 1]$ strictly monotone and differentiable
UN	$\left[\frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}, \frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}, \right.$ $\left. \frac{-(1-\alpha)\theta_2 + (1+\alpha)\theta_2^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha} \right]$
V1	$\left[\frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}, \frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}, \right.$ $\left. \frac{-(1-\alpha)\theta_2 + (1+\alpha)\theta_2^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha} \right]$
U2	$\left[\frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)}, \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)}, \right.$ $\left. \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_2^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_2)} \right]$
B2	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\theta_i + (1+\alpha) \left(1 - e^{-\frac{(1-\theta_i)(1-\alpha)}{1+\alpha}} \right)}{1-\alpha}$
C2	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\theta_i + (1+\alpha) \left(1 - e^{-\frac{(1-\theta_i)(1-\alpha)}{1+\alpha}} \right)}{1-\alpha}$
DI	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_i^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_i)}$
B3A2	$[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ where $b^*(\theta_i) = \frac{-(1-\alpha)\theta_i + (1+\alpha)\theta_i^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}$

Uniform	$\left[b_1^*(\theta_1), \frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}, \frac{-(1-\alpha)\theta_2 + (1+\alpha)\theta_2^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha} \right]$ with $b_1^*(\theta_1) \leq \frac{-(1-\alpha)\theta_1 + (1+\alpha)\theta_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha} \forall \theta_1 \in [0, 1]$ strictly monotone and differentiable
D2U3	$\left[b_1^*(\theta_1), \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)}, \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_2^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_2)} \right]$ with $b_1^*(\theta_1) \leq \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)} \forall \theta_1 \in [0, 1]$ strictly monotone and differentiable
Discriminatory	$\left[\frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)}, \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_1)}, \frac{(1-\alpha)(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_2^2)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_2)} \right]$

4 Expected revenue and payment

Let's see what these expressions are like for each demand size.

4.1 Case 2

Every bayesian Nash equilibrium in Case 2 has the following form

$$[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$$

so if an auction model on the vertices of RC2 is used and both companies bid with their strategies in equilibrium, the revenue for company i is reduced to

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \gamma_1^2 b^*(\theta_i) + (1 + \alpha - \gamma_1^2) b^*(\theta_j) & \text{if } \theta_i < \theta_j \\ 0 & \text{if } \theta_i > \theta_j \end{cases}$$

where $\gamma_1^2 \in [0, 1 + \alpha]$, and the expected revenue for company i is:

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= E_{\theta_j}[I_i(\theta_i, \theta_j)] = \int_0^1 I_i(\theta_i, \theta_j) d\theta_j \\ &= (1 - \theta_i) \gamma_1^2 b^*(\theta_i) + (1 + \alpha - \gamma_1^2) \int_{\theta_i}^1 b^*(\theta_j) d\theta_j \\ &= \frac{(1 + \alpha)(1 - \theta_i^2)}{2} \end{aligned}$$

in any auction model considered. Moreover, the payment the Market Operator expects to make is:

$$\begin{aligned} P_{MO} &= \sum_{i=1}^2 E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2 \int_0^1 P_i(\theta_i) d\theta_i \\ &= \frac{2(1+\alpha)}{3} \end{aligned}$$

Remark 2. Clearly the expected revenue for the companies and the payment the Market Operator expects to make are not dependent on the parameters, therefore we obtain an equivalence revenue result for every auction model belonging to the vertices of RC2.

4.2 Case 3

Every bayesian Nash equilibrium in Case 3 has the following form

$$[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$$

so if an auction model on the vertices of RC3 is used and both companies bid with their strategies in equilibrium, the revenue for company i is reduced to

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \gamma_1^2 b^*(\theta_i) + (2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2) b^*(\theta_j) + \alpha - \gamma_3^2 & \text{if } \theta_i < \theta_j \\ \gamma_3^2 b^*(\theta_i) + \alpha - \gamma_3^2 & \text{if } \theta_i > \theta_j \end{cases}$$

where $\gamma_1^2 \in [0, 2 - \alpha + \gamma_3^2]$, $\gamma_3^2 \in [0, \alpha]$ and the expected revenue for company i is:

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= E_{\theta_j}[I_i(\theta_i, \theta_j)] = \int_0^1 I_i(\theta_i, \theta_j) d\theta_j \\ &= \left((\gamma_3^2 - \gamma_1^2) \theta_i + \gamma_1^2 \right) b^*(\theta_i) + \alpha - \gamma_3^2 + \\ &+ (2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2) \int_{\theta_i}^1 b^*(\theta_j) d\theta_j = \frac{(2 - \alpha)(1 - \theta_i^2)}{2} + \alpha \end{aligned}$$

in any auction model considered. Moreover, the payment the Market Operator expects to make is:

$$\begin{aligned} P_{MO} &= \sum_{i=1}^2 E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2 \int_0^1 P_i(\theta_i) d\theta_i \\ &= \frac{4(1+\alpha)}{3} \end{aligned}$$

Remark 3. Clearly the expected revenue for the companies and the payment the Market Operator expects to make are not dependent on the parameters, therefore we obtain an equivalence revenue result for every auction model belonging to the vertices of RC3.

4.3 Case 4

Every bayesian Nash equilibrium in Case 4 has one of the following two forms

$$\left[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2) \right] = [b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$$

or

$$\left[b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2) \right] = [b_1^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$$

with $b_1^*(\theta_1) \leq b^*(\theta_1) \forall \theta_1 \in [0, 1]$ strictly monotone and differentiable function, so if an auction model on the vertices of RC4 is used and both companies bid with their strategies in equilibrium, the revenue for company i is reduced in every case to

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \gamma_1^2 b^*(\theta_i) + (1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2) b^*(\theta_j) + 1 + \alpha - \gamma_3^2 & \text{if } \theta_i < \theta_j \\ \gamma_3^2 b^*(\theta_i) + 1 + \alpha - \gamma_3^2 & \text{if } \theta_i > \theta_j \end{cases}$$

where $\gamma_1^2 \in [0, 1 - \alpha + \gamma_3^2]$, $\gamma_3^2 \in [0, 1 + \alpha]$ and the expected revenue for company i is:

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= E_{\theta_j}[I_i(\theta_i, \theta_j)] = \int_0^1 I_i(\theta_i, \theta_j) d\theta_j \\ &= \left((\gamma_3^2 - \gamma_1^2) \theta_i + \gamma_1^2 \right) b^*(\theta_i) + 1 + \alpha - \gamma_3^2 + \\ &+ \left(1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \right) \int_{\theta_i}^1 b^*(\theta_j) d\theta_j = \frac{(1 - \alpha)(1 - \theta_i^2)}{2} + 1 + \alpha \end{aligned}$$

in any auction model considered. Moreover, the payment the Market Operator expects to make is:

$$\begin{aligned} P_{MO} &= \sum_{i=1}^2 E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2 \int_0^1 P_i(\theta_i) d\theta_i \\ &= \frac{4(2 + \alpha)}{3} \end{aligned}$$

Remark 4. Clearly the expected revenue for the companies and the payment the Market Operator expects to make are not dependent on the parameters therefore, we obtain an equivalence revenue result for every auction model belonging to the vertices of RC4.

Remark 5. Alonso, E. and J. Tejada (2010) proved a revenue equivalence result when there are two suppliers with only one production unit.

References

- [1] ALONSO, E., y TEJADA, J.. *Equivalencia de ingresos en un duopolio eléctrico con costes estocásticos*, Latin American Journal of Economics, vol. 47, pp. 191–215, 2010.
- [2] AUSUBEL, L. and CRAMTON, P. *Demand Reduction and Inefficiency in Multi-Unit Auctions*. Technical Report 96–07. Department of Economics, University of Maryland, 2002.

- [3] FABRA, N. *Market Power in Electricity Markets*. Thesis Department of Economics, European University Institute, 2001.
- [4] FABRA, N.; FEHR, N. and HARBORD, D. *Designing Electricity Auctions: Uniform, Discriminatory and Vickrey*. Harvard Electricity Policy Group Research Paper, 2002.
- [5] FABRA, N.; FEHR, V. and HARBORD, D. *Designing Electricity Auctions*. Working Paper. Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, 2003.
- [6] FEDERICO, G. and RAHMAN, D. *Bidding in an Electricity Pay-As-Bid Auction*. Journal of Regulatory Economics 24–2, pp. 175–211., 2001.
- [7] FEHR, N.H. and HARBORD, D. *Competition in Electricity Spot Markets: Economic Theory and International Experience*. University of Oslo Memorandum in Economics; n° 5, 1998.
- [8] VICKREY, W. *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders*. Journal of Finance, 16, pp. 8–37, 1961.
- [9] WOLFRAM, C. *Electricity Markets: Should the Rest of the World Adopt the UK Reforms?*. Regulation, 22, pp. 48–53, 1999.

Appendix

Proof of Proposition 1

The profit function of supplier 1 is:

$$B_1(\theta_1, m, M, b_2(\theta_2)) = \begin{cases} = \gamma_1^1 m + (\gamma_1^2 - \gamma_1^1) M + (\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2) b_2(\theta_2) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 & \text{if } b_2^{-1}(M) < \theta_2 \\ = \gamma_1^1 m + \gamma_2^1 M + (\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^1 - \gamma_1^1) b_2(\theta_2) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1 \theta_1 & \text{if } b_2^{-1}(m) < \theta_2 < b_2^{-1}(M) \\ = (\gamma_3^2 - \gamma_2^1) m + \gamma_2^1 M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_1 & \text{if } \theta_2 < b_2^{-1}(m) \end{cases}$$

The profit function of supplier 2 is:

$$B_2(\theta_2, b_1^-(\theta_1), b_1^-(\theta_1), b_2) = \begin{cases} = \gamma_1^2 b_2 + (\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2) b_1^-(\theta_1) + \beta_1^2 b_1^-(\theta_1) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2 & \text{if } (b_1^-)^{-1}(b_2) < \theta_1 \\ = (\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2) b_2 + \beta_1^2 b_1^-(\theta_1) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2 \theta_2 & \text{if } b_1^{-1}(b_2) < \theta_1 < b_1^{-1}(b_2) \\ = \gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_2 & \text{if } \theta_1 < b_1^{-1}(b_2) \end{cases}$$

Supplier i knows its own type θ_i , but θ_j is a random variable, so the expected profit for supplier 1 is given by:

$$\begin{aligned}
 BM_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2^*(\cdot)) &= \int_0^1 B_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\theta_2)) d\theta_2 = \\
 &= \left(\gamma_{\tilde{1}}^2 m + \left(\gamma_{\tilde{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 \right) \left(1 - (b_2^*)^{-1}(M) \right) \\
 &+ \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_{\tilde{1}}^2 \right) \int_{(b_2^*)^{-1}(M)}^1 b_2(\theta_2) d\theta_2 \\
 &+ \left(\gamma_{\tilde{1}}^2 m + \gamma_{\hat{1}}^2 M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1 \theta_1 \right) \left((b_2^*)^{-1}(M) - (b_2^*)^{-1}(m) \right) \\
 &+ \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_{\hat{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) \int_{(b_2^*)^{-1}(m)}^{(b_2^*)^{-1}(M)} b_2(\theta_2) d\theta_2 \\
 &+ \left(\left(\gamma_3^2 - \gamma_{\hat{1}}^2 \right) m + \gamma_{\hat{1}}^2 M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_1 \right) (b_2^*)^{-1}(m) = \\
 &= \gamma_{\tilde{1}}^2 m + \left(\gamma_{\tilde{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 \\
 &+ (b_2^*)^{-1}(M) \left(\left(\gamma_{\hat{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^2 + \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) M + \left(\phi_1 - \phi_2^1 \right) \theta_1 \right) \\
 &+ (b_2^*)^{-1}(m) \left(\left(-\gamma_{\tilde{1}}^1 + \gamma_3^2 - \gamma_{\hat{1}}^2 \right) m + \left(\phi_2^1 - \phi_3 \right) \theta_1 \right) \\
 &+ \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_{\tilde{1}}^2 \right) \int_{(b_2^*)^{-1}(M)}^1 b_2(\theta_2) d\theta_2 \\
 &+ \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_{\hat{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) \int_{(b_2^*)^{-1}(m)}^{(b_2^*)^{-1}(M)} b_2(\theta_2) d\theta_2
 \end{aligned}$$

Where $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ and $M = \max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$. Thus $(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ is the best bid for company 1 if it maximizes the expected profit, given that its type is θ_1 . First we are going to suppose that supplier 1 makes different bids with its production units. Derivation with respect to $b_{\tilde{1}}$ and $b_{\hat{1}}$ (one of them is m and the other is M) yields

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial m} BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\cdot)) &= \\
 &= \gamma_{\tilde{1}}^2 + \left(-\gamma_{\tilde{1}}^1 + \gamma_3^2 - \gamma_{\hat{1}}^2 \right) (b_2^*)^{-1}(m) \\
 &+ \left(\phi_3 - \phi_2^1 \right) (m - \theta_1) \frac{d}{dm} (b_2^*)^{-1}(m) \\
 \frac{\partial}{\partial M} BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\cdot)) &= \\
 &= \left(\gamma_{\tilde{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) + \left(\gamma_{\hat{1}}^2 - \gamma_{\tilde{1}}^2 + \gamma_{\tilde{1}}^1 \right) (b_2^*)^{-1}(M) \\
 &+ \left(\phi_2^1 - \phi_1 \right) (M - \theta_1) \frac{d}{dM} (b_2^*)^{-1}(M)
 \end{aligned}$$

If bidder 1 makes the lowest bid with the production unit $\tilde{1}$ then as $b_{\tilde{1}}(\theta_1) = m$ and $b_{\hat{1}}(\theta_1) = M \Leftrightarrow \theta_1 = b_{\tilde{1}}^{-1}(m) = b_{\hat{1}}^{-1}(M)$, replacing and setting the above

equations to zero, we obtain the following differential equations:

$$\begin{cases} \gamma_1^{\tilde{}} + \left(-\gamma_1^{\tilde{}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{}}\right) (b_2^*)^{-1}(m) + \\ + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(m - (b_1^*)^{-1}(m)\right) \frac{d}{dm} (b_2^*)^{-1}(m) = 0 \\ \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{}}\right) + \left(\gamma_2^{\hat{}} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\tilde{}}\right) (b_2^*)^{-1}(M) + \\ + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(M - (b_1^*)^{-1}(M)\right) \frac{d}{dM} (b_2^*)^{-1}(M) = 0 \end{cases}$$

evaluating both on t we obtain

$$\begin{cases} \gamma_1^{\tilde{}} + \left(-\gamma_1^{\tilde{}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{}}\right) (b_2^*)^{-1}(t) + \\ + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{}}\right) + \left(\gamma_2^{\hat{}} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\tilde{}}\right) (b_2^*)^{-1}(t) + \\ + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

If bidder 1 makes the same bid with both production units then we obtain only one differential equation and it is:

$$\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) (b_2^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0$$

On the other hand, the expected profit for supplier 2 is given by

$$\begin{aligned} BM_2(\theta_2, b_1^*(\cdot), b_1^*(\cdot), b_2) &= \int_0^1 B_2(\theta_2, b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2) d\theta_2 = \\ &= \left(\gamma_1^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2\right) \left(1 - (b_1^*)^{-1}(b_2)\right) \\ &+ \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{}} - \gamma_1^2\right) \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2)}^1 b_1^*(\theta_1) d\theta_1 + \beta_1^{\hat{}} \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2)}^1 b_1^*(\theta_1) d\theta_1 \\ &+ \left((\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{}}) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2 \theta_2\right) \left((b_1^*)^{-1}(b_2) - (b_1^*)^{-1}(b_2)\right) \\ &+ \left(\gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_2\right) (b_1^*)^{-1}(b_2) \\ &= \gamma_1^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2 \\ &+ (b_1^*)^{-1}(b_2) \left((\phi_1 - \phi_2^2) \theta_2 + (\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{}} - \gamma_1^2) b_2\right) \\ &+ (b_1^*)^{-1}(b_2) \left(-(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{}}) b_2 + (\phi_2^2 - \phi_3) \theta_2\right) \\ &+ \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{}} - \gamma_1^2\right) \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2)}^1 b_1^*(\theta_1) d\theta_1 + \beta_1^{\hat{}} \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2)}^1 b_1^*(\theta_1) d\theta_1 \end{aligned}$$

Derivation with respect to b_2 yields

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_2} BM_2(\theta_2, b_1^*(\cdot), b_1^*(\cdot), b_2) &= \\ &= \gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{}} - \gamma_1^2\right) (b_1^*)^{-1}(b_2) - \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{}}\right) (b_1^*)^{-1}(b_2) \\ &+ \left(\phi_2^2 - \phi_1\right) (b_2 - \theta_2) \left((b_1^*)^{-1}(b_2)\right)' + \left(\phi_3 - \phi_2^2\right) (b_2 - \theta_2) \left((b_1^*)^{-1}(b_2)\right)' \end{aligned}$$

As $b_2^{-1}(b_2) = \theta_2 \iff b_2(\theta_2) = b_2$, replacing and setting the above equations to zero, we obtain the following differential equation:

$$\begin{aligned} 0 = & \gamma_1^2 + (\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2) (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ & - (\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^2) (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ & + (\phi_2^2 - \phi_1) (b_2^*(\theta_2) - \theta_2) \left((b_1^*)^{-1} \right)' (b_2^*(\theta_2)) \\ & + (\phi_3 - \phi_2^2) (b_2^*(\theta_2) - \theta_2) \left((b_1^*)^{-1} \right)' (b_2^*(\theta_2)) \end{aligned}$$

Evaluating on t

$$\begin{aligned} 0 = & \gamma_1^2 + (\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) - (\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_2^2 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_3 - \phi_2^2) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) \end{aligned}$$

Then we have obtained two differential systems, if bidder 1 makes two bids then the system is

$$(S1) \left\{ \begin{aligned} & \gamma_1^1 + (-\gamma_1^1 + \gamma_3^2 - \gamma_1^1) (b_2^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ & (\gamma_1^2 - \gamma_1^1) + (\gamma_2^1 - \gamma_1^2 + \gamma_1^1) (b_2^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ & \gamma_1^2 + (\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) - (\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_2^2 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) \\ & + (\phi_3 - \phi_2^2) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{aligned} \right.$$

And if bidder 2 makes the same bid with both production units then the system is:

$$(S2) \left\{ \begin{aligned} & \gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) (b_2^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ & \gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{aligned} \right.$$

We have the following regions:

Region I If $\phi_3 = \phi_2^1$, $\phi_1 = \phi_2^2$, $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = \gamma_3^2$, $\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 0$ then the system (S1) is reduced to

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) (b_2^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ & \gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) (b_1^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t) \right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{aligned} \right.$$

and with the conditions $b_2^*(1) = b_1^*(1) = 1$, it follows that there exist infinite bayesian Nash equilibrium given by

$$\left(b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = \left(b_1^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right)$$

where $b_1^*(\theta_1)$ is any strictly monotone and differentiable function verifying $b_1^*(\theta_1) \leq b^*(\theta_1) \forall \theta_1 \in [0, 1]$.

Region II Otherwise and if one of the following expressions is true

- $\gamma_2^1 \neq 0$ or $\gamma_3^2 \neq 0$
- $\gamma_2^1 = 0$ and $\gamma_1^1 = \gamma_1^2$
- $\gamma_2^1 = \gamma_3^2 = 0$ and $\gamma_1^2 = (1+k) \gamma_1^1, (1+k) \phi_2^1 = \phi_1 + k\phi_3$, for any $k \in \mathbb{R}$

Then 1 makes the same bid with the two production units. So the system is reduced to (S2) and with the conditions $b_2^*(1) = b_1^*(1) = 1$, it follows that there exist unique symmetric bayesian Nash equilibrium given by

$$\left(b_1^*(\theta_1), b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = (b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$$

Both in **Region I** as in **Region II**, $b^*(\theta_i)$ is a particular solution of the differential equation

$$\left(\gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) \theta_i\right) (b^*)'(\theta_i) - (\phi_1 - \phi_3) b^*(\theta_i) = -(\phi_1 - \phi_3) \theta_i$$

with $b^*(1) = 1$. Solving the differential equation we obtain

a) If $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = 0$, then

$$b^*(\theta_i) = \theta_i$$

b) If $\gamma_3^2 = 0$ and $\gamma_1^2 \neq 0$, then

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_1 - \phi_3) \theta_i + \gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \phi_1 - \phi_3}$$

c) If $\gamma_1^2 \neq \gamma_3^2 \neq 0$ then

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_3 - \phi_1) \theta_i - \gamma_1^2 + (\gamma_3^2) \frac{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2} (\gamma_1^2 + (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) \theta_i) \frac{\phi_1 - \phi_3}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}$$

d) If $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 \neq 0$ then

$$b^*(\theta_i) = \theta_i + \frac{\gamma_1^2 \left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(\phi_1 - \phi_3)}{\gamma_1^2}}\right)}{\phi_1 - \phi_3}$$

Region III If the parameters don't belong to **Region I** or **Region II** then we can only say that the bayesian Nash equilibria are solutions of the following system of differential equations:

$$\begin{cases} \gamma_1^1 \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^1\right) \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \gamma_1^2 \left(1 - (b_1^*)^{-1}(t)\right) + \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^2\right) \left((b_1^*)^{-1}(t) - (b_1^*)^{-1}(t)\right) \\ + (\phi_2^2 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) \\ + (\phi_3 - \phi_2^2) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

■

Sobre los autores:

Nombre: Estrella Alonso

Correo Electrónico: etalonso@upcomillas.es

Institución: Universidad Pontificia Comillas de Madrid, España.

Nombre: Juan A. Tejada

Correo Electrónico: jtejada@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Investigación

Teorema de Hall y un algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos

Edwin Carranza Vargas

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Este trabajo presenta dos aportes a la combinatoria aplicada el primero la relación de equivalencia de los Teoremas de Ford- Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth y Hall, además presenta una nueva prueba al Teorema de Hall que sirve como algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos. En cada sección se establecen generalidades de los teoremas mencionados y finalmente el algoritmo con su respectiva justificación.

Palabras Clave: Teorema de Ford- Fulkerson, Teorema de Menger, Teorema de Köning, Teorema de Dilworth, Teorema de Hall.

1. Introducción

Este artículo representa por una parte un compendio de algunos teoremas importantes en el análisis combinatorio y más específicamente en la combinatoria aplicada, puesto que se recrean alguno de ellos y se muestra la equivalencia lógica entre ellos. Este resultado aparece en la sección 2 del artículo con definiciones que ayudan al lector a ubicarse en cada uno de los temas específicos donde cada teorema tiene su importancia.

En la sección 3, se muestra una nueva demostración del Teorema de Hall realizada por el autor que desprende en un algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos.

Este artículo está cargado de mucha teoría en la cual las demostraciones de los Teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth son referenciadas para que el autor las consulte, las demostraciones de Hall y otras que son ne-

cesarias para la comprensión de la equivalencia entre los teoremas si están en el artículo.

2. Definiciones, Teorema y relación de equivalencia entre los Teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth y Hall

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Un grafo G consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas, y una asignación de cada arista $e \in E$ y una pareja no ordenada x, y de vértices llamados extremos de e .

Una arista se dice incidente con dos vértices si estos son extremos de la arista. Un punto se dice aislado si no posee aristas que incidan en él. Dos vértices son adyacentes si son diferentes y existe alguna arista que incide en ellos. $N(x)$ denota la vecindad de $x \in V$, como el conjunto de vértices adyacentes a x . El número de aristas incidentes con un vértice x se llama el grado o la valencia de x .

Definición 2.1.2. Un digrafo D o grafo dirigido consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto A de arcos, y una asignación de cada arco $e \in A$ y una pareja ordenada de V .

En un digrafo el grado de un vértice x se descompone en dos cantidades; la primera es el grado de entrada que es el número de arcos que llegan al vértice, es decir el conjunto de arcos asociados a la forma (y, x) donde y es adyacentes a x y el grado de salida que es el número de arcos que salen de él, es decir el conjunto de arcos asociados a la forma (x, z) , donde z es adyacente a x .

Definición 2.1.3. Un grafo $G = (V, A)$ se dice bipartito si existe una partición del conjunto de vértices V en dos conjuntos A y B tal que cada $\{A, B\}$ es llamado una bipartición de G

Definición 2.1.4. En un grafo G , un emparejamiento es un conjunto de arcos disyuntos; y una cobertura es un conjunto C de vértices con la propiedad que cada arco posee un vértice de C .

Definición 2.1.5. Una red es un digrafo con una función entera c , conocida como función de capacidad, definida sobre el conjunto de arcos, además posee un par de vértices llamados fuente s y meta t

El grado de entrada de s es cero al igual que el grado de salida de t . Los demás vértices son llamados vértices intermedios. Asumimos que el conjunto de vértices es $\{1, 2, \dots, n\}$ donde el vértice 1 es la fuente y el vértice n es la meta. Si $e = (i, j)$ es un arco, el entero no negativo $c(e) = c(i, j)$ es la capacidad del arco.

Definición 2.1.6. Un flujo f en una red es una función entera definida sobre el conjunto de arcos, tal que $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para cada arco e . El entero $f(e)$ es el flujo a lo largo de e . La suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos al vértice i es el flujo de entrada en i , y la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos desde el vértice i es el flujo de salida desde i .

Un flujo se dice factible si se satisface la condición de conservación: El flujo de entrada en cualquier vértice intermedio i debe ser igual al flujo de salida desde i . Si f es un flujo factible en una red G , el valor $f(G)$ es el flujo de salida desde la fuente. Un flujo factible en una red tal que el valor del flujo sea lo mayor posible se llama flujo máximo. Al problema de hallar el mayor flujo posible en una red se le llama problema de máximo flujo. Consideremos una

partición del conjunto de vértices de una red $G = (V, E)$ en dos conjuntos S y T tal que la fuente esté en S y la meta en T . El conjunto $(S, T) = \{(i, j) : (i, j) \in E, i \in S, j \in T\}$ es llamado un corte. La suma de las capacidades de todos los arcos del corte (S, T) es la capacidad $c(S, T)$ del corte. Un corte es llamado mínimo corte si su capacidad no excede la capacidad de cualquier otro corte. Si f es un flujo factible en la red, la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos en el corte (S, T) es el flujo $f(S, T)$ a lo largo del corte. Obviamente $0 \leq f(S, T) \leq c(S, T)$.

Definición 2.1.7. Un orden sobre un conjunto X es una relación R sobre X que satisface las siguientes propiedades.

- a) Reflexiva: $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$.
- b) Antisimétrica: $(x, y), (y, x) \in R$ implica que $x = y$
- c) Transitiva: $(x, y), (y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R$.

La pareja (X, R) es llamado conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto parcialmente ordenado será llamado un Orden.

Un conjunto parcialmente ordenado (Orden) consiste de un conjunto X y una relación de orden $(\leq)$. Dado un Orden con un número finito de elementos, es posible construir un digrafo G tal que exista una relación uno a uno entre el conjunto de elementos en el Orden y el conjunto de elementos del digrafo y tal que un arco se dibuja desde el vértice que corresponda al elemento x al vértice que corresponda al elemento y si y solo si $x \leq y$. Dos elementos x, y en

un Orden son comparables si $x \leq y$ ó $y \leq x$. De lo contrario se dice que son incomparables. Un conjunto de elementos que pertenecen al Orden se llama cadena en el Orden si cada par de elementos son comparables. Una anticadena en un Orden es un conjunto del cualquier par de elementos son incomparables.

2.2. Teoremas

Teorema 2.2.1. Si f es cualquier flujo factible en una red G y si (S, T) es cualquier corte

$$f(G) = f(S, T) - f(T, S)$$

Demostración. El conjunto de vértices es $V = \{1, 2, \dots, n\}$. S es cualquier conjunto de vértices que contiene a s , y T su complemento que contiene a t . Es de notar que $f(G) = \sum_j f(i, j) - \sum_j f(j, i)$, cuando $i = 1$ la segunda suma es cero. Ahora $f(G) = \sum_{i \in S} \sum_j f(i, j) - \sum_{i \in S} \sum_j f(j, i)$. Si i y j están ambos en S , el término $f(i, j)$ aparece en la primera suma al igual que en la segunda por ser el flujo factible. Así que podemos restringir i a S y a j en T y de esa manera queda demostrado. $\square$

Corolario 2.2.1. El valor $f(G)$ de cualquier flujo factible f es igual al flujo de entrada de la meta.

Demostración. Por el Teorema 2.2.1 Consideremos el conjunto $S = V - \{n\}$. En este caso $f(T, S) = 0$, y $f(S, T)$ es el flujo de entrada de t . $\square$

Corolario 2.2.2. Si f es cualquier flujo factible y si (S, T) es cualquier corte,

$$f(G) \leq c(S, T)$$

Demostración. Por el Teorema 2.2.1 $f(G) = f(S, T) - f(T, S) \leq f(S, T) \leq c(S, T)$. $\square$

Si f es un flujo factible en una red, el arco (i, j) es f -saturado si $f(i, j) = c(i, j)$, es f -cero si $f(i, j) = 0$, y es f -positivo si $0 < f(i, j) < c(i, j)$

Teorema 2.2.2. a) Si f es flujo factible y (S, T) cualquier corte,

$$f(G) = c(S, T)$$

si y solo si cada arco en (S, T) es f -saturado y cada arco en el corte (S, T) es f -cero.

b) Si f es un flujo factible y si (S, T) es cualquier corte tal que

$$f(G) = c(S, T)$$

f es un máximo flujo y (S, T) es un mínimo corte.

Demostración. a) $f(G) = c(S, T)$ si y solo si $f(S, T) - f(T, S) = c(S, T)$. Esto es posible si y solo si cada arco en el corte (T, S) es f -cero y cada arco en el corte (S, T) es f -saturado. b) Sea f' un flujo máximo y (S', T') un corte mínimo en

la red. Entonces por el corolario 2.2 se tiene que $f(G) \leq f'(G) \leq c(S', T') \leq c(S, T)$. Si $f(G) = c(S, T)$, tenemos que $f(G) = f'(G) = c(S', T') = c(S, T)$ lo cual implica que el máximo flujo es equivalente al mínimo corte. $\square$

Definición 2.2.1. Una sucesión alternada P de vértices y arcos de la forma $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ en la cual ningún vértice es repetido es llamada una semiruta desde v_0 hasta v_k . Un arco e_i en esta ruta es arco delantero en P si éste es dirigido a v_i en caso contrario es arco trasero en la ruta P . Una semiruta es f -insaturada si ningún arco delantero es f -saturado y ningún arco trasero es f -cero. Una ruta f -insaturada desde s hasta t es llamada ruta f -aumentada.

Para cada arco e_i en una ruta f -aumentada P , definimos $\delta_i(P) = c(e_i) - f(e_i)$ si e_i es arco delantero y $\delta_i(P) = f(e_i)$ si e_i es arco trasero. El exceso de capacidad de flujo de la semiruta P es $\delta(P) = \min\{\delta_i(P) : e_i \in P\}$. Si P es una ruta f -aumentada con exceso de capacidad de flujo $\delta(P)$, un nuevo flujo factible se obtiene si incrementamos el flujo a lo largo de cada arco delantero en $\delta(P)$ y al mismo tiempo reducimos el flujo a lo largo de cada arco trasero en $\delta(P)$, tal que $f'(G) = f(G) + \delta(P)$

Teorema 2.2.3. *Un flujo f en una red es máximo flujo si y solo si no existen rutas f -aumentadas.*

Demostración. Si existiera una ruta f -aumentada en la red, el valor de la corriente de flujo puede incrementarse usando esta ruta, además la corriente del flujo no es un flujo máximo. Así si la corriente del flujo f es un flujo máximo, no existen rutas f -aumentadas. Ahora mostraremos que si no existen rutas f -aumentadas con respecto al flujo f , f es en efecto un flujo máximo. Sea S el conjunto de todos los vértices i tales que existe una ruta f -insaturada desde s a i . Obviamente, 1 está en S y t no es vértice en S . Así que existe un corte (S, T) en la red. Sea (i, j) cualquier arco en este corte. Ya que no existen rutas f -insaturadas desde s a j , el arco (i, j) es necesariamente f -saturado. De igual forma, cualquier arco en el corte (S, T) es f -cero. así que el valor de la corriente de flujo es igual a la capacidad del corte (S, T) . Por lo tanto el flujo es máximo. $\square$

Teorema 2.2.4 (Teorema de Ford-Fulkerson). *En una red, el valor del máximo flujo es igual a la capacidad del mínimo corte. Este Teorema también es conocido como Teorema de máximo flujo y mínimo corte.*

(Hu & Shing, p 42. Wilson, p 133)

Definición 2.2.2. *Dos rutas desde s hasta t en una red son llamadas rutas disjuntas desde s a t si ellas no tienen vértices en común aparte de s y t . Cualquier par de rutas son llamadas arco-disjuntas si no existen arcos en común.*

Teorema 2.2.5 (Teorema de Menger (1)). *El máximo número de rutas disjuntas entre cualquier par de vértices no adyacentes es igual al mínimo número de vértices que pueden ser borrados para que no existan rutas entre ese par de vértices.*

Teorema 2.2.6 (Teorema de Menger (2)). *El máximo número de rutas arco-disyuntas desde s a t en un grafo es igual al mínimo número de arcos que pueden ser borrados para que no hayan tales rutas.*

(Wilson, pp 127, 128)

Teorema 2.2.7. *Teorema de Menger(1) implica Teorema de Menger(2).*

Demostración. Sea G un grafo no dirigido (Figura 1.) en el cual s y t son vértices. Introducimos dos nuevos vértices x e y , juntamos x con s e y con t . El grafo extendido es G' y en este $L(G')$ es el grafo de líneas. Sea s' un vértice en $L(G')$ que corresponde al arco que une x con s en G' . De igual forma sea t' el vértice en $L(G')$ que corresponde al arco (y, t) . Se logra notar que s' y t' no son adyacentes

ya que s y t son distintos. Cualquier corte en G corresponde a un conjunto de vértices en $L(G')$, la eliminación de estos en el grafo en el cual no existen rutas de s' a t' . Además cualquier par de aristas de rutas arco-disyuntas entre s y t se convierte en 2 rutas disyuntas entre s' y t' en $L(G')$. Así El teorema de Menger (1) implica el teorema de Menger(2). $\square$

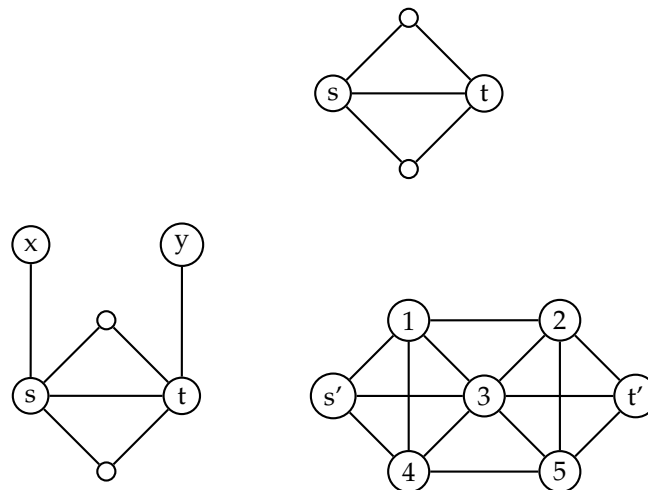


Figura 1.

Teorema 2.2.8. *Teorema de Ford-Fulkerson y los teoremas de Menger son equivalentes.*

Demostración. En la prueba de Menger(1), se muestra el uso del teorema de Ford-Fulkerson para conseguir el resultado, en el teorema 2.2.7 se muestra que el teorema de Menger(1) implica el teorema de Menger(2). Sólo falta probar que el teorema de Menger(2) implica el teorema de Ford-Fulkerson.

Sea G una red con s y t . La capacidad de cada arco (i, j) es el entero positivo c_{ij} . Reemplazando cada arco por c_{ij} arcos, resulta un multigrafo G' con una unidad de capacidad en cada arco. El valor del flujo p de máximo flujo en G es igual al número de rutas arco-disyuntas de s a t en G' . La capacidad q del mínimo corte en G es igual al número de arcos en un mínimo corte en G' . Por el teorema de Menger(2) se concluye que $p = q$. Así que se tiene el resultado del teorema de Ford-Fulkerson. $\square$

Teorema 2.2.9 (Teorema de König). *El máximo tamaño de un emparejamiento en un grafo bipartito G es igual al mínimo tamaño de una cobertura en G .*

(Cameron, p 178)

Teorema 2.2.10. *Teorema de Menger implica Teorema de König.*

Demostración. Dado un grafo bipartito, construimos un digrafo G' como anteriormente se hizo. Por Menger el máximo número de rutas disyuntas de s a t

es igual al mínimo número de vértices que pueden ser borrados para destruir los caminos de fuente a meta. Pero el primero es la cardinalidad del emparejamiento y el segundo la cardinalidad de la cobertura. $\square$

Teorema 2.2.11. *Teorema de König implica teorema de Menger.*

Demostración. Sea x e y dos vértices no adyacentes en un grafo $G = (V, A)$ con n vértices. La vecindad $N(x)$ de x es el conjunto de todos los vértices adyacentes a x , $N(y)$ es el conjunto de vértices adyacentes a y , la intersección $N(x) \cap N(y)$ es denotada por T . Sea $X = N(x) - T$ y $Y = N(y) - T$. Así tenemos una partición de V en cuatro conjuntos T, X, Y, U donde $U = V - T - X - Y$. El conjunto S de vértices en el grafo es llamado un conjunto separador de x, y si al borrar S del grafo no quedan rutas de x a y . Obviamente, T es un subconjunto de cualquier conjunto separador. Suponga que el tamaño de un conjunto mínimo separador de x, y es k . Así existe un camino de x a y , cuando cualquier conjunto de $k - 1$ vértices es borrado y existe un conjunto separador de x, y de cardinalidad k .

El conjunto S es la unión disjunta de T y $S - T$. Si $|T| = t$, existen t rutas disjuntas entre x, y usando los vértices en T . Se distinguen dos casos. (Figura 2.)

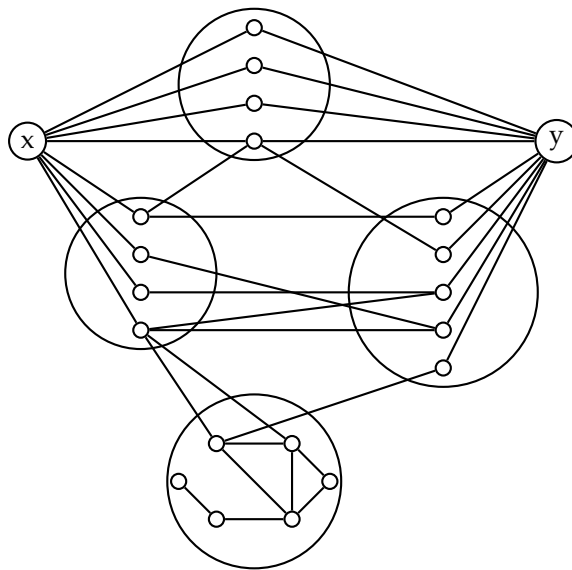


Figura 2.

Caso(i) Si S es un mínimo conjunto separador de x, y , $S \cap U = \emptyset$. Sea $G' = (X, Y, A')$ un grafo bipartito en el cual las aristas son precisamente las de G unidas a los vértices en X y Y . Ya que $(S - T)$ es un conjunto de vértices de cardinal mínimo en el grafo bipartito y ya que la exclusión de uno de estos vértices no aumenta el tamaño de S , $(S - T)$ es necesariamente una cobertura mínima en el grafo bipartito. Así por König existe un emparejamiento máximo de tamaño $(k - t)$, donde $(k - t)$ rutas disjuntas entre x, y usando los vértices

de $(S - T)$. Así que son k rutas disyuntas entre x, y , fuera de que hay t rutas que tienen dos aristas y el resto tiene tres.

Caso(ii) Existe un mínimo conjunto separador S de x, y de tamaño k tal que $S \cap U \neq \emptyset$. Esto puede ser probado por inducción sobre n , existen k rutas disyuntas entre x, y . Asumimos que Menger se cumple para todos los grafos de orden menor que n . Sea $G(x)$ un subgrafo de G que contiene todas las rutas entre x, y y los vértices en S , tal que no hay dos rutas que tengan otro vértice en común que x . Construimos el grafo $G'(x)$ introduciendo un vértice artificial x' a cada vértice en S . El tamaño del mínimo conjunto separador de x, x' en $G'(x)$ no puede ser más que k . Si este es más pequeño que k , los mínimos requerimientos de S son violados. Ya que las rutas escogidas al construir $G(x)$ son pares disyuntos, hay al menos un vértice en $N(x)$ que no es un vértice de $G'(x)$. Así este orden es menor que n . Por la hipótesis de inducción, hay k rutas disyuntas entre x, x' . Así hay k pares de rutas disyuntas entre x y S . Similarmente, se establece que hay k rutas entre y y S . Si unimos las k rutas de $G(x)$ y las k rutas de $G(y)$ tenemos k rutas disyuntas. $\square$

Para poder abordar el siguiente teorema es necesario definir algunos elementos matriciales.

Definición 2.2.3. Una línea en una matriz es una fila o columna. Suponga que P es una propiedad tal que un elemento en A puede no tener. Una colección de elementos en la matriz que satisfagan la propiedad P es P -independiente si no hay dos elementos con la propiedad P que estén en la misma línea. El P -rango de A es el conjunto P -independiente de mayor cardinal.

Teorema 2.2.12 (Teorema de König-Egervary). El P -rango de una matriz es igual al mínimo número de líneas que contienen todos los elementos de la matriz con la propiedad P .

(Wilson, p 123)

Teorema 2.2.13 (Teorema de Dilworth). En un Orden finito, el máximo tamaño de una anticadena es igual al mínimo número de cadenas que pueden particionar completamente al Orden.

(Anderson, p 31. Cameron p 196. Van Lint p 53)

Definición 2.2.4. Sea $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X . Un sistema de representantes distintos (SDR) para estos conjuntos es una n -tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de elementos con las siguientes propiedades.

- a) $x_i \in A_i$ para todo i (representante).
- b) $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ (distintos)

Definición 2.2.5. Condición de Hall (CH).

$$|\cup_{j \in J} A_j| \geq |J|$$

donde $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 2.2.14 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Demostración. La parte necesaria es obvia, la suficiente se hará por inducción sobre n . Para $n = 1$ obviamente se tiene. Si $|\cup_{j \in J} A_j| = |J|$ diremos que J es crítico, en este caso todo elemento de $\cup_{j \in J} A_j$ debe ser usado como un representante de uno de esos conjuntos. Si J no crítico excepto para $J = \emptyset$ y posiblemente $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea x_n un punto cualquiera de A_n (note que $A_n \neq \emptyset$ por CH) y, para $i = 1, 2, \dots, n-1$, se define $A'_i = A_i - \{x_n\}$. Verifiquemos que la familia $(A'_1, \dots, A'_{n-1})$ satisface CH. Tomemos $J \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, y suponga que $J \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} |\cup_{j \in J} A'_j| &\geq |\cup_{j \in J} A_j| - 1 \\ &> |J| - 1 \end{aligned}$$

La primera desigualdad es porque se eliminó un elemento y la segunda es porque J no es crítico. Así que $|\cup_{j \in J} A'_j| \geq |J|$. Por inducción, $(A'_1, \dots, A'_{n-1})$

tiene un SDR $(x_1, \dots, x_{n-1})$. Entonces $(x_1, \dots, x_n)$ es un SDR para la familia original ya que claramente $x_n \neq x_j$ para $n \neq j$. $\square$

Teorema 2.2.15 (Teorema de König-Egervary). *El número de líneas de una matriz A de ceros y unos, que contiene a todos los 1's es igual al máximo número de 1's no dos en línea.*

Demostración. Sea m el mínimo número de líneas de A que contiene a todos los 1's de A y sea M el máximo número de 1's no dos en línea. Claramente $m \geq M$. Consideremos la mínima cobertura por línea que consiste en r filas y s columnas ($r + s = m$). Sin pérdida de generalidad esas son las primeras r filas y las primeras s columnas. Definamos los conjuntos A_i , $1 \leq i \leq r$ por $A_i = \{i > s; a_{ij} = 1\}$. Si alguna k -tupla de los A_i 's contienen menos de k elementos, entonces podría reemplazar las correspondientes k filas por $k-1$ columnas, aún en la cobertura todos los 1's. Ya que esto es imposible, vemos que los A_i 's cumplen CH. Así que los A_i 's tienen un SDR. Esto significa que los 1's no dos en línea, en las primeras r filas y s columnas. Por el mismo argumento existe s 1's no dos en línea en las primeras s columnas y no hay en las primeras r filas. Esto es que $M \geq m$. Por lo tanto $M = m$. $\square$

Del teorema anterior se observa que el teorema de Hall implica el teorema de König-Egervary.

Teorema 2.2.16. *El teorema de König implica el teorema de Hall.*

Demostración. Sea $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ una familia de conjuntos y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la unión de todos los conjuntos en la familia. En el grafo bipartito $G = (F, X, E)$ existe una arista entre A_i y x_j si y solo si $x_j \in A_i$. Supongamos que la familia cumple CH pero no posee un SDR. En este caso, consideremos la subfamilia más grande que tenga un SDR, consistente de r vértices en F , donde

$r < m$. Es decir, el tamaño del máximo emparejamiento es r , además por König, existe un cubrimiento W que consiste de r vértices que tienen más de un vértice de X .

Supongamos que $F - W = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ entonces $|X \cap W| = r - (m - k)$. Ahora la CH implica que la cardinalidad de la unión de los k conjuntos en la subfamilia $F - W$ es al menos k . Así que $|x \cap W| \geq k$, así $r - (m - k) \geq k$ lo cual contradice que $r < m$. $\square$

Otra demostración de Hall es usando el teorema de Dilworth.

Teorema 2.2.17. *El teorema de Dilworth implica el teorema de Hall.*

Demostración. Suponga que $\{A_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ una familia de subconjuntos de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ que satisface CH.

Considere el conjunto $P = \{x_1, x_2, \dots, x_m, A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Sea $<$ una relación estricta de orden parcial en P , donde $x_i < A_j$ si y solo si $x_i \in A_j$. En este poset, X es una anticadena de cardinal m . Sea D una anticadena arbitraria en el Orden que consiste de p elementos de X y q elementos de la familia. Suponga que $D = \{x_1, x_2, \dots, x_p, A_1, A_2, \dots, A_q\}$ ya que ninguno de los p elementos pueden ser un elemento de la unión de los q conjuntos en D , la unión puede tener a lo más $m - p$ elementos. Pero la CH implica que esa unión tenga al menos q elementos. Así que $q \leq (m - p)$ implica que $p + q \leq m$. Así X es una máxima anticadena en el Orden. Por Dilworth existe una partición de el Orden en m cadenas. Cada cadena consiste de dos elementos, un elemento de la familia y un elemento de X . Lo cual significa que existe un SDR para la familia. $\square$

Con esta prueba se demuestra que los teoremas: Ford-fulkerson, Menger(1), Menger(2), König, König-Egervary, Dilworth y Hall son equivalentes.

3. Una nueva prueba del Teorema de Hall y algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos

3.1. Teorema de Hall

Teorema 3.1.1. *Dada una familia de conjuntos que satisfacen CH. Si eliminamos un elemento cuya multiplicidad es máxima de uno de los conjuntos a los cuales él pertenece entonces la familia restante satisface CH. Se define multiplicidad al número de conjuntos al que el elemento pertenece.*

Demostración. Sea $F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ una familia de conjuntos que satisfacen CH y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in S_1$ y que la multiplicidad de x es grande, es decir $m(x) > 1$. Inicialmente si $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ tenemos que $|\bigcup_{i \in J} S_i| \geq |J|$ entonces $\bigcup_{i \in J, i \neq 1} (S_1 - \{x\}) \cup S_i = \bigcup_{i \in J} S_i$, por tanto $|\bigcup_{i \in J, i \neq 1} (S_1 - \{x\}) \cup S_i| \geq |J|$. lo cual sigue cumpliendo Hall. $\square$

Corolario 3.1.1. *De una familia de subconjuntos de un conjunto que satisface la condición de Hall. Si se elimina un elemento de multiplicidad máxima en más de un subconjunto que lo contenga entonces la familia restante también cumple la condición de Hall.*

Demostración. La prueba de este corolario se basa en el teorema anterior. Sea $F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface Hall. Si seleccionamos un elemento x de máxima multiplicidad, lo eliminamos de uno de ellos, la familia de subconjuntos restantes sigue cumpliendo Hall por el teorema, si eliminamos x de otro subconjuntos la familia restante sigue cumpliendo Hall por el teorema y así sucesivamente. $\square$

Teorema 3.1.2 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Nueva Demostración. Dada una familia de m conjuntos no vacíos A_i 's cuyos elementos pertenecen a un conjunto X de n elementos $m \leq n$. Tal familia de conjuntos cumple la condición de Hall. Usando una forma matricial para representar los conjuntos, utilizamos las filas como los conjuntos y las columnas como los elementos, es decir $a_{ij} = 1$ si y solo si $x_j \in A_i$ y es cero en caso contrario, como la familia cumple Hall, debe existir un sdr del conjunto X . Una forma de determinar tal sdr es usar el siguiente algoritmo. Cada conjunto posee su

cardinal y a cada elemento se le asocia su multiplicidad que es el número de conjuntos a los cuales él pertenece, además a cada conjunto se le asocia un peso que estará determinado por la suma de las multiplicidades de sus elementos. Escogemos el conjunto con menor cardinal y de este escogemos el elemento de mayor multiplicidad, tal elemento representará al conjunto, después el elemento será quitado de los conjuntos a los cuales él pertenece y se quitará el conjunto representado o fila; como se escogió el conjunto de menor cardinal y elemento de mayor multiplicidad, se garantiza que los conjuntos restantes sean no vacíos y por el corolario anterior los nuevos conjuntos satisfacen Hall. Ahora bien, al quitar un elemento y un conjunto, se sigue preservando Hall, lo

cual indica que por cada paso del algoritmo se encuentra un elemento representante y por ende un sdr de la familia de subconjuntos. $\square$

Veamos si el algoritmo genera todos los sdr's posibles de una familia de conjuntos que satisfagan Hall. Supongamos que no es así que existe un sdr que no es generado por el algoritmo, lo cual indica que existe un elemento que no es descartado por algoritmo en todos los pasos, si el elemento nunca es elegido es porque su multiplicidad en cada paso es la menor, lo cual indica que debería tener la mínima multiplicidad que es 1, ahora en el último paso todos los elementos incluyendo a éste, tienen multiplicidad 1. Por lo tanto será en algún momento escogido. Ahora en caso que no sea elegido por otra razón, por ejemplo, pertenece a un conjunto cuyo cardinal en cada paso es mayor que los demás y no pertenece a ningún otro conjunto, entonces cuando se llegue al último paso tendrá que ser escogido. Por tal razón el algoritmo detecta todos los sdr's.

Ejemplo 3.1.1. Para el empleo del algoritmo, Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$. donde

$$A_1 = \{a, b, c\}$$

$$A_2 = \{a, c\}$$

$$A_3 = \{a, d\}$$

$$A_4 = \{b, c\}$$

$$A_5 = \{e\}$$

$$A_6 = \{e, f, g\}$$

$$A_7 = \{d, g\}$$

Escogemos el conjunto de menor cardinal, en este caso es A_5 y de él escogemos a e , entonces e representa a A_5 , y e es eliminado de A_6 . Ahora existen 5 conjuntos con

cardinal 2, escogemos el elemento de mayor multiplicidad del conjunto de mayor peso en este caso es escoger a a o c de A_2 , escogamos a a . Al escoger a a lo eliminamos de los demás conjuntos a los cuales él pertenece y a queda como representante de A_2 . Por ende A_3 queda con sólo un elemento así que d lo representaría. Al eliminar a d , resulta que g representaría a A_7 , ya que queda con un solo elemento. Por la misma razón anterior a A_6 lo representaría f . Finalmente nos resta A_1 y A_4 , para los cuales coincide en cardinal, peso y multiplicidad de elementos, en este caso se puede asignar cualquier elemento a cualquier conjunto. Escogemos a b para representar a A_1 y a c para representar a A_4 . Así que el sdr que nos queda es (b, a, d, c, e, f, g) . Si se escogen en los otros casos se obtienen (c, a, d, b, e, f, g) , (a, c, d, b, e, f, g) .

4. Conclusiones

El trabajo aquí presentado presenta nuevas facetas del Teorema de Hall, presentándose una equivalencia lógica con otros teoremas que aparentemente no se conectan y además la presentación de un algoritmo que consiga de forma efectiva detectar los sistemas de representantes distintos permite hacer como estudio posterior el paso de los resultados de este algoritmo a los universos en los que habitan los otros teoremas equivalentes.

Referencias

- [1] ANDERSON, I. *Combinatorics of finite sets*, General Publishing Company Ltda, 1987.
- [2] CAMERON, P. *Combinatorics: Topic, Techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] HU, T.; SHING, M. *Combinatorial Algorithms*, General Publishing Company Ltda, 1982.

- [4] VAN LINT, H, T.; WILSON, R, M. *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.
- [5] WILSON, R. *Introduction to Graph Theory*, Third Edition, Longman, 1985.

Sobre el autor:

Nombre: Edwin Vargas Carranza

Correo Electrónico: edalcava@gmail.com

Institución: Profesor de la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Investigación

Mínimos cuadrados generalizados para funciones vectoriales en la Geofísica Espacial

Jorge Lemagne Pérez
Alexander Calzadilla Méndez

Revista de Investigación



1 de abril de 2012

Resumen

Se expone una aplicación del ajuste de datos mediante mínimos cuadrados generalizados para funciones vectoriales, a la modelación de los parámetros de la Geofísica Espacial f_0F_2 y Dst, con el objetivo de pronosticar los mismos. Se emplean un modelo con retardo y dos algoritmos que fueron creados, uno para el ajuste y el otro para estimar la matriz de covarianzas, ambos implementados en MATLAB Versión 7.3.

Palabras Clave: Mínimos cuadrados generalizados, Ajuste de datos, Geofísica Espacial, Métodos multivariados

1. Introducción

1.1 Antecedentes de los mínimos cuadrados generalizados

Por su importancia, los mínimos cuadrados (MC) son tratados con gran frecuencia en numerosas publicaciones científicas y técnicas. Es necesario señalar que el problema de MC es conocido bajo diferentes nombres en varias ramas, por ejemplo, en Estadística se le llama análisis de regresión, y en Ingeniería, estimación de parámetros, filtraje o identificación de procesos.

Los antecedentes del método de los MC pueden atribuírseles a los matemáticos griegos, no obstante probablemente el primer precursor moderno es Galileo (Abdi [2007], pp. 1).

Este método surgió a partir de los campos de la Astronomía y la Geodesia, cuando los matemáticos y demás científicos buscaban soluciones ante los retos de la navegación oceánica durante la era del descubrimiento. Para la navegación de los buques en mares abiertos –gracias al empleo de dicho método– se pudo utilizar una descripción precisa del comportamiento de los cuerpos celestes; sin embargo anteriormente para determinar las posiciones de sus buques los navegantes dependían de las observaciones terrestres.

El desarrollo del fundamento de los MC se le atribuye a Carl Friedrich Gauss en 1795, a los 18 años. Una prueba temprana de la eficiencia de su método lo constituyó la predicción de la posición futura del asteroide Ceres, descubierto poco antes.

Además, el francés Adrien-Marie Legendre en 1805 y el norteamericano Robert Adrain en 1808 formularon independientemente la idea del análisis de MC; Gauss no publicó el método hasta 1809, posteriormente a Legendre (Wales [2011]).

La aplicación más importante de este método se encuentra en el ajuste de datos (AD), cuya definición podemos recordar de la siguiente manera:

Sea $f: \mathbb{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 1$, una función desconocida en la práctica, x_k un elemento de $\mathbb{R}^{1 \times p}$ y f_k un elemento de $\mathbb{R}$; $f_k \approx f(x_k)$ ya que la función solo se conoce empíricamente ($k = 0, \dots, N$). Sea además $\mathcal{F}: \mathbb{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de aproximación a f , $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x; c)$ donde $c = (c_i)_{i=0, \dots, n}$.¹

Adoptemos la notación $r_k(c) = f_k - \mathcal{F}(x_k; c)$, y hagamos $r(c) = (r_k(c))_{k=0, \dots, N}$, el residual. Se quiere entonces:

$$\text{Minimizar } E(c) : E(c) = r^T(c)r(c) \quad (1)$$

Los parámetros c_i deben ser determinados para alcanzar dicho objetivo.

El problema anteriormente formulado es el de **AD mediante mínimos cuadrados ordinarios** (MCO). ■

En los dos siglos siguientes a partir de 1809, especialistas en teoría de errores y en Estadística encontraron muchas vías diferentes para implementar los MC:

Entre 1821 y 1823 el propio Gauss publicó el método de **mínimos**

¹ La notación $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x; c)$ significa que para un c fijo, $\mathcal{F}$ es función de x .

cuadrados ponderados (MCP) para resolver sistemas lineales $Ac = b$ donde la matriz A tiene $n + 1$ columnas (linealmente independientes) y $N + 1$ filas, ($N \geq n$). Los datos incluyen estimados de la precisión de las mediciones, en forma del recíproco de la varianza de cada medición (Nievergelt [2000], pp. 45).

Para la formulación del AD mediante MCP (no lineales) consideramos que previamente se tiene una matriz cuadrada W de orden $N + 1$. Entonces, extendiendo (1) se quiere

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } E(c) : E(c) &= r^T(c)Wr(c) \\ (W \text{ es diagonal con elementos positivos}) \end{aligned} \quad (2)$$

A Galton puede atribuírsele la utilización del método de los MC en un marco estadístico moderno (1886), en su trabajo sobre si es heredable la estatura, el cual sentó las bases de la correlación y del análisis de regresión (además de utilizar este último nombre). Pearson y Fisher –dos gigantes que tanto hicieron durante el desarrollo temprano de la Estadística– utilizaron y desarrollaron el método en diferentes contextos (Abdi [2007], pp. 2).

1.2 Mínimos cuadrados generalizados para funciones vectoriales

En una publicación de 1934, A. C. Aiken realiza una generalización con respecto a los MCP de Gauss, ya que los datos incluyen estimados de la precisión de las mediciones pero en forma de inversa V^{-1} de la matriz de covarianzas de las mediciones V (Nievergelt [2000], pp. 45).

A la extensión anterior la llamaremos **AD mediante mínimos cuadrados generalizados** (MCG). En este caso se amplía (2), por lo que se quiere

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } E(c) : E(c) &= r^T(c)Wr(c) \\ (W \text{ es simétrica y definida positiva}) \end{aligned} \quad (3)$$

Alrededor del año 2000 A. D. Björk, Dennis (hijo) y Schnabel, y Lawson y Hanson presentan algoritmos actualizados para resolver problemas de MC; N. J. Higham además trata el análisis de la sensibilidad a los errores (Nievergelt [2000], pp. 38).

Actualmente el método de MC (con sus diferentes variaciones) se utiliza ampliamente con el objetivo de obtener o estimar los valores numéricos de los parámetros para ajustar un conjunto de datos mediante una función, y también con el objetivo de caracterizar las propiedades estadísticas de las estimaciones (Abdi [2007], pp. 2).

No obstante, en algunos problemas de la realidad es necesario aproximar la función

$$f: \mathbb{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times q}, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1 \quad (4)$$

Podría pensarse en la descomposición de f en funciones $f_L: \mathbb{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathbb{R}$, $L = 1, \dots, q$ (cada L denota una característica distinta) para aproximar cada f_L independientemente (de manera univariada con respecto a las variables dependientes) mediante MCO. Sin embargo, dicha descomposición no toma en cuenta las *correlaciones* existentes entre las distintas características. Precisamente, uno de los mensajes claves del análisis multivariado es que q variables correlacionadas tienen que ser analizadas conjuntamente (Johnson and Wichern [2002]).

Dichas correlaciones pueden considerarse si se aplica **AD mediante MCG para funciones vectoriales** (FV, abreviadamente AD_MCG_FV), extensión de (3), y que introducimos informalmente:

Sea f la función vectorial (4) (de la cual se conocen $N + 1$ observaciones), en correspondencia, la función de aproximación F es de $\mathbb{R}^{1 \times p}$ en $\mathbb{R}^{1 \times q}$. Entonces se quiere

Minimizar $E(c) : E(c) = r^T(c)Wr(c)$ (W es simétrica y definida positiva de orden $(N + 1)q$, y $r(c)$ es el vector columna que resulta de vectorizar los residuales correspondientes con las q características). (5)

En este caso es costumbre hacer $W = V^{-1}$, donde V es la matriz de varianzas y covarianzas correspondiente con la matriz de observaciones vectorizada.²

A partir de la revisión efectuada de no menos de 190 publicaciones (de las cuales una pequeña parte aparece reflejada en Referencias) se puede decir que son escasos la bibliografía y el software existentes sobre AD_MCG_FV; además que las pocas formalizaciones de este adolecen de restricciones y suponen que V es definida positiva.

Por ejemplo, Greene [2003], pp. 340, presenta el modelo de regresiones sin relación aparente ("Seemingly Unrelated Regressions", SUR) es decir, donde las ecuaciones están solo relacionadas por sus errores; el modelo es:

$$Y_L = X_L \beta_L + \varepsilon_L, \quad L = 1, \dots, q \quad (6)$$

donde

$$\varepsilon = (\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \dots, \varepsilon_q^T)^T,$$

² La formulación (5) es algo restrictiva. Por otra parte, para aplicarla, V o W deben conocerse de antemano, pues forman parte de los datos de este problema. Una formulación rigurosa y suficientemente general de los MCG, y en particular del AD_MCG_FV, aparece en Lemagne [2011 (2)].

$$E[\varepsilon|X_1, X_2, \dots, X_q] = \mathbf{0},$$

$$E[\varepsilon\varepsilon^T|X_1, X_2, \dots, X_q] = V$$

y

$$V = \Sigma \otimes I \quad (7)$$

donde Σ es la matriz de varianzas y covarianzas entre las q características.³

Greene [2003], pp. 360, considera además, como una extensión, la ocurrencia de autocorrelación, por lo que entonces V es una matriz densa.⁴ Sin embargo, para este caso –también particular– no se hacen los desarrollos matemáticos que sí se realizan en el caso correspondiente con el párrafo anterior.

Estas limitaciones a las que nos hemos referido se reflejan en el software de la bibliografía consultada, el cual no resulta adecuado para la resolución automática del problema general de AD_MCG_FV.

Es por ello que –para resolver dicho problema– fue creado el algoritmo Adafunv (AD para FV), en donde la matriz de varianzas y covarianzas V (correspondiente con la matriz de observaciones vectorizada) es simétrica y *definida no negativa arbitraria*.

Se creó también el algoritmo Estimacov (Estimar matriz de covarianzas) para estimar dicha V , el cual comienza con una partición de las observaciones en grupos, y brinda diferentes opciones para el usuario. Si se exige que todos los grupos tengan el mismo tamaño, la estimación de V no aumenta la complejidad del proceso total. Ambos algoritmos están implementados en MATLAB Versión 7.3.⁵

En esta comunicación se presenta una aplicación de dichos algoritmos en la aproximación de la función vectorial (4) dentro de la Geofísica Espacial. Para adentrarnos un tanto en este campo consideremos algunos preliminares.

2. Acerca del clima espacial y su pronóstico

La sociedad moderna es cada día más sensible a las variaciones del medio espacial. El funcionamiento de los satélites, las comunicaciones y los sistemas

³ En el modelo SUR cada ecuación tiene su propio conjunto fijo β_L de parámetros. Las variables independientes son en general distintas. Por otra parte, supondremos que el número de observaciones es el mismo, de acuerdo con lo que ocurre normalmente en la práctica.

⁴ Cuando las observaciones tienen un orden secuencial natural, utilizamos el término **autocorrelación** para referirnos a la correlación (Chatterjee and Hadi [2006]).

⁵ Adafunv a su vez emplea la función “lsqcurvefit” de MATLAB. El lector encontrará más información sobre dichos algoritmos en Lemagne [2011 (1)].

de navegación sufren interrupciones causadas por condiciones adversas en el espacio exterior, ocasionando grandes pérdidas socioeconómicas (Calzadilla [2006]). Es por ello, entre otras razones, que la práctica social exige conocer el estado del medio espacial.

Según Lazo et al. [2008], la comprensión de la respuesta de la ionosfera a las tormentas geomagnéticas constituye uno de los más grandes retos con que se ha enfrentado –y se enfrenta– la física solar-terrestre desde el pasado siglo; la mayor dificultad radica en que son muchos los procesos físicos que intervienen.

Los pronósticos juegan un papel importante en el conocimiento de la mencionada respuesta de la ionosfera. Según Vassiliadis [2007], pp. 403, los mismos constituyen uno de los métodos de pruebas de hipótesis más desafiantes debido a que, además de la formulación e implementación de la prueba de un modelo o teoría, tiene además las complicaciones que resultan de emitir por adelantado (y con información limitada) una afirmación sobre un evento.

Con la misma índole espacial y predictiva que la determinación –hace alrededor de dos siglos– de la posición futura del asteroide Ceres, en el problema a que ahora nos referimos es necesario pronosticar dos parámetros geofísicos; el primero de ellos es la **frecuencia crítica de la capa F_2** de la ionosfera (f_0F_2), la más importante desde el punto de vista de radio comunicaciones de alta frecuencia. Las frecuencias superiores a la misma no son reflejadas por la ionosfera, lo cual implica una pérdida no útil de energía durante las comunicaciones por onda corta por vía ionosférica (Sap [2006]). Para su pronóstico tomaremos en cuenta los valores de la componente radial de la velocidad del viento solar (V_{SW}), del flujo solar ($F_{10.7}$) y de la densidad iónica (N_i), debido a la influencia general que ejerce el viento solar sobre la electrodinámica de la atmósfera terrestre y el campo magnético terrestre.⁶

Con anterioridad señalamos el gran reto que significa la comprensión de la respuesta de la ionosfera a las tormentas geomagnéticas, las mismas influyen sobre el anillo de corriente terrestre (observar Figura 1).

⁶ Más detalles pueden encontrarse en Kelly [2009] y Schunk and Nagy [2009].

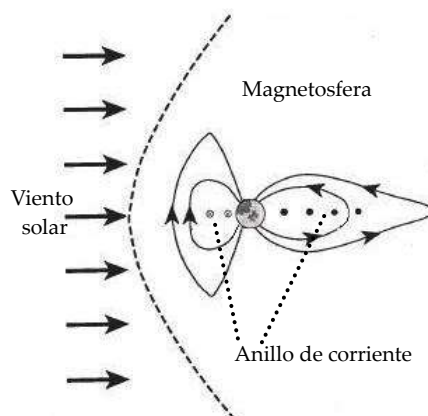


Figura 1. Vista lateral esquemática de la magnetosfera terrestre, donde se muestra el anillo de corriente cerca de la Tierra.⁷

La corriente del anillo terrestre aumenta durante las tormentas magnéticas geoespaciales; cambios en la misma ocasionan decrecimientos globales en el campo magnético de la superficie de la Tierra (Baker and Daglis [2007], pp. 184).

El índice geomagnético **Dst** (“Disturbance storm-time”) está concebido para representar los efectos magnéticos del anillo de corriente, y se define como una media ponderada de la componente norte-sur de la perturbación horizontal, medida en cuatro estaciones geomagnéticas que están situadas a ± 15 grados de latitud del ecuador geomagnético (Vassiliadis [2007], pp. 409).⁸

El otro parámetro geofísico que se pronostica en este trabajo es precisamente Dst, para lo que también tomaremos en cuenta los valores de la componente radial de la velocidad del viento solar (V_{SW}) y además la componente B_z del campo magnético interplanetario, rectificada (B_{South}).

Dst es medido en unidades de nano tesla (nT) (Bothmer and Zhukov [2007]) y es mucho más irregular que f_0F_2 (observar Figuras 2 y 3).⁹

⁷ Versión simplificada de otra figura que aparece en Baker and Daglis [2007], pp. 185.

⁸ El ecuador geomagnético es diferente del ecuador geográfico, porque existe una diferencia de 11.5 grados entre el norte geográfico y el norte geomagnético, por lo que también existe la misma diferencia entre el ecuador geomagnético y el geográfico.

⁹ Los datos de prueba utilizados en este artículo corresponden con el año 2000 y fueron suministrados por el Instituto de Geofísica y Astronomía (IGA), Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente (CITMA).

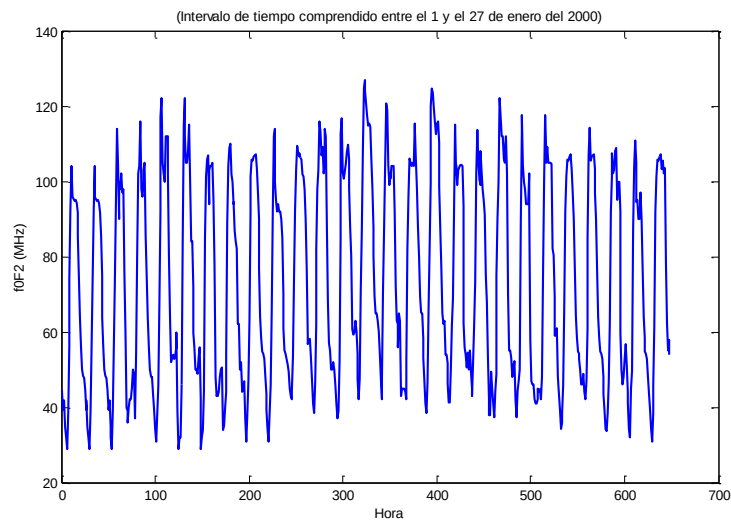


Figura 2. Comportamiento del parámetro ionosférico f_0F_2 ¹⁰

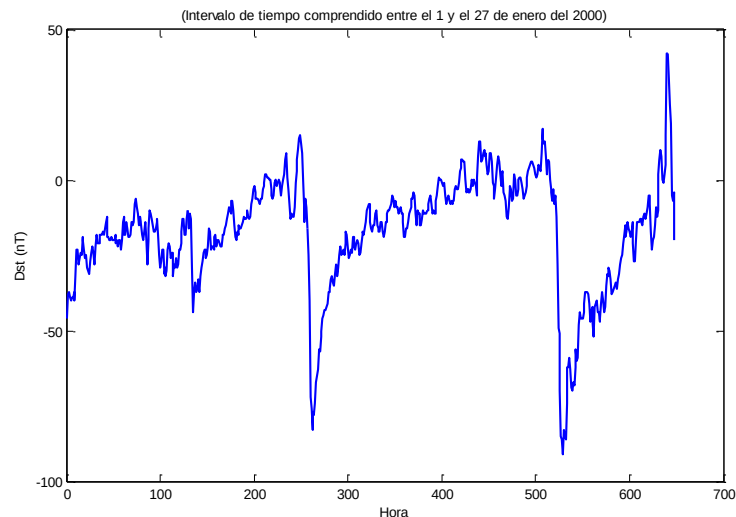


Figura 3. Comportamiento del índice geomagnético Dst

Por otra parte, f_0F_2 –además de los factores vistos con anterioridad– está influido por el campo magnético, de aquí que: *Es necesario considerar la correlación existente entre los parámetros geofísicos f_0F_2 y Dst* (recordemos del § 1

¹⁰ Para el intercambio internacional de datos, las mediciones tabuladas de f_0F_2 se reportan multiplicadas por 10. Todo el software ejecutado para este trabajo ha tomado los datos de esa manera; esto no influye en la calidad de las aproximaciones que se muestran posteriormente. Sin embargo, para obtener los valores reales experimentales de f_0F_2 , los valores dados aquí de dicho parámetro ionosférico se deben dividir por 10.

que en el análisis multivariado, q variables correlacionadas tienen que ser analizadas conjuntamente). En correspondencia, el software que se utilice debe tomar en cuenta esa importante característica.

Es por ello que los subprogramas Estimacov y Adafunv son especialmente apropiados para la modelación y pronóstico de dichos parámetros.

La aplicación de esta variante de los MC a la modelación de los parámetros geofísicos f_0F_2 y Dst (con el objetivo de pronosticar los mismos) constituye otro elemento coincidente con el de la predicción de la posición de Ceres.¹¹

3. Sobre el modelo matemático utilizado y la aplicación en general

El modelo que consideramos aquí para la aplicación es el siguiente:

$$(f_0F_2)_t = \sum_{i=1}^{\mu_1} \mathfrak{a}_i (f_0F_2)_{t-i} + \sum_{k=0}^{\xi_1} \mathfrak{z}_k (F_{10.7})_{t-k} + \sum_{k=0}^{\xi_1} \mathfrak{v}_k (N_i)_{t-k} V_{t-k}^2 \quad (8)$$

$$(Dst)_t = \sum_{i=1}^{\mu_2} \mathfrak{d}_i (Dst)_{t-i} + \sum_{k=0}^{\xi_2} \mathfrak{b}_k V_{t-k} (B_s)_{t-k} \quad (9)$$

donde V y B_s son abreviaturas para V_{SW} y B_{South} , respectivamente.

Sea x una de las variables independientes o dependientes en (8) o (9), entonces x_t denota el valor de x en el tiempo t (se mide en horas), y x_{t-i} representa el i -ésimo **retardo** ("lag") de x .

Sean además $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_i)_{i=1, \dots, \mu_1}$, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_k)_{k=0, \dots, \xi_1}$, $\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}_k)_{k=0, \dots, \xi_1}$, $\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}_i)_{i=1, \dots, \mu_2}$ y $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}_k)_{k=0, \dots, \xi_2}$. Entonces la solución viene dada por

$$c = (\mathfrak{a}^T \quad \mathfrak{z}^T \quad \mathfrak{v}^T \quad \mathfrak{d}^T \quad \mathfrak{b}^T)^T. \quad ^{12}$$

¹¹ Este trabajo está enmarcado en el estudio de la Variabilidad Espacio-Temporal de los Sistemas de Corriente Ionosféricas en Función de las Condiciones del Viento Solar y el Campo Magnético Interplanetario (Tarea del IGA).

¹² Por facilidad, a veces nos referiremos a un modelo mediante las ecuaciones que lo integran, pero debemos tener en cuenta que el mismo no es solo el conjunto de las ecuaciones. Por otra parte, existen ecuaciones sencillas y sin retardo que modelan de manera muy modesta a f_0F_2 y a Dst, pero que contienen autocorrelación. Mediante transformaciones de cada una de estas ecuaciones se obtiene una **versión de MCG** de la misma, y se elimina la autocorrelación. Se puede demostrar que tanto (8) como (9) son modificaciones de versiones de MCG de las ecuaciones del modelo sin retardo original.

Es posible demostrar que, aproximadamente, (8)_(9) es un modelo SUR ((6)) extendido con heteroscedasticidad, es decir que en cada una de las q (igual a 2) características (o equivalentemente en (8) y en (9)), los errores en las $(N + 1)$ observaciones no tienen en general la misma varianza.

Según Vassiliadis [2007], pp. 406, los modelos realistas de clima espacial son híbridos de los enfoques empírico (o sea, basado en información) y físico (es decir, basado en transporte de cantidades físicas). El modelo (8)_(9) es un híbrido empírico-físico *vectorial*.

(9) aparece en Vassiliadis [2007], pp. 413. En la bibliografía consultada no se halló ninguna fórmula de interés práctico para el cálculo de f_0F_2 ; (8) fue sugerida por los autores de este trabajo.

Para probar este modelo se emplearon datos verdaderos del año 2000, como ya sabemos. Una dificultad encontrada en este punto fue la carencia de valores de algunas de las variables independientes durante períodos de varios días, incluso una semana o más, debido a interrupciones en los equipos; este problema en la práctica ocurre con frecuencia en Geofísica Espacial. Dichos “huecos” determinan a lo largo del año bloques de información completa, es decir, donde no faltan datos.

Conforme a lo anterior, y para que las muestras tengan un tamaño aceptablemente grande, *en toda esta aplicación, para hacer los experimentos o pruebas, se toman exclusivamente muestras o bloques de información completa.*

Los meses del año se agrupan en tres estaciones: verano, desde mayo hasta agosto; invierno, desde noviembre hasta febrero, y equinoccios, que corresponde con los meses de marzo, abril, septiembre y octubre. El mayor bloque de información fue de 224 horas, entre el 30 de mayo y el 8 de junio, y le llamaremos “Verano”.

Para la aplicación del modelo (8)_(9) era necesario primeramente escoger valores adecuados de μ_1 , ξ_1 , μ_2 y ξ_2 ; Vassiliadis [2007] no ofrece ninguna indicación al respecto. Para tener una idea aproximada de dichos valores se aplicó MCO a los datos de Verano. La determinación de los parámetros se efectuó considerando numerosos pares ordenados y con la ayuda de programas auxiliares que fueron creados; como resultado de esta experimentación se obtuvo que (μ_1, ξ_1) debe tomarse como (2, 1), y (μ_2, ξ_2) como (3, 5); note que la mayor sinuosidad de Dst obliga a tomar mayores valores de estos parámetros. Por (8), (9) y los valores hallados, hay que calcular entonces 15 incógnitas.

Para reducir considerablemente el tiempo de ejecución de Adafunv se han empleado las facilidades de MATLAB para el trabajo con arreglos; sin embargo, una posterior adaptación del software a esta aplicación específica a

la Geofísica Espacial ha permitido reducir aún más los tiempos de corridas. Los resultados que se muestran en este trabajo corresponden con dicha adaptación.

Ahora pasemos a la aplicación de nuestros algoritmos. Conforme a lo establecido con anterioridad, de manera aproximada nuestro modelo está integrado por versiones de MCG de ecuaciones originales, y por lo tanto no existe autocorrelación en el mismo. Por ende Estimacov *solamente* debe tomar en cuenta las correlaciones entre las dos características (recordemos del § 2 que es necesario considerar la correlación existente entre ellas), hacer lo contrario empeora la aproximación.

Aunque (7) es restrictiva desde el punto de vista de formulación, su aplicabilidad aumenta considerablemente *si previamente se han obtenido versiones de MCG de las ecuaciones originales*; y precisamente este es el caso. Así pues, a partir de ahora ejecutaremos Estimacov con la opción 'Individuos no correlacionados', que corresponde con (7).¹³

Después que se estime V , se realiza AD_MCG_FV (en el modelo SUR, a mayor correlación de los errores, mayor ganancia en la eficiencia de los MCG (Greene)).

Con el objetivo de obtener una aproximación inicial para MCG, se aplica MCO. Para este último, de ahora en lo adelante, como aproximación inicial se tomó

$$\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}\right)^T$$

es decir, para cada uno de los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{d}, \mathbf{b}$, todas las componentes son iguales y la suma de estas es 1.

Para las tres pruebas que realizaremos correspondientes con las estaciones se seleccionó el mayor bloque de información en cada una; los bloques correspondientes con invierno y equinoccios serán llamados “Invierno” y “Equinoccios” respectivamente.

Como aquí nuestro objetivo fundamental es la aplicación de MCG para pronósticos –para la prueba de Verano– de las 224 horas del bloque se toman las primeras 210 para hacer un AD, y las últimas 14 para comparar los valores aproximados, es decir, los “pronosticados” con los observados.

En sentido general los especialistas consideran adecuado un pronóstico con un 20% de error. Para medir la calidad del pronóstico durante las

¹³ El software descrito en este artículo fue ejecutado en una computadora con procesadores Intel (R) Pentium (R) D de 3.39 GHz, con 1 GB de memoria física total y 2 GB de memoria virtual total.

primeras P horas, hagamos P fijo y para $L = 1, 2$ sea δ_L el error relativo del pronóstico de la característica L en las primeras P horas, considerando la $\|\cdot\|_2$ de cada vector.

Tomaremos $P = 5$, aunque –dentro del campo que estamos considerando– en la práctica se hacen pronósticos para una o dos horas solamente. De todas maneras, es conveniente pronosticar más allá de las P horas, para ver “cuán lejos se puede llegar” con el modelo.

4. Resultados obtenidos

Verano

Después de aplicar Estimacov y la modificación de Adafunv, el vector c^T obtenido es el siguiente:

Columns 1 through 7

1.6089	-0.67708	-0.016513	0.046925	1.1403e-006	-1.11e-006	
1.0083						

Columns 8 through 14

-0.22285	0.047072	-0.0009969	-0.0021789	0.00032304	0.0010588	
-0.00046645						

Column 15

-0.00023799

La pequeñez de c_4 y c_5 se debe a la gran magnitud de los dos productos $(N_i)_{t-k} V_{t-k}^2$ en (8).

Los pronósticos de Verano están representados en las Figuras 4 y 5.

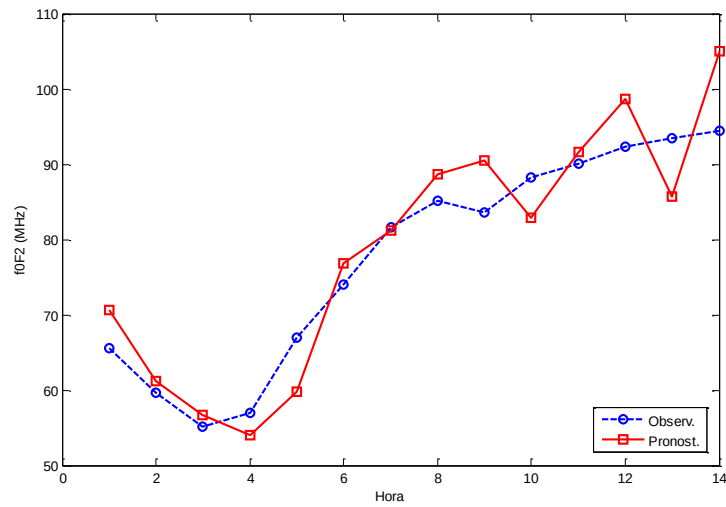


Figura 4. Pronóstico de f_0F_2 en Verano

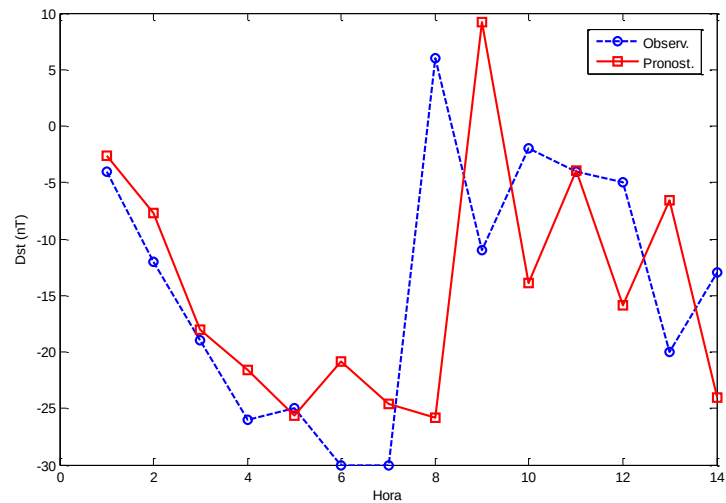


Figura 5. Pronóstico de Dst en Verano

En la Tabla 1 puede verse la información concerniente a los tiempos de ejecución de Estimacov y la modificación de Adafunv, número de iteraciones, norma del residual al cuadrado y los valores de δ_1 y δ_2 (recordar que $P = 5$).

Invierno

Se tomó un lapso de 163 horas (de las cuales el ajuste se realizó con las primeras 153) desde el 9 hasta el 16 de noviembre. El vector c^T obtenido se muestra a continuación:

Columns 1 through 7

1.5557 -0.65753 1.5185 -1.4655 1.6496e-006 -1.3495e-006

1.4399

Columns 8 through 14

-0.64578 0.16965 -0.0025083 0.0019793 -0.0015059 0.00070436
0.00022745

Column 15

-4.7185e-005

Los pronósticos de Invierno están representados en las Figuras 6 y 7; las otras informaciones aparecen en la Tabla 1. La magnitud de δ_1 se debe principalmente a que desde el instante final del ajuste ("hora cero" para el pronóstico) hasta la hora uno, este parámetro ionosférico sufre un descenso brusco que la aproximación no puede reflejar con tanta rapidez.

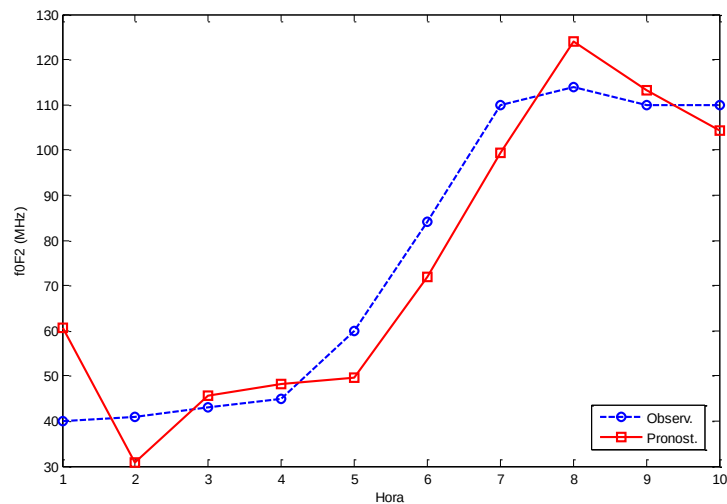


Figura 6. Pronóstico de f_0F_2 en Invierno

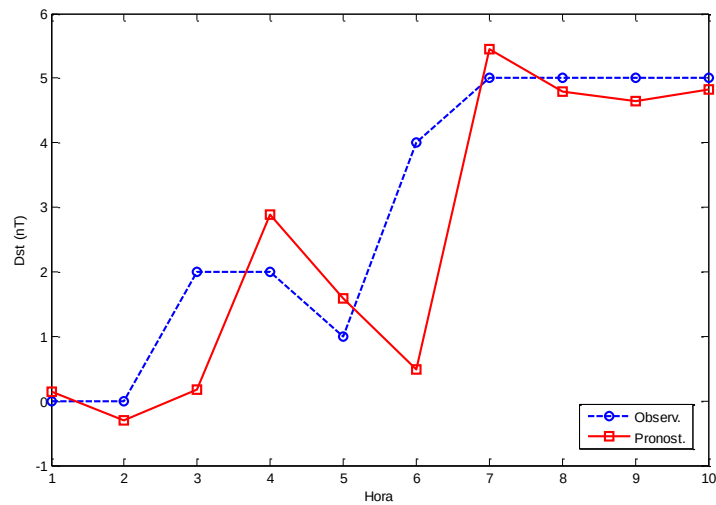


Figura 7. Pronóstico de Dst en Invierno

Equinoccios

Se tomó un lapso de 193 horas (de las cuales el ajuste se realizó con las primeras 180) desde el 22 hasta el 30 de abril. El vector c^T obtenido se muestra a continuación:

Columns 1 through 7

1.5345 -0.65247 0.83663 -0.77517 2.4622e-006 -2.3569e-006
1.0041

Columns 8 through 14

-0.12889 0.063346 -0.0014792 -0.0029325 0.00091236 -9.0405e-005
0.00068262

Column 15

0.0002387

Los pronósticos de Equinoccios están representados en las Figuras 8 y 9; las otras informaciones aparecen en la Tabla 1.

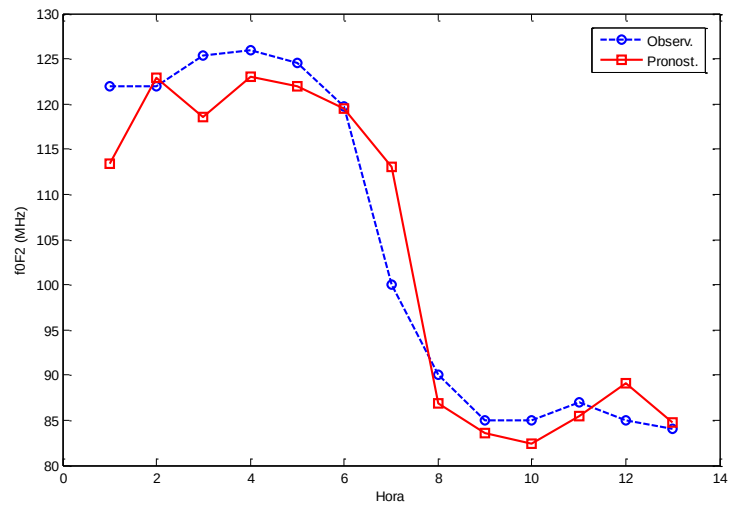


Figura 8. Pronóstico de f_0F_2 en Equinoccios

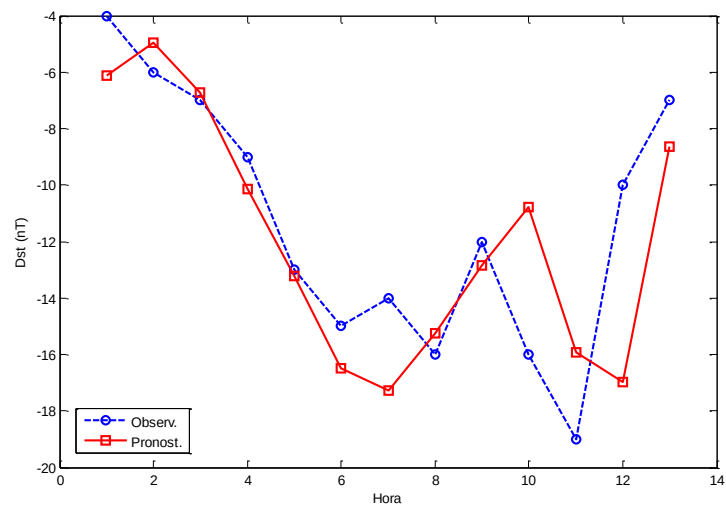


Figura 9. Pronóstico de Dst en Equinoccios

Tabla 1. Información sobre las corridas de Estimacov y modificación de Adafunv para cada estación

Estación	Tiempo estimación Σ (seg)	Tiempo ajuste MCG (seg)	Num. iterac.	E	δ_1	δ_2
Verano	0.0006	0.5019	23	45.558	0.0698	0.1506
Invierno	0.0002	0.3379	37	21.127	0.2474	0.7138
Equinoccios	0.0002	0.4808	69	21.000	0.0420	0.1411

Hay dos factores que dificultan la obtención de valores pequeños de δ_2 : La gran variabilidad del índice Dst y la frecuente pequeñez del mismo, esta segunda causa se manifiesta especialmente en Invierno, causando un mayor error relativo.

Tal como ha sido manifestado, el criterio seguido para la selección de las muestras con las que fueron realizados los experimentos anteriores fue el de mayor bloque en cada estación. Para someter a prueba aún más al modelo con retardo (8)_(9) en esta investigación, se realizó un segundo grupo de experimentos (siete en total), pero esta vez las muestras fueron seleccionadas de acuerdo con el nivel de perturbación de Dst. Así, los resultados alcanzados en períodos de tormentas geomagnéticas concordaron en calidad con los obtenidos anteriormente en las estaciones.

La utilización de la versión mejorada de subprogramas originales, conjuntamente con la explotación de las facilidades de MATLAB para el trabajo con arreglos, contribuyen a que las corridas sean muy rápidas.

Como puede observarse en los resultados obtenidos, y en particular en los valores de δ_1 y δ_2 de la Tabla 1, (8)_(9) ha brindado aproximaciones a los parámetros geofísicos f_0F_2 y Dst con error relativo muy por debajo del 20% en la mayoría de los casos, por lo que puede decirse que los resultados obtenidos son muy satisfactorios. Esta valoración, unida a la dificultad y duración de la investigación y al hecho de que el modelo con retardo es una extensión del que propone Vassiliadis [2007], pp. 413, determinaron que no se aplicara en este trabajo un modelo más complicado, basado en ecuaciones donde la función de aproximación es no lineal. No obstante, dicha aplicación podría considerarse posteriormente.¹⁴

5. Conclusiones

En esta comunicación hemos visto una aplicación del AD_MCG_FV a la modelación de los parámetros geofísicos f_0F_2 y Dst, con el objetivo de pronosticar los mismos.

Para realizar AD, se creó un algoritmo donde se permite que V (matriz de varianzas y covarianzas correspondiente con la matriz de observaciones vectorizada) sea simétrica y *definida no negativa arbitraria*. También se utiliza un algoritmo creado para estimar V ; ambos algoritmos están implementados en MATLAB Versión 7.3.

Los algoritmos empleados resultan especialmente apropiados para la aplicación debido fundamentalmente al carácter vectorial de esta.

¹⁴ Aunque la función de aproximación sea lineal, el modelo pudiera ser no lineal, debido a la estructura de covarianza.

Gracias a la utilización de las facilidades de MATLAB para el trabajo con arreglos y a la posterior adaptación del software a esta aplicación específica a la Geofísica Espacial, se obtuvieron tiempos de ejecución pequeños. Por otra parte, los resultados numéricos alcanzados fueron también muy satisfactorios.

Acorde con el final del epígrafe anterior, en el futuro podría considerarse un modelo más complicado, basado en ecuaciones donde la función de aproximación sea no lineal.

Referencias

- [1] ABDI, Hervé. *The Method of Least Squares*, pp. 1, 2, Encyclopedia of Measurement and Statistics, Thousand Oaks (CA): Sage, 2007, <http://www.utd.edu/~herve/Abdi-LeastSquares06-pretty.pdf>
- [2] BAKER, Daniel N. and DAGLIS, Ioannis A. 6. *Radiation belts and ring current*, Space Weather – Physics and Effects, pp. 185, 184, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 13: 978-3-540-23907-9, 2007.
- [3] BOTHMER, Volker and ZHUKOV, Andrei. 3. *The Sun as the prime source of space weather*, Space Weather – Physics and Effects, pp. 41, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 13: 978-3-540-23907-9, 2007.
- [4] CALZADILLA, Alexander. *Sistema Dinámico Viento Solar-Magnetosfera-Ionosfera: Principales Interacciones*, Tesis presentada con máxima calificación en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Geofísicas, pp. 10, Instituto de Geofísica y Astronomía, Cuba, 2006, <http://www.minas.upm.es/fundacion/jgs/trabajos/07a06.html>
- [5] CHATTERJEE, Samprit and HADI, Ali S. *Regression analysis by example, 4th edition*, pp. 197, Wiley series in Probability and Statistics, Hoboken, New Jersey, ISBN 0471746967, 2006.
- [6] GREENE, William H. *Econometrics analysis, Fifth Edition*, pp. 340, 360, 343, Prentice Hall, New Jersey, ISBN 0-13-066189-9, 2003.
- [7] JOHNSON, Richard A. and WICHERN, Dean W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, pp. 210, Pearson Education International, NJ, USA, ISBN 0-13-121973-1, 2002.
- [8] KELLY, Michael C. *The Earth's Ionosphere: Plasma Physics and Electrodynamics*, 2nd Edition, pp. 379-395, Academic Press, Elsevier Inc., 2009.
- [9] LAZO, Bienvenido, CALZADILLA, Alexander, y ALAZO, Katy. *Sistema Dinámico Viento Solar-Magnetosfera-Ionosfera: Caracterización y Modelación*, Premio de la Academia de Ciencias de Cuba, pp. 4, 2008.

- [10] LEMAGNE, Jorge. *Una implementación del ajuste de datos mediante Mínimos Cuadrados Generalizados no lineales para funciones vectoriales*, Revista Investigación Operacional, Vol. 32, No. 3, pp. 269 a 276, 2011,
<http://rev-inv-ope.univ-paris1.fr/files/32311/32311-07.pdf>
- [11] LEMAGNE, Jorge. *Una presentación de los mínimos cuadrados generalizados, y en particular, para funciones vectoriales*, Revista Investigación Operacional, Vol. 32, No. 1, pp. 72 a 76, 2011,
<http://rev-inv-ope.univ-paris1.fr/files/32111/32111-07.pdf>
- [12] NIEVERGELT, Yves. *A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy*, Journal of Computational and Applied Mathematics 121, pp. 45 y 38, 2000,
http://www-linux.gsi.de/~ikisel/reco/Methods/Nievergelt_History_JCAM_121_2000.pdf
- [13] SAP, Duygu. *Time Series Analysis Applied to Ionospheric Data*, pp. 3, Mathematical Engineering Department, Faculty of Science and Letters, Istanbul Technical University, Turkey, 2006,
<http://www.mat.itu.edu.tr/bilge/stajlar/duygumain.pdf>
- [14] SCHUNK, Robert W. and NAGY, Andrew F. *Ionospheres: Physics, Plasma Physics, and Chemistry*, 2nd. Edition, pp. 11-49, Cambridge University Press, 2009.
- [15] VASSILIADIS, Dimitris. *14. Forecasting space weather*, Space Weather – Physics and Effects, pp. 403, 409, 406, 413, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 13: 978-3-540-23907-9, 2007.
- [16] WALES, Jimmy. *Least squares*, § 1, Wikipedia®, 2011,
http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares

Abreviaturas

AD	Ajuste de Datos
AD_MCG_FV	AD mediante Mínimos Cuadrados Generalizados para Funciones Vectoriales
Adafunv	A juste de d atos para f unciones v ectoriales (algoritmo)
CITMA	Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente
Dst	“Disturbance storm-time”
Estimacov	Est imar mat riz de cov arianzas (algoritmo)
FV	Funciones Vectoriales
IGA	Instituto de Geofísica y Astronomía
MATLAB	“MATrix LABoratory”
MC	Mínimos Cuadrados
MCG	Mínimos Cuadrados Generalizados
MCO	Mínimos Cuadrados Ordinarios

MCP	Mínimos Cuadrados Ponderados
MHz	Megahertzio
nT	nano tesla
SUR	“Seemingly Unrelated Regressions”

Símbolos

$f_0 F_2$	frecuencia crítica de la capa F_2 de la ionosfera
$\mathbb{R}^{1 \times p}$	espacio de vectores filas de p componentes
$f: \mathbb{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathbb{R}$	f , una función de $\mathbb{R}^{1 \times p}$ en $\mathbb{R}$
x_k	valor k -ésimo de la variable independiente (elemento de $\mathbb{R}^{1 \times p}$)
f_k	valor observado de $f(x_k)$
p	número de componentes de la variable independiente
N	número de observaciones–1
$\mathcal{F}$	función de aproximación a f
n	número de parámetros desconocidos–1
c	vector (de los c_i) de parámetros desconocidos
$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x; c)$	para un c fijo, $\mathcal{F}$ es función de x
r_k	función de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}$
$r(c)$	vector de los $r_k(c)$
$E(c)$	error de la aproximación mediante MCG
$Ac = b$	sistema lineal sobredeterminado (en general)
W	matriz simétrica y definida no negativa de orden $(N+1)q$
V	matriz de varianzas y covarianzas correspondiente con la matriz de observaciones vectorizada
f	función de $\mathbb{R}^{1 \times p}$ en $\mathbb{R}^{1 \times q}$
L	una característica (de la variable dependiente)
q	número de características
f_L	componente L -ésima de la función f
F	función de aproximación a f
I	matriz identidad
$E[\]$	valor esperado de variable aleatoria
$\mathbf{0}$	vector nulo
Σ	la matriz de varianzas y covarianzas entre las q características
Y_L	vector de observaciones de la característica L -ésima, en formulación de Greene
ε_L	error en la característica L -ésima, en formulación de Greene
$\otimes$	producto de Kronecker
X_L	en modelo SUR, matriz de valores de la variable independiente, correspondiente con la característica L -ésima
β_L	en modelo SUR, vector de parámetros desconocidos, correspondiente con la característica L -ésima
ε	resultado de la vectorización de todos los errores ε_L
$E[\mid \]$	valor esperado de $\dots$, dado $\dots$
F_2	una de las subdivisiones de la capa F de la ionosfera
V_{SW}	componente radial de la velocidad del viento solar
$F_{10.7}$	flujo solar
N_i	densidad iónica

B_{South} , o B_s	la componente B_z del campo magnético interplanetario, rectificada
t	tiempo medido en horas
x	variable independiente o dependiente, en el modelo con retardo considerado
x_t	valor de x en el tiempo t
x_{t-i}	i -ésimo retardo de x
V_{t-k}	abreviatura de $(V_{SW})_{t-k}$
μ_1	número de retardos en f_0F_2
ξ_1	número de retardos en las variables independientes para calcular f_0F_2
μ_2	número de retardos en Dst
ξ_2	número de retardos en las variables independientes para calcular Dst
$\mathfrak{a}, \mathfrak{z}, \mathfrak{v}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}$	vectores cuyas componentes forman c en el modelo considerado
$\mathfrak{a}_i$	componente de $\mathfrak{a}$ correspondiente con el i -ésimo retardo de f_0F_2
$\mathfrak{z}_k$	componente de $\mathfrak{z}$ correspondiente con el k -ésimo retardo de $F_{10.7}$, para calcular f_0F_2
$\mathfrak{v}_k$	componente de $\mathfrak{v}$ correspondiente con el k -ésimo retardo de N_i y V_{SW} , para calcular f_0F_2
$\mathfrak{d}_i$	componente de $\mathfrak{d}$ correspondiente con el i -ésimo retardo de Dst
$\mathfrak{b}_k$	componente de $\mathfrak{b}$ correspondiente con el k -ésimo retardo de V_{SW} y B_s , para calcular Dst
P	número de horas correspondiente con el intervalo de pronóstico
δ_L	error relativo del pronóstico de la característica L en las primeras P horas (δ_1, δ_2 en correspondencia con f_0F_2 y Dst)

Sobre los autores:

Nombre: Jorge Lemagne Pérez

Correo Electrónico: lemagne@matcom.uh.cu

Institución: Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba.

Nombre: Alexander Calzadilla Méndez

Correo Electrónico: acmendez@iga.cu, acmendez69@gmail.com

Institución: Instituto de Geofísica y Astronomía (IGA), Cuba.

Investigación Mathematical and Numerical Modeling in Maritime Geomechanics

Miguel Martín Stickle

Manuel Pastor

Paola Dutto

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

7 de Abril de 2012

Abstract

A theoretical and numerical framework to model the foundation of marine offshore structures is presented. The theoretical model is composed by a system of partial differential equations describing coupling between seabed solid skeleton and pore fluids (water, air, oil,...) combined with a system of ordinary differential equations describing the specific constitutive relation of the seabed soil skeleton. Once the theoretical model is described, the finite element numerical procedure to achieve an approximate solution of the governing equations is outlined. In order to validate the proposed theoretical and numerical framework the seaward tilt mechanism induced by the action of breaking waves over a vertical breakwater is numerically reproduced. The results numerically attained are in agreement with the main conclusions drawn from the literature associated with this failure mechanism.

Keywords: Mathematical Modeling, Finite Element Method, Marine Structure foundation

1. Introduction

Engineers build various types of maritime structures: Breakwater and quay-walls for ports and harbors, seawalls and jetties for shore protection and platforms and rigs for the exploitation of oil beneath the seabed are some

examples.

The foundation design of these structures presents a series of difficulties due to the complexity of the cyclic forces exerted over the structure, derived from the dynamic swell action and transmitted to the seabed through a complex foundation-structure interaction, as well as the nonlinear soil behavior, where there is a coupling between solid skeleton and pore water.

Due to the complexity associated with the mechanism of seafloor dynamics it is essential to develop accurate and robust theoretical models to achieve realistic design solutions under a geotechnical engineering point of view.

As in many fields of science and engineering a theoretical model is a mathematical model that allows a representation of physical phenomena as accurate as possible. In geomechanics these mathematical models usually end up with systems of partial differential equations, systems of ordinary differential equations, systems of integro-differential equation, or combinations of them.

Closed-form solutions can often be difficult or even impossible to obtain for differential equations coming from engineering practice. Therefore it is indispensable to combine the theoretical models with numerical techniques in order to develop approximate solutions of the problem on hand.

In this paper we describe the procedure followed by applied mathematicians and geotechnical engineers [1-4] to develop robust engineering geotechnical designs of maritime offshore structures. Firstly, the principal theoretical components to be considered to properly reproduce the dynamics associated with a seafloor around and under a maritime structure are presented. This is accomplished in section 2. The procedure for a correct numerical approximation of the settled governing equations is presented in section 3. In section 4 a seaward tilt mechanism induced by the action of breaking waves over a vertical Breakwater is numerically reproduced. Finally some conclusions are presented.

2. Theoretical Modeling

2.1 Introduction

There appear to be three major driving forces in the submarine environment of the continental shelf and slope area that may produce instability or movement in seafloor soils [5]:

- Gravity forces, i.e. influence of the sediment and offshore structures weight over seafloor.
- Hydraulic forces, i.e. influence of currents, tides, surface waves and internal waves over seafloor.
- Earthquakes and tectonic activity.

A theoretical model developed to reproduce accurately the influence of previously mentioned driving force over seafloor should contain the following fundamental components: i) a mathematical model to properly represent soil skeleton-pore fluids interaction, ii) an advanced constitutive model to reproduce the nonlinear soil behavior.

2.2 Soil skeleton-pore fluid interaction mathematical modeling

Sea bed is usually modeled as a saturated poroelastoplastic media, composed by at least two constituents or phases, soil skeleton and pore fluid, each of them with an independent state of motion, leading to an interaction between them, i.e. a coupled system. In some cases sea bed pores might bear some occluded gas bubbles, raising the compressibility of the pore fluid. Among the different choices to describe this interaction behavior a macroscopic description of the phenomena is usually considered in geotechnical engineering modeling. This description rests over the volume fraction concept, i.e. porosity (Figure 1) where all geometric and physical quantities such as motion, deformation, and stress, are defined in the total control space, so they can be interpreted as the statistical average values of the real quantities. Therefore, the coupled domains are superimposed.

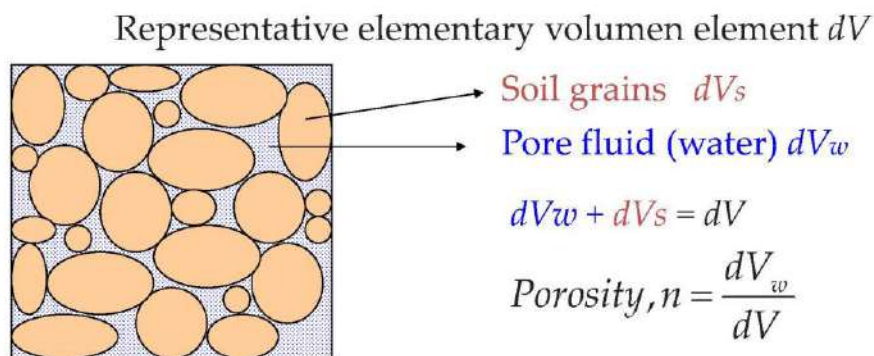


Figure 1. Description of the Porosity

Under this theoretical scope the following hypothesis are usually imposed, *i*) Lagrangian formulation for the skeleton (coordinate system moves with the solid phase) and Eulerian for the movement of the pore fluid relative to the skeleton (convective terms only appear for the relative movement of the fluid respect the skeleton), *ii*) saturated or slightly unsaturated soil (occluded gas bubbles are allowed to be within the pore fluid), *iii*) skeleton compressibility is much larger than the solid particles (usual assumption in soil mechanics). With these assumptions the fully dynamic Generalized Biot $w-u-p_w$ formulation for the soil skeleton-pore fluid interaction is obtained [6].

The $w-u-p_w$ formulation consists on a system of partial differential equations and includes the balance of linear momentum for the mixture (1), the balance of linear momentum of the pore water (2) and the mass conservation of the fluid flow (3).

$$\sigma_{ij,j} - \rho \cdot \ddot{u}_i - \rho_w \cdot [\ddot{w}_i + \dot{w}_i \cdot \dot{w}_{i,j}] + \rho \cdot b_i = 0 \quad (1)$$

$$-p_{w,i} - \frac{\rho_w \cdot g}{k_{ij}} \dot{w}_i - \rho_w \ddot{u}_i - \frac{\rho_w}{n^{sb}} \cdot [\ddot{w}_i + \dot{w}_i \cdot \dot{w}_{i,j}] + \rho_w b_i = 0 \quad (2)$$

$$w_{i,i} + \dot{\epsilon}_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{Q} = 0 \quad (3)$$

Where $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, etc., u_i is the soil skeleton displacement with $i = x, z$, for two dimensions and $i = x, y, z$ for three dimensions, σ_{ij} are the sea bed total Cauchy stress second order tensor components, p_w is the pore water pressure, $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ sea bed rate of deformation tensor, $w_i = n \cdot (w_{fi} - u_i)$ is the average relative displacement of the fluid to the solid (w_{fi} is the actual pore fluid displacement), n sea bed porosity, $\rho = (1-n) \cdot \rho_s + n \cdot \rho_w$ combined density of the soil mixture, where ρ_s y ρ_w are the soil skeleton pore fluid densities, respectively, Q is the combine soil skeleton pore fluid compressibility, which is related with bulk modulus of each constituent through the expression $(1/Q) = (n/K_w) + ((1-n)/K_s)$ with K_w the pore fluid bulk modulus and

K_s the sea bed bulk modulus, g is the gravity acceleration, k_{ij} Darcy permeability, while b_i are the volumetric forces per unit mass.

Balance of linear momentum equations are none other than the generalization of Newton's second law written locally for deformable materials while mass conservation express the mass variation inside the volume element as the transfer of mass in and out the element, with no diffusion nor production of mass [7].

In $w-u-p_w$ coupled equations flow and deformation are formulated including both the acceleration of soil skeleton and the acceleration of pore water relative to that of soil skeleton. If the acceleration of pore water relative to that of soil skeleton is neglected in the fully dynamic formulation, the $u-p_w$ formulation is obtained in which the soil skeleton displacement, u , and the pore water pressure, p_w , are the field variables. If both inertial terms, associated with the soil skeleton and the pore water are ignored, the Biot consolidation equation is attained.

The validity of these formulations has been studied by several researchers [8-11], concluding that each of them should be considered depending of the frequency of the driving forces, permeability and saturation degree of the seabed, and water deep. For instance, the quasi-static Biot formulation is considered as a good approximation to reproduce the effects associated with gravity forces while a $u-p_w$ formulation or even the fully dynamic $w-u-p_w$ might be essential to accurately reproduce the effects induced by wave motions and/or earthquakes.

2.3 Constitutive modeling for seabed soils

It is well known that Newton's second law in particle mechanics cannot be solved until we know how the force depends on the position and velocity of the particle. Likewise, balance of linear momentum for the mixture in a continuum approach of porous media cannot be solved until we know how effective stress depends on the motion through a suitable strain expression. This missing relation is usually called the constitutive equation.

Under a mathematical point of view, a constitutive relation is defined by a set of ordinary differential equations. Methods for integrating them are usually classified as explicit or implicit. Implicit integration has been usually considered to exhibit significant advantages over explicit approaches as explicit integration of highly non-linear models may potentially lead to

inaccuracy and unstable behavior [12]. However, accuracy and efficiency might be enhanced by combining the explicit methods with automatic substepping and error control techniques [13, 14]. Moreover, explicit methods have shown some advantages compared with implicit strategies, i.e. no solution of a system of non-linear equations is required, only first derivatives are required in the formulation and usually are more straightforward to implement.

One of the most prominent aspects to achieve an accurate soil response is the choice of an appropriate constitutive model. Sea bed soil response under cyclic loading is the principal drawback concerning a constitutive relation of sea bed. The stress-strain law should be able to reproduce the soil degradation that takes the form of gradual resistance and stiffness changes with time, mainly due to repetitive loading. This degradation may cause sub-soil instability leading occasionally to structure collapse.

Classical plasticity theory based models like Von Mises, Drucker-Prager, Cam-Clay, etc. are not able to reproduce plastic deformations induced by cyclic loading, due to the fact that after first load-unload cycle the subsequent ones (reloading-unloading) belong to the yield surface interior, i.e. elastic deformations take place, not being able to reproduce the possible soil degradation under repetitive loading.

Among the different possibilities to prevent this drawback we can mention a modified Cam-Clay model [15], plasticity models with isotropic-kinematic hardening [16], bounding surface models [17-19], bubble models [20, 21], Generalized Plasticity models [22, 23], etc. Among these the Generalized Plasticity present a high-quality simplicity and accuracy combination, being the theoretical framework considered for the stress-strain sea bed response in many researches [1-3].

2.4 Boundary conditions

2.4.1 Introduction

The governing equation presented so far has to be complemented by suitable boundary and initial conditions. Boundary conditions should include the following ones:

- Hydraulic boundary conditions.
- Soil-Structure interaction conditions.
- Radiation boundary conditions.

2.4.2 Hydraulic boundary conditions

For these boundary conditions, distinction should be made between water-soil interface and water-structure interface.

If linear or non linear wave theory is considered to represent wave motion, water-soil interface boundary condition might be expressed explicitly through analytical expressions from potential flow theory, leading to a well defined boundary value problem. Instead, if breaking waves are to be considered, spectral or stochastic wave models might become necessary. Another possibility for a proper representation of breaking waves could be a numerical resolution of the Navier-Stokes equations by any of the existing advanced models, mostly based on VOF method [24], to simulate the interaction between wave trains and sea bed soil. Finally, if there are records available from wave gauges close to the area of interest, wave pressure might be estimated once a suitable wave theory is considered.

For the water-structure interface, apart from the mentioned techniques to deal with the water-soil interface there are expressions that permits the estimation of time-dependent pressures, forces and lever arms of the forces on the front faces and bottom of the maritime structure, both for breaking and non-breaking waves [25].

2.4.3 Soil-structure interaction modeling in maritime structures

Within the boundary conditions needed to complete the theoretical model, those concerning soil-structure interaction are essential to properly reproduce the principal loads transmitted to the foundation derived from gravity and hydraulic forces.

This contact interface has not been properly modeled in previous researches mostly represented through elastic mass-spring-dashpot models [26, 27], where the structure is considered as a point mass. Therefore, these models are not able to analyze different interface strain-stress states involved in the contact surface.

Other options considered in the past to represent this contact interface includes either prescribed loads by assuming complete flexibility of the structure or a prescribed displacements by assuming complete rigidity of the structure. These crude simplifications often lead to inaccurate predictions of the real behavior. Also, this soil–structure interaction might be modeled by joint elements. These elements typically use normal and tangential stiffness to model the pressure transfer and friction at the interface, defining a

constitutive relation within the joint element. Because they are predefined and their topology remains unchanged during the solution procedure, they are only suitable for predefined interfaces with small interfacial deformation.

While for linear and non linear wave induced soil response this interface might not have a paramount influence, this is not the case for impulsive actions derived from breaking waves where a highly variable complex interaction might be developed [2]. This highly variable complex interaction where large frictional sliding as well as surface separations and reclose might be involved, seems to be necessarily modeled through a frictional contact constrain model [28].

2.4.4 Radiation boundaries

When a dynamic analysis is performed in an unbounded region, as those associated with seafloor dynamics, artificial boundary conditions are needed to make the computational domain finite. The appropriate artificial boundary condition, radiation boundaries, for different wave problems is an important issue, since it must be designed to avoid the reflection in the finite computational domain of waves radiating towards the infinity.

In the field of the dynamics of saturated porous media, Gajo et al. [29] have developed a silent boundary extending the first and second order Higdon scheme to a saturated porous media under the $u-U$ Generalized Biot formulation [6]. Later on, a modification of the work done by Gajo et al. has been presented by Stickle [2], considering a first order Higdon scheme associated with the $u-p_w$ generalized Biot formulation.

3. Numerical modeling

Once the kinematic relations as well as the constitutive laws are integrated in the balance equations, a system of partial differential equations with associated field variables is established. Among the different numerical techniques to obtain approximate solutions of partial differential equations systems coming from engineering practice the Finite Element Method is one that has attained many achievements. The general procedures of the Finite Element discretization of equations are described in detail in various texts [9, 30, 31]. The principal characteristics of this technique are sketched in Figure 2.

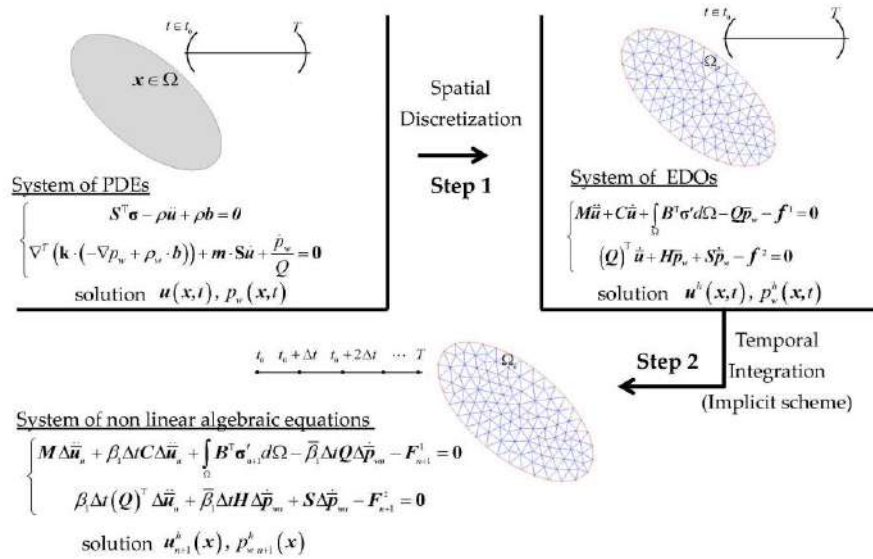


Figure 2. Description of the Finite Element procedure

Step 1. Spatial Finite Element discretization

The unknown functions are 'discretized' or approximated by a finite set of parameters, and shape function which are specified in spatial dimensions. Inserting the value of the approximating function into the differential equations we obtain a residual which is not identically equal to zero but for which we can write a set of weighted residual equations. A very suitable choice for the weighting function is to take them being the same as the mentioned shape function. Indeed this choice is optimal for accuracy in so called self-adjoint equations as shown in the basic texts and it is known as the Galerkin process. The proper choice of the element type in order to discretize the computational domain is of paramount importance. Under Babuska-Brezzi condition, mixed isoparametric elements should be considered with the appropriate number of nodes associated with each field variable.

Step 2. Temporal discretization

After spatial discretization through adequate interpolation functions, a second order ordinary differential equation system is obtained. The second order ordinary differential equation system needs to be discretized in time. Many time integration schemes are available in the specialized literature. Among these, the Generalized Newmark methods have been widely considered for the modeling of saturated geomaterials. Following this method, temporal discretization of the displacements involved (seabed and maritime structure skeleton) is performed by the Generalized Newmark

GN22 scheme while the excess pore pressure of the sea bed and possible permeable structures is discretized by the GN11 scheme [32], leading to a difference equation system. After incorporation this difference equation system in the second order ordinary differential equation a non linear algebraic system is obtained.

Step 3. Solution of a non linear algebraic system

Finally, the non linear algebraic system obtained needs to be solved in each time step through an iterative method like the Newton-Raphson scheme.

4. Vertical breakwater seaward tilt mechanism induced by breaking waves.

4.1. Introduction

In this section the seaward tilt mechanisms undergone by vertical breakwaters and induced by breaking waves is analyzed under the scope of the theoretical-numerical framework considered in the present chapter. This application has been mainly derived from the work done by Stickle et al. [2, 3].

Firstly a brief review of the conclusions drawn from the literature associated with the tilt mechanism is presented. Then the theoretical-numerical modelization is considered. Finally some results and discussions are established.

4.2. Seaward tilt mechanism

Vertical breakwaters are commonly used structures to protect harbors and sea shore from direct wave impact. The failure process of a vertical breakwater before the final collapse is often characterized by the progressive settlement and sea ward tilting. Experience obtained by many vertical breakwater failures have shown that seaward tilt is caused by inhomogeneous permanent settlement of the structure due to a cyclic asymmetric accumulation of permanent deformation of the subsoil beneath the breakwater. The deformation accumulation and strength degradation of the subsoil are mainly due to the cyclic reduction of effective stress associated with pore pressure build up.

Most seaward tilt mechanisms have been observed in actual breakwaters after the repetitive action of breaking waves generated within storms while

the subsoil is mostly fine loose sand. This combination of low wave period (breaking wave impacts), high characteristic drainage period ($T_{char, drain}$) and low relative density are well known to be the natural setting for liquefaction or partial liquefaction in marine gravity structures [33]. Moreover, greater stress amplitude is observed under seaward than under shoreward caisson edge. This is due to triangular distribution of the uplift forces associated with breaking waves, with its maximum amplitude attained under seaward caisson edge [34]. This difference in load amplitude might induce an asymmetric permanent deformation of the subsoil beneath the breakwater.

4.3. Theoretical and Numerical modelization

4.3.1 Theoretical modelization

The soil-water-breakwater interaction has been modeled coupling three different physical systems with independent solution of each system being impossible without simultaneous solution of the others. These are caisson, rubble mound and sea bed (Figure 3).

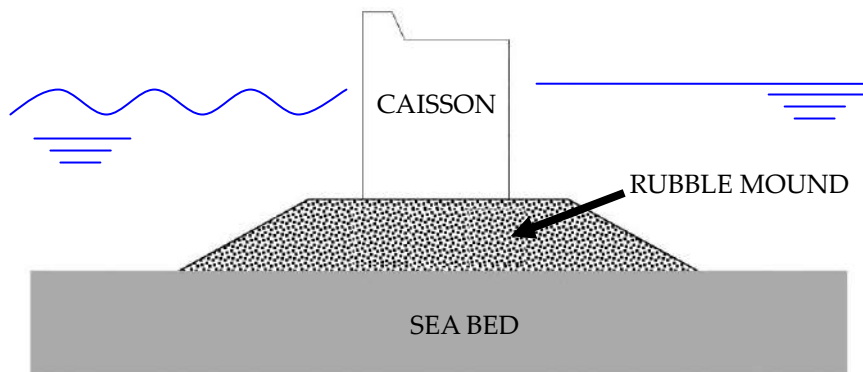


Figure 3. Physical systems involved in the soil-water-breakwater interaction model.

The mathematical model considered to represent skeleton-pore fluid interaction within the sea bed and the rubble mound is the Generalized Biot $u - p_w$ formulation, while the caisson has been considered as one phase media.

Regarding constitutive modeling, the seabed soil is considered as a *SandPZ* Generalized Plasticity media while the rubble mound and the caisson are considered to behave under a linear elastic law. Sea waves are not modeled as a proper physical system representing the sea wave actions exerted over the structure as boundary conditions. The theoretical model for

the soil-water-breakwater interaction proposed is developed in two dimensions under plain strain idealization.

The governing equation presented so far has to be complemented by suitable boundary and initial conditions. Figure 4 shows the contours where the boundary conditions need to be defined to complete the theoretical model for the soil-water-breakwater interaction proposed.

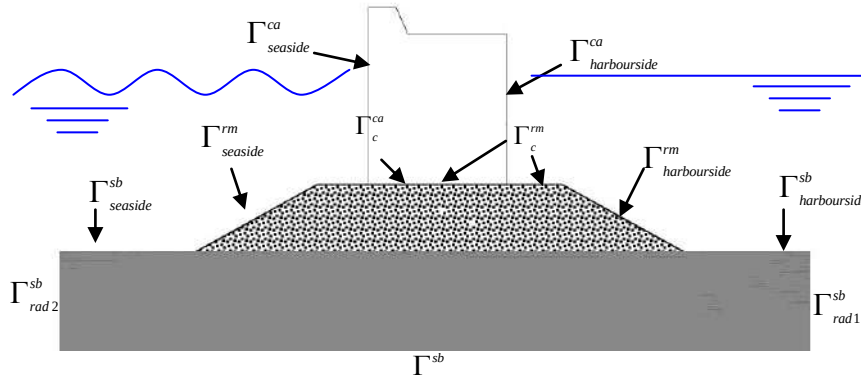


Figure 4. Localization of the contours to impose boundary conditions.

Boundaries $\Gamma_{seaside}^{sb}$, $\Gamma_{seaside}^{rm}$, $\Gamma_{seaside}^{ca}$, $\Gamma_{harbourside}^{ca}$, $\Gamma_{harbourside}^{rm}$, $\Gamma_{harbourside}^{sb}$

The direct contribution of the wave motion to the sea bed and rubble mound foundation has been neglected, only considering still water level pressure on the boundaries $\Gamma_{seaside}^{sb}$, $\Gamma_{seaside}^{rm}$, $\Gamma_{harbourside}^{ca}$, $\Gamma_{harbourside}^{rm}$, $\Gamma_{harbourside}^{sb}$. Only impact loading induced by breaking waves on the structure is considered.

Boundaries Γ^{sb} , Γ_{rad1}^{sb} , Γ_{rad2}^{sb}

An impermeable and rigid seabed bottom (Γ^{sb}) is considered. This leads to a vanished fluctuation of all physical quantities. For the lateral boundaries (Γ_{rad1}^{sb} , Γ_{rad2}^{sb}) a first order Higdon scheme associated with the $u-p_w$ generalized Biot formulation is considered. Regarding the pore pressure boundary conditions, the sea bed bottom Γ^{sb} and lateral boundaries Γ_{rad1}^{sb} , Γ_{rad2}^{sb} are considered impermeable.

Boundaries $\Gamma_{seaside}^{ca}$, Γ_c^{ca}

A Horizontal impulsive force due to breaking wave F_h and related uplift pressure F_u corresponding with regular waves defined by

$H = 0.6m$, $T = 6.5s$, $h_s = 1.6m$, $h_1 = 0.6m$ is applied. Time history impact loading corresponds to a typical single-peaked force associated with a very small or not air cushion wave breaking type, as shown in Figure 5. The action derived by ten breaking wave over the structure is considered.

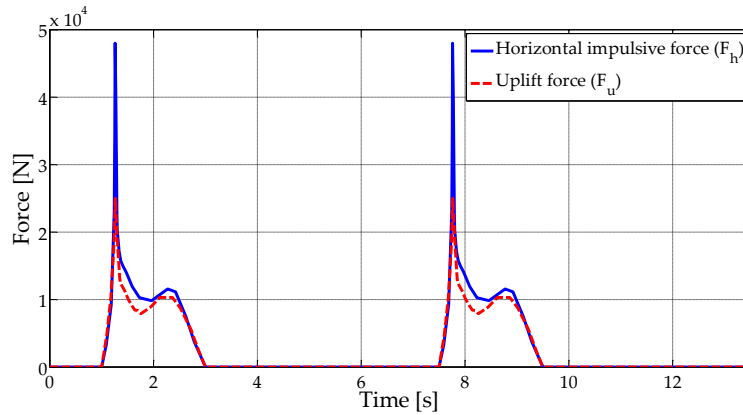


Figure 5. Time history impact loading shape considered for the numerical calculations.

The application point location of the horizontal impact force is considered usually constant and slightly under still water level, while uplift force applies at 1/4 of the caisson width from the seaward edge.

$$\text{Boundaries } \Gamma_c^{rm}, \Gamma_c^{ca}$$

Caisson-rubble mound contact interface has been modeled through a frictional contact constrain model limited to small relative sliding between contacting surfaces.

Initial Conditions

Regarding the initial conditions, still water level induced pore pressure is firstly established. Different stages associated with the rubble mound and caisson construction are performed through an elastoplastic consolidation process.

4.3.2 Numerical modelization

The geometry of the computational region including the spatial discretization mesh is shown in Figure 6. The mesh consists of 416 isoparametric triangular elements with 6 nodes quadratic interpolation for any skeleton displacement, $\mathbf{u}^{sb}$ (sea bed), $\mathbf{u}^{rm}$ (rubble mound) and $\mathbf{u}^{ca}$ (caisson), while 3 node linear interpolation for pore water pressure

interpolation in the sea bed and the rubble mound, p_w^{sb} , p_w^{rm} .

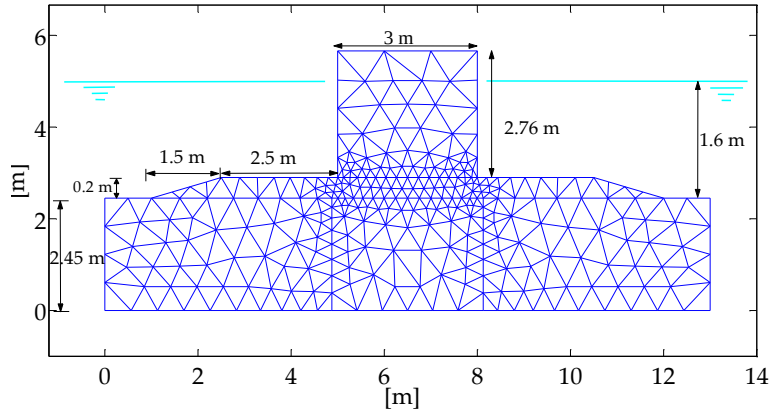


Figure 6. Geometry and mesh considered for the numerical calculations.

The boundary conditions considered for the numerical simulation are described in Figure 7.

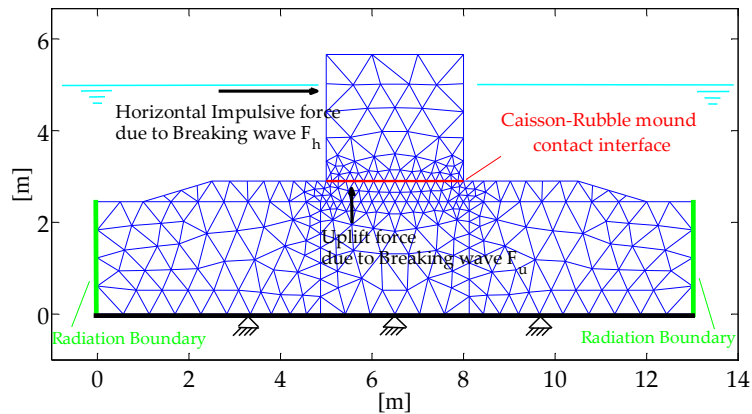


Figure 7. Boundary conditions considered in the numerical calculations.

All calculations are developed within MATLAB numerical environment.

4.4. Results and discussion

Different experimental results established a very close correlation between residual pore pressure and residual soil deformations beneath the breakwater due to caisson motion and induced by breaking wave impacts. In Figure 8 it is shown the relation between accumulated settlement (permanent

vertical displacement) and residual pore pressure numerically obtained.

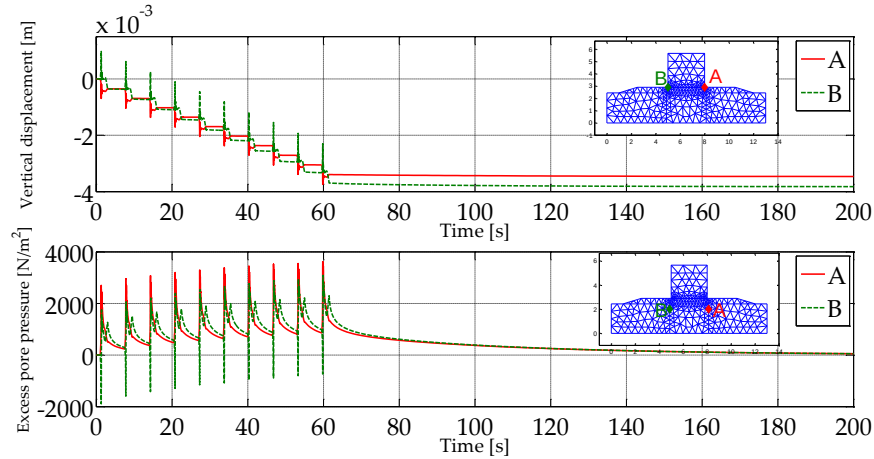


Figure 8. Relation between accumulated settlement and residual pore pressure ($H=0.6m$, $T=6.5s$, $h_s=1.6m$, $h_1=0.6m$). Numerical results.

The relation shown in Figure 8 indicates a residual pore pressure directly generated by the caisson motion induced by the impulsive wave action. The partial drainage occurring between two wave impact loads is not enough to dissipate the entire excess pore pressure generated, therefore a pore pressure accumulation process is developed. Just before the tenth impact load takes place, the accumulated excess pore pressure close to the sand layer surface is almost $0.8kN/m^2$. Once the impulsive wave action is finished, no extra excess pore pressure generation is performed but a pure dissipation process develops. While this dissipation process is taking place, the extra settlements observed induced by an elastoplastic consolidation process are negligible. After 200s the pore pressure derived by impulsive wave action dissipates completely in the vicinity of the sand layer surface.

Analyzing Figure 8, we observe a larger differential settlement at the seaward side than at the shoreward side. It is well known in geotechnical practice, when soils are loaded cyclically in the plastic range with nonzero mean stress they move towards the critical state line, describing cyclic accumulation of deformation. Experiment evidences show [35] that when a sample is loaded cyclically with constant mean stress, the greater the stress amplitude is the more mean stress decrease the sample accumulates. In the present case of a breakwater, the sand layer beneath the seaward edge is loaded with a greater stress amplitude than the one below the shoreward caisson edge, due to the uplift distribution, inducing a seaward settlement greater than the one observed at the shoreward.

In order to clarify the last aspect, Figure 9 shows the Von Mises equivalent

shear stress versus the mean effective stress at two different points A and B of the sand layer surface, under the shoreward edge (point A) and seaward edge (point B). The stress path direction observed under seaward and shoreward edges are almost opposite, while the shear stress amplitude is the double in point B than in point A. At the same time a clear mean effective stress reduction is observed at both locations, being slightly greater under the seaward edge.

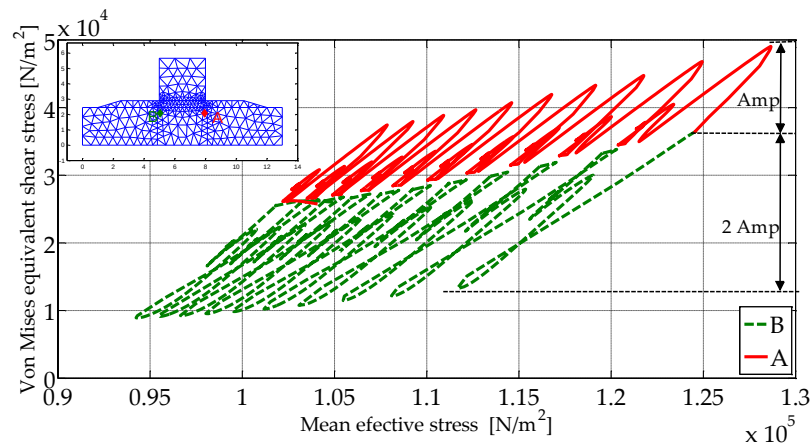


Figure 9. Von Mises equivalent shear stress versus the mean effective stress under the shoreward edge (point A) and seaward edge (point B).

The different stress amplitude observed under seaward and shoreward edges induced a more accentuated plastic behavior under the former as it is shown in Figure 10.

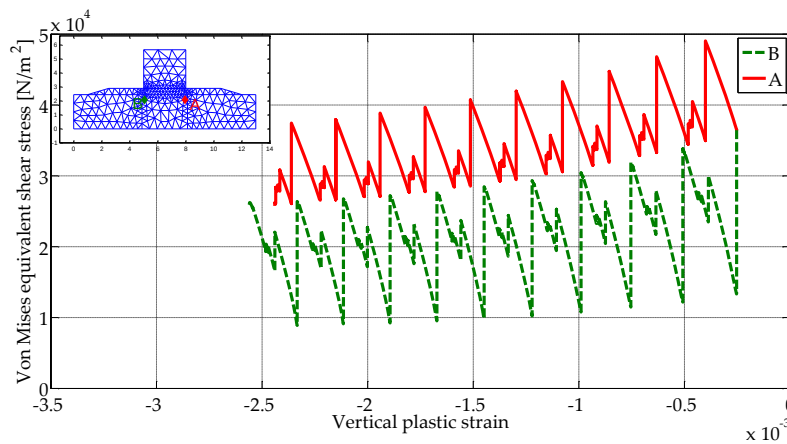


Figure 10. Von Mises equivalent shear stress versus vertical plastic strain under the shoreward edge (point A) and seaward edge (point B).

This asymmetric behavior leads to a greater permanent settlement in point B than in point A, i.e. seaward tilt mechanism, as it is shown in Figure 11

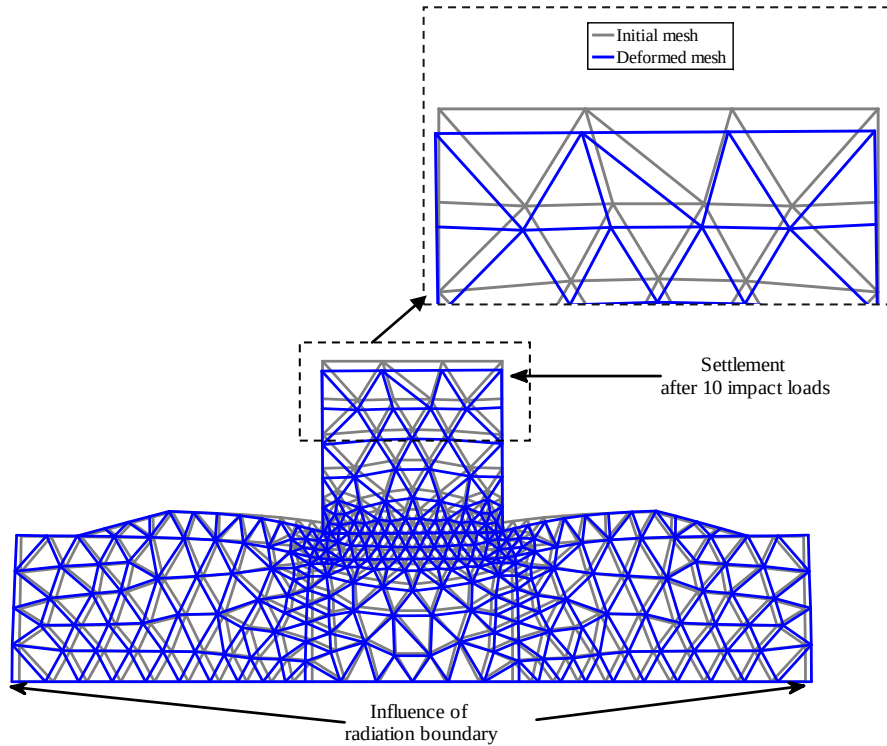


Figure 11. Seaward tilt induced by breaking waves

In this last figure the initial mesh (before the impulsive sea wave actions take place) and the deformed mesh (after the action of 10 breaking waves) are observed. It is clear that the vertical breakwater has suffered some settlement, being greater under the seaward edge of the caisson than under the shoreward part of the caisson.

5. Conclusions

In this paper the procedure followed by applied mathematicians and geotechnical engineers to develop robust engineering geotechnical designs of maritime offshore structures is described.

The principal theoretical components to be considered to properly reproduce the seafloor dynamics around and below a maritime structure are presented. An accurate maritime geotechnical modeling will drastically

depend on the consideration of these components.

Due to the complexity associated with the mechanism of seafloor dynamics it has been suggested the essential role play by numerical techniques in order to achieve realistic design solutions under a geotechnical engineering point of view.

Finally, one of the mechanisms that might eventually lead a vertical breakwater to failure, sea ward tilting, has been reproduced under the scope of the theoretical-numerical framework presented in this paper. The numerical results obtained are able to adequately represent the principal characteristics of this failure mechanism.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the support provided by the Spanish MCINN (Project BIA2009-14225-C02-01 GEODYN).

7. REFERENCES

- [1] PASTOR M, DREMPETIC V, MERODO JAF. Una metodología racional para el estudio de cimentaciones de estructuras marinas. *Ingeniería Civil. CEDEX*. 2006; **141**:37-48.
- [2] STICKLE MM. *Sobre la respuesta dinámica del terreno bajo la acción del olaje en cajones fondeados en suelos arcillosos*. PhD Thesis, Polytechnic University of Madrid, 2010.
- [3] STICKLE MM, DE LA FUENTE P, OTEO C. Modeling of non linear dynamic soil response induced by impulsive sea wave actions over vertical breakwaters. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 2012; *submitted*.
- [4] JENG DS. Wave-induced sea floor dynamics. *Applied Mechanics Reviews* 2003; **56**(5):407-429.
- [5] POULOS HG. *Marine Geotechnics*. Unwin Hyman, London, 1988.
- [6] ZIENKIEWICZ OC, SHIOMI T. Dynamic behavior of saturated porous media: The generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.* 1984; **8**:71-96.
- [7] RAPPAZ M, BELLET M, DEVILLE M. *Numerical Modeling in Materials Science and Engineering*. Springer: New York, 2003.

- [8] ZIENKIEWICZ OC, CHANG CT, BETTESS P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behavior assumptions in soils. *Geotechnique* 1980; **30**(4):385-395.
- [9] ZIENKIEWICZ OC, CHAN AHC, PASTOR M, SCHREFLER BA, SHIOMI T. *Computational Geomechanics. With Special Reference to Earthquake Engineering*. Wiley: Chichester, England, 1999.
- [10] ULKER MBC, RAHMAN MS, JENG DS. Wave induced response of seabed: various formulations and their applicability. *Appl. Ocean. Res.* 2009; **31**:12-24.
- [11] ULKER MBC, RAHMAN MS, GUDDATI MN. Wave induced dynamic response and instability of seabed around breakwater. *Ocean Engineering* 2010; **37**:1522-1545.
- [12] MIRA P, TONNI L, PASTOR M, MERODO JAF. A generalized midpoint algorithm for the integration of a generalized plasticity model for sands. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2009; **77**(9):1201-1223.
- [13] SLOAN SW. Substepping Schemes for the Numerical Integration of Elastoplastic Stress-Strain Relations. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1987; **24**(5) :893-911.
- [14] STICKLE MM, DE LA FUENTE P, OTEO C. Explicit integration schemes with automatic error control for generalized plasticity sand constitutive models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2011; *submitted*.
- [15] CARTER JP, BOOKER JR, WROTH CP. *Soil mechanics transient and cyclic loads*. Wiley: Chichester, England, 1982.
- [16] SIMO JC, HUGHES TJR. *Computational inelasticity*. Springer: New York, 1998.
- [17] DAFALIAS Y, POPOV EP. A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings. *Acta Mech.* 1975; **21**(3):173-192.
- [18] DAFALIAS Y. *On cyclic and anisotropic plasticity*. PhD Thesis, University of California, 1975.
- [19] KRIEG RD. A practical two-surface plasticity theory. *J. Appl. Mech.* 1975; **42**:641-646.
- [20] AL-TABBAA A. *Permeability and stress-strain response of speswhite kaolin*. PhD Thesis, University of Cambridge, 1987.

- [21] AL-TABBAA A, WOOD DM. An experimentally based bubble model for clay. *Proceedings of the 3th Symposium on Numerical Models in Geomechanics-NUMOGIII*, Niagara Falls, 1989; 91-99.
- [22] ZIENKIEWICZ OC, MROZ Z. *Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics*. Mechanics of Engineering Materials. Wiley: Chichester, 1984; 655-679.
- [23] PASTOR M, ZIENKIEWICZ OC, CHAN AHC. Generalized plasticity and the modeling of soil behavior. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.* 1990; **14**:151-190.
- [24] HIRT CW, NICHOLS BD. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics* 1981; **39**: 201-225.
- [25] OUMERACI H, KORTENHAUS A, ALLSOP W. *Probabilistic Design Tools for Vertical Breakwaters. MAST III PROVERBS*. A. A. Balkema Publishers 2001.
- [26] GODA Y. Dynamic Response of upright breakwaters to impulsive breaking wave forces. *Coastal Engineering* 1994; **22**(1-2): 135-158.
- [27] OUMERACI H, KORTENHAUS A. Analysis of the dynamic response of caisson breakwaters. *Coastal Engineering* 1994b; **22**:159-183.
- [28] SHENG D, WRIGGERS P, Sloan W. Application of Frictional Contact in Geotechnical Engineering. *International Journal of Geomechanics* 2007; **7**(3): 176-185.
- [29] GAJO A, SAETTA A, VITALIANI R. Silent boundary conditions for wave propagation in saturated porous media. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.* 1996; **20**:253-273.
- [30] ZIENKIEWICZ OC, TAYLOR RL. *Finite Element Method, The Basis*. Elsevier, 2000.
- [31] CRISFIELD MA. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol 1: Essentials*. John Wiley & Sons, 1991.
- [32] KATONA MG, ZIENKIEWICZ OC. A unified set of single step algorithms part 3: the beta-m method, a generalization of the Newmark scheme. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1985; **21**:1345-1359.

- [33] DE GROOT MB, KUDELLA M, MEIJERS P. Liquefaction Phenomena Underneath Marine Gravity Structures Subjected to Wave Loads. *J. Waterw. Port. Coastal Ocean Eng.* 2006; **132**(4) :325-335.
- [34] RICHWIEN W, WANG Z. 2000, *The mechanism of seaward tilting of vertical breakwaters*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität Essen, 2000.
- [35] ANDERSEN KH. *Research Project, Repeated Loading on Clay. Summary and Interpretation of Test Results*. Norwegian Geotechnical Institute 1975.

Sobre los autores:

Nombre: Miguel Martín Stickle

Correo Electrónico: miguel.martins@upm.es

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Manuel Pastor

Correo Electrónico: manuel.pastor@upm.es

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Paola Dutto

Correo Electrónico: paola.dutto@upm.es

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Juegos Matemáticos

Triángulos cuadrados y cruces cuadradas: algunos puzzles geométricos de H. E. Dudeney

Francisco Pérez Arribas

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Henry Ernest Dudeney (1857-1930) fue un autor inglés, conocido por los retos y acertijos matemáticos que publicó a lo largo de su vida en distintas revistas y que han sido recopilados posteriormente en distintos libros. Algunos de sus más de 200 retos tienen interesantes propiedades geométricas que pueden ser exploradas y mostradas con claridad, usando herramientas informáticas actuales. Este artículo presenta y analiza dos puzzles (disecciones) de gran atractivo geométrico: la transformación de un triángulo equilátero en un cuadrado, y la transformación de una curiosa cruz en un cuadrado.

Palabras Clave: Puzzles, Geometría dinámica, Disecciones

1. Introducción

Henry E. Dudeney fue un autor inglés aficionado a las matemáticas que produjo cientos de acertijos y puzzles matemáticos a lo largo de su vida. Dudeney no era matemático de profesión sino que era un funcionario de la Corona Británica, aunque poseía una cierta educación matemática y sobre todo una fuerte intuición relacionada con los campos de la matemática y de la geometría. En este último aspecto sus puzzles son realmente interesantes presentándose en este trabajo dos que resultan especialmente bellos y que se

englobarían dentro de las disecciones de figuras planas.

Mediante estas disecciones, cortes que se producen a una figura para después recolocar las piezas que estos cortes generan y formar así una nueva figura geométrica con igual área que la original, es posible transformar un triángulo equilátero en un cuadrado, y también una cruz con una forma muy característica en otro cuadrado. Matemáticamente existen numerosas soluciones para resolver estos problemas, pero cuando se observen las construcciones propuestas por Dudeney se verá que este autor poseía una gran intuición geométrica y sobre todo que las soluciones que se aportan poseen además la belleza de transformar una figura en otra mediante movimientos entre las piezas.

Como se ha comentado existen numerosas soluciones matemáticas a estos problemas basados en disecciones y no existen demostraciones rigurosas de los mismos, puesto que esta serie de problemas se proponían a modo de acertijos o pasatiempos. Las soluciones propuestas por Dudeney no eran geoméricamente precisas, si no que hay que intuir ciertas características geométricas de sus diseños para poder realizar la solución de forma matemáticamente precisa. Hoy en día es posible utilizar programas de geometría dinámica, en este caso se ha utilizado Geogebra, para realizar y sobre todo mostrar de forma efectiva como se realizan estos puzzles.

1.1 El acertijo del Mercero (The Haberdasher's Puzzle): un triángulo cuadrado

El enunciado original de este acertijo puede consultarse dentro del proyecto Gutenberg [1], o también en el libro de "Los acertijos de Canterbury" que puede encontrarse en español o consultarse en la red. Básicamente lo que indica el puzzle es que han de transformarse un paño con forma de triángulo equilátero mediante cortes rectilíneos de manera que se formen cuatro piezas y que éstas formen un cuadrado al ser colocadas de una determinada manera.

Aunque el objetivo de este artículo es presentar los acertijos y resolverlos con técnicas de geometría dinámica, también pueden proponerse estos enunciados correctos a estudiantes o investigadores. Decir antes que nada que el autor de este mismo artículo no fue capaz de resolverlo tras varios días de trabajo, lo cual despertó su curiosidad y por supuesto buscó la solución en Internet. Indicar que según los comentarios del propio Dudeney, este acertijo se propuso el 1902 en la revista Weekly Dispatch y también en 1905 a la Royal Institution of Mathematics. Después de cientos de envíos, de posibles

soluciones, únicamente una persona tuvo el mérito de resolverlo.



Figura 1. El acertijo del Mercero

La solución a este acertijo también puede verse en la referencia [1], apareciendo a continuación la construcción geométrica que propuso el propio Dudeney:

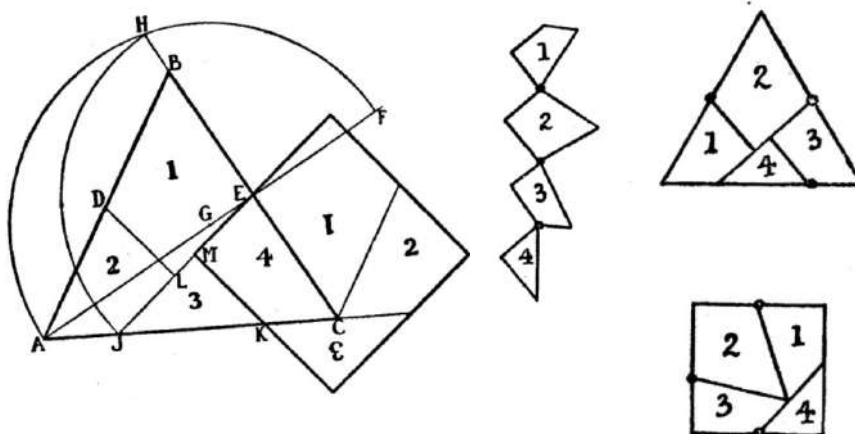


Figura 2. Solución de Dudeney al acertijo del Mercero

Indicar que la solución posee además el atractivo de que las piezas pueden unirse mediante bisagras de manera que mediante giros pueda transformarse el triángulo equilátero en el cuadrado. A raíz de este acertijo se

desarrollaron distintas disecciones de figuras geométricas denominadas "Higed Dissections" [2], y que poseen esta propiedad.

Una solución más clara puede verse en la siguiente figura obtenida resolviendo el problema mediante Geogebra.

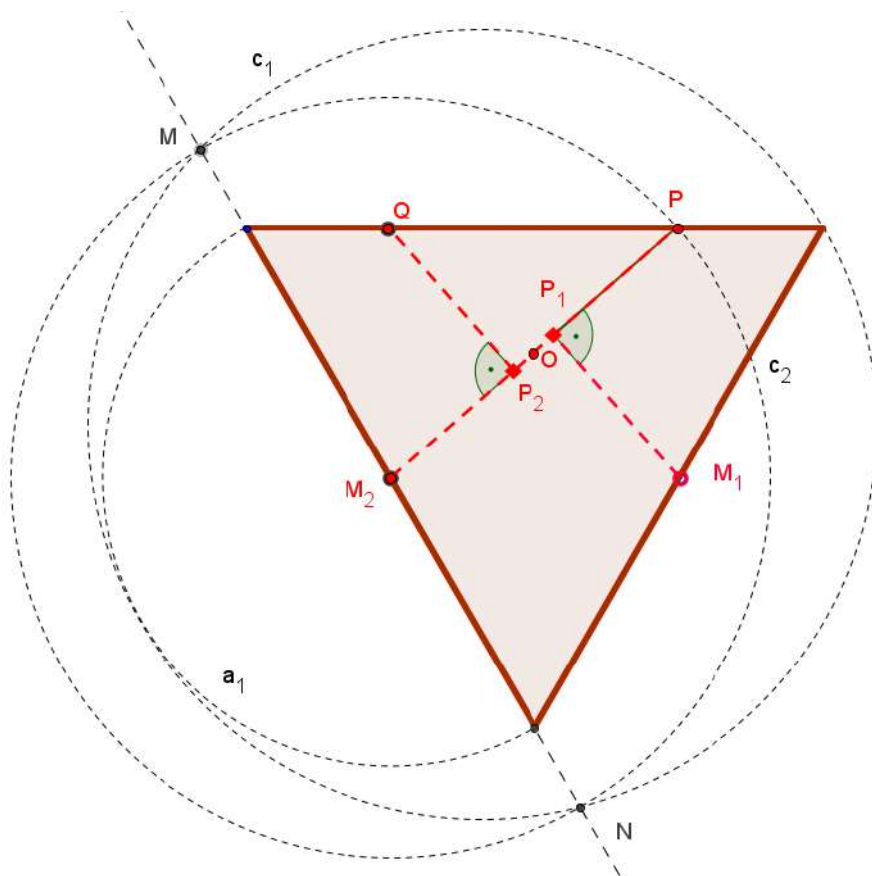


Figura 3. Solución con Geogebra

En esta Figura 3, se realiza un primer arco a_1 cuyo diámetro sea uno de los lados del triángulo equilátero. A continuación se dibuja la circunferencia c_1 que sea tangente dicho arco y pase por el vértice opuesto al mismo. Esta circunferencia corta al lado del triángulo que genera el primer arco, en dos puntos M y N . Dibujando una circunferencia c_2 que tenga por diámetro el segmento comprendido entre estos dos puntos, se obtiene un punto P en la intersección de la misma con uno de los lados del triángulo.

A continuación se une el punto P con el punto medio del lado opuesto M_2 , siendo el punto O el punto medio de este segmento. Se dibuja la

perpendicular desde el punto medio del otro lado M_1 al segmento anterior obteniéndose el punto P_1 como pie de la perpendicular. El simétrico de P_1 respecto del punto O , produce el punto P_2 .

Dibujando la perpendicular desde el punto P_2 al segmento PM_2 se obtiene en la intersección con uno de los lados del triángulo el punto Q . Los cortes al triángulo equilátero estarían definidos tal como se muestra en la Figura 3 por los segmentos PM_2 , M_1P_1 y finalmente por QP_2 . Indicar que desde el punto de vista práctico de cara a la construcción recortando por ejemplo una cartulina, las distancias entre los puntos P y el vértice más cercano, así como la distancia entre Q y el vértice más cercano, son aproximadamente la cuarta parte del lado del triángulo cada una.

Puede verse que la solución no es sencilla ni inmediata, pero que dice mucho de Dudeney en como fue concebida dado que se construye fácilmente con regla, compás y tijeras. El despliegue de las piezas unidas mediante rótulas desde la posición de triángulo equilátero hasta la posición de cuadrado puede verse en la Figura 4, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

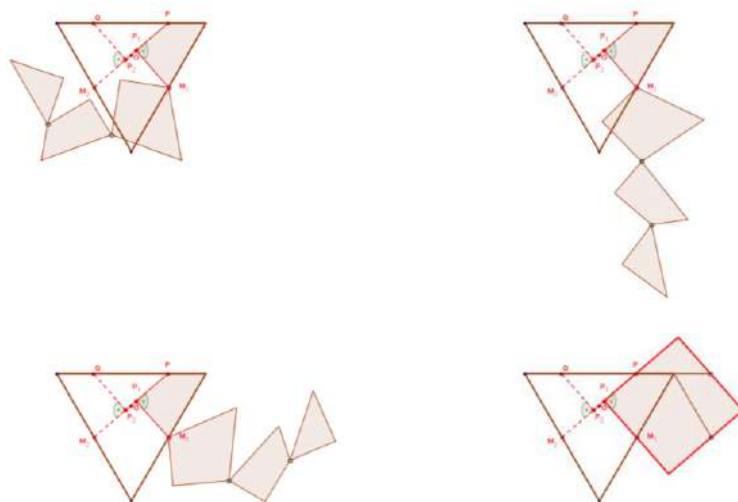


Figura 4. Transformación de triángulo a cuadrado

Es posible crear un rompecabezas físico a partir de la construcción geométrica construyendo las piezas en madera y uniéndolas mediante bisagras, Figura 5. En la referencia [3] donde puede verse el original de la figura, aparece también un vídeo para observar el movimiento a lo largo de la transformación.

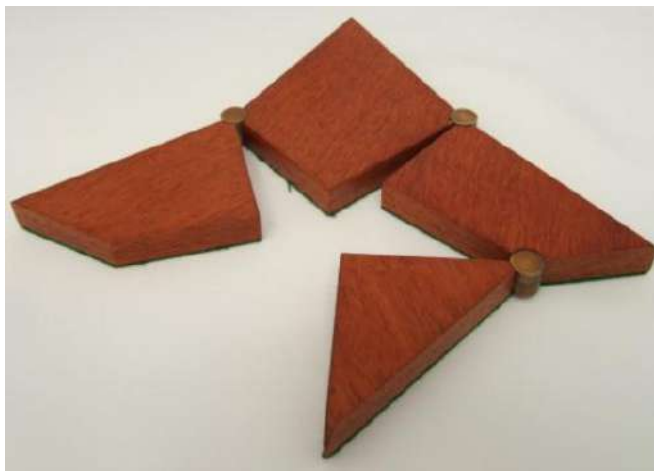


Figura 5. Rompecabezas físico del acertijo del Mercero

1.2 El acertijo de la priora (The Puzzle of the Prioress):

El enunciado original de este acertijo puede consultarse como en el caso anterior dentro del proyecto Guttenberg [1], o también en el libro de "Los acertijos de Canterbury" que puede encontrarse en español, o consultarse en la red. Lo que pide este reto es la transformación de una cruz con forma característica, en un cuadrado mediante una disección formada por dos cortes rectos que separen la cruz en cuatro piezas.

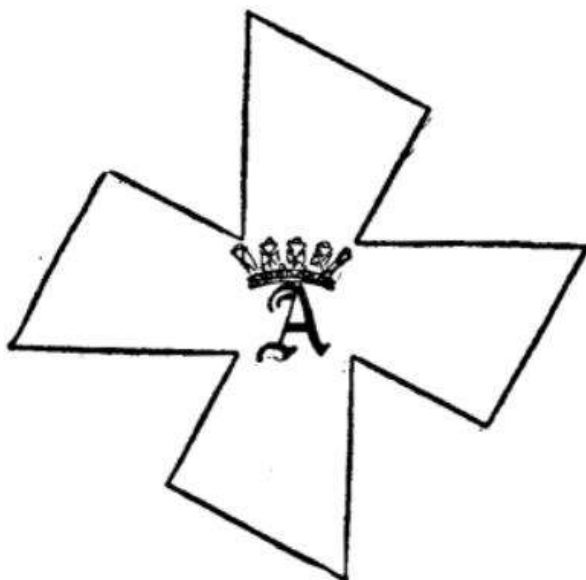


Figura 6. El acertijo de la priora

En este acertijo hay que observar bien la forma de la cruz y sobre todo la localización de los ángulos rectos en cada brazo. El autor de este artículo fue capaz de resolver este reto tras varios intentos. La solución propuesta por Dudeney aparece en la siguiente figura.

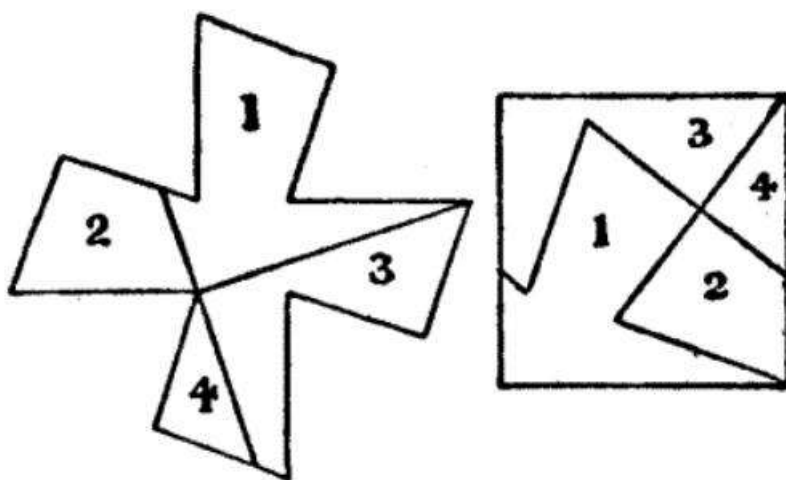


Figura 7. Solución de Dudeney al acertijo de la priora

La solución indicada no es demasiado clara, pero geoméricamente está formada por dos cortes perpendiculares (esto es importante), el primero y más claro entre dos vértices opuestos de la cruz, y el segundo perpendicular al anterior en uno de los vértices. La exploración de la solución con Geogebra permite descubrir aspectos interesantes del problema. La siguiente figura se observa de derecha a izquierda y de arriba a abajo.

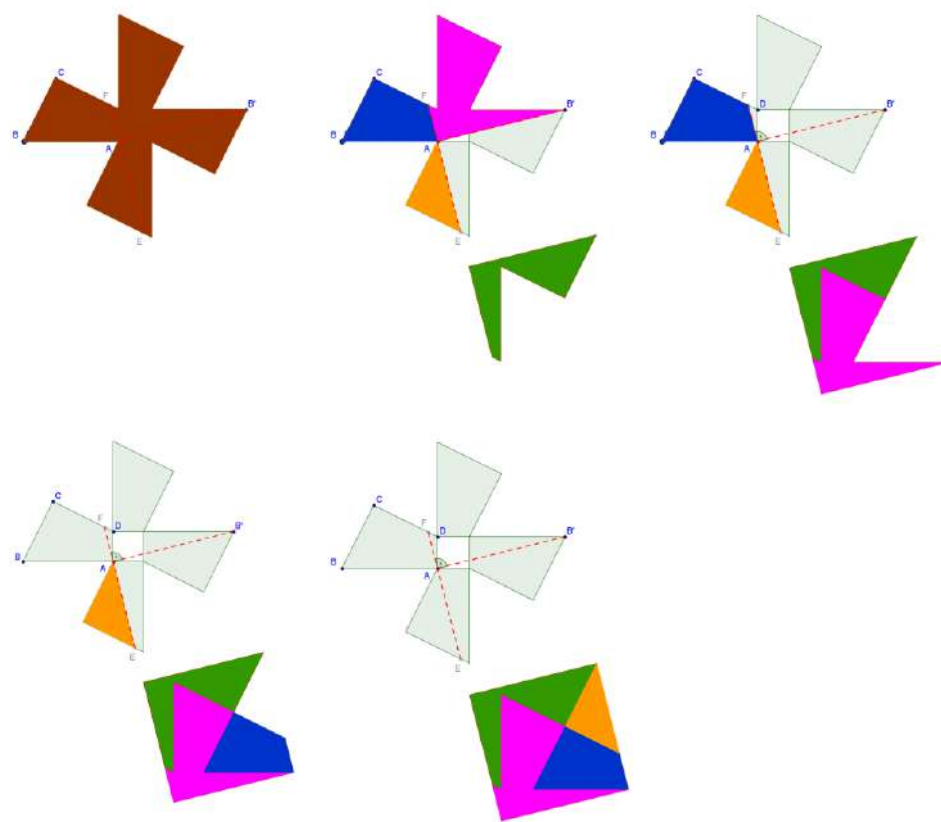


Figura 8. Solución con Geogebra al acertijo de la priora

De la solución con Geogebra se observa como se puede pasar del enunciado a la solución mediante una serie de traslaciones sucesivas, en el caso del puzzle anterior las transformaciones eran giros de las piezas. Es decir el problema tiene una dimensión dinámica muy interesante.

Trabajando sobre el enunciado propuesto por Dudeney, este enunciado en forma de cruz tiene solución, es decir es posible transformar la cruz en un cuadrado, cuando el vértice **C** de la Figura 8 está situado en la mediatriz del segmento **DB**, y además el ángulo en dicho vértice **C** ha de ser de 90° . Estos son dos condiciones geométricas interesantes, y que pueden ser independientes entre sí.

La segunda condición geométrica hace que el vértice **C** pueda desplazarse a lo largo del arco capaz (Semicircunferencia) del segmento **BD**. Cualquier punto a lo largo de este arco capaz va a producir una solución prácticamente correcta pero con una pequeña salvedad: si el punto **C** no se toma en la intersección de la mediatriz del segmento **BD** con el arco capaz, la solución

original va a transformar la cruz en un cuadrado al que curiosamente le faltará un pequeño cuadrado en su interior. Esto puede comprobarse en la siguiente figura realizada con Geogebra.

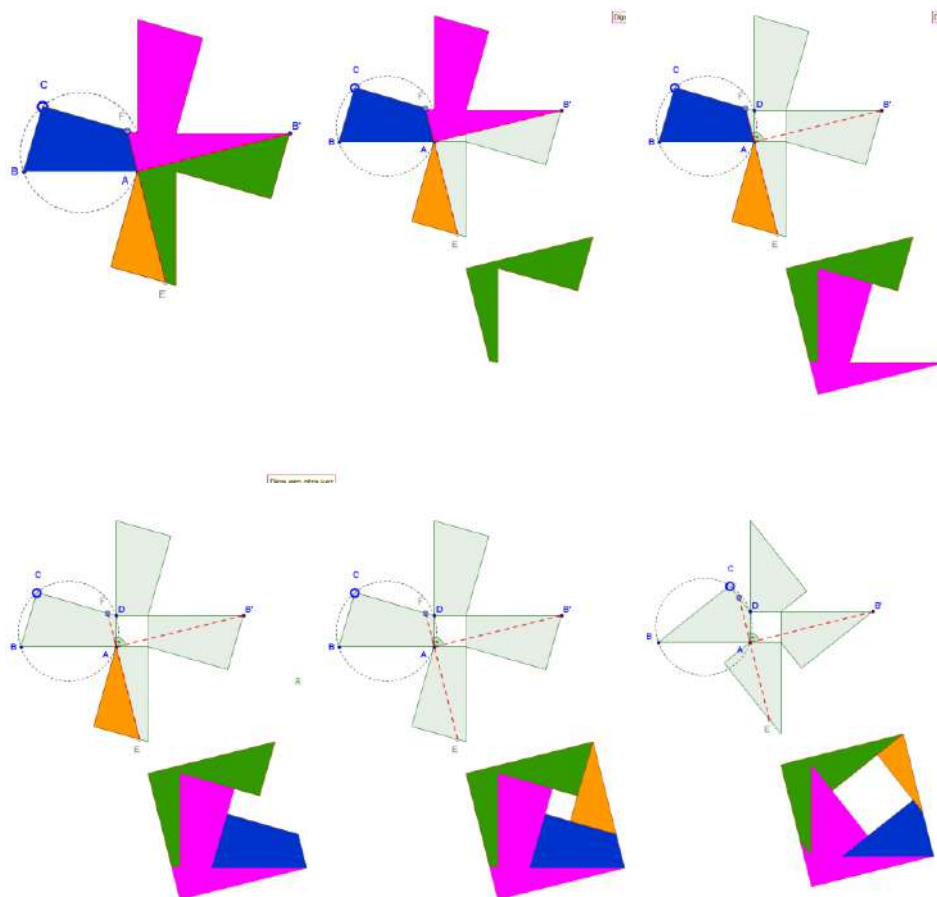


Figura 9. Variantes de la solución

Puede verse también en la última parte de la figura anterior como cambia el aspecto del agujero cuadrado interior al mover el vértice **C** de la Cruz a lo largo del arco capaz, manteniéndose en todo caso el valor del perímetro del cuadrado resultante. En el caso de este puzzle que también posee gran belleza geométrica, no se han encontrado referencias a la respecto.

Referencias

- [1] PROYECTO GUTENBERG: H. E. Dudeney. Los cuentos de Canterbury.
http://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm#Page_23

- [2] G. N. FREDERICKSON. Geometric Dissections Now Swing and Twist
http://www.imr.sandia.gov/13imr/presentations/Frederickson_presentation.pdf
- [3] JOHN BRYANT AND CHRIS SANGWIN. Dudeney's dissection
<http://web.mat.bham.ac.uk/C.J.Sangwin/howroundcom/jigsaw/index.html>

Sobre el autor:

Nombre: Francisco Pérez Arribas

Correo Electrónico: francisco.perez.arribas@gmail.com

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Navales. Profesor de Expresión Gráfica y de distintas materias relacionadas con el dibujo, el CAD y la Geometría. Aficionado a las matemáticas, le gusta rescatar del "olvido" distintos temas geométricos con técnicas actuales de diseño y visualización.

Críticas

La Puerta de Los Tres Cerrojos (Una Aventura Cuántica)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

El equipo editorial ha querido hacer una reseña de este libro, pese a no tener contenidos matemáticos por considerar que la divulgación científica de calidad es muy importante y necesaria.

Palabras Clave: Física Cuántica, agujero negro, partículas elementales, velocidad de la luz.

1. Ficha Técnica

Título: La Puerta de los Tres Cerrojos

Autora: SONIA FERNÁNDEZ-VIDAL

Nº Páginas: 208

Editorial: La Galera

De la colección “Narrativa Singular”

ISBN: 978-84-246-3577-0

Fecha de Edición: 03-2011

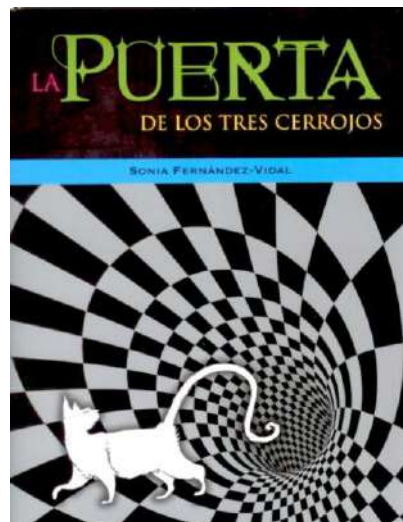
Encuadernación: Tapa dura

Tamaño: 15 x 19 cms

2. El libro

Pese a ser un libro sobre Física y no aparecer la Matemática casi por ningún sitio, queremos hacer la reseña de esta obra porque todo esfuerzo por hacer llegar al público conceptos elevados de la ciencia de una manera fácil y entretenida son bienvenidos.

Este libro es una invitación a caminar de forma original, a veces vertiginosa, por los caminos más modernos y desconocidos de la Física. Uno de sus mayores méritos es que introduce conceptos de física cuántica, en los que la autora es especialista, con sencillez y limpieza sin abandonar el necesario rigor. Así, de la mano del personaje principal que se encuentra inmerso en una peculiar aventura, se pone en valor la necesidad del conocimiento, el poder de la curiosidad, el atractivo de la ciencia, de todas las ciencias, y se logra una conexión entre realidad y fantasía no exenta de magia.



Los personajes nos resultan actuales, modernos en su forma de relacionarse, en sus actitudes ante los hechos que les suceden, y todos tienen en común su pasión por el estudio, por ser capaces de comprender la realidad desde el punto de vista de la Ciencia.

Una estructura sencilla, un nexo de la acción encadenada a través de adivinanzas lógicas, consigue mantener el interés hasta el final que nos deja no pocos interrogantes.

Es un libro muy recomendable para jóvenes, es idóneo para alumnado de ESO y Bachillerato y para lectores y lectoras interesados por acercarse de forma natural a los principios básicos de la física cuántica.

El protagonista, un niño, entra en un mundo nuevo, prohibido para los humanos que viven en el mundo clásico, entra en el mundo cuántico. En ese mundo pasan cosas maravillosas, mágicas, sorprendentes. Recuerda en eso algo a los libros sobre Harry Potter. Narra muy bien las peculiaridades de la física cuántica en contraposición de la física clásica, y aunque esos temas son difíciles y profundos, el libro se lee muy bien y no es farragoso.

Lo malo es que tiene muy poco sobre Matemáticas, aunque explica muy

bien asuntos muy complicados sobre física cuántica. Consideramos que el profesorado de Física debería recomendarlo como lectura obligatoria al alumnado.

Tiene muy buenos consejos generales, como “¡Si quieres llegar a alguna parte, haz las preguntas correctas!” o no creer que en el enunciado de un enigma te dan información, que no te dan. Hemos planteado algunos de esos enigmas a niños de 7 años, suscitándoles mucho interés: “¿Cómo se puede pinchar un globo sin que se escape el aire y sin que el globo haga ruido?”, “¿Qué necesitas para cerrar una puerta?”, y el que más gustó (página 9):

“Imagina una calle por la que circula de noche un coche oscuro, sin luces. Todas las farolas están apagadas. No hay resplandor de ninguna casa ni luz proveniente de los escaparates. De repente, un gato negro cruza por delante del coche. Sin embargo, el conductor frena a tiempo antes de atropellarlo. ¿Cómo ha conseguido verlo?”.

Estos consejos y estos enigmas, tan tontos, nos llevan a reflexionar y a fijarnos bien en algo tan difícil como comprender el enunciado adecuadamente para resolver un problema. Dice que más importante que el conocimiento que se tenga, o la tecnología, es saber hacer las preguntas correctas, es lo que ha permitido evolucionar a la Ciencia. Ayuda a encontrar respuestas a preguntas que parecen imposibles. Recuerda, “si preguntas, parecerás tonto un día; si no preguntas, serás tonto toda la vida”. No debe desperdiciarse nunca una oportunidad para aprender.

Al final del libro se encuentra un diccionario para estudiantes aventajados donde se explican todos los términos relativos a la física cuántica de forma admirable.

3. La autora

La autora, Sonia Fernández-Vidal ha estudiado Físicas en la Universidad Autónoma de Barcelona, y se ha doctorado realizando su tesis doctoral sobre temas de la física cuántica. Ha trabajado en los centros más importantes en física cuántica del mundo, como el CERN, Centro Europeo de Investigación Nuclear, o en el ICFO, Instituto de Ciencias Fotónicas de Los Álamos. Se nota al leer su libro que es una excelente docente, y que a su alto nivel científico tiene dotes como divulgadora. Transmitir un conocimiento de alto nivel a personas que carecen de él, es extraordinariamente complicado. Puedes resultar ininteligible, o no aportar nada. No ocurre así en este libro. Hace que



personas sin conocimientos en física puedan comprender los misterios de la física cuántica de una manera sencilla, consiguiendo que resulten sencillos y amenos temas muy complicados. Conseguir eso es un gran logro.

4. La física cuántica

Algunos de esos extraños conocimientos de la física cuántica explicados en este libro son, por ejemplo el experimento del *gato de Schrödinger*, o el *principio de incertidumbre de Heisenberg*. Encierran a un gato en una caja opaca sin un solo agujero por donde pueda salir, sin salida, con sólo dos agujeros. Una partícula, un electrón, se dispara. Si pasa por un agujero, el gato vivirá, si pasa por el otro, el gato morirá. Esa partícula cuántica, al ser disparada, produce una “*superposición*” y pasa a la vez por ambos agujeros, con lo que el gato está a la vez vivo y muerto para siempre. Se halla en un estado de superposición.

En ese mundo cuántico, donde todos se mueven a la velocidad de la luz, y se pueden ver partículas elementales, nuestro protagonista aprende a “*tunear*”, es decir, a ir con un impulso sobre una pared y lograr atravesarla. Eso en el mundo cuántico se puede hacer con una alta probabilidad, pero en un mundo clásico la probabilidad de que se consiga es pequeñísima, siendo más probable acabar con todos los huesos molidos ó atrapado en medio de la pared, lo que sería fatal.

Una historia interesante es cuando se representa el *Big-Bang*. El protagonista abre una caja y se produce una explosión. Un punto de luz comienza a crecer, aparecen partículas más pequeñas que los protones y neutrones, como los leptones, muones, neutrinos, tau, el Bos-on de Higgs y los quarks, como Up, Down, Charm, Strange, Top y Bottom, partículas de materia y de antimateria que comienzan a chocar entre sí, y a crecer o a destruirse, como si jugaran un partido de fútbol. El universo se expande. Gana el partido la materia. Ahora sólo pueden pasar tres cosas: que el universo siga expandiéndose hasta el infinito, que se pare, o que vuelva a encogerse, que el universo entero se vuelva a concentrar en un punto de luz y se meta en la caja. Eso es el Big Crunch.

En ese mundo cuántico también es posible la “*teleportación*”. Se entra en una cabina y se aparece en un lugar distante. Funciona por el “*entrelazamiento*” de las partículas. Si dos partículas están entrelazadas cada una de ellas siente, aunque estén separadas miles de kilómetros, lo que le pasa a la otra. Para teleportarte, se mezclan tus partículas con otras que estén en el otro lugar y estén entrelazadas. En el Universo todo está entrelazado, las personas, los árboles, las estrellas. Lo estamos desde el Big-Bang. Todo lo que hagamos afecta al resto del Universo.

Explica muy bien qué es un *agujero negro*. Son grandes estrellas que se han apagado. Se vuelve entonces negra y supermasiva. Toda su materia se concentra en una bolita de pocos kilómetros y con una masa enorme, como si un terrón de azúcar pesara como un camión cargado de hierro.

También trata en muchos sitios del cuento algunos temas propios de la física relativista, como la velocidad de la luz. Por ejemplo el siguiente enigma, (página 70):

“Ayer logré apagar la luz de mi cuarto y me pude meter en la cama antes de que la habitación quedase a oscuras. Como puedes ver, entre el interruptor de la luz y mi cama hay tres metros. ¿Cómo lo conseguí?”.

En la “Relojería Relativa” cada reloj marcaba una hora diferente. El espacio no sólo tiene las tres dimensiones de alto, ancho y largo sino una cuarta dimensión, pues el tiempo es relativo. La luz del Sol tarda ocho minutos en llegarnos, pero las de muchas estrellas tarda varios años luz. Desde un planeta que estuviera a 519 años luz de distancia un astrónomo vería ahora cómo Colón llegaba a América con sus carabelas.

Si viajamos en un tren a 100 km por hora, y en el tren se lanza una pelota a 10 km por hora, desde la estación verían moverse la pelota a 110 km por hora. Imaginemos ahora que el tren viaja a 250.000 km por segundo, y en el tren se enciende una linterna, desde la estación ¿a qué velocidad verían la luz de la linterna? La velocidad de la luz es una especie de límite cósmico, y nada en el Universo puede superarla. Así cerca de la velocidad de la luz, el tiempo se estira y las cosas se encogen. Ese es un efecto de la *Teoría de la Relatividad de Einstein*. Dos hermanos gemelos que uno de ellos viajara a una velocidad próxima a la de la luz, y otro no, a la vuelta uno sería joven y el otro viejo.

Explica la naturaleza de la luz, que es una onda y a la vez una partícula.

5. Y de Matemáticas, ¿qué?

De matemáticas nada. O muy poco. En lo poco que hay, no nos da la solución matemática.

Por ejemplo, en la página 144 habla de dos caminos:

“Uno de ellos es el de la mentira; dirige a quienes lo recorren a las profundidades del laberinto y nunca podrán salir de él. Una muerte horrible espera a los desafortunados que escojan esta senda. El otro es el camino de la verdad; y lleva al que lo recorre hasta la puerta, la única vía para salir vivo del cuántico. Dos guardianes hacen turnos para custodiar la encrucijada. Uno de ellos viene del camino de la mentira y, por lo tanto, siempre miente. El otro viene del camino de la verdad y siempre

dice la verdad. A simple vista no hay manera de reconocer cuál de los dos guardianes tienes delante: ¿Será el del camino de la verdad o el de la mentira? Pensad bien lo que vais a preguntar, pues sólo tenéis una oportunidad para que el guardián os indique el camino correcto”.

El protagonista da la solución correcta, pero sin la explicación Matemática, de $\text{No}(\text{No } A) = A$.

Otros enunciados podemos encontrar que podrían servir para redactar problemas de Matemáticas. Muchos de ellos ya están en muchos libros de secundaria de Matemáticas. En la página 113 nos da la siguiente información:

“Para que en la Tierra una pelota pueda escapar de la fuerza de la gravedad y salir al espacio exterior tendrías que lanzarla a una velocidad de 11,2 kilómetros por segundo. Es decir, a más de 40.000 kilómetros por hora. ... En la Luna, que tiene menos masa, sólo tienes que saltar a 2,37 kilómetros por segundo, unos 8.500 kilómetros por hora, para escapar de su fuerza de la gravedad. ... Un agujero negro tiene tanta masa concentrada que la velocidad para salir de él supera los 300.000 kilómetros por segundo, o sea, 1.080.000.000 kilómetros por hora, ¿Tampoco la luz puede escapar de un agujero negro?”.

6. Referencias

- [1] FERNÁNDEZ-VIDAL, Sonia. *La puerta de los tres cerrojos*, Narrativa Singular. La Galera, SAU Editorial. 2011.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Equipo Editorial de la Revista

Correo Electrónico: ma08@caminos.upm.es

Institución: Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil. ETSI Caminos Canales y Puertos. (Universidad Politécnica de Madrid).

Críticas

Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del Geogebra

Isabel Álvarez García-Mon

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

El CD-ROM “Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del GeoGebra” es un material destinado a profesores de Matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato. Consta de once proyectos diferentes sobre modelización matemática, en los que, utilizando el software GeoGebra, se resuelven problemas matemáticos basados en situaciones del mundo real.

Palabras Clave: Modelización, GeoGebra, Educación Matemática

1. Ficha Técnica del CD

Editora- coordinación: Inés María Gómez Chacón

Edita: Instituto GeoGebra de Madrid, Cátedra Miguel de Guzmán,
Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Título: Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del GeoGebra

Formato: CD-ROM

Idioma: Castellano

Año de edición: 2011

ISBN: 978-84-694-6877-7

Web: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/modelizaciones/>



2. Introducción

El CD-ROM “Modelizaciones Dinámicas en Matemáticas. Usos del Geogebra” es un material elaborado por el Instituto GeoGebra de Madrid. Dicho Instituto fue creado el 6 de Mayo de 2010, constituido conjuntamente entre la Cátedra Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid, y el Centro Regional de Innovación “Las Acacias” de Formación de la red de formación de docentes en servicio de la Comunidad de Madrid. (CRIF).

Inés Mª Gómez Chacón, editora y organizadora del CD, es profesora de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y directora del Instituto GeoGebra de Madrid.

Su objetivo principal es proporcionar a los profesores de Matemáticas de Secundaria una herramienta que puedan utilizar en el aula con sus alumnos, y que acerque las matemáticas a la realidad a través de modelizaciones matemáticas de situaciones reales, como la naturaleza, el arte o el deporte. Además, permite utilizar las nuevas tecnologías y familiarizar a los alumnos

con el software GeoGebra. Para alcanzar dichos objetivos el CD proporciona once proyectos diferentes.

Por otro lado, también incluye material específico para el profesorado, cuya finalidad es formar a los profesores en enseñar utilizando las nuevas tecnologías.

3. Contenidos del CD

El CD empieza con una introducción en la que se detallan los objetivos del trabajo. Objetivos tanto para los profesores que utilizarán el CD, como para los estudiantes con los que lo utilicen.

A continuación se detallan los contenidos matemáticos que pueden trabajarse en los diferentes proyectos. Los contenidos principales son la geometría y la trigonometría, aunque también hay proyectos de estadística, de introducción al análisis, e incluso de ecuaciones diferenciales.

Se incluyen también dos artículos que explican el marco teórico del CD, y que suponen una buena referencia teórica para los profesores que utilicen estos proyectos con sus alumnos.

“Modelización matemática en modelos tecnológicos”. Inés M^a Gómez Chacón

“Modelización, tecnología y contenido matemático. Análisis de proyectos”. Laura Elena Mateos Pérez, María José Lara Puente e Inés M^a Gómez Chacón.

Para terminar, se exponen los once proyectos de modelización para trabajar en el aula. Dichos proyectos están divididos en tres bloques, cada uno con distintos objetivos, y ordenados según su dificultad. Todos ellos empiezan con una introducción teórica, para después plantear distintos ejercicios y problemas que se resuelven utilizando Geogebra.

- GeoGebra, una nueva herramienta: Son cuatro proyectos que utilizan el software GeoGebra, a nivel instrumental y procedimental.
 1. Mosaicos y construcciones: polígonos en la naturaleza y el arte
 2. Mapas y polígonos regulares
 3. Cuevas
 4. Teoría de grafos

- GeoGebra un instrumento para la construcción dinámica: Son tres proyectos en los que se introduce la modelización a un nivel básico. Además, se introduce el concepto de construcción matemática con GeoGebra.

5. Fractales

6. Matemáticas y bicicleta

7. Geometría en tu celosía

- GeoGebra en la modelización matemática-tecnológica de la realidad: Los cuatro últimos proyectos tienen por objeto principal la de la realidad mediante el uso de la tecnología del GeoGebra a un nivel más avanzado que los anteriores.

8. Pensamientos matemáticos

9. El mundo de los rosetones

10. Modelización de la diversidad biológica

11. Curvas de persecución

La presentación de los proyectos resulta muy atractiva para los alumnos, pues tratan temas que a ellos les resultan muy cercanos. Además, al contar con una introducción teórica, también les resultan asequibles. Son una primera aproximación a la modelización matemática, que da ideas a los profesores de Secundaria y marca un camino que va a ser muy interesante seguir, creando nuestros propios proyectos según las necesidades de nuestros alumnos. Estos proyectos nos proporcionan un punto de partida para intentar mejorar nuestra forma de explicar Matemáticas.

Los profesores de Matemáticas nos planteamos cada día nuevas formas para intentar motivar a nuestros alumnos a aprender la asignatura de una forma dinámica y a implicarse en su propio proceso de aprendizaje. La modelización nos permite vincular los conocimientos abstractos que los alumnos han acumulado en Matemáticas, con situaciones de la vida real, resultándoles así mucho más interesantes. Los materiales del CD nos permiten unir esta modelización con el uso de las nuevas tecnologías, y nos ayudan así a aproximarnos a nuestro objetivo principal: acercar las matemáticas a la realidad para acercar a nuestros alumnos a las matemáticas.

Sobre la autora:

Nombre: Isabel Álvarez García-Mon

Correo Electrónico: isabel.alvarez.mon@gmail.com

Institución: Profesora de Matemáticas de Educación Secundaria en el instituto IES Clara Campoamor, Móstoles.

Entrevista a Juan Tarrés Freixenet, Profesor Titular de la Universidad Complutense de Madrid

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

En este artículo presentamos una entrevista a Juan Tarrés Freixenet, para repasar su trayectoria profesional y vital con motivo de su jubilación.

Palabras Clave: Teoría de la dimensión, historia de las matemáticas.

1. Entrevista

- Juan, tus inicios profesionales fueron en institutos de enseñanza media. ¿Cómo recuerdas aquellos años? ¿Cuáles fueron tus primeros institutos y qué cargos tuviste en ellos?

En realidad, mis comienzos fueron en la Universidad. El primer año después de terminar mis estudios impartí clases en diversos centros universitarios como profesor ayudante en la Facultad de Ciencias de la UCM y en la Escuela de Ingenieros de Montes, de la Universidad Politécnica de Madrid, y también como profesor encargado de curso en la Escuela de Arquitectos Técnicos de Madrid. Fue al final de ese curso 1967-68 cuando me presenté a las oposiciones de Agregado de instituto y tuve la suerte de conseguir una plaza en Madrid; esto me permitió compaginar el trabajo en el instituto con el de la Facultad, como profesor adjunto interino.



Juan Tarrés Freixenet

Mi primer instituto, del que guardo muy buen recuerdo, fue en lo que entonces se llamaba una Sección Delegada, adscrita al Instituto Beatriz Galindo. Estaba en el barrio de Canillas. A los dos años se convirtió en instituto de pleno derecho; en la actualidad tiene el nombre de "Conde de Orgaz". Fui nombrado Jefe de Estudios y estuve en el cargo un año porque fue en ese curso cuando gané la oposición de Catedrático de Instituto y el destino fue el que entonces se llamaba instituto femenino de Burgos (el nombre oficial es IES Cardenal López de Mendoza). Estuve un año en él, sin vínculos con la Universidad. Era el curso 1971-72.

Recuerdo aquellos primeros años con mucho cariño; era feliz con mi trabajo, era joven y estaba lleno de ilusión y entusiasmo. Llegué a Burgos cuando comenzaba a impartirse el COU; todo era nuevo y tuve la suerte de que me correspondiera un grupo realmente maravilloso, el mejor que haya tenido jamás.

- *¿Crees que los alumnos iban mejor preparados a la Universidad que los que salen actualmente del Instituto? ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre los alumnos de antes y los de ahora?*

Es difícil contestar a esto. El hecho de que el número de personas que llega a la Universidad haya crecido tanto permite ver mejor los contrastes, pero seguramente, los porcentajes de alumnos con verdadero interés sigan siendo más o menos los mismos, aunque no tengo datos concretos al respecto. Lo que sí es cierto es que en el sistema educativo actual los contenidos han disminuido, pero la información de la que disponen nuestros estudiantes es infinitamente mayor que la de mi época, tanto de alumno como en los primeros años de mi carrera profesional.

Lo que sí pienso es que un buen profesor debe adaptarse a la realidad y trabajar con sus estudiantes de acuerdo con sus posibilidades. Si un chico o una chica llega a la Universidad sin saber determinadas cosas consideradas esenciales que hace años se sabían, alguien se las va a tener que explicar. No vale desanimar a estas personas dando por sabidas cosas que desconocen.

Por otra parte, la sociedad es cambiante. Hace años, ir a la Universidad era un privilegio. Hoy, por fortuna, se considera algo normal y esto hace que los estímulos sean muy diferentes, pero diferencias importantes en los alumnos que llegan a la Universidad ahora respecto de los de hace un tiempo, en mi opinión, son muchas menos de lo que se pregona.

- *Según tenemos entendido, tu transición a la Universidad se produjo en Burgos. ¿Qué te llevó hasta allí? ¿Qué diferencias encontraste entre la enseñanza universitaria y las enseñanzas medias?*

Ya he dicho antes que estuve compaginando mis tareas como profesor de Bachillerato con la Universidad. No hubo transición. Fui afortunado en el sentido de que durante el primer año de mi estancia en Burgos se creó el Colegio Universitario de esa ciudad, adscrito a la Universidad de Valladolid y alguien pensó que podía ser útil en esta institución recién creada; fue entonces cuando, después de un año, regresé a la Universidad.

¿Diferencias entre la enseñanza universitaria y las enseñanzas medias? Si las hay, claro que sí, pero tampoco en esto soy radical. En la Universidad, los contenidos son más amplios y la exigencia más dura, pero tal vez la mayor di-

ferencia sea la derivada del hecho de que los estudiantes universitarios tienen una madurez de la que carece la inmensa mayoría de los alumnos de secundaria y bachillerato. Pero claro, esto no es más que una consecuencia de la evolución natural que proporciona el paso del tiempo.

- Ya de vuelta a Madrid ingresaste en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. ¿Cuánto tiempo has estado en el Departamento de Geometría y Topología de esta Facultad? ¿De qué asignaturas te hiciste cargo en dicho Departamento?

Dejadme que diga antes que el curso 1976-77 reingresé en el instituto. Eran años difíciles y las cosas no estaban para muchas alegrías. Ese curso y el siguiente volví a compaginar las labores de profesor de instituto con las de la Universidad. Todavía hubo un año de instituto, lejos de la Universidad: el curso 1978-79, en Barcelona.

Finalmente, el curso 1979 me incorporé al Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de la UCM, lugar en el que he trabajado los últimos 32 años. Si bien mi especialidad es la Topología, también he impartido otras asignaturas del Departamento, en concreto, el Álgebra Lineal de primer curso y la Geometría afín y proyectiva, que unas veces iban juntas y otras de manera independiente, según el plan de estudios del momento. También he tenido a mi cargo las asignaturas de Historia de las Matemáticas, tanto en el primer ciclo como en el segundo. Por supuesto, he dado asignaturas y seminarios de doctorado, centrados en la teoría de la dimensión topológica, mi especialidad en el campo de la investigación. Como podéis ver, un poco de todo.

- Dirigiste el Departamento por cuatro años. ¿Cuáles fueron los hechos más relevantes en ese periodo de dirección? ¿Qué cosas te hubiera gustado hacer pero no fue posible en esos cuatro años?

Dirigir el Departamento fue algo bonito. Esto me permitió conocer más a fondo, si cabe, todos los aspectos del mismo y tratar a los compañeros en una faceta distinta de la estrictamente científica.

El cargo coincidió con los momentos en que comenzaba a hablarse de los nuevos planes de Bolonia y aquello supuso horas y horas de reuniones, que cuajaron cuando yo ya había dejado el cargo.

En esos cuatro años procuré hacer hincapié en los aspectos científicos del Departamento y en ayudar a los recién licenciados a comenzar su carrera profesional. Entre otras muchas cosas, editamos un libro de homenaje al profesor Outerelo con motivo de su jubilación.

Por suerte, nunca se llega a hacer todo lo que se quiere: hay que dejar cosas pendientes para los que llegan después. Quiero decir, eso sí, que para mí, dirigir el Departamento fue un auténtico privilegio.

- En tantos años en la Complutense habrás pasado por muchos cambios de planes, incluso has podido conocer el nuevo plan de Bolonia. ¿Cuál de estos planes educativos te gustó más? ¿Prefieres el sistema antiguo, ó el cambio que propugna Bolonia?

Ya lo creo que he pasado por planes. El cambiar de planes es una manía que permanece en el tiempo. Cuando me incorporé, el año 1979, había un plan que no me gustaba nada, especialmente el primer curso de la licenciatura. Después,

ha habido varios cambios hasta llegar a la situación actual.

Cada vez que se cambia de plan, los primeros años hay un cierto desconcierto, tanto entre el profesorado como en los alumnos; hay estudiantes que van a caballo entre los dos planes, las adaptaciones son complicadas muchas veces; en fin, problemas varios, pero al cabo de un tiempo, todo vuelve a su sitio y de una manera u otra, las cosas se normalizan; se acaba enseñando lo mismo, o cosas semejantes, sin más problemas. Lo malo es que cuando ya todo está asumido y la maquinaria funciona sin chirriar más de lo debido, aparece alguien dispuesto a volver a cambiarlo todo... y vuelta a empezar.

Supongo que con el plan Bolonia acabará pasando más o menos lo mismo. De todas formas, nuestros estudiantes acaban sus estudios con una preparación más que aceptable. En este sentido soy optimista.

- *A lo largo de estos años en la Complutense, ¿has seguido teniendo vinculación con la enseñanza media? Si es así, dinos de qué manera.*

En los centros de enseñanza media en los que he estado he dejado amigos; éste es un buen punto de encuentro, no sólo con las personas, sino también con las instituciones. Ya de una manera más oficial, por decirlo de alguna forma, si he tenido contacto con ese nivel educativo. Durante bastantes años he sido coordinador de Matemáticas para las pruebas de Selectividad. Esto me ha obligado a mantener un contacto con profesores y centros que, sin lugar a dudas, me ha enriquecido mucho. Pienso que hay un largo camino de aproximación entre las enseñanzas medias y la Universidad que convendría recorrer desde ambas partes.

- *Háblanos ahora de tus actividades de investigación. Te dirigió la tesis Joaquín Arregui. ¿Cuál fue el tema de tu tesis?. ¿Qué dificultades encontraste en su realización?*

Sí, Joaquín Arregui fue mi director de tesis, pero fue algo más. Ha sido mi maestro y mi amigo. A él le debo (y a otras personas, por supuesto) haber sido profesor de la Universidad.

El tema de tesis fue sobre topología dinámica. Su título es Topología Propia de Sistemas Semidinámicos. En aquellos años (la presenté en 1976) las cosas eran más complicadas que ahora y costaba mucho realizar un trabajo de este tipo. Si a esto añadimos que entonces estaba en Burgos y tenía que viajar constantemente a Madrid es fácil adivinar las dificultades que se presentaron. Fue un esfuerzo bastante grande, que doy por muy bien empleado.

- *¿Cómo fue tu actividad de investigación posdoctoral? ¿Dirigiste tesis, estuviste en proyectos de investigación...?*

Después de la tesis, seguí con el tema de los Sistemas Dinámicos. Publiqué trabajos en este campo y fue entonces cuando en el plazo de dos años tuve que cambiar de destino a dos ciudades diferentes: Barcelona primero y después a Madrid. Con estas circunstancias era difícil investigar y pasé un tiempo sin publicar y un poco a la deriva hasta que encontré un buen refugio en la Teoría de la Dimensión, que es el tema que ha abarcado la mayor parte de mis investigaciones y publicaciones. Ya más adelante, a finales de los años 80, comencé a interesarme por la Historia de las Matemáticas y en este campo también he pu-

blicado e impartido bastantes conferencias, tanto históricas como divulgativas.

Dirigí cinco tesis, todas en el ámbito de la Topología y la Teoría de la Dimensión. Fueron cinco experiencias muy gratificantes y el fruto de ello ha sido que de ahí salieron cinco amigos y bastantes publicaciones.

También he formado parte de varios proyectos de investigación, algunos en colaboración con profesores de la Universidad Politécnica de Valencia, y otros en la propia Universidad Complutense.

En tantos años, hay tiempo para muchas cosas.

- *¿Crees que la investigación hoy en día se está llevando por caminos adecuados, ó prefieres la que se hacía cuando tú publicabas?*

Como en todas las cosas, la investigación actual tiene cosas muy buenas y otras, simplemente buenas. El hecho de investigar es suficiente para que merezca el respeto de todos. Si los resultados serán mejores o peores es algo que solamente el tiempo decidirá.

Pero, eso sí, la investigación actual, considerada globalmente, es mucho mejor que la de mis tiempos. La gente está muy preparada y los medios son infinitamente mejores.

Antes se hacían cosas muy buenas, igual que ahora, pero el promedio de la producción científica actual es superior hoy en día y estoy seguro de que va a seguir creciendo.

Además de por la Topología, siempre se ha destacado tu interés por la Historia de las Matemáticas, de la que se te considera un gran divulgador. ¿Cuáles han sido tus acciones en este sentido? ¿Ves relación entre tu labor pedagógica de divulgación y tus investigaciones como topólogo?

Algo he dicho ya sobre la Historia de las Matemáticas. Llegué a ella de una manera un poco casual y confieso que el flechazo fue rápido y el enamoramiento sigue vigente. No tardé en descubrir que si se conocen las motivaciones, dudas y circunstancias que han dado forma a una determinada teoría matemática se llega a entender y profundizar en ella y nos podemos convencer de que aquello tiene un sentido que va más allá del mero formalismo de una teoría acabada. El conocimiento de la Historia me ha ayudado mucho tanto como investigador como profesor. Es un buen instrumento pedagógico y, al menos para mí, una ayuda inestimable en la clase.

Ya dije que he publicado varios artículos en este campo y, sobre todo, he dado muchas conferencias. Quiero destacar por encima de todo, la labor que ha desarrollado el Seminario de Historia de las Matemáticas de mi Facultad, impulsado por mi buen amigo Mariano Martínez. Ha sido para mí un marco excelente para aprender tantas y tantas cosas y para explicar a los demás las cosas que iba aprendiendo.

Coméntanos por último tus planes de futuro. ¿Vas a seguir manteniendo algún contacto con la Universidad una vez jubilado?

Sí, el tiempo es inexorable, y ha llegado el momento de apartarme a un lado del camino. La Universidad la llevo en mi corazón y esto ya me garantiza que nunca voy a perder el contacto con la institución y las personas que la

forman. Seguiré asistiendo a las actividades que se organicen y, estaré siempre dispuesto a explicar mis experiencias y difundir los pocos conocimientos que poseo.

En la Universidad está una parte muy importante de mi vida; allí he cumplido muchas de mis ilusiones y siempre la tendré cerca. La vida me ha permitido trabajar en algo que me ha apasionado y esto se lo debo a muchas personas, por supuesto, pero también a que existía una cosa que se llama Universidad.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E Pensamient Matemátic



EXPERIENCIAS DOCENTES

IDEAS Y VISUALIZACIONES MATEMÁTICAS

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

HISTORIA DEL EXPERIMENTO BAROMÉTRICO

MARÍA CAPDEVILLA D'ORIOLA, PIONERA DE LA
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA GEODESIA

EL SÓLIDO HIPERBÓLICO AGUDO

CUENTOS MATEMÁTICOS

MI MEDIA CONJETURA (BASADO EN UN HECHO
IRREAL)

Y ADEMÁS:

JUEGOS MATEMÁTICOS

INVESTIGACIÓN

A REVENUE EQUIVALENCE RESULT IN A DUOPOLISTIC
ELECTRICITY MARKET WHERE ONE OF THE
SUPPLIERS HAS TWO PRODUCTION UNITS

TEOREMA DE HALL Y UN ALGORITMO PARA
DETECTAR SISTEMAS DE REPRESENTANTES
DISTINTOS

MÍNIMOS CUADRADOS GENERALIZADOS PARA
FUNCIONES VECTORIALES EN LA GEOFÍSICA
ESPACIAL

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELING IN
MARITIME GEOMECHANICS

CRÍTICAS

LA PUERTA DE LOS TRES CERROJOS (UNA AVENTURA
CUÁNTICA)

MODELIZACIONES DINÁMICAS EN MATEMÁTICAS. USOS
DEL GEOGEBRA

ENTREVISTA A:



JUAN TARRÉS FREIXENET,
PROFESOR TITULAR DE LA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE
MADRID