Tema 5.3

Momento de inercia

Elvira Martínez Ramírez
Departamento de Ingeniería Agroforestal

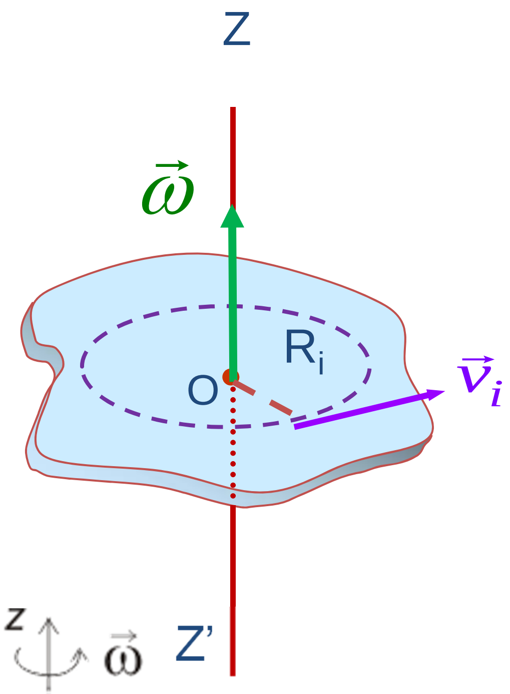
E.T.S.I.A.A.B

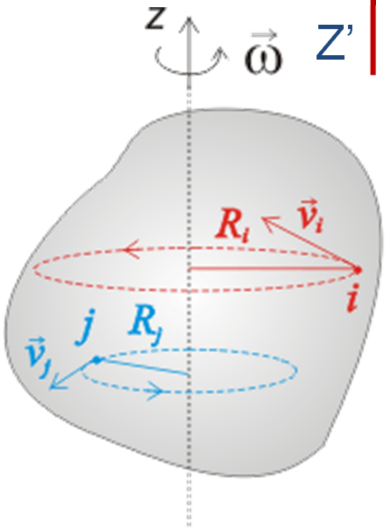
Índice

1. Concepto de momento de inercia.
2. Momento de inercia de un sistema discreto respecto a puntos, ejes y planos.
3. Momento de inercia de un sistema continuo respecto a puntos, ejes y planos.
4. Propiedades de los momentos de inercia de un sistema.
5. Propiedades de los momentos e inercia de un sistema plano.
6. Teoremas de Steiner.

7. Cálculo de algunos momentos de inercia.

1. Concepto de momento de inercia



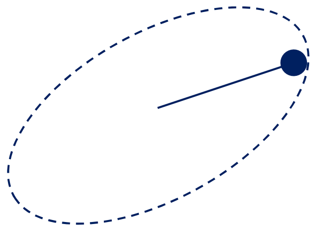


El concepto de momento de inercia respecto a un eje, surge al considerar un sólido en rotación respecto a un eje.

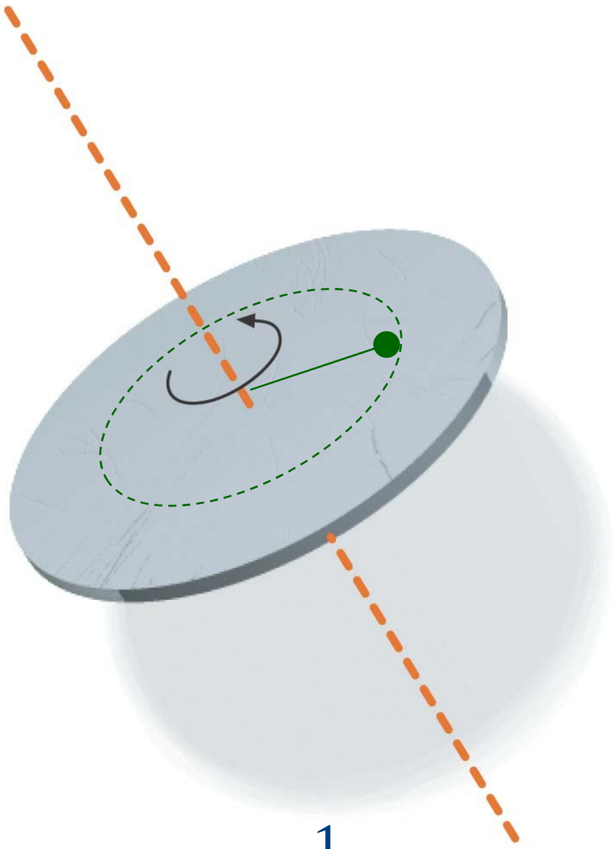
El momento de inercia respecto a un eje, es igual a la suma de cada masa (m_i) por el cuadrado de su distancia (r_i) al eje de rotación.

$$I_{eje} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

1. Concepto de momento de inercia



$$v_i = \omega r_i$$



$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I_{eje} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

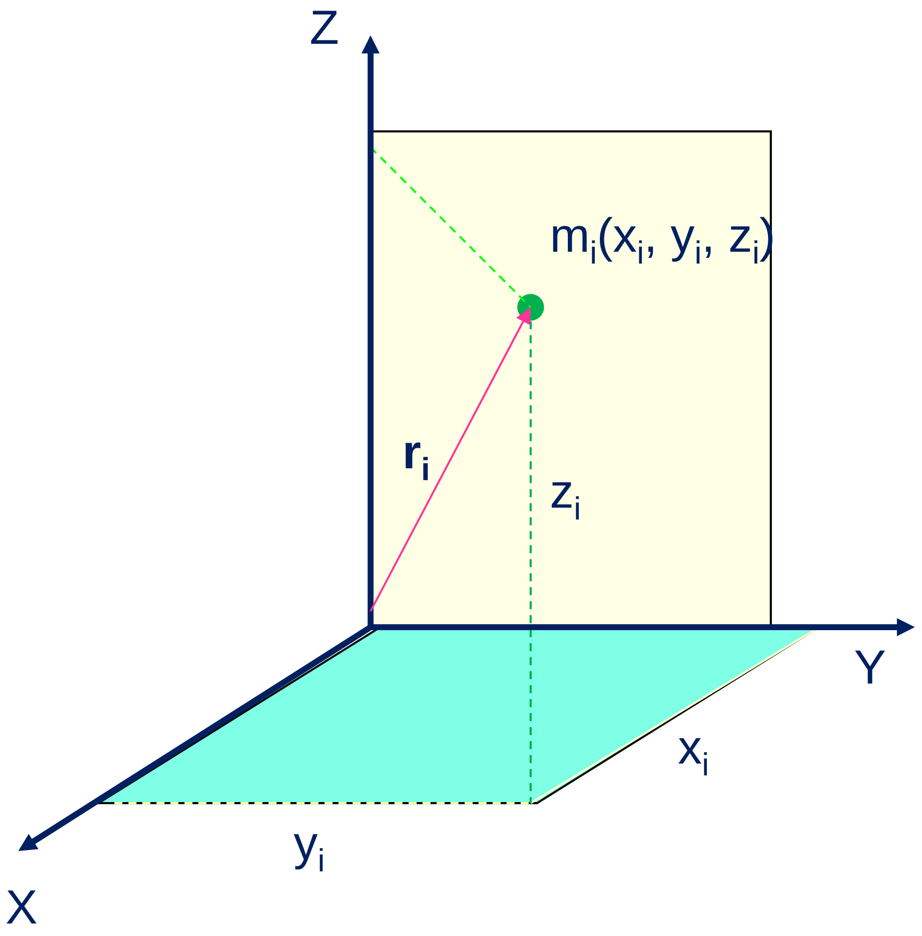
2. Momento de inercia sistema discreto

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{YOX} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

$$I_{YOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

$$I_{XOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

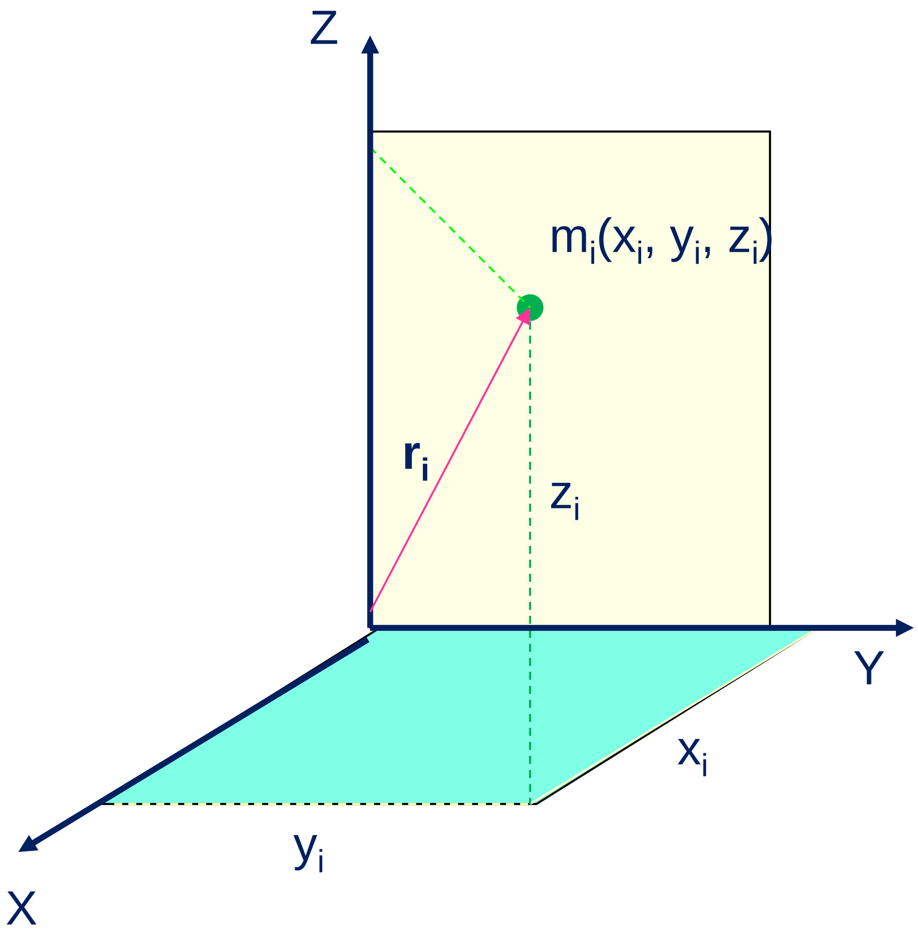


2. Momento de inercia sistema discreto

$$I_{OX} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{OY} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{OZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



2. Momento de inercia sistema continuo

$$I_{OX} = \int (y^2 + z^2)dm \qquad I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

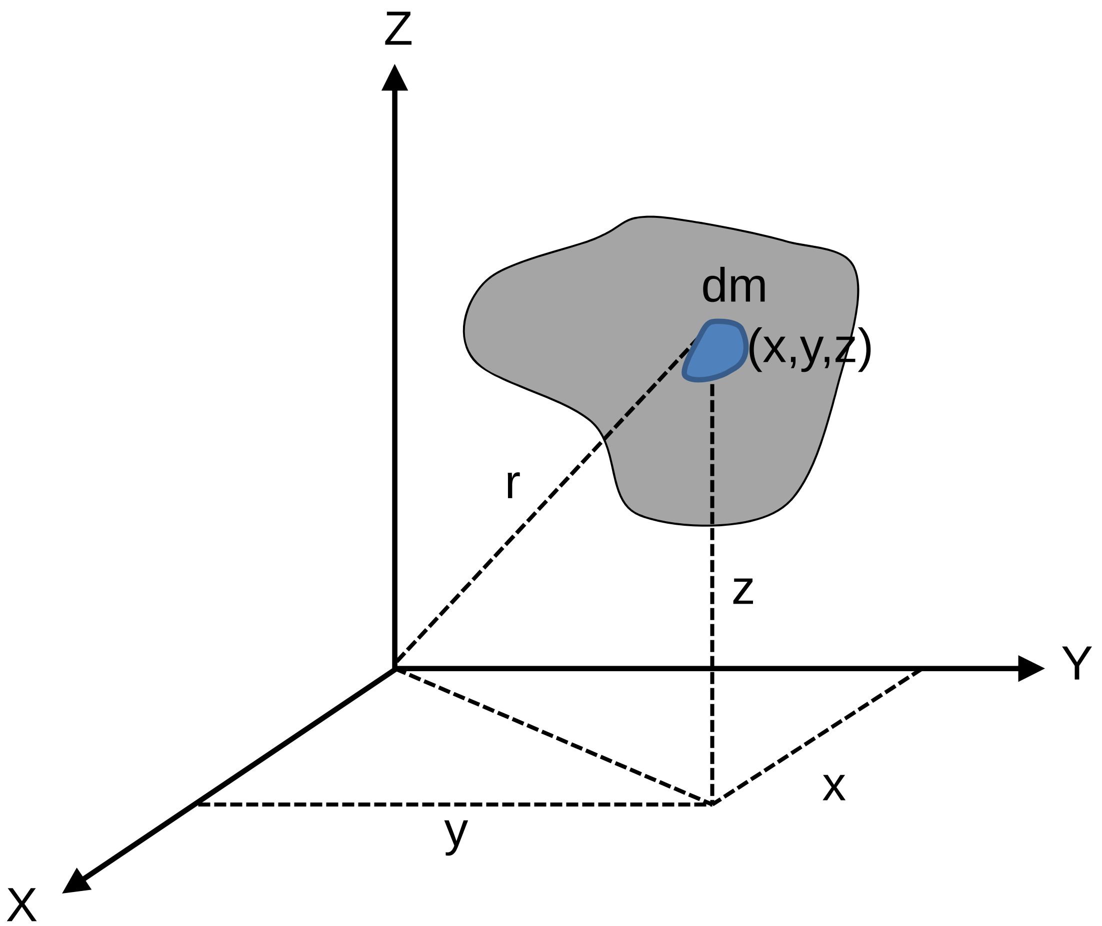
$$I_{OY} = \int (x^2 + z^2)dm$$

$$I_{OZ} = \int (y^2 + x^2)dm$$

$$I_{YOX} = \int z^2 dm$$

$$I_{YOZ} = \int x^2 dm$$

$$I_{XOZ} = \int y^2 dm$$



4. Propiedades

El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto.

$$I_O = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un punto es la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto.

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ})$$

4. Propiedades

El momento de inercia respecto a un punto es la suma del momento de inercia respecto a un eje y el momento de inercia respecto a un plan perpendicular a él que se corten en dicho punto.

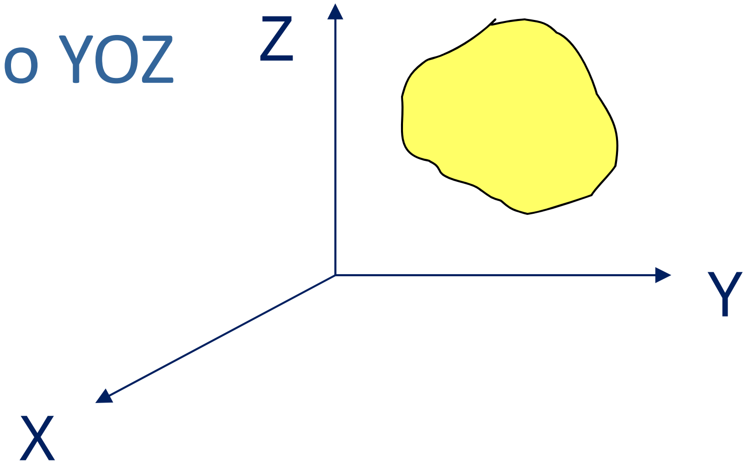
$$I_O = I_{OZ} + I_{XOY} = I_{OY} + I_{XOZ} = I_{OX} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a los dos planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho eje.

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ} \qquad I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ} \qquad I_{OZ} = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

5. Propiedades de figuras planas

Si la figura está en el plano YOZ



$$\boxed{I_{YOZ} = 0}$$

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ}$$

$$I_{OY} = I_{XOY}$$

$$I_{OZ} = I_{XOZ}$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}) = I_{OY} + I_{OZ}$$

$$I_O = I_{YOZ} + I_{OX} = I_{OX}$$

$$I_O = I_{XOY} + I_{OZ}$$

$$I_O = I_{XOZ} + I_{OY}$$

5. Propiedades de figuras planas

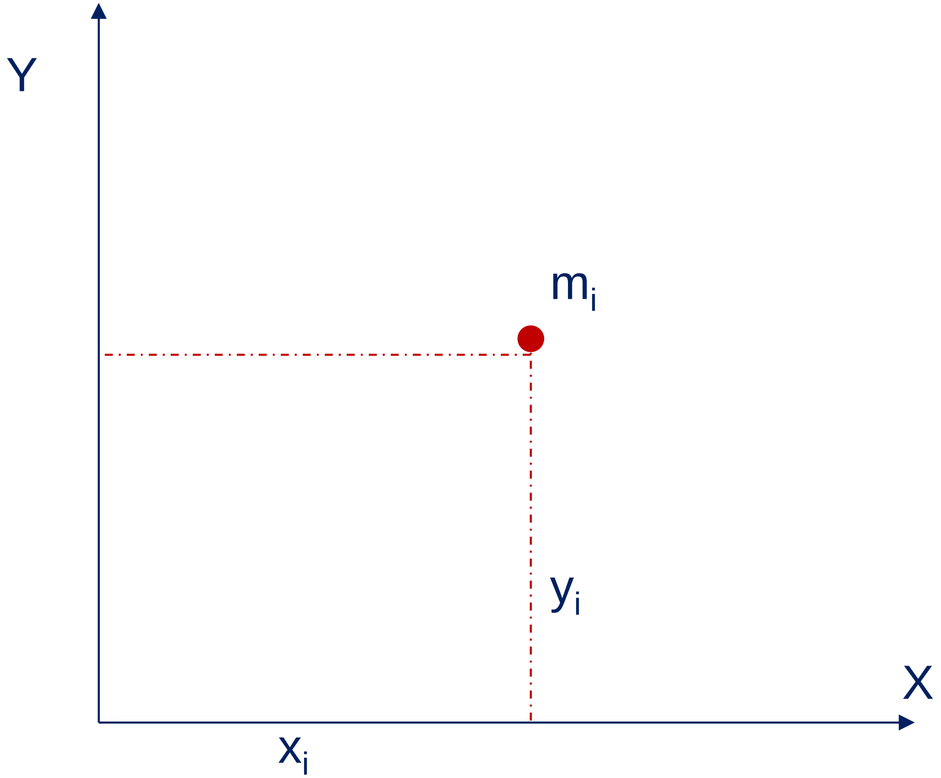
En una figura plana, el momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en el plano, que se cortan en dicho punto.

En una figura plana, el momento de inercia respecto a un punto es igual al momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la figura, que pase por dicho punto.

En una figura plana, el momento de inercia respecto a un eje contenido en el plano, es igual al momento de inercia respecto a un plano perpendicular a él que le corte en dicho eje.

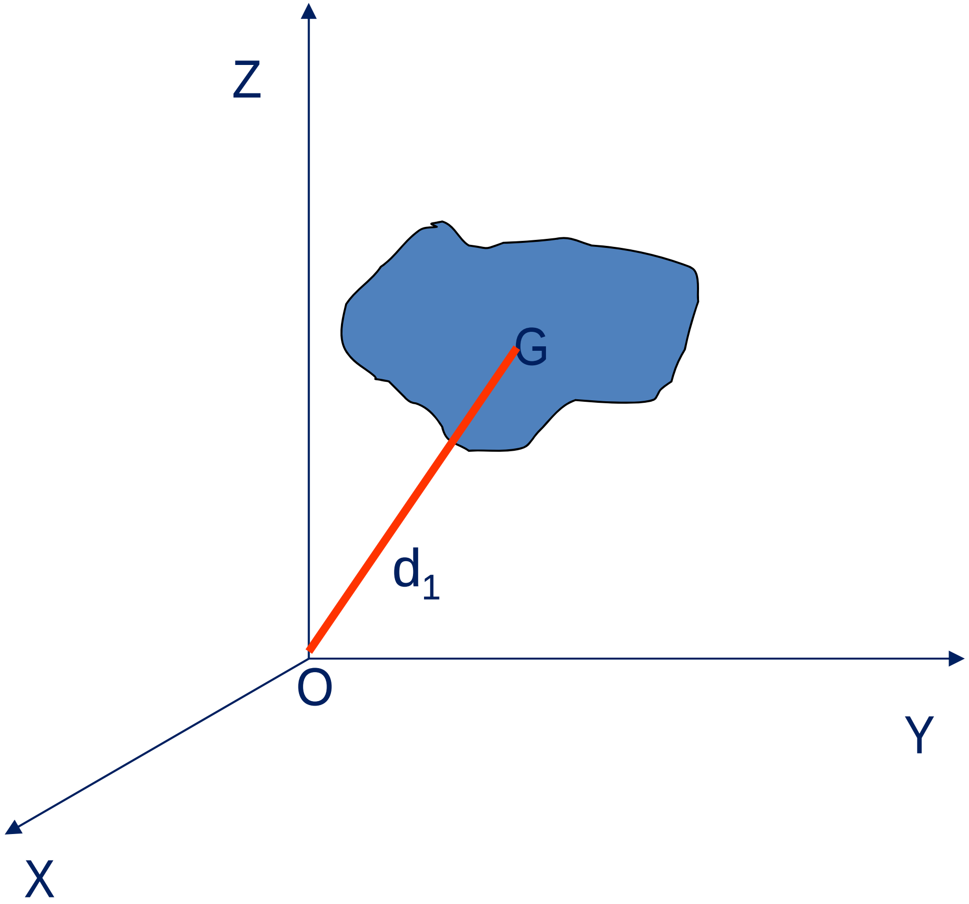
5. Propiedades de figuras planas

Respecto a las rectas OX, OY



$$P_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

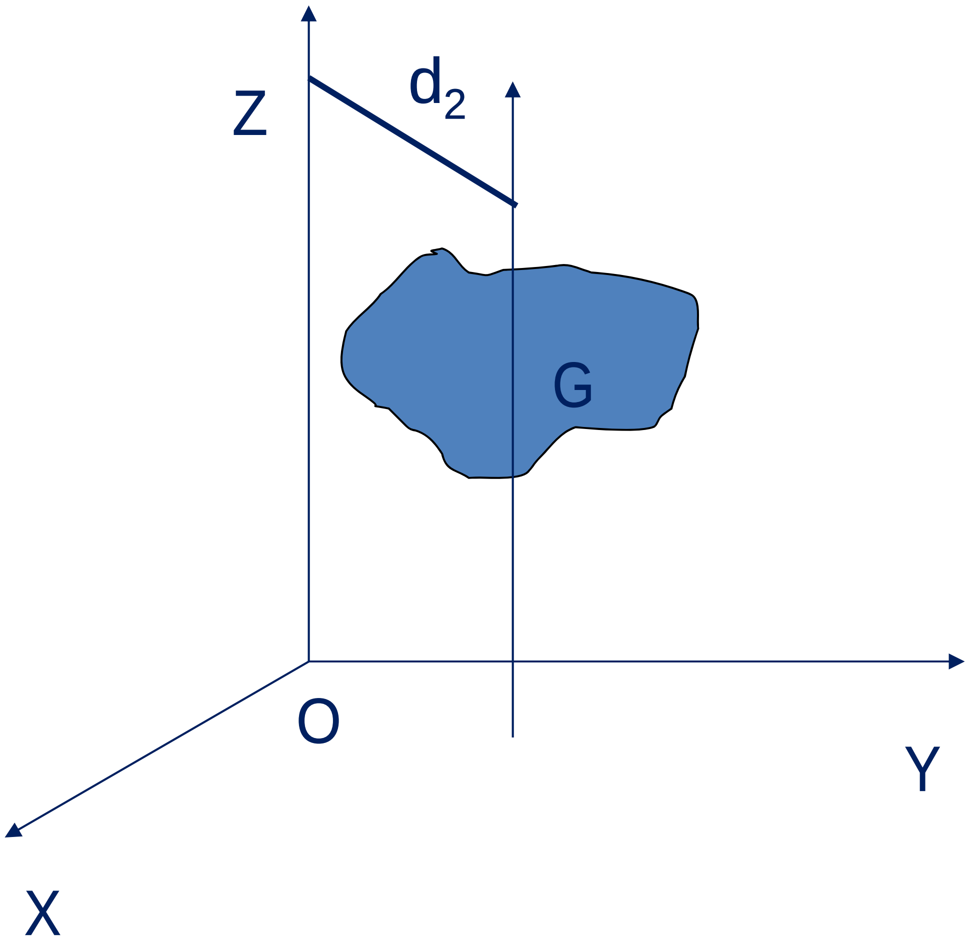
6. Teoremas de Steiner



El momento de inercia respecto a un punto O es la suma del momento de inercia respecto al centro de gravedad G y de la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los puntos G y O.

$$I_O = I_G + Md_1^2$$

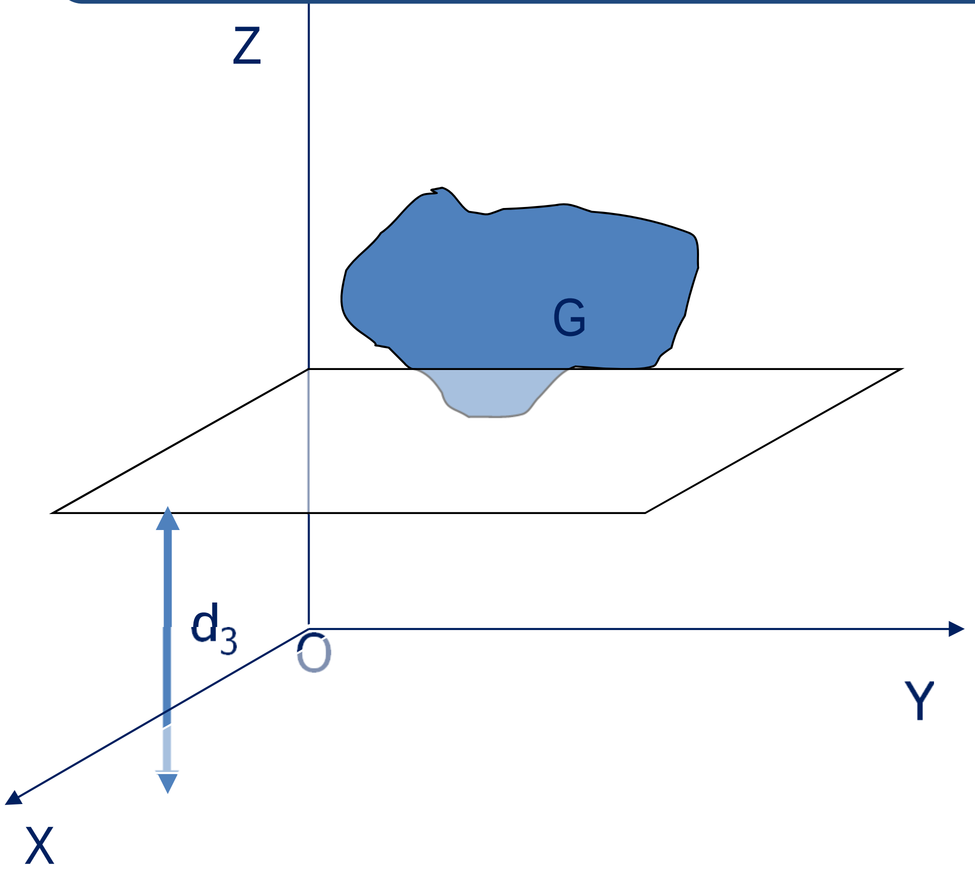
6. Teoremas de Steiner



$$I_{OZ} = I_{GZ} + Md_2^2$$

El momento de inercia respecto a un eje cualquiera (OZ) es la suma del momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de gravedad G (Eje CZ) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos ejes.

6. Teoremas de Steiner



$$I_{XOY} = I_{XGY} + Md_3^2$$

El momento de inercia respecto a un plano cualquiera (XOY) es la suma del momento de inercia respecto a un plano paralelo que pase por el centro de gravedad G (Plano XGY) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos planos.

6. Teoremas de Steiner

El momento de inercia respecto a un punto, eje o plano es igual al momento de inercia respecto a un punto, eje o plano paralelo al anterior y que pase por el centro de gravedad, mas la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa ambos puntos, ejes o planos

Momento de inercia de una varilla homogénea

$$dm = \lambda dx \qquad M = \lambda L$$

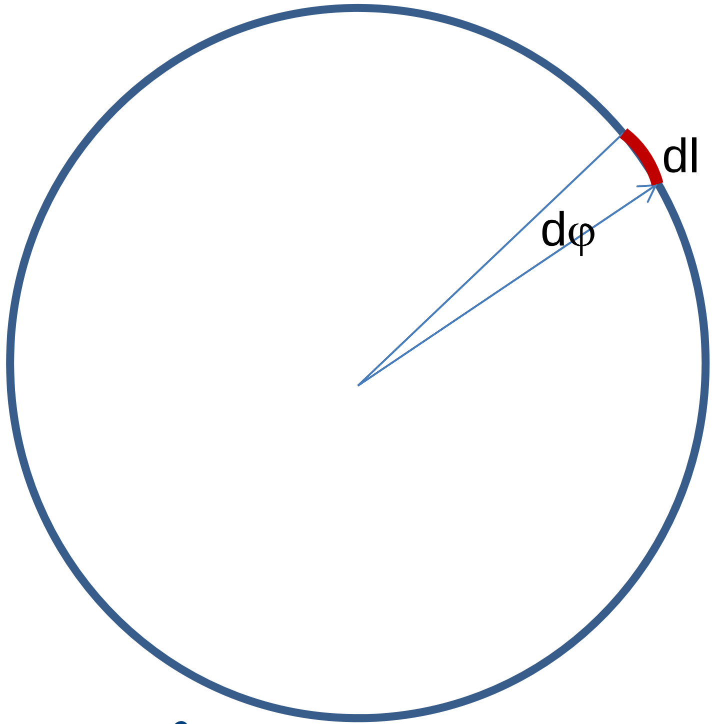
$$I_O = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \frac{L^3}{3} = (\lambda L)\frac{L^2}{3} = M\frac{L^2}{3}$$

$$I_G = I_O - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12}$$

Momento de inercia de un aro homogéneo

$$dm = \lambda dl$$

$$M = \lambda 2\pi R$$



$$I_{GZ} = I_G = \int_L R^2 dm = R^2 \int_L dm = R^2 M$$

$$I_G = I_{GX} + I_{GY} = 2I_{GX} = MR^2$$

$$I_{GX} = I_{GY} = \frac{MR^2}{2}$$

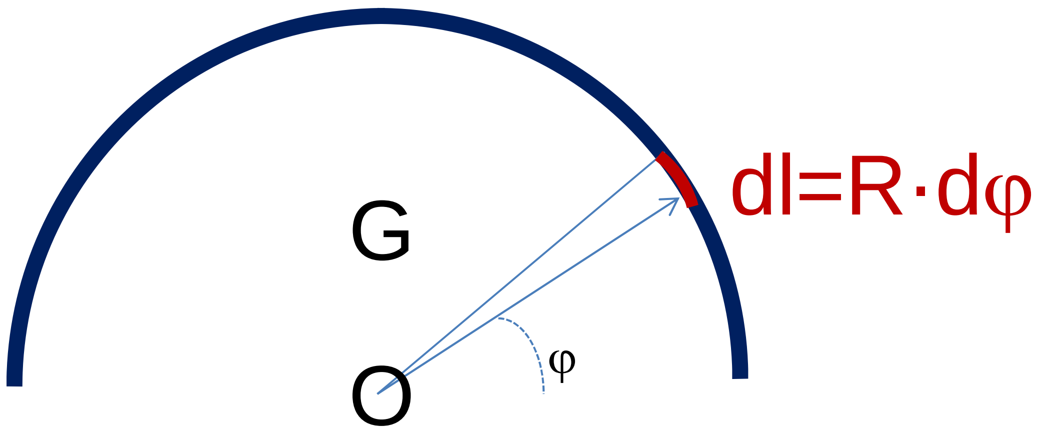
Momento de inercia de semicircunferencia homogénea

$$ds = R\,d\varphi$$

$$dm = \lambda\, ds$$

$$M = \lambda \pi R$$

$$d_{O-G} = \frac{R}{2\pi}$$



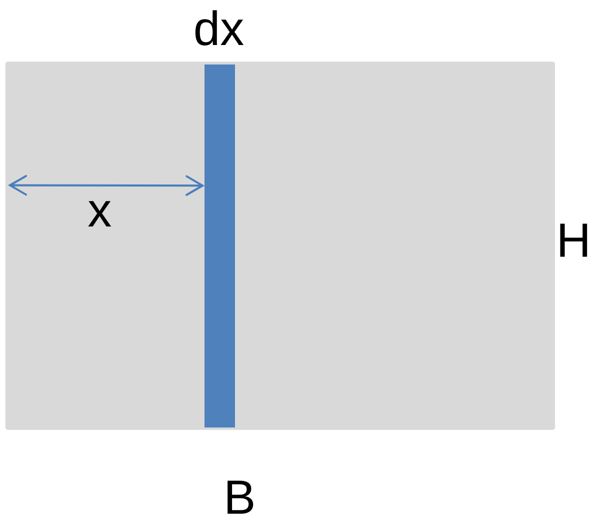
$$I_O = \int_L r^2 dm = \int_L R^2 \lambda\, dl = R^2 \lambda \int_L dl = R^2 \lambda L = R^2 M$$

$$I_G = I_O - M\left(\frac{R}{2\pi}\right)^2 = MR^2\left(\frac{4\pi^2 - 1}{4\pi^2}\right)$$

Momento de inercia de rectángulo homogéneo

$$dm = \sigma H dx$$

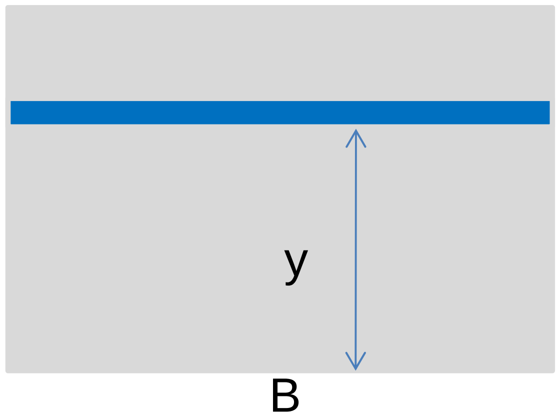
$$I_{OY} = \iint x^2 dm = \int_0^B x^2 \sigma H dx = B\sigma \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^B = \frac{H\sigma B^3}{3} = \frac{\sigma}{3} AH^2 = \frac{MB^2}{3}$$



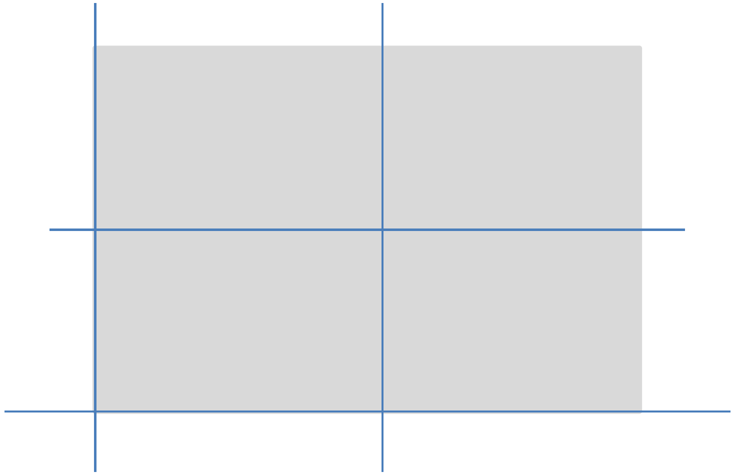
$$M = \sigma H B$$

$$dm = \sigma B dy$$

$$I_{OX} = \iint y^2 dm = \int_0^H y^2 \sigma B dy = B\sigma \left.\frac{y^3}{3}\right]_0^H = \frac{B\sigma H^3}{3} = \frac{\sigma}{3} AH^2 = \frac{MH^2}{3}$$



Momento de inercia de rectángulo homogéneo



$$I_{OX} = \frac{MH^2}{3} \qquad I_{OY} = \frac{MB^2}{3}$$

$$I_O = I_{OX} + I_{OY} = \frac{1}{3}MH^2 + \frac{1}{3}MB^2$$

$$I_{GX} = I_{OX} - M\frac{H^2}{4} = \frac{1}{3}MH^2 - \frac{1}{4}MH^2 = \frac{1}{12}MH^2$$

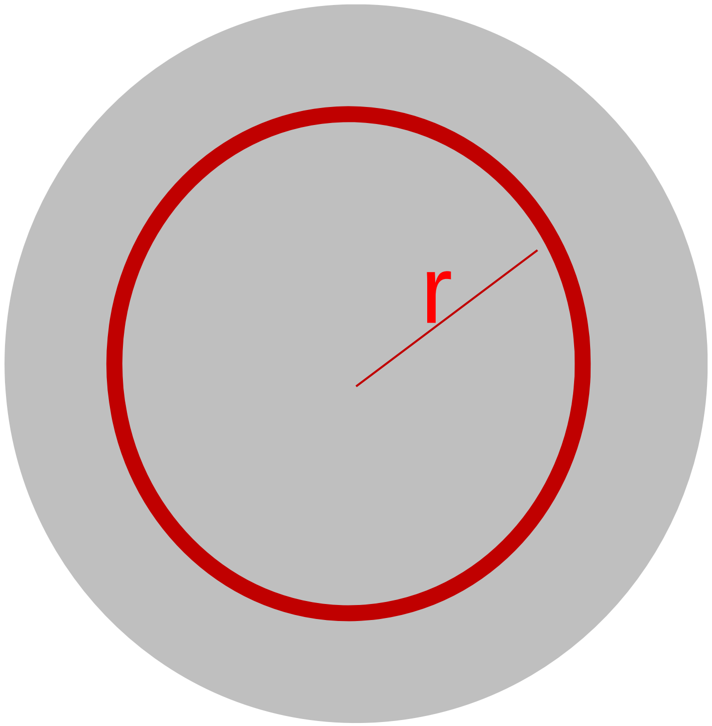
$$I_{GY} = I_{OY} - M\frac{B^2}{4} = \frac{1}{3}MB^2 - \frac{1}{4}MB^2 = \frac{1}{12}MB^2$$

$$I_G = I_{GX} + I_{GY} = \frac{1}{12}M(H^2 + B^2)$$

Momento de inercia de disco homogéneo

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$

$$M = \sigma \pi R^2$$



$$I_G = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4} = \left(\sigma \pi R^2\right) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} = I_{GZ}$$

$$I_G = I_{GX} + I_{GY} = 2I_{GX} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_{GX} = I_{GY} = \frac{MR^2}{4}$$

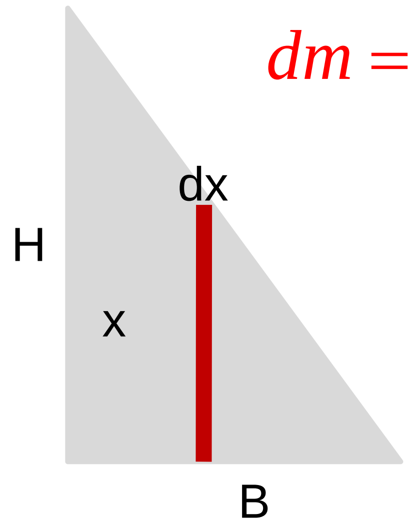
Momento de inercia de triángulo homogéneo

$$\frac{H}{B} = \frac{y}{B-x} \qquad \frac{H}{B}(B-x) = y$$

$$I_{OY} = \iint_A x^2 dm = \iint_A x^2 \sigma y dx = \sigma \int_0^B x^2 \frac{H}{B}(B-x)dx =$$

$$= \sigma \frac{H}{B}\int_0^B (Bx^2 - x^3)dx = \sigma \frac{H}{B}\left[\frac{B\cdot B^2}{3} - \frac{B^4}{4}\right] = \sigma \frac{HB^3}{12} = \frac{1}{6}MB^2$$

$$dm = \sigma y dx$$

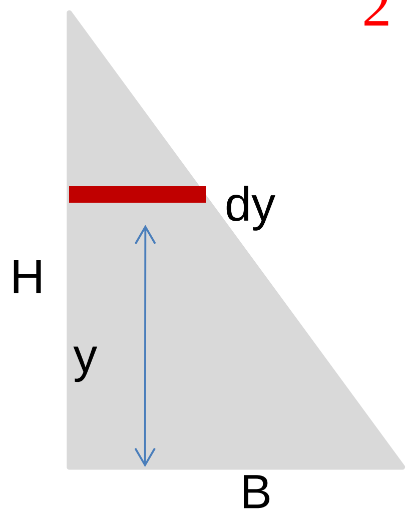


$$M = \frac{1}{2}\sigma HB$$

$$\frac{B}{H} = \frac{x}{H-y} \qquad \frac{B}{H}(H-y) = x$$

$$I_{OX} = \iint_A y^2 dm = \iint_A y^2 \sigma x dy = \sigma \int_0^H y^2 \frac{B}{H}(H-y)dy =$$

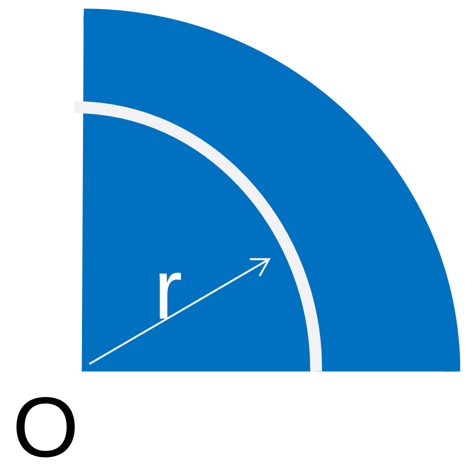
$$= \sigma \frac{B}{H}\int_0^H (Hy^2 - y^3)dy = \sigma \frac{B}{H}\left[\frac{H\cdot H^2}{3} - \frac{H^4}{4}\right] = \sigma \frac{BH^3}{12} = \frac{1}{6}MH^2$$



Momento de inercia de cuarto de círculo homogéneo

$$dm = \sigma dA = \sigma \pi r dr$$

$$M = \sigma \frac{\pi R^2}{4}$$



$$I_O = \iint_A r^2 dm = \iint_A r^2 \sigma \pi r dr = \sigma\pi \int_0^R r^3 dr = \sigma\pi \frac{R^4}{4} = \left(\frac{\sigma \pi R^2}{2} \right) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

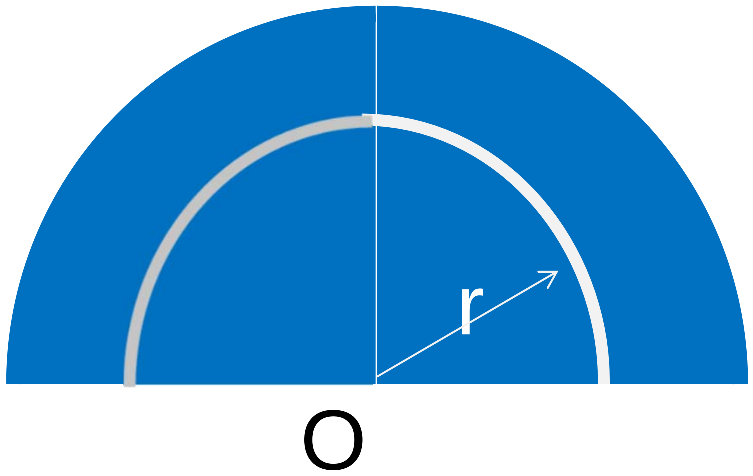
$$I_O = I_{OX} + I_{OY} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{OX} = I_{OY} = \frac{MR^2}{4}$$

Momento de inercia de semicírculo homogéneo

$$dm = \sigma\pi r dr$$

$$M = \sigma\frac{\pi R^2}{2}$$



$$d_{G-O} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_O = \iint r^2 dm = \int_o^R r^2\sigma\pi r dr = \sigma\pi\frac{R^4}{4} = M\frac{R^2}{2}$$

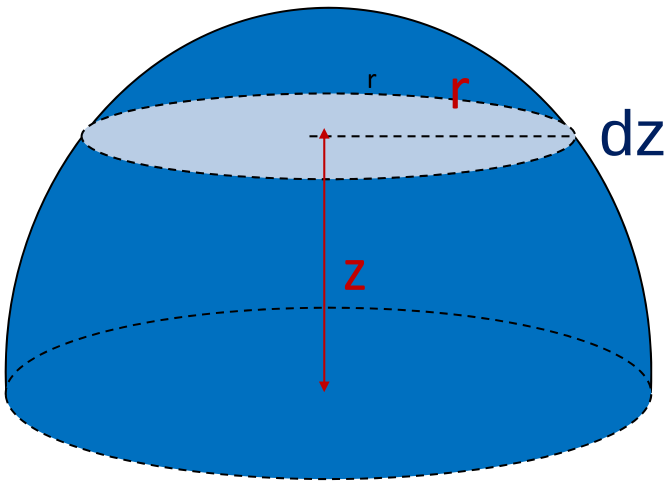
$$I_G = I_O - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = M\frac{R^2}{2} - \frac{16MR^2}{9\pi^2} = MR^2\left(\frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2}\right)$$

Momento de inercia de semiesfera homogénea

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

$$M = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$$

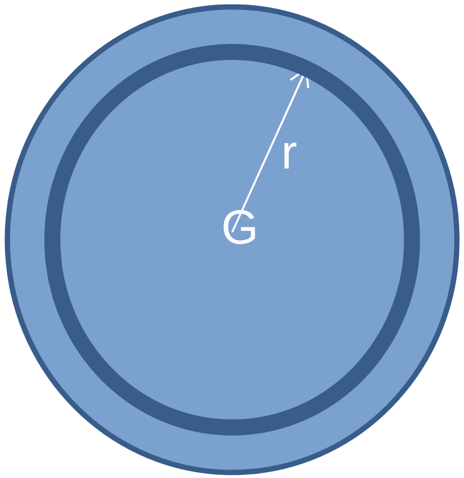
$$r^2 + z^2 = R^2$$



$$I_{XOY} = \iiint_V z^2 \rho \pi r^2 dz = \rho \pi \int_0^R z^2 (R^2 - z^2) dz = \rho \pi \left[\frac{R^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \rho \pi \frac{2R^5}{15} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \frac{1}{5} = \frac{1}{5} M R^2$$

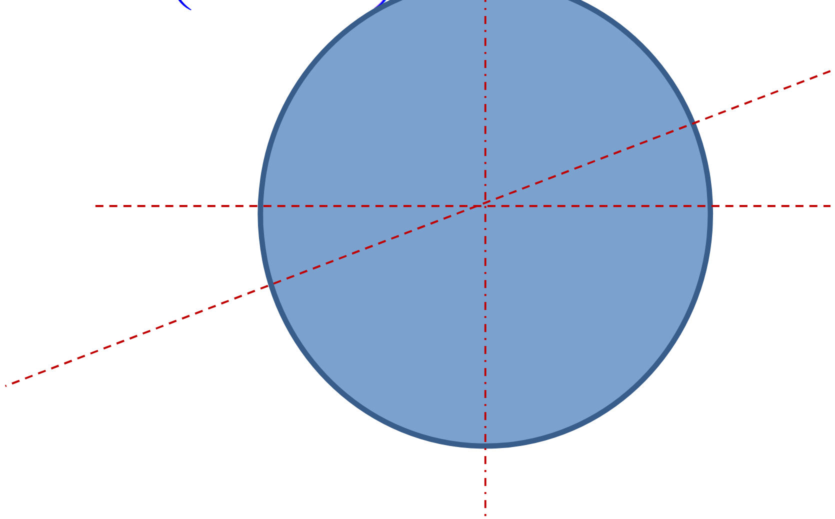
Momento de inercia de esfera homogénea

$$M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$$



$$I_G = \frac{1}{2}\left(I_{GX} + I_{GY} + I_{GZ}\right) = \frac{3}{2} I_{diametro}$$

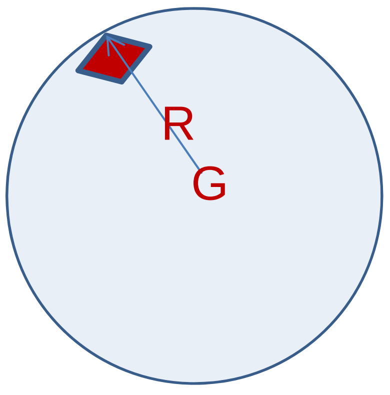
$$I_G = \iiint_V r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \rho 4\pi \frac{R^5}{5}\cdot\frac{3}{3} = \left(\rho 4\pi \frac{R^3}{3}\right)\cdot\frac{3R^2}{5} = \frac{3MR^2}{5}$$



$$I_{diametro=} \frac{2}{3}\frac{3MR^2}{5} = \frac{2}{5}MR^2$$

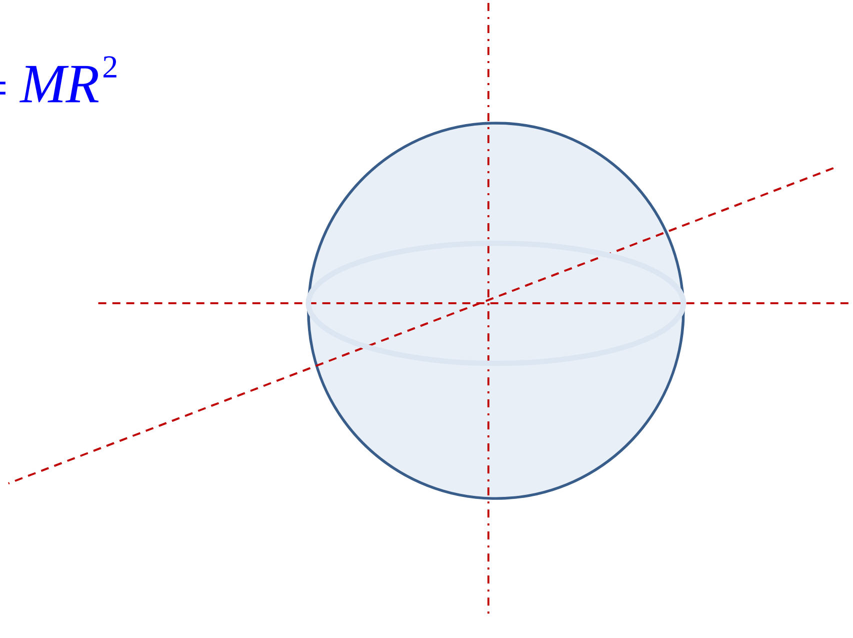
Momento de inercia de superficie esférica homogéneo

$$dm = \rho dA \qquad M = \sigma 4\pi R^2$$



$$I_G = \frac{1}{2}\left(I_{GX} + I_{GY} + I_{GZ}\right) = \frac{3}{2} I_{diametro}$$

$$I_G = \iint_A R^2 \sigma dA = \sigma R^2 \iint dA = \sigma R^2 A = MR^2$$



$$I_{diametro=} \frac{2}{3} MR^2$$

Momento de inercia de cuerpos rodantes

Aro	$I_{GZ} = MR^2$	$I_{AZ} = 2MR^2$
Disco	$I_{GZ} = \frac{1}{2}MR^2$	$I_{AZ} = \frac{3}{2}MR^2$
Cilindro	$I_{GZ} = \frac{1}{2}MR^2$	$I_{AZ} = \frac{3}{2}MR^2$
Superficie esférica	$I_{GZ} = \frac{2}{3}MR^2$	$I_{AZ} = \frac{5}{3}MR^2$
Esfera	$I_{GZ} = \frac{2}{5}MR^2$	$I_{AZ} = \frac{7}{5}MR^2$