Notación tensorial para mecánica de fluidos

Estas notas están pensadas para explicar de forma muy resumida el uso de la notación tensorial en las ecuaciones de mecánica de fluidos y algunas de las propiedades de los tensores que puedan ser de utilidad. Para aprender calculo tensorial en profundidad es necesario acudir a los libros específicos de la materia.

Tensores

Un tensor es una entidad algebraica de varios componentes que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz.

Tensores de orden 0

Las constantes y los escalares son tensores de orden 0. En estos casos no se emplean índices en la notación tensorial. Algunos campos escalares en mecánica de fluidos son:

$$\rho, \quad p, \quad T.$$

Los escalares pueden ser constantes o depender de las coordenadas espaciales o del tiempo.

Tensores de orden 1

Los vectores son tensores de orden 1. En notación tensorial se escriben empleando el símbolo del tensor acompañado de un índice. Al usar esta notación se sobreentiende que el índice toma todos los valores entre 1 y 3 en el caso tridimensional o entre 1 y 2 en el caso bidimensional. Por ejemplo, el vector velocidad se puede escribir de las siguientes maneras:

$$\vec{v} = \boldsymbol{v} = v_i.$$

La forma v_i es la notación tensorial es equivalente a escribir (v_1, v_2, v_3) o cualquiera de las otras dos formas utilizadas más arriba para referirse al vector velocidad, $\vec{v}$ o $\boldsymbol{v}$.

Tensores de orden 2

Los tensores de orden 2 se usan para representar matrices y tienen dos índices cuyos valores recorren las dimensiones del espacio. El primer índice representa el número de fila de la matriz, mientras que el segundo representa el número de la columna. Las siguientes notaciones del tensor de esfuerzos son equivalentes:

$$\overline{\overline{\tau}} = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}.$$

La potencia de esta notación se aprovecha cuando los elementos de un tensor se definen con operaciones. Tomemos como ejemplo el tensor de velocidades de deformación en coordenadas cartesianas que en notación tensorial se escribe de la siguiente manera:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right).$$

Esta notación es mucho más concisa que escribir todos los elementos en lo que sería la notación matricial:

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Delta de Kronecker: La Delta de Kronecker, δ_{ij}, es un caso particular de tensor de orden 2. Su valor es igual a 1 cuando $i = j$ y es igual a 0 para todo $i \neq j$. Como se puede observar, este tensor es equivalente a la matriz unidad en notación matricial.

Una aplicación inmediata de la *Delta de Kronecker* es en la descomposición del tensor de esfuerzos en la suma entre el tensor esférico y el tensor de esfuerzos viscosos:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$$

Empleando la definición de la Delta de Kronecker queda claro que la presión sólo resta en los elementos de la diagonal principal de la matriz $\overline{\overline{\tau}}$.

Tensores de orden 3

Aunque existen tensores de orden superior, el tensor de orden 3 es el de mayor orden de utilidad en los cursos de mecánica de fluidos. Concretamente, se usa un caso particular de tensor de orden 3 que corresponde al *símbolo de Levi-Civita* o *tensor de permutación.*

Tensor de permutación: El tensor de permutación es un caso particular de tensor de orden 3. Su valor es igual a 1 cuando sus tres índices son distintos y siguen un orden cíclico, es igual a -1 cuando son distintos y siguen un orden no cíclico, y es igual a 0 siempre y cuando al menos uno de los índices es igual a otro.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j,k) \text{ es } (1,2,3),(2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si} \quad (i,j,k) \text{ es } (3,2,1),(1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{si} \quad i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i \end{cases}$$

Este tensor es útil para generalizar la notación del producto vectorial entre dos vectores en el espacio tridimensional como se verá más abajo.

Convenio de suma de Einstein

Definición: *La repetición de un subíndice en el producto entre tensores indica que se está realizando la suma sobre ese índice entre 1 y el tamaño del espacio.*

$$\tau_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{N=3} \tau_{ij}v_j$$

Para una aplicación inmediata de este criterio se puede pensar en el cálculo de la divergencia de la velocidad:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

La operación anterior no depende de la letra utilizada para indicar la componente, siempre y cuando el índice se repita, $\partial v_k/\partial x_k$ es también la divergencia de la velocidad en notación tensorial.

Ejemplo de producto escalar

Se quiere obtener el esfuerzo (fuerza por unidad de área) sobre una pared cuya normal es $\boldsymbol{n}$. Se sabe que el esfuerzo es un vector que resulta de multiplicar el tensor de esfuerzos viscosos por la normal a la superficie, $\boldsymbol{\tau} = \overline{\overline{\tau}}' \cdot \boldsymbol{n}$. En notación tensorial sería:

$$\tau_i = \tau'_{ij} n_j$$

En la expresión anterior el tensor τ_i es un vector que viene dado por la suma sobre el índice j, donde j varía entre 1 y 3.

Ejemplo de producto vectorial

En la notación habitual el producto vectorial entre dos vector es el vector

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\boldsymbol{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{e_3}.$$

En notación tensorial este producto se puede escribir utilizando el tensor de permutación y el convenio de suma de Einstein de la siguiente manera:

$$P_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

La primera componente de este vector quedaría:

$$P_1 = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Todos los demás términos de la suma para esta componente serían nulos porque se repetiría al menos uno de los tres índices en el tensor de permutación:

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0.$$

La obtención de las otras dos componentes de vector siguen el mismo proceso.

Producto tensorial entre dos vectores

El *producto tensorial* entre un tensor de orden r y otro tensor de orden s es un nuevo tensor de orden $r + s$. Si el producto tensorial es entre dos vectores, el resultado es un tensor de orden 2. Aunque este producto se puede usar con vectores y matrices de tamaños diferentes, como ejemplo ilustrativo usaremos el caso del producto tensorial entre dos vectores de dimensión 3. En este caso, el producto tensorial en notación matricial queda:

$$\overline{\overline{T}} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

En notación tensorial la expresión anterior se simplifica:

$$T_{ij} = a_i b_j.$$

Producto escalar

El *producto escalar* o *producto punto* entre un tensor de orden r y otro tensor de orden s es un nuevo tensor de orden $r+s-2$. Si el producto escalar es entre dos vectores, el resultado es un tensor de orden 0, o sea, un escalar.

$$S = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_i n_i.$$

Si el producto escalar es entre un vector y un tensor de orden 2, el resultado es un tensor de orden 1, o sea, un vector.

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_i = \overline{\overline{\tau}} \cdot \boldsymbol{n} = \tau_{ij} n_j.$$

Producto doble punto

El *producto doble punto* entre un tensor de orden r y otro tensor de orden s es un nuevo tensor de orden $r+s-4$. Si el producto doble punto es entre dos matrices, el resultado es un tensor de orden 0, o sea, un escalar.

$$D = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{g}} = \tau_{ij} g_{ij}.$$

Aplicación a ecuaciones de mecánica de fluidos

Aunque la notación presentada es válida para cualquier sistema de coordenadas, a continuación se presentan únicamente ejemplos para el caso de coordenadas cartesianas con el fin de conseguir una mayor claridad en la explicación.

Continuidad

La ecuación de continuidad en forma diferencial se suele escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0,$$

donde el operador $\boldsymbol{\nabla}$ es un vector que en notación como tensor de orden 1 queda

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Al tener un producto escalar entre dos vectores, $\boldsymbol{\nabla}$ y $\rho\boldsymbol{v}$, se puede aplicar el convenio de suma de Einstein para escribir la ecuación de continuidad en forma tensorial,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Esta notación nos permite también descomponer la derivada del producto,

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \boldsymbol{\nabla}\rho \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}.$$

En esta ecuación se puede observar como el operador $\boldsymbol{\nabla}$ aparece actuando como gradiente en el primer término y como divergencia en el segundo.

Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se suele escribir de la siguiente manera:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}}' + \rho\boldsymbol{f}_m.$$

Esta ecuación es una ecuación vectorial y en la notación mostrada están presentes las ecuaciones correspondientes a las tres direcciones del espacio. Estas componentes se identificarán con un índice, usaremos i por conveniencia. Todos los términos presentes en la ecuación deben ser vectores representados también por el índice i. Iremos analizando la ecuación término a término.

No Estacionario Es inmediato escribir el término no estacionario en notación tensorial, ya que tanto ρ como la derivada temporal son escalares.

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Convectivo El término convectivo es de los más complejos a la hora de interpretar su notación en forma tensorial pues en su definición aparece el gradiente de la velocidad, $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}$. A diferencia de la divergencia de la velocidad, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$, que es un escalar, el gradiente de la velocidad está definido por el producto tensorial entre el gradiente y la velocidad:

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Como se ha visto en la definición del producto tensorial, al aplicarse sobre dos vectores el resultado es un tensor de orden 2, por ello aparecen los dos índices i y j en la expresión anterior. La complejidad radica en la elección de la posición de estos índices, ya que el siguiente paso es multiplicar escalarmente este tensor por el vector velocidad y podríamos tener estas 4 opciones:

$$\rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \rho v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad \rho v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Sabemos que después de la contracción de índices aplicando el convenio de Einstein nos tiene que quedar un vector cuyo índice debe ser compatible con el del término no estacionario, por lo que únicamente son válidas las notaciones en las que el índice j es el que se repite:

$$\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad \rho v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Para saber cuál es la notación que debemos elegir entre las dos restantes, tenemos que recurrir al teorema de Gauss en notación tensorial, ya que es la única forma de asegurar que no se pierde la física del problema. Las notación tensorial del teorema de Gauss es:

$$\int \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\mathrm{d}\Omega \quad\longrightarrow\quad \int \rho v_i v_j n_j\mathrm{d}\sigma = \int \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\mathrm{d}\Omega.$$

Teniendo en cuenta cómo se obtiene la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial a partir de su forma integral, la aceleración se puede escribir en forma conservativa como:

$$a_i = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j).$$

Esta aceleración se puede descomponer en

$$a_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial \rho v_j},$$

y reorganizar como

$$a_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) v_i.$$

El tercer término de esta expresión es nulo, ya que es la ecuación de continuidad vista más arriba, la suma de los dos términos es igual a cero, multiplicada por la velocidad.

$$a_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

A la vista de este resultado, se puede concluir que la notación tensorial del término convectivo es

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Para la componente del término convectivo en la dirección x de un espacio tridimensional los índices deberán recorrer los valores $(1, 2, 3)$ que corresponden a las coordenadas (x, y, z) y a las velocidades (u, v, w), aunque se podrían seguir usando subíndices numéricos sin variar el resultado.

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Presiones El cambio del término de presiones a forma tensorial es inmediata, ya que es la aplicación del operador $\boldsymbol{\nabla}$ que es un vector sobre p que es un escalar:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Viscoso El término viscoso es el producto escalar entre un tensor de orden 2 y el operador $\boldsymbol{\nabla}$. En este caso la notación queda:

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}.$$

La contracción se hace sobre el índice j y la razón es la misma que la que se ha mostrado en el procedimientos de obtención del término convectivo. La notación tensorial resulta de mucha utilidad en la propia definición del tensor de esfuerzos viscosos:

$$\tau'_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}.$$

Se puede observar que en esta definición aparece la divergencia de la velocidad en el segundo término. Al ser ésta un escalar es necesario multiplicar este término por la delta de Kronecker para que siga siendo un tensor de orden 2 y compatible con el tensor de velocidades de deformación γ_{ij}. La definición de este último es la ya mostrada anteriormente:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).$$

Fuerzas másicas Las fuerzas másicas son directamente un vector por lo que su notación tensorial es:

$$\rho f_{mi},$$

donde m no es un índice, sino simplemente un subíndice descriptivo de f.

Finalmente, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en notación tensorial para coordenadas cartesianas queda

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{mi},$$

o, desarrollando el tensor de esfuerzos viscosos:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] + \rho f_{mi}.$$

Función de disipación de Rayleigh

El procedimiento de interpretación de la notación tensorial para las distintas formas de la ecuación de la energía es el mismo que el expuesto más arriba. Estas ecuaciones no añaden ninguna complicación conceptual con respecto a lo explicado para la conservación de la cantidad de movimiento, por lo que se mostrará únicamente la notación de la función de disipación de Rayleigh por sus propiedades particulares.

La función de disipación de Rayleigh es el término de la disipación viscosa de la energía y se define como el producto doble punto entre el tensor de esfuerzos viscosos y el gradiente de la velocidad.

$$\phi_v = \overline{\overline{\tau}} : \boldsymbol{\nabla v}.$$

En notación tensorial queda:

$$\phi_v = \tau'_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \left[2\mu\gamma_{ij} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]\frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Al multiplicar la delta de Kronecker por el gradiente de la velocidad del segundo término se obtiene la divergencia de ésta, ya que este producto es distinto de 0 únicamente cuando $i = j$. De esta forma en el segundo término aparecerá la divergencia de la velocidad al cuadrado.

Si se desarrolla el producto con el primer término,

$$2\mu\gamma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

se obtiene en forma tensorial el producto

$$2\mu\gamma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right).$$

Por lo que la disipación viscosa en función de las derivadas de la velocidad queda

$$\phi_v = 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_p}{\partial x_p}.$$

Al aparecer en esta ecuación tanto el tensor de velocidades de deformación como la divergencia de la velocidad multiplicadas por sí mismas, se puede inferir una propiedad muy importante de la función de disipación de Rayleigh y es que siempre es mayor o igual que 0:

$$\phi_v \geq 0.$$