CÁLCULO. Hoja 5.
Extremos en $\mathbb{R}^n$.

1. Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y,z) = 3x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xz + 2x + 6y$

   (b) $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 - 2xy$

   (c) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

   (d) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

   (e) $f(x,y) = x^2y^2$

   (f) $f(x,y) = x^4 + y^4$

2. Calcular los extremos de la función $f(x,y,z) = xy+z^2$ con la condición $2x-y+z = 0$.

3. Dada la función $f(x,y) = 2x^5 + 2y^5 - 5x^2 - 5y^2$

   (a) calcular y clasificar sus extremos relativos (o locales);

   (b) calcular sus extremos absolutos (o globales) en el compacto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

4. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = 2+2x+2y-x^2 - y^2$ en la placa triangular del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, e $y = 9 - x$.

5. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x,y) = 4x^3 + 4y^2 - 6x^2 + 10$$

   sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

6. Determinar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

   y calcular su polinomio de McLaurin (polinomio de Taylor en el punto $(0,0)$) de grado 2.

7. Hallar las alturas máxima y mínima de un muro construido sobre la curva $x^2+y^2 = 1$ cuya altura en cada punto viene dada por la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^3}{3} + 1$$

   .

8. El recinto $A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ está cubierto por una bóveda cuya altura en cada punto es $z = \frac{30-x^4-y^4+4y^2}{20}$ y rodeado por un muro vertical (cilíndrico). Calcular las alturas máxima y mínima de dicha cubierta, teniendo en cuenta que cada unidad equivale a 10 metros.

 ester.patino@upm.es

9. El recinto $A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ se cubre mediante una bóveda de altura $z = \frac{1}{4}(2 + x - x^3 - y^2)$. Calcular las alturas máxima y mínima de dicha cubierta (cada unidad equivale a 10 metros).

10. Dada la función $f(x,y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

    (a) hallar sus máximos y mínimos locales (o relativos) según los distintos valores de a;

    (b) hallar losvalores máximo y mínimo absolutos (o globales) de la función en el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ para el caso $a = -1$.

11. Dada la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$

    (a) calcular y clasificar sus extremos relativos (o locales);

    (b) calcular sus extremos absolutos (o globales) en el compacto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

12. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 8x^2 + 8y^2 + 17$$

    (a) Hallar sus extremos relativos.

    (b) Hallar su valor máximo y mínimo (global) en el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^4 + y^4 \leq 36\}$.

13. Calcular los valores máximo y mínimo absolutos (o globales) de la función $f(x,y) = x^3 + y^3$ sobre el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

14. Dada la función $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + 3y^2$

    (a) calcular y clasificar sus extremos relativos (o locales);

    (b) calcular sus extremos absolutos (o globales) en el compacto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2 + 3y^2 - 9 \leq 0\}$

15. Dada la función $f(x,y) = 15 + y^4 - x^4 + x^2y^2 + 4x^2$, se pide:

    (a) calcular todos los puntos crticos de f;

    (b) calcular los extremos absolutos de f en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

16. Dada la función $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$

    (a) determinar y clasificar sus extremos relativos;

    (b) determinar sus extremos absolutos sobre el triángulo determinado por las rectas $x = 0$, $y = 2$ e $y = 2x$.

17. Calcular la mínima distancia al origen de coordenadas de la curva $x^2 - y^2 + 2x + 5 = 0$.

18. Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

19. Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la curva $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

20. Dada la función $f(x,y) = ax^2 + y^2 - 2\log(x+1) + by$, hallar el valor de las constantes a y b sabiendo que:

    (a) $f(x,y)$ tiene un extremo condicionado sobre la curva $x^2 + y^2 = 5$ en el punto (1,2) y que

    (b) el polinomio de Taylor de $f(x,y)$ en el origen se anula en el punto (1,2).

 ester.patino@upm.es

21. Dada la función $f(x,y) = ae^x + x^2 + x^2y^2 + by + 2$, calcular el valor de los parámetros a y b para que se verifiquen las siguientes condiciones:
    (a) El polinomio de Taylor de segundo grado centrado en $(0,0)$ de la función f toma el valor 4 en el punto $(0,1)$.
    (b) La función f tiene un extremo condicionado en el punto $(1,1)$ sobre la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt{2}$.

22. Sea $f(x,y) = e^{ax+y^2} + b\sin(x^2+y^2)$
    (a) determinar los valores de a y b sabiendo que
        i. $f(x,y)$ tiene un extremo relativo en $(0,0)$;
        ii. el polinomio de Taylor de segundo grado de $f(x,y)$ en el origen toma el valor 6 en el punto (1,2).
    (b) Con los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿ qué clase de extremo es (0,0) para $f(x,y)$?

23. Calcular el valor de las constantes a y b para los que la función $f(x,y) = ax^3 + y^3 - 8e^{x-2} + by^2$
    (a) tiene en el punto (2,2) un extremo condicionado en la curva $x^2 + y^2 = 8$
    (b) y su polinomio de Taylor en el punto (2,0) toma el valor 4 en (3,1).

24. Si $p(x,y) = 1 + x^2 + 2ay^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 en (0,0) de una función $f(x,y)$.
    (a) ¿Es (0,0) un punto crítico de $f(x,y)$?
    (b) En caso afirmativo, clasificarlo según los distintos valores de a.

25. Se considera la función $f(x,y) = -x^3 + ay^4 + be^{x-1} + 2x^2 - 3$. Calcular los valores de los parmetros a y b de tal forma que se verifiquen las siguientes condiciones:
    (a) f tiene un extremo condicionado en el punto $(1,1)$ sobre la curva $x^2 + y^2 = 2$;
    (b) el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en el punto $(1,0)$ se anula al evaluarlo en el punto $(2,2)$.

26. Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{ax+by}$, calcular los parámetros a y b tales que:
    (a) la función tenga un extremo condicionado en el punto $(2,0)$ sobre la circunferencia centrada en el origen y radio 2;
    (b) la derivada según la dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$ en el punto $(0,1)$ toma el valor $2\sqrt{2}$.

27. Hallar las dimensiones del cilindro de volumen fijo V_0 y área mínima.

28. Halar los puntos más cercanos y lejanos al origen de la curva intersección $x+y+2z = 2$, $z = x^2 + y^2$.

29. Dada la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$, encontrar de todas las circunferencias centradas en (0,0) la de mayor área contenida en ella y la de área menor que la contiene.

30. Hallar a, b y c sabiendo que la función
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + axy + bx + cy$$
tiene en el punto (1,0) un mínimo relativo y un extremo condicionado sobre la curva $x^2 + y^2 = 2$ en el punto (1,1).