 ester.patino@upm.es

CÁLCULO. Hoja 4.
Fórmula de Taylor en $\mathbb{R}^n$.

Dada una función $f : U \subset I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$, su fórmula de Taylor en $(x, y) = (x_0, y_0)$ es:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right) + R \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. $f(x,y) = x\cos y + y\sin x$ en $(0,0)$
   $f(x,y) = x + xy + R$
2. $g(x,y) = ln(xy)$ en $(1,1)$
   $g(x,y) = (x-1) + (y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + R$
3. $h(x,y) = 1 - \cos a(x+y)$ en $(0,0)$
   $h(x,y) = \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{2}a^2y^2 + a^2xy + R$
4. $i(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ en $(0,0)$
   $i(x,y) = x^2 + y^2 + R$
5. $j(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ en $(0,0)$
   $j(x,y) = 1 + xy + R$
6. $k(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$
   $k(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + R$
7. $l(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$ en $(1,0)$
   $l(x,y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + (x-1)^2 + R$

EJERCICIOS:

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = (y^2 - x^2)\log(\frac{x+y}{3})$ centrado en (1,2). Utilizar dicho polinomio para aproximar el valor $3.63\log(1.1)$.

   Indicación: elegir $x = 1.1$ e $y = 2.2$.
2. Dada la función $f(x,y) = xy^2 + sin(xy)$, calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en un entorno del punto $(1, \pi/2)$ y utilizarlo para calcular el valor aproximado de $f(1.2, \frac{\pi}{2} - 0.1)$.
3. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima a la función $f(x,y) = x\cos y$ en un entorno de $(0,0)$.