CÁLCULO
Hoja 2. Derivabilidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11. (a) $z = 2x + 1$

    (b) $D_{max} f(0,0) = 2$ en la dirección del vector unitario $(1,0)$

    (c) $\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ z = 1 - t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

12. La función no es diferenciable en los puntos de la forma $(1, y)$, por tanto en el (0,0) si lo es y tiene plano tangente.

    (a) Plano tangente: $z + 1 = x - 2y$

    Recta normal:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -2t \\ z = -1 - t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

    (b) $\vartheta = \arctan \frac{1}{2}$

13. La dirección de ascenso más rápida viene dada por el vector unitario $(-6/\sqrt{40}, -2/\sqrt{40})$
14. $h'(\pi/4) = 2\frac{\pi}{4}e^{\pi/4} + \left(\frac{\pi^2}{16} - 2e^{\pi/4}\right)e^{\pi/4}$
15. $h'(-1) = 7$

16. La matriz jacobiana de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ viene dada por la expresión

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La función es diferenciable al serlo sus componentes (derivadas parciales continuas). Su matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y} + 2x^2ye^{x^2y}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, \log 2) = 2 + 4\log 2$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{x^2y}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, \log 2) = 2$

18. (a) Es continua en (0,0)
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2,$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$
(c) No existe plano tangente en (0,0) porque no es diferenciable en ese punto.

19. Plano tangente: $\quad 8x - 2y - z - 5 = 0$

Recta normal:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 8t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

20. (a) Es continua en $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$
(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2y(xy - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$$

(c) Es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ por tener derivadas parciales continuas (en (0,0) no es continua).

21. No es diferenciable en (0,0) y por tanto no tiene plano tangente.

22. Los puntos son: $\left(-\dfrac{6}{\sqrt{50}}, \dfrac{1}{\sqrt{50}}, -\dfrac{2}{\sqrt{50}}\right)$ y $\left(\dfrac{6}{\sqrt{50}}, -\dfrac{1}{\sqrt{50}}, \dfrac{2}{\sqrt{50}}\right)$

Recta normal:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{6}{\sqrt{50}} + 3t \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{50}} - t \\ z = -\dfrac{2}{\sqrt{50}} + 3t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

23.

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 5t \\ y = 1 + 8t \\ z = 2 + 6t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

24. $a = 0$, $b = 2$, Plano tangente: $z = 2y$

25. (a) $D_{(-1,0)}T(3,2) = 6$
    (b) La dirección es la del vector $(-6,-8)$ y la mayor razón de incremento es $D_{max} = 10$.
    (c) $\vartheta = \arctan(-6/8)$

26. $a = 0$
    (a) No es diferenciable
    (b) $D_{\pi/4}f(0,0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
    (c) No, no es diferenciable en (0,0)

27. (a) Plano tangente: $3x - y - z = 0$
    Recta normal:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

    (b)

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + \sqrt{10}t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

    (c) Es la curva de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = te^t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

28. (a) $D_{max}f(1,0) = \sqrt{5}$. No existe una derivada direccional de valor 3.
    (b) $\vartheta = \arctan 4/3$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{array}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

    (c) Pendiente máxima: $\sqrt{5}$