CÁLCULO
Hoja 2. Derivabilidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$.

1. Dada la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estudiar su continuidad.
   (b) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$.
   (c) Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.
   (d) Calcular la derivada en $(0,0)$ según una dirección arbitraria ϑ.
   (e) Calcular la diferencial en $(1,1)$.
   (f) Calcular la derivada en $(1,1)$ en la dirección del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Dada la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+3(y-1)^3}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

   (a) Estudiar su continuidad.
   (b) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$.
   (c) Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.
   (d) Calcular la derivada en $(0,1)$ según la dirección $\vartheta = \pi/4$.

3. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

   se pide:

   (a) Estudiar su continuidad.
   (b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   (c) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
   (d) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.
   (e) Es f diferenciable en (0,0)? Justifica tu respuesta.

4. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

   se pide:

(a) Estudiar su continuidad.
(b) Hallar las derivadas parciales primeras.
(c) Determinar la ecuación del plano tangente en los puntos (0,0) y (0,1), justificando previamente su existencia.

5. Dada la función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+4y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad.
(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$;
(c) Estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$;
(d) Escribir la ecuación del plano tangente en (2,0).
(e) Calcular la derivada direccional en el punto (0,0) en la dirección $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ y la recta tangente a la superficie en ese punto según esa dirección.
(f) Hallar el valor de la derivada direccional en el punto (2,0) para cualquier dirección. ¿Cuál es su valor máximo?
(g)

6. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, se pide:

(a) Estudiar su continuidad.
(b) Hallar las derivadas parciales primeras.
(c) Determinar si tiene plano tangente en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, y en caso afirmativo calcularlo.
(d) Calcular la derivada direccional en el punto (0,0) según la dirección $\vartheta = -\dfrac{\pi}{4}$.
(e) ¿Es posible en el punto (1,0) exista una derivada direccional de valor 3?
(f) Hallar una dirección según la cual la derivada direccional en el punto $(1,0)$ valga $\sqrt{2}$. Hallar las ecuaciones paramétricas de la correspondiente recta tangente.

7. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular la derivada en (1,1) según cualquier dirección ϑ; ¿en qué dirección es máxima y cuánto vale entonces?
(b) Hallar una dirección según la cual la derivada direccional en el punto (0,0) sea -1. Escribir las ecuaciones paramétricas de la correspondiente recta tangente.
(c) Determinar la pendiente máxima entre todas las curvas de la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (1,0).
(d) Determinar si tiene plano tangente en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, y en caso afirmativo calcularlo.

8. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad.

(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$.

(c) ¿Puede ser $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$?

(d) Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

(e) Calcular la derivada en (0,0) según una dirección arbitraria ϑ.

(f) Calcular la derivada direccional en el punto (1,2) en la dirección del vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(g) ¿Cuál es el valor máximo de la derivada direccional en el punto (1,2), y para qué dirección?

9. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad.

(b) Calcular las derivadas parciales de primer orden.

(c) Estudiar su diferenciabilidad en $(0,0)$.

(d) Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

(e) si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$, justificarlo.

10. Dada la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar su continuidad.

(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^2$.

(c) Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

(d) Calcular la derivada en (0,0) según una dirección arbitraria ϑ.

(e) Calcular la derivada direccional en el punto (1,1) en la dirección del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(f) Calcular la ecuación del plano tangente en (1,1).

11. Dada la función $f(x,y) = (x+1)e^{y(x+1)}$, se pide:

a) ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto $(0,0)$ y justificar su existencia;

b) hallar la dirección y el valor de la derivada direccional máxima en el punto $(0,0)$;

c) obtener, si es posible, una dirección según la cual la derivada direccional en el punto $(0,0)$ sea -1, y hallar las ecuaciones paramétricas de la correspondiente recta tangente.

12. Dada la función $f(x,y) = |x-1|(y+1)^2$ se pide:

(a) Ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto correspondiente a $(x,y) = (0,0)$, justificando previamente su existencia.

(b) Hallr la dirección o direcciones según las cuales la derivada direccional se anula en el punto (0,0):

13. La ecuación que describe la altura de una montaña es $h(x,y) = 4000 - 0,01x^2 - 0,005y^2$ y un montañero está situado en el punto $(300, 200)$. Ayudar al montañero a encontrar la dirección de ascenso más rápida.

14. Sean las funciones $f(x,y) = x^2y - y^2$ y $c(t) = (t, e^t)$. Calcular la derivada de la función $h(t) = f(c(t))$ para $t = \pi/4$.

15. Sean las funciones $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ y $c(t) = (t-1, t^2-1, t)$. Calcular la derivada de $h(t) = f(c(t))$ para $t = -1$.

16. Dada la función $f(x,y,z) = (xy + z, xz + y)$, calcular su matriz jacobiana en el punto $(1,-1,2)$. ¿Es diferenciable la función?

17. Dada la función $f(x,y) = xe^{x^2y}$, calcular sus derivadas parciales y evaluarlas en el punto $(1, \log 2)$.

18. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, se pide:

    a) Estudiar su continuidad en el punto $(0,0)$.

    b) Hallar sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$.

    c) ¿Existe plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,0,f(0,0))$? Justificar la respuesta.

19. Calcular el plano tangente y la recta normal a la gráfica de $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2x - 4y$ en el punto $(1, 2, f(1,2))$.

20. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{, estudiar:}$$

    a) su continuidad;

    b) la existencia de derivadas parciales;

    c) la diferenciabilidad.

21. Estudiar si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es diferenciable en el punto $(0,0)$.

    En caso afirmativo, hallar el plano tangente a la gráfica de la función en $(0,0,f(0,0))$.

22. Hallar los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$ y determinar en uno de ellos la recta normal.

23. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(-1, 1, 2)$.

24. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx^2y + 2y^3 + x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Se pide:

    a) Determinar el valor de a de forma que $f(x,y)$ sea continua en $\mathbb{R}^2$.

    Para ese valor de a :

b) Obtener el valor de b con la condición de que $f(x, y)$ sea diferenciable en el punto $(0, 0)$, y hallar el plano tangente a la gráfica de la función en $(0, 0, f(0, 0))$.

25. La temperatura en un punto (x, y) de una placa está dada por $T(x, y) = 50 - x^2 - 2y^2$.

    a) Hallar la razón de cambio de temperatura en el punto $P = (3, 2)$ en la dirección que va hacia el punto $(2, 2)$

    b) ¿ En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en P y cual es la mayor razón de incremento en P ?

    c) ¿ En qué dirección o direcciones la temperatura en P permanece constante?

26. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4 + axy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    Determinar para qué valores de $a \in R$ es f continua.

    Para f con un valor de a en que sea continua, se pide:

    (a) Estudiar si f es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

    (b) Calcular, si existe, $D_v f(0, 0)$ siendo v vector unitario en la dirección $\pi/4$.

    (c) ¿ Es $D_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \circ v$? Justificar la respuesta

27. Dada la función $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$, se pide:

    a) Hallar el plano tangente y la recta normal a la gráfica de la función en el punto $(1, 1, f(1, 1))$, justificando su existencia.

    b) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta tangente correspondiente a la derivada direccional máxima en el punto $(1, 1, f(1, 1))$.

    c) Obtener la curva de la superficie que pasando por el punto $(1, 0, f(1, 0))$ tiene máxima pendiente.

28. Sea $f(x, y) = (x^2 + y) \cos y$, se pide:

    a) Calcular el valor de la derivada direccional máxima en el punto $(1, 0)$. ¿Es posible que en dicho punto exista una derivada direccional de valor 3?

    b) Hallar una dirección según la cual la derivada direccional en el punto $(1, 0)$ valga 2. Hallar las ecuaciones paramétricas de la correspondiente recta tangente.

    c) Determinar la pendiente máxima entre todas las curvas de la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$.