CÁLCULO
Hoja 1. Límites y continuidad en $\mathbb{R}^n$.

1. Hallar el dominio de las funciones:

(a) $f(x,y)=\log(x+y)$ (b) $f(x,y)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3-y^2}$
(c) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ (d) $f(x,y)=\frac{5}{x^2+3y^2}$
(e) $f(x,y)=\frac{3}{4-x^2-y^2}$ (f) $f(x,y)=(\sqrt{x+y},\sqrt{x-y})$
(g) $f(x,y)=(\sqrt{xy},\log(x-y))$

2. Hallar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=\frac{x^3}{y}$ (b) $f(x,y)=\sin(xy)$
(c) $f(x,y)=x-y+2$ (d) $f(x,y)=x^2+4y^2$
(e) $f(x,y)=xy$ (f) $f(x,y)=\begin{cases} y & \text{si } x\le 0 \\ y-x & \text{si } x>0 \end{cases}$

3. Estudiar la existencia de los siguientes límites:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ Sol:($\nexists$)
(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^6}$ Sol:($\nexists$)
(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ Sol:(0)
(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3y}{x^2+y^2}$ Sol:($\nexists$)

4. Calcular , si existen, los límites iterados y el límite doble para las funciones siguientes en los puntos indicados:

(a) $f(x,y)=\frac{xy-x+y}{x+y}$ en $(0,0)$ Sol:($\nexists$)
(b) $g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$ Sol:($\nexists$)
(c) $h(x,y)=y\cos\frac{1}{x}$ en $(0,0)$ Sol:($\nexists$)

5. Estudiar si la función siguiente es continua. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(\sin x)^2\sin y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y)=0 \end{cases}$ Sol:(Cont. en $\mathbb{R}^2$.)

6. Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Sol:(Cont. en $\mathbb{R}^2$.)

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Sol:(Cont. en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.)

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y)=0 \end{cases}$

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Sol:(Cont. en $\mathbb{R}^2$.)

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Sol:(Cont. en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.)

8. Estudiar si las siguientes funciones pueden prolongatse por continuidad

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 2y^4}}{x^2 + y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$