

Los números imaginarios son reales

Del tragicómico parto de la solución general de la ecuación de tercer grado al plano complejo

Bartolo Luque¹

ETSI Aeronáutica y del Espacio,
Universidad Politécnica de Madrid.

“Dios hizo los números naturales; el resto es obra de la humanidad.”
Leopold Kronecker (1823-1891).

1. Introducción

La manipulación algebraica, originaria de la India y desarrollada por los árabes, dio carta de ciudadanía numérica al cero y a los números negativos. Aparecían de manera natural al resolver ecuaciones como:

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 5.$$

Pero al atacar ecuaciones cuadráticas los matemáticos de la antigüedad se toparon con unos nuevos y extraños números. Las soluciones de una ecuación tan sencilla como:

$$x^2 + 5 = 0,$$

eran:

$$x = \pm\sqrt{-5}.$$

¿Qué sentido tenía la raíz de un número negativo?

Todos recordamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Los matemáticos renacentistas también conocían que las soluciones de la ecuación vienen dadas por:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En 1496 el matemático Scipione del Ferro (1465-1526), que a la sazón trabajaba en la universidad de Bolonia, fue el primero que sepamos en encontrar una solución para la ecuación de tercer grado. En concreto, resolvió un caso particular que denominaba: *“Incógnitas y cubos igual a números”*, que en versión moderna sería:

$$x^3 + px = q,$$

¹bartolome.luque@upm.es

donde p y q son números reales. La solución propuesta por del Ferro fue la siguiente expresión intimidante:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Cómo alcanzó del Ferro este resultado sigue siendo un misterio de la historia de las matemáticas. De hecho, del Ferro no había comunicado a nadie “su secreto”. Mantener los hallazgos matemáticos en secreto fue común hasta el siglo XVIII y seguro que más de un descubrimiento se fue a la tumba con su descubridor. Poco antes de pasar a mejor vida, en su lecho de muerte, del Ferro reveló el secreto a su yerno Annibale della Nave. El motivo era asegurarle la sucesión en su cátedra, y así el sustento de su propia hija y nietos. A la revelación también asistió su alumno, el veneciano Antonio María del Fiore.



Figura 1: Niccolò Fontana Tartaglia (1499–1557)

Otro de los motivos por los que se mantenían en secreto los resultados matemáticos era para asegurarse la victoria en disputas públicas. En el siglo XVI cualquier matemático o erudito podía ser desafiado por otro a una disputa pública. Muchas veces había una apuesta de por medio, incluso uno de los escasos puestos universitarios o hasta un incremento del salario. Pero sobre todo, estaba en juego la reputación de los contendientes. Las disputas intelectuales eran de gran relevancia social, toda la ciudad opinaba e incluso apostaba y buscando ese crédito, del Fiore que atesoraba ahora el secreto de del Ferro desafió en 1535 al famoso matemático Niccolò Tartaglia (1499–1557).

Trasladémonos de la sabia Bolonia a la bella Venecia donde vivía el matemático Niccolò Fontana Tartaglia. En realidad Tartaglia, que significa tartamudo, era su apodo. Su tartamudez fue resultado de un sablazo que recibió en el cuello a los doce años a manos de un soldado francés. Fue dado por muerto, pero gracias al tesón de su madre y, cito textualmente a uno de sus biógrafos, “a un perro que le lamió las heridas” logró sobrevivir. Tartaglia procedía de una familia muy pobre. Su padre, cartero, murió joven dejando a su madre a cargo de un montón de hijos. Mario Livio, en su excelente libro *“La ecuación jamás resuelta”* [1] comenta al respecto que: *“Tuvo que abandonar sus estudios de lectura y escritura del alfabeto al llegar a la letra k porque la familia se quedó sin dinero para pagar al tutor”*. Tartaglia había alcanzado reputación como matemático al resolver algunos problemas de artillería para los ingenieros del Arsenal veneciano y su fama llegó a oídos de del Fiore que, pertrechado con “su secreto”, la fórmula mágica de del Ferro, lo retó en 1535 a una disputa pública.

Cada uno de los contendientes planteó treinta problemas de matemáticas al otro. El perdedor pagaría una cena al ganador y a tantos amigos como problemas hubiera resuelto. Tartaglia llevaba cuarenta y ocho días dándole vueltas a los treinta problemas de del Ferro sin resolver ninguno.

Todos pedían soluciones a ecuaciones de tercer grado. El tiempo apremiaba porque en ocho días debía consignar las soluciones ante notario. La noche del doce de febrero de 1535 se hizo la luz y fue capaz de descubrir el secreto de del Fiore. De un plumazo pudo resolver los 30 problemas. . . ¿Y del Fiore? Perdió estrepitosamente. Fue incapaz de resolver ninguno de los treinta problemas de Tartaglia, que finalmente lo eximió del pago de la cena. Tartaglia se convirtió en una celebridad matemática, mientras que del Fiore se perdió en las tinieblas de la Historia. El resultado de la contienda se extendió como la pólvora por toda Italia y llegó a oídos de nuestro quinto personaje, Gerolamo Cardano (1501–1576), sin lugar a dudas el más singular de todos ellos.



Figura 2: Gerolamo Cardano (1501–1576)

De origen humilde, Cardano era hijo bastardo, tuvo que pagarse sus estudios con el juego, apostando a las cartas, a los dados o al ajedrez. Pero sin duda era un genio capaz de hacer de sus vicios virtudes: gracias a su experiencia en el juego escribió el primer libro de teoría de la probabilidad, *Liber de ludo aleae* (El libro de los juegos de azar), publicado póstumamente en 1663. Probablemente de esos ambientes sacó sus modales rudos y vocingleros con los que ganó muchos debates públicos. No solo fue un gran teórico, sino que llegó a ser uno de los médicos más famosos de Europa, y también un gran inventor: el cardán, esa pieza mecánica que permite transmitir un movimiento de rotación a dos ejes de direcciones distintas que hoy llevan los automóviles fue invento suyo como se desprende del nombre, cardán-Cardano. En el momento de la Historia en que nos encontramos estaba redactando su segunda gran obra y encontró imprescindible incluir en ella la fórmula de Tartaglia. Trató en vano de deducirla, y decidió convencer a Tartaglia para que le revelara su secreto. Tras varias negativas epistolares del tipo: “*cuando decida hacer pública mi invención será en mi propia obra y no a través de la de otros. . .*” Tartaglia cedió finalmente en un encuentro el veinticinco de marzo de 1539 en Milán. Allí, Cardano le hizo la siguiente promesa a Tartaglia:

“Juro ante ti por los Santos Evangelios y por mi fe de caballero, no solo no publicar jamás tus descubrimientos si me los revelas, sino que también prometo y comprometo mi fe como verdadero cristiano que los escribiré en clave para que después de mi muerte nadie pueda comprenderlos. Si yo en opinión vuestra soy un hombre honesto, contádmelo y, si no es así, demos entonces por terminada esta conversación”.

La respuesta de Tartaglia fue:

“Si no confiara en un juramento como el vuestro, entonces, desde luego, yo mismo merecería ser considerado un ateo”.

Y le reveló la fórmula.

Regresamos a Bolonia porque nos falta el último personaje de la tragicomedia: Ludovico Ferrari (1522 – 1565). En ese tiempo tenía diecisiete años y era sirviente en la casa de Cardano. Con su amo aprendió matemáticas y acabó convirtiéndose en su colega y amigo. De hecho, Ferrari fue para Cardano el hijo que siempre quiso, a pesar de que tuvo dos que sepamos: el primero fue ejecutado por haber envenenado a su mujer y el segundo fue un truhán que lo llevó por la calle de la amargura. En 1542 Cardano y Ferrari consiguieron permiso de Annibale della Nave para rebuscar entre los papeles de su suegro del Ferro fallecido hacía ya 16 años. Sus pesquisas culminaron al encontrar la famosa fórmula, que coincidía con la descubierta por Tartaglia en el desafío. Puesto que Tartaglia no había sido el primer descubridor, sin faltar a su palabra, Cardano se vio libre de publicarla refiriendo su paternidad a del Ferro. Y así apareció en el *Ars Magna* de 1545, obra considerada como la fecha de nacimiento de los números complejos y el principio del álgebra moderna.

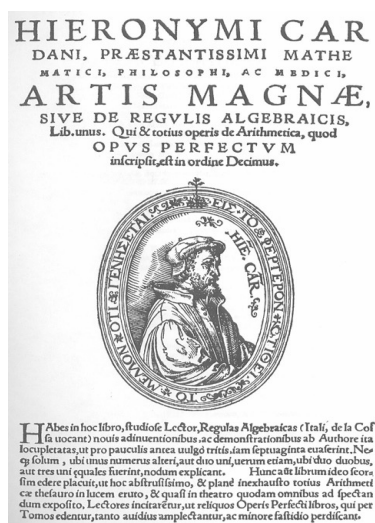


Figura 3: Portada original de *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, más conocido como *Ars Magna*, Gran Arte

Tartaglia se lo tomó fatal y a pesar de que en el libro Cardano agradece por dos veces a su “amigo” Tartaglia haberle dado la fórmula, Tartaglia está más mosqueado que una mona. Comienza entonces un intercambio de cartas públicas incendiarias entre Tartaglia y Ferrari, a las que Cardano permanece ajeno. La polémica entre ellos culmina el 10 de agosto de 1548 con una disputa pública de 31 problemas en Milán, en la iglesia de Santa María del Giardino. El resultado acabó con Tartaglia abandonando la disputa antes incluso de que acabara y sin que Cardano se dignara siquiera aparecer. Tartaglia regresó humillado a Venecia donde falleció en 1557 en la misma pobreza que le acompañó toda su vida. Cardano continuó su hiperactiva carrera, esta vez dedicándose a la astrología hasta el extremo de atreverse a escribir el horóscopo del propio Cristo. La Inquisición lo encarceló hasta que el mismísimo Papa intercedió. Pero lo más fascinante es que predijo el día de su muerte y acertó. Aunque con algo de trampa: se suicidó el día que había predicho.

2. Operando con números complejos

Cardano generalizó la solución de Tartaglia para la ecuación de tercer grado y su alumno Ludovico Ferrari encontró solución para la ecuación de cuarto grado. Todos esos descubrimientos fueron publicados por Cardano en 1545 en su famosa *Ars Magna*, donde aparecen los primeros cálculos explícitos de la Historia con números complejos. Un ejemplo, contenido en la obra, es el

siguiente problema:

“Divide 10 en dos partes, de modo que una por la otra den 40.”

En notación moderna se trata de resolver la ecuación cuadrática:

$$x(10 - x) = 40.$$

Las dos soluciones que alcanzaba Cardano eran:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15},$$

dos números complejos que llamaba “*soluciones intrigantes*”. Cardano, como todos los matemáticos antes que él, no encontraba sentido alguno a la raíz cuadrada de un número negativo. Las raíces cuadradas de los números negativos, razonaba, nos piden que encontremos un número que, multiplicado por sí mismo, arroje un resultado negativo. Pero ni los números positivos, ni los negativos pueden cumplir esto, concluía; y por eso se refería a estos números como “*cantidades sofisticadas*”.

Este tipo de ecuaciones cuadráticas con soluciones de raíces negativas se conocían desde la antigüedad, pero los matemáticos no habían sentido necesidad de ir más allá y habían zanjado la cuestión simplemente diciendo que la ecuación carecía de solución. Cardano fue algo más audaz al mostrar, en casos sencillos como este, que formalmente estas cantidades sofisticadas eran solución:

“[...] Multiplicando $x = 5 + \sqrt{-15}$ por $10 - x = 5 - \sqrt{-15}$, obtenemos $25 - (-15)$. Por lo tanto el producto es 40”.

Pero la cuestión se tornaba “intrigante” al comprobar cómo, la demostrada fórmula de Cardano del Fierro para la ecuación general de tercer grado, al aplicarse por ejemplo a:

$$x^3 - 15x = 4,$$

para la que sabían que $x = 4$ era solución, les devolvía el galimatías:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

donde aparecían raíces cuadradas de números negativos que a su vez estaban dentro de raíces cúbicas.

Tuvo que pasar una generación de matemáticos para dar un paso más hacia delante. Fue Rafael Bombelli (1526–1572), también estudiante de Cardano, quien tuvo la valiente idea de asumir que sencillamente existía un nuevo tipo de números cuyo cuadrado era negativo. En vez de especular sobre la naturaleza de los mismos e intentar denotarlos de forma especial, Bombelli simplemente operó con las raíces de números negativos como lo haría si fueran raíces de números positivos. Así al elevar al cuadrado la raíz de menos uno, obtenemos menos uno.

De lo que Bombelli se dio cuenta es que, si se extendía el sistema numérico existente, como se había hecho anteriormente con las fracciones, el cero y los números negativos, podían resolverse problemas que de otra forma eran irresolubles. Si estos nuevos números eran un “descubrimiento” y no una “invención” (la mayoría de matemáticos son platónicos y hablarían de esta manera) deberían comportarse como el resto de números conocidos, siguiendo las reglas establecidas del álgebra y la aritmética. Bombelli mostró que podemos sumar, restar, multiplicar y dividir de forma coherente números complejos como si fueran polinomios en variable $i = \sqrt{-1}$, con la regla impuesta de que: $i^2 = -1$. Mostrando por ejemplo que la solución galimatías anterior daba efectivamente 4 cuando se operaba de esta manera.

Lamentablemente, el propio Bombelli pensó que todo esto no era más que un mero truco. Los matemáticos seguían empantanados en cuestiones como: Elevar al cuadrado un número x es lo mismo que calcular el área de un cuadrado de lado x . Un área positiva tiene sentido, pero, ¿qué

sentido tiene un cuadrado de lado $\sqrt{-1}$ con un área negativa de -1 ? Deliberaciones como estas impidieron durante doscientos años más el desarrollo de los números complejos. La aparición de un enfoque más profundo y rico tuvo que esperar mucho tiempo desde la muerte de Bombelli.

Para que se hagan una idea del estado de la cuestión, sesenta años después de que Bombelli decidiera tirar por el lado salvaje, René Descartes aun escribía en su obra *La Géométrie* (1637):

“A pesar de que podemos pensar que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, únicamente una de ellas es real, la cual es 2, y las otras dos... son simplemente imaginarias.”

Fue la primera vez en que se usó el término imaginario, de forma despectiva, para referirse a los números complejos. La misma perplejidad que el filósofo francés debió sentir el gran Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) frente a estos números. Así describía la sensación místico-zoológica que le producían:

“Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser”.

Y no fueron los únicos, otros términos que se utilizaron en los inicios de los números complejos fueron: “*Números sin sentido*” (Néper), “*Inexplicables*” (Girard), “*Incomprensibles*” (Huygens) o “*Imposibles*” (Diversos autores). Incluso el propio Leonhard Euler (1707–1783) que los incorporó definitivamente al acervo matemático decía sobre ellos:

“Estos números no son nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles”.

Durante 200 años los matemáticos trabajaron con imaginarios y complejos en sus cálculos y demostraciones manteniendo sin embargo un tremendo escepticismo sobre ellos, y sin alcanzar su profundo significado.

3. Visualizar los números complejos: el plano complejo.

¿Cómo se desatascó el asunto? Observemos qué pasa cuando calculamos potencias de i . Si elevamos al cuadrado la unidad imaginaria, tenemos:

$$i^2 = -1.$$

Si elevamos al cubo:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$$

Si elevamos a la cuarta potencia:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1.$$

Y, por último, si elevamos a la quinta:

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

¡volvemos a estar en el principio! Un comportamiento bien extraño si lo comparamos con la potenciación de números reales. Y aquí se escondía la pista.

Para arrojar luz sobre lo que está sucediendo, vayamos a la recta real. Sabemos que la recta real está llena, completa con los números que nos resultan familiares. No caben más y los imaginarios no pueden habitar ahí. Vamos a usar flechas, en vez de puntos como es habitual, para señalar números en la recta. Así el número 3, que aparece en la Figura 4, vendrá representado por una flecha con origen en 0 y punta en el 3. Observemos en la figura cómo al multiplicar un número positivo por

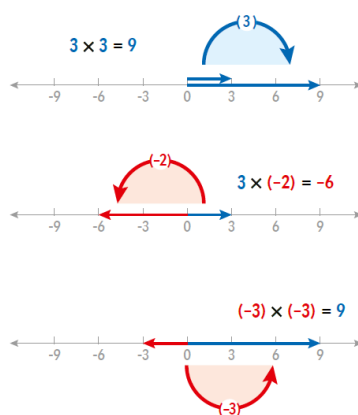


Figura 4: Multiplicación real

otro positivo, como $3 \cdot 3$, obtenemos un número positivo, 9 en este caso, que por tanto mantiene el sentido de la flecha hacia la derecha. Si lo multiplicamos por un número negativo, como $3 \cdot (-2)$, el resultado es negativo, -6 . De modo que cambia el sentido; o lo que es lo mismo, rota 180° . Si multiplicamos ahora un negativo por otro negativo, por ejemplo $(-3) \cdot (-3)$, obtenemos 9, un número positivo en sentido contrario. De nuevo se produce una rotación de 180° . Así que, al elevar al cuadrado un negativo, acabamos en terreno positivo: comenzamos con un número negativo que ya está rotado 180° y volvemos a rotarlo 180° al multiplicarlo por un negativo.

Recordemos ahora que al multiplicar la unidad imaginaria por sí misma, obtenemos: $i^2 = -1$. Parece claro que para acabar en tierra negativa necesitamos algo intermedio, un número cuyo cuadrado lo haga rotar 90° , no 180° . De modo que i debe estar rotado 90° respecto a los positivos y al multiplicarlo por sí mismo, se produce otra rotación de 90° que termina en territorio negativo (Figura 5).

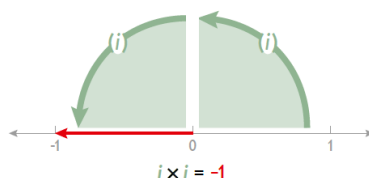


Figura 5: Unidad imaginaria: El número i se define como la raíz cuadrada de -1

Dado que multiplicar por i corresponde a una rotación de 90° , si colocamos un eje imaginario en ángulo recto con la recta numérica, nuestra álgebra encajará perfectamente con nuestra geometría. Observemos la Figura 6. Si comenzamos con el número real 1 y multiplicamos por i , algebraicamente obtenemos i , que corresponde geoméricamente a una rotación de 90° de 1 a i . Multiplicar de nuevo por i resulta en -1 , que vuelve a estar rotado 90° . A medida que seguimos elevando i a más y más potencias, seguimos girando alrededor, y las posiciones de los números resultantes se repiten cada potencia de orden cuatro, tal y como ocurría algebraicamente. Hemos descubierto que los números imaginarios se esconden en una dimensión perpendicular a la recta real. Los números complejos son una extensión natural de nuestro sistema numérico de una dimensión a dos dimensiones.

Una vieja práctica en matemáticas que se remonta a los antiguos griegos es la prueba geométrica. Presentar una idea matemática visualmente le confiere un estatus de protoverdad. Muchos matemáticos del siglo XVII intentaron encontrar una descripción geométrico-visual de los números imaginarios y fracasaron, contribuyendo más todavía a la perplejidad de la comunidad. La idea de

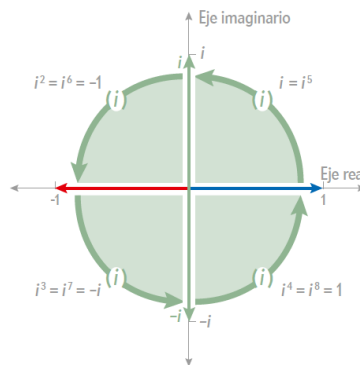


Figura 6: Potencias imaginarias

que los números imaginarios deberían situarse en ángulo recto respecto a los números reales no es obvia ni mucho menos. Pensemos que, tras la muerte de Bombelli, una caterva de matemáticos brillantes fueron incapaces de verlo durante 200 años. Fueron dos matemáticos aficionados, Caspar Wessel (1745 – 1818) y Jean-Robert Argand (1768 – 1822), alrededor de 1800, quienes dieron primero y de manera independiente con la sencilla idea que acabamos de describir. Wessel propuso la primera representación geométrica de los complejos ya en 1797 y Jean Argand hizo lo propio sobre la misma época, observando además que i actuaba como una rotación de 90° como hemos visto.

Pero aun así, todavía en 1831, un matemático de la talla de August de Morgan decía:

“Vemos que el símbolo $\sqrt{-1}$ está vacío de sentido, o más bien que es autocontradictorio y absurdo”.

Hubo que esperar a que el príncipe de las matemáticas, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), propusiera la interpretación geométrica actual de los números complejos.

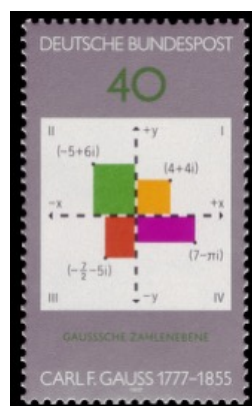


Figura 7: Sello conmemorativo de los 200 años del nacimiento de Karl Friedrich Gauss (1777–1855)

En 1831 Gauss planteó representar un número complejo $z = a + bi$ como un par ordenado de números reales a y b , escrito como: $z = (a, b)$. De modo que, como vemos en la Figura 8, el eje de abscisas represente a la parte real a y el eje de ordenadas a la parte imaginaria b de todo número complejo. Hoy se denomina a esta notación “en componentes” o “en coordenadas cartesianas” porque los números complejos se entienden como puntos en el plano de dos dimensiones.

El príncipe de las Matemáticas prefería el término “lateral” a “imaginario” e “inverso” a “negativo” para evitar la contaminación externa del lenguaje cotidiano. Así propuso que llamáramos

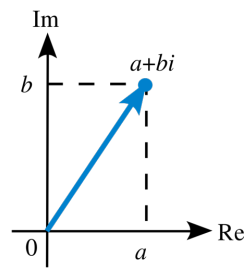


Figura 8: Una representación del número complejo $a + bi$ en el plano complejo

a los números que se encontraban a la derecha del origen cero: “directos”, a los que se encontraban a la izquierda: “inversos” y los que se situaban arriba y abajo: “laterales”.

Este plano donde se representan a los números complejos como puntos se conoce como el plano complejo y es una extensión de la recta real, donde se incluye la dimensión imaginaria verticalmente. En el plano cartesiano xy no hay en principio relación alguna entre los ejes. Sin embargo, en el plano complejo las reglas del álgebra imponen una relación muy particular y fructífera, matemáticamente hablando, entre ambas dimensiones, que espero compruebes y disfrutes por ti mismo a medida que avances en tu interés por las matemáticas. Como verás, a pesar de su peyorativa nomenclatura original de “imaginarios”, finalmente los números complejos se mostraron tan “reales” como los números reales y han acabado convirtiéndose en fundamentales no solo para la matemática, sino para la descripción del mundo natural.

Bibliografía

- [1] Livio, M., La ecuación jamás resuelta, 2005.
- [2] Nahin, P., An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, Princeton U. Press, 1998.
- [3] Martín Casalderrey, F., Cardano y Tartaglia. La aventura de la ecuación cúbica, Nivola Libros y Ediciones, 2010.
- [4] Welch, S., Imaginary numbers are real, Welch Labs, 2016.
<http://www.welchlabs.com/resources/imaginary-numbers-are-real-book-digital-download>
 También disponible en vídeos en Youtube:
<https://www.youtube.com/watch?v=T647CGsu0VU>
- [5] O'Connor, J.J. and Robertson, E.F, Quadratic, cubic and quartic equations, MacTutor, University of St Andrews, 1996.