

¿Se puede oír la forma de un tambor?

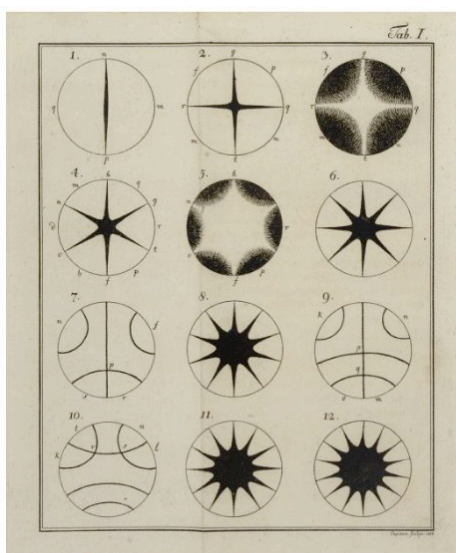
Un recorrido por las matemáticas de la geometría espectral

Fabrizio Macià¹

M²ASAI, Universidad Politécnica de Madrid,
ETSI Navales, Avda. de la Memoria, 4, 28040 Madrid.

1. Orígenes. Ernst Chladni y la acústica moderna

¿Sabrías identificar qué representa esta lámina?



Si no lo sabes aún, continúa leyendo y daré la respuesta unas líneas más abajo. Si ya te has encontrado con estos dibujos, espero también que descubras algún detalle que no conocías. La figura anterior proviene del tratado de E. Chladni *Descubrimientos sobre la teoría del sonido*, página 78 de la versión que se encuentra en [Chladni(1787)]. Se puede considerar a Ernst (Florens Friedrich) Chladni, un físico y músico alemán, como el padre de la acústica moderna.

La Acústica es la rama de la Física que se ocupa del estudio del sonido o, más generalmente, del estudio de las ondas mecánicas que se propagan a través de la materia. El interés del ser humano por la naturaleza del sonido y sus propiedades se remonta a épocas muy anteriores, como veremos más adelante.

Chladni retomó y perfeccionó los experimentos del inglés Robert Hooke, que fue el primero en observar *líneas nodales* en las vibraciones de placas. Cuando una placa es puesta a una vibración y entra en resonancia, esta queda dividida en regiones que vibran

¹fabrizio.macia@upm.es

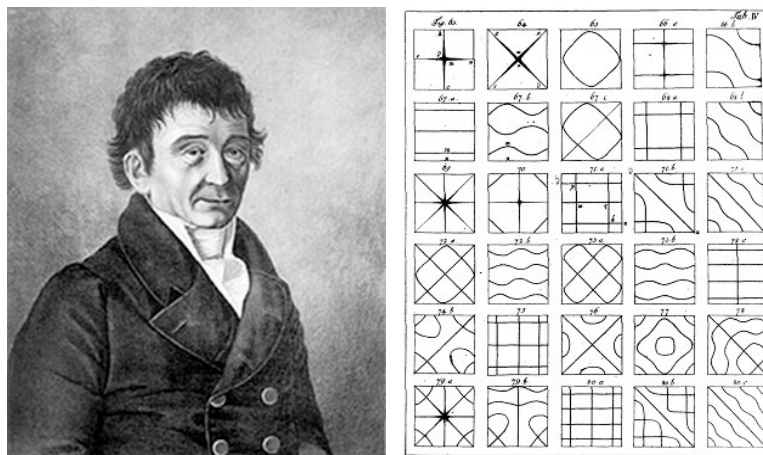


Figura 1: Ernst Chladni (1756 — 1827) junto con otra lámina de su tratado.

en direcciones opuestas, separadas por curvas en las que no hay vibración (estas curvas se conocen como líneas nodales). Para visualizar esto Chladni ideó el experimento siguiente: dispuso arena sobre la placa e indujo a vibrar esta última aplicándole un arco de violín como se muestra en la Figura 2. Detrás de este [enlace](#) y [este otro](#) puedes ver sendas re-

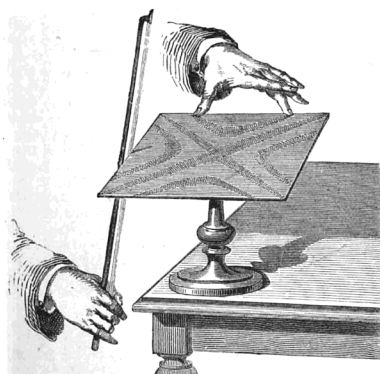


Figura 2: Experimento de Chladni, reproducido de la p. 26, fig. 12 de [Stone(1879)].

creaciones contemporáneas de este experimento. Observó entonces que, para vibraciones más agudas o más graves la arena se distribuía siguiendo distintos patrones, como repro- dujo en la Figura 1 (derecha); las *figuras de Chladni* cobraron notoriedad internacional. Chladni fue un hombre de la Ilustración, y sus intereses no se limitaron únicamente al estudio del sonido. De hecho, él fue el primero en proponer que los meteoritos tienen su origen en el espacio exterior [Chladni(1794)]. Su propuesta fue recibida con burlas por sus contemporáneos: la creencia general dictaba que los meteoritos eran de origen volcánico. Actualmente, se le considera el fundador de la investigación moderna sobre los meteoritos.

Chladni visitó la Academia de París en 1808 donde realizó una demostración de sus experimentos sobre vibraciones a la que asistió el mismísimo Napoleón. El gobernante quedó fascinado y propuso premiar a quien produjera la mejor explicación matemática del fenómeno.

La matemática francesa Sophie Germain ganó finalmente el premio en 1816 con su trabajo *Mémoire sur les Vibrations des Surfaces élastiques*, donde proporciona una expli- cación matemática bastante completa del fenómeno que observó Chladni. Los intereses de Germain también trascendieron la matemática. Sus escritos, publicados póstumamente, en



Figura 3: Sophie Germain (1776–1831).

Filosofía alcanzaron cierta notoriedad entre sus contemporáneos.

En el siguiente [vídeo](#) se muestra un experimento en el que podemos observar que:

- El tono (en lenguaje acústico, *frecuencia*) ha ido subiendo continuamente, de más grave a más agudo.
- La configuración de la arena cambia en una serie de tonos (frecuencias) muy precisos, cada vez más agudos.

Conviene recordar que históricamente se ha intentado explicar la naturaleza, en particular el fenómeno que hemos visto en el vídeo, mediante dos enfoques mutuamente excluyentes.

1. Un primer enfoque (el enfoque privilegiado antes de 1500) consiste en buscar la explicación en lo sobrenatural. Este enfoque sigue siendo popular en nuestros días: teorías conspirativas, fake-news, “ciencias” alternativas...



Figura 4: Fotograma de la película *Dr. Mabuse, der Spieler*, de Fritz Lang (1922).

2. Un segundo enfoque consiste en utilizar el método científico. Este enfoque, paradójicamente, ha perdido un poco de popularidad en estos últimos años; pero sin duda es el que más éxito y precisión ha logrado en explicar, predecir y transformar el universo (y el ser humano). Pioneros de esta corriente son Bacon, Hooke, Descartes, Galileo, Kepler, Newton, entre otros.

Nosotros nos decantaremos aquí por el segundo de estos enfoques. Anticipándonos un poco a lo que sigue más adelante:

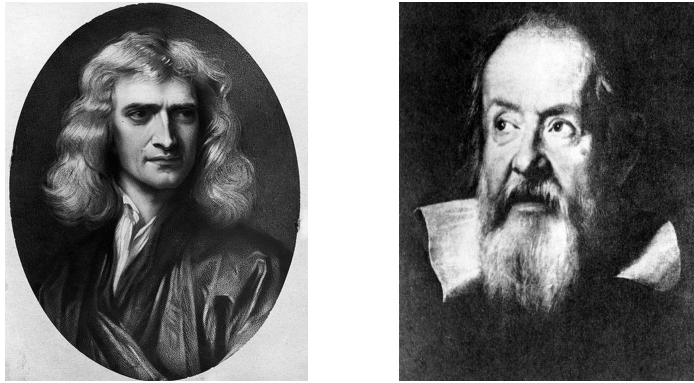


Figura 5: Isaac Newton (1642–1726), izquierda; Galileo Galilei (1564–1642), derecha.

- Esas frecuencias en las que tiene lugar un cambio de una figura a otra se llaman *armónicos fundamentales* de la membrana.
- En física se conocen como *modos propios* de vibración; en matemáticas también se llaman *autovalores* del Laplaciano.

En el resto de este texto vamos a describir estos objetos matemáticos de modo más preciso y vamos a ver algunas propiedades sorprendentes.

2. Las matemáticas del sonido: la cuerda vibrante

De costumbre, cualquier matemático que se proponga resolver un problema intentará atacar una versión simplificada del mismo. En el caso que nos ocupa, se trata de entender la matemática que está detrás de las figuras de Chladni y, por tanto, los mecanismos que se esconden detrás de las vibraciones de placas. Aunque este problema no está aún formulado con suficiente precisión matemática, es razonable intentar comprender previamente qué sucede en el caso, a priori más sencillo, de las *cuerdas vibrantes*.

¿Qué relación existe entre las cualidades del sonido: intensidad, tono y timbre (y duración, claro) y las características físicas de la cuerda que lo genera?.

Se conoce desde tiempos inmemoriales que hay una relación entre:

- La longitud de la cuerda (o su tensión) y el tono del sonido (agudo o grave).
- La amplitud de la onda en la cuerda y la intensidad del sonido (fuerte o suave).
- ¿Y el timbre? El timbre, recordemos, es la cualidad del sonido que nos permite distinguir, por ejemplo, entre una misma nota, tocada con la misma intensidad, por una trompeta o un violín. El análisis del timbre es más complicado. Hay que esperar hasta el siglo XVIII para tener una respuesta satisfactoria desde el punto de vista matemático.

Pitágoras descubrió (además de su célebre teorema) que los sonidos en consonancia corresponden a cuerdas cuyas longitudes satisfacen proporciones exactas. Los armónicos o frecuencias fundamentales de una cuerda vibrante son unos tonos (cada vez más agudos) que tienen la siguiente propiedad: hay unos puntos de la cuerda (llamados nodos) situados a igual distancia entre sí que no se mueven. Esto está representado en la Figura 7.



Figura 6: Pitágoras (570 – 495 A.C.) y su monocordio, según Franchino Gaffurio (1492).

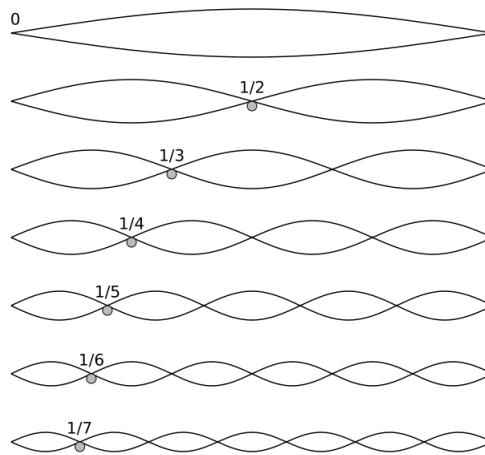


Figura 7: Armónicos obtenidos en una cuerda. El primer armónico lo puedes generar fácilmente en una guitarra aun sin saber tocar.

Este procedimiento, consistente en generar notas mediante división de una cuerda en una, dos, tres, cuatro, etc. partes iguales, permite obtener las doce notas de la escala cromática². El *timbre* característico de un instrumento musical es el resultado de que cuando este genera una nota (una vibración particular a una frecuencia determinada), simultáneamente aparecen vibraciones de otros armónicos a otras frecuencias, con amplitudes menores y distintas (estos parámetros, las frecuencias y las amplitudes de los armónicos son los que dan a cada instrumento su particular timbre).

Matemáticamente, el primer resultado satisfactorio en este sentido es debido a Joseph Fourier, un matemático francés, cuyo tratado [Fourier(1822)] sentó las bases de lo que hoy se conoce como *Análisis de Fourier*. El análisis de Fourier ha sido un elemento fundamental de algunas transformaciones más decisivas de nuestra sociedad en los últimos cincuenta años. Es la base de la rama de la ingeniería conocida como Teoría de la Señal, que está detrás de la generación digital de sonido e imágenes. Los trabajos de Fourier abarcan mucho más que el análisis de vibraciones; de hecho, proporcionan un marco muy general para analizar una gran variedad de fenómenos físicos. El resultado que vamos a desarrollar a continuación se puede enunciar como sigue.

²Esto no es estrictamente así, los armónicos difieren ligeramente de las notas obtenidas mediante el sistema de *temperamento justo*, que es el que se utiliza para afinar un piano, por ejemplo, y que consiste en dividir una octava en doce partes iguales, dando lugar así a los doce sonidos de la escala cromática.



Figura 8: Joseph Fourier (1768–1830).

Teorema 2.1 (El Teorema fundamental de las cuerdas, J. Fourier 1822) *Cualquier vibración de la cuerda (cualquier nota) se puede expresar como superposición (suma) de vibraciones a frecuencias fundamentales (armónicos fundamentales).*

Para entender por qué esto es cierto, debemos introducir el modelo matemático de las vibraciones de una cuerda. Estos son los ingredientes fundamentales.

- Consideramos una cuerda de densidad homogénea igual a uno y longitud $L > 0$.
- x mide la posición a lo largo de la cuerda: $x = 0$ es el extremo izquierdo y $x = L$ es el extremo derecho.
- $u(x)$ mide el desplazamiento de la cuerda en el punto x sobre la posición de reposo (horizontal).
- $u(x) > 0$ significa que estamos por encima de la posición de reposo, $u(x) < 0$ significa que estamos por debajo. La Figura 9 representa un ejemplo de función $u(x)$.

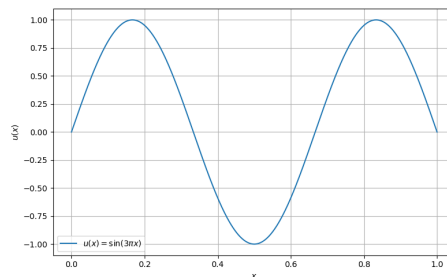


Figura 9: Un ejemplo de función que describe el desplazamiento de una cuerda.

Un número (frecuencia) λ es un armónico fundamental, si podemos encontrar una configuración $u(x)$ de la cuerda para la que la función $W(t, x) = \text{sen}(\lambda t)u(x)$ cumple la *ecuación de ondas*:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t, x),$$

con la cuerda fija en los extremos $u(0) = u(L) = 0$. La notación $\partial^2 W / \partial t^2$ representa derivar W dos veces con respecto a la variable t , tratando x como una constante, y de la misma forma $\partial^2 W / \partial x^2$ representa derivar dos veces W con respecto a la variable x manteniendo t constante.

La magnitud $W(t, x)$ describe el desplazamiento de la cuerda en el punto x en el instante de tiempo t . Esto esencialmente es una versión sofisticada de la ley de Hooke para los muelles: se interpreta la cuerda como el límite de una cadena formada por bolas unidas por muelles, cuando el número de bolas tiende a infinito, manteniendo la densidad constante igual a uno uniformemente en toda la cuerda. Si ya sabes algo de cálculo diferencial, encontrarás una explicación mucho más satisfactoria, por ejemplo, en [Ficken(1957)].

Lo importante aquí es que si derivamos dos veces $W(t, x)$ con respecto a t obtenemos:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(t, x) = -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda t)u(x),$$

y si hacemos lo mismo con respecto a la variable x resulta en:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t, x) = \operatorname{sen}(\lambda t) \frac{d^2 u}{dx^2}(x).$$

Igualando estas dos cantidades y cancelando el factor $\operatorname{sen}(\lambda t)$ que se tiene a ambos lados resulta en que la configuración $u(x)$ de la cuerda tiene que cumplir:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = \lambda^2 u(x), \quad 0 < x < L, \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Observamos ahora que la función $u(x) = \operatorname{sen}(\lambda x)$ tiene por derivada segunda ella misma, multiplicada por $-\lambda^2$. Si además se quiere que $u(x)$ se anule en los valores $x = 0$ y $x = L$, esto fuerza a que

$$u(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{L}\right),$$

siendo k un número entero no nulo. En otras palabras, los armónicos fundamentales de la cuerda son:

$$\frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \dots$$

Si la longitud de la cuerda es $L = \pi$, los armónicos son:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Observad que **se puede oír la longitud de una cuerda**: si conozco los armónicos (de hecho, basta con conocer uno de ellos) automáticamente puedo calcular la longitud de la cuerda.

3. De la cuerda a la membrana

El mismo fenómeno tiene lugar en un tambor. Hay ciertos tonos a los cuales la membrana vibra dejando puntos que no se mueven; dichos puntos se distribuyen a lo largo de ciertas curvas, conocidas como *curvas nodales*. Estas curvas pueden tener una geometría bastante complicada, véase la Figura 10. Otro factor que influye en que el problema de comprender las vibraciones de una membrana sea mucho más complicado que el de la cuerda radica en que la forma de la membrana (cuadrada, redonda, o incluso con formas más complicadas, como forma de estrella, que no es convexa) influye también en la geometría de las curvas nodales. Por ejemplo, se puede demostrar (rigurosamente) que la geometría de las curvas nodales y de los armónicos está relacionada con la dinámica del billar sobre la membrana. Una partícula sigue una trayectoria del billar en una membrana si, mientras permanece en el interior de la misma, viaja a velocidad constante a lo largo

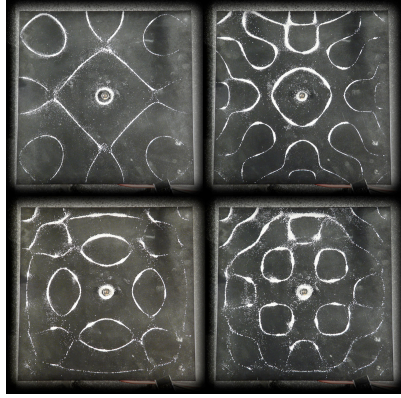


Figura 10: Curvas nodales para ciertos armónicos fundamentales.

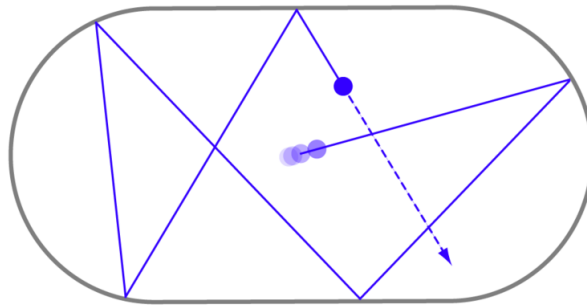


Figura 11: Trayectorias del billar en una membrana.

de una línea recta; cuando la partícula alcanza el borde de la membrana, entonces su velocidad cambia siguiendo las leyes de la óptica geométrica: el módulo de la velocidad no cambia, pero su dirección sí, siguiendo la regla de que el ángulo de incidencia con respecto a la recta tangente al borde en el punto de impacto debe ser igual al ángulo de reflexión, véase la Figura 11. En la Figura 12 se puede observar este fenómeno en el conocido como *estadio de Bunimovich*.

El cálculo de los armónicos es cualitativamente más complicado en el caso de membranas.

- Consideramos una membrana D de densidad homogénea igual a uno.
- (x, y) mide la posición a lo largo de la membrana.
- $u(x, y)$ mide el desplazamiento de la membrana en el punto (x, y) sobre la posición de reposo (horizontal).
- $u(x, y) > 0$ significa que estamos por encima de la posición de reposo.

Un número (frecuencia) λ es un armónico fundamental, si podemos encontrar una configuración $u(x, y)$ de la membrana que cumpla:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\right) = \lambda^2 u(x, y),$$

con la membrana fija en el borde $u(x, y) = 0$. La cantidad

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

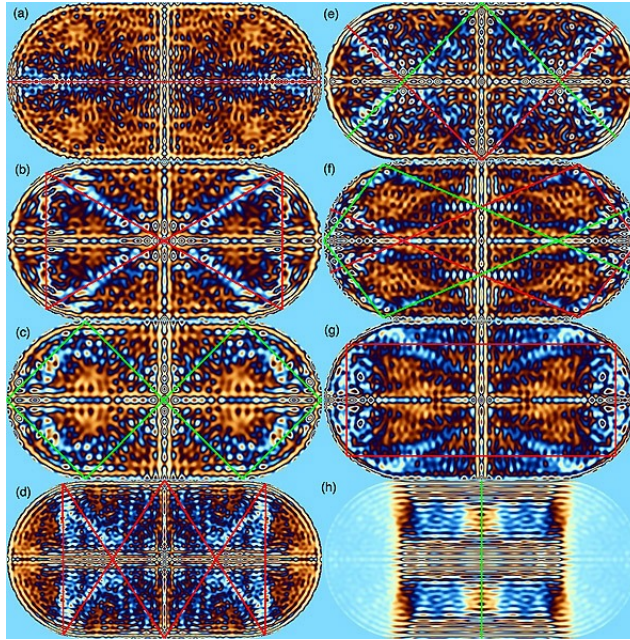


Figura 12: Modos de vibración propios del estadio de Bunimovich.

se conoce como *Laplaciano* de la función u . Observa que $\frac{1}{2}\Delta u(x, y)$ no es más que la media aritmética de las derivadas segundas de u con respecto a las dos direcciones naturales del plano.

La ecuación para las vibraciones de una membrana es mucho más complicada de resolver que la de las cuerdas. De hecho, no es posible en general encontrar una fórmula para la función $u(x, y)$, ni para las frecuencias λ , salvo para formas muy particulares de membranas, como rectángulos, círculos, elipses (para estas últimas, las fórmulas son ya bastante complicadas).

No obstante, se puede demostrar matemáticamente que sucede algo parecido a lo que ocurre con las cuerdas: los armónicos fundamentales de un tambor son números positivos que se pueden enumerar en una sucesión que crece hacia infinito:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots$$

Como hemos mencionado anteriormente, hay dos ejemplos para los que el cálculo de los armónicos es explícito: los tambores rectangulares y circulares.

- Si nuestro tambor D es un rectángulo de lados A y B , con vértice inferior izquierda en el origen, podemos comprobar que para cualesquiera números naturales n, m que elijamos,

$$u(x, y) = \text{sen} \left(\frac{\pi n x}{A} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi m y}{B} \right)$$

es una función que cumple $u(x, y) = 0$ en el borde de D y

$$-\Delta u(x, y) = \pi^2 \left(\frac{n^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} \right) u(x, y).$$

Los armónicos son, por tanto:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{n^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2}},$$

siendo m, n números naturales. En el caso particular en que $A = B = \pi$ obtenemos la sucesión:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{1^2 + 1^2}, \quad \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}, \quad 2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 + 2^2}, \quad \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 3^2}, \\ \sqrt{13} &= \sqrt{2^2 + 3^2}, \quad \sqrt{17} = \sqrt{1^2 + 4^2}, \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 + 3^2} \dots \end{aligned}$$

La Figura 13 representa los tres primeros modos propios de un tambor rectangular.

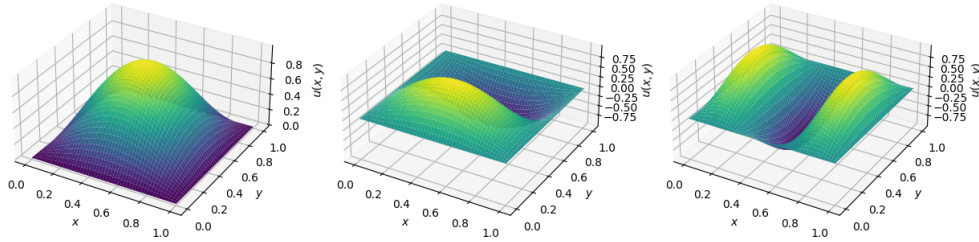


Figura 13: Gráfica de $u(x, y)$ para los tres primeros modos propios de un rectángulo.

- Si el tambor D es ahora un círculo de radio R , los armónicos son mucho más difíciles de expresar. Con bastante trabajo, se puede comprobar que son las soluciones estrictamente positivas de una familia de ecuaciones:

$$J_k(R\lambda) = 0,$$

donde k es un número natural, y J_k es una *función de Bessel*, que es un tipo particular

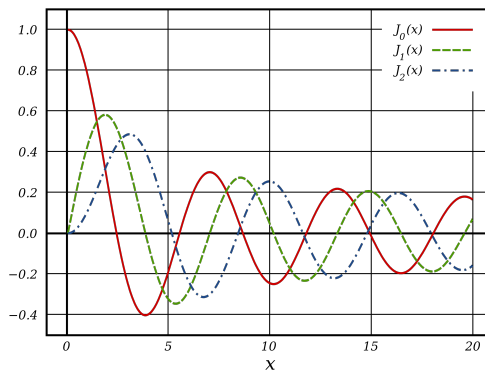


Figura 14: Gráfica de algunas funciones de Bessel.

de función que no es, en general, expresable en términos de funciones elementales (en la Figura 14 hemos representado algunas de ellas). En general, no es posible calcular explícitamente los armónicos λ , sólo se pueden aproximar numéricamente. No obstante, no es difícil ver que los armónicos de un círculo de radio R pueden calcularse a partir de los del círculo de radio uno dividiéndolos por R (discos grandes producen notas más graves que discos pequeños).

En general, el problema de calcular los armónicos es muy difícil; depende de la forma del tambor D .

4. Geometría Espectral

La rama de las matemáticas que estudia los armónicos fundamentales, las líneas nodales, etc. se conoce como **Geometría Espectral**.



Figura 15: No es este espectro...

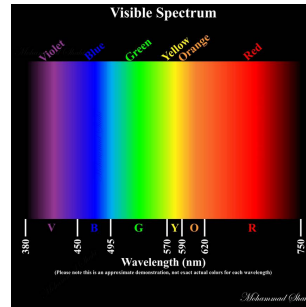


Figura 16: ... sino este.

El *espectro* es el conjunto de armónicos de una membrana. La terminología parece haber sido introducida por Newton [Newton(1672)] en el contexto de la óptica, refiriéndose a la gama de colores observados cuando la luz blanca se dispersaba a través de un prisma. De ahí, el término espectro pasó a referirse a la gráfica que representa la intensidad o la potencia de una onda (mecánica o electromagnética, como la luz) en función de la frecuencia.

La geometría espectral trata de entender las distintas relaciones que hay entre los armónicos de una membrana (su espectro) y sus propiedades geométricas (área, perímetro, e incluso propiedades dinámicas del billar que vimos anteriormente). Una pregunta muy natural en este contexto es la siguiente:

¿Es cierto o no que si dos membranas tienen los mismos armónicos fundamentales entonces tienen la misma forma?

El matemático Mark Kac la popularizó en los años 60 en su influyente artículo [Kac(1966)]. Conviene observar que esta pregunta es muchísimo más difícil que la análoga en el caso de cuerdas. En el caso de membranas, no conocemos una fórmula que permite calcular los armónicos, como sucedía con las cuerdas. Simplemente establecer que el espectro de un tambor rectangular y uno circular nunca pueden ser iguales no es algo inmediato.

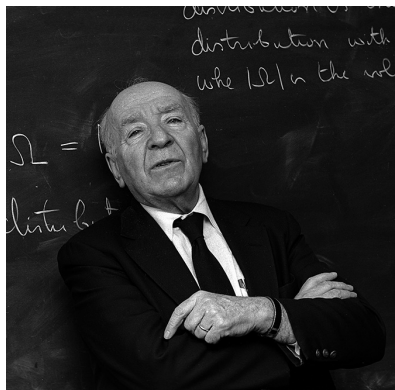


Figura 17: Mark Kac (1914–1984).

Con todo, en su artículo [Kac(1966)], Kac demostró lo siguiente:

Si una membrana tiene el mismo espectro que una membrana circular de radio R , entonces es un círculo de radio R .

La prueba de este hecho no es para nada elemental y utiliza dos resultados matemáticos de muy distinta naturaleza:

- La fórmula de Weyl para la función de contar armónicos, que explicaré en detalle más adelante. Este resultado permite extraer propiedades geométricas de una membrana a partir de sus armónicos.
- La solución del problema isoperimétrico: ¿qué región del plano de perímetro dado encierra la mayor área posible?

Pasaremos ahora a describir estas dos cuestiones.

5. Contar números: números primos y conjetura de Riemann

Antes de comenzar a hablar de la función de conteo de los armónicos de una membrana, vamos a hacer una pequeña digresión y hablar de otra función parecida que nos va a ser más fácil de comprender, la **función de conteo de los números primos**:

$$\pi(x) = \text{número de números primos más pequeños que } x.$$

La Figura 18 representa la gráfica de $\pi(x)$. Como se puede comprobar, es una función constante a trozos, y se produce un salto de una unidad cada vez que x es un número primo. Aunque es posible calcular $\pi(x)$ para cualquier valor x , esta labor se vuelve muy costosa si

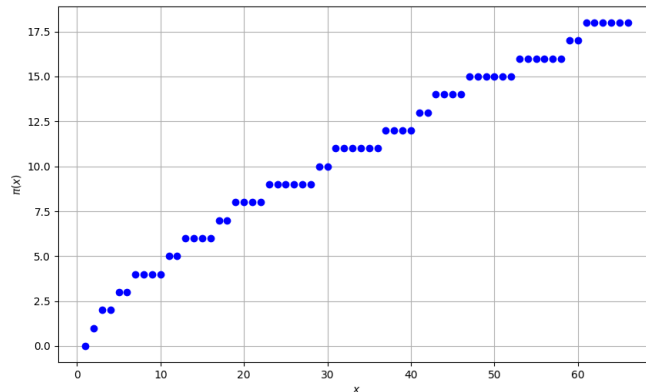


Figura 18: Gráfica de la función $\pi(x)$.

x es muy grande. Tiene sentido entonces preguntarse si hay una fórmula alternativa que permita expresar $\pi(x)$ en términos de funciones conocidas más sencillas (como polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logaritmos, etc.).

El matemático francés Jacques Hadamard demostró que si x es muy grande entonces:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x},$$

que es como se expresa matemáticamente de manera concisa que el *error relativo*

$$\frac{\pi(x) - \frac{x}{\log x}}{\frac{x}{\log x}} = \frac{\pi(x) \log x}{x} - 1$$

tiende a cero cuando x tiende a infinito. Arriba, $\log x$ designa el logaritmo neperiano de un número positivo x . En la Figura 19 se pueden ver las gráficas de estas dos funciones representadas para distintos rangos de valores de x . Desde el trabajo de Hadamard, se

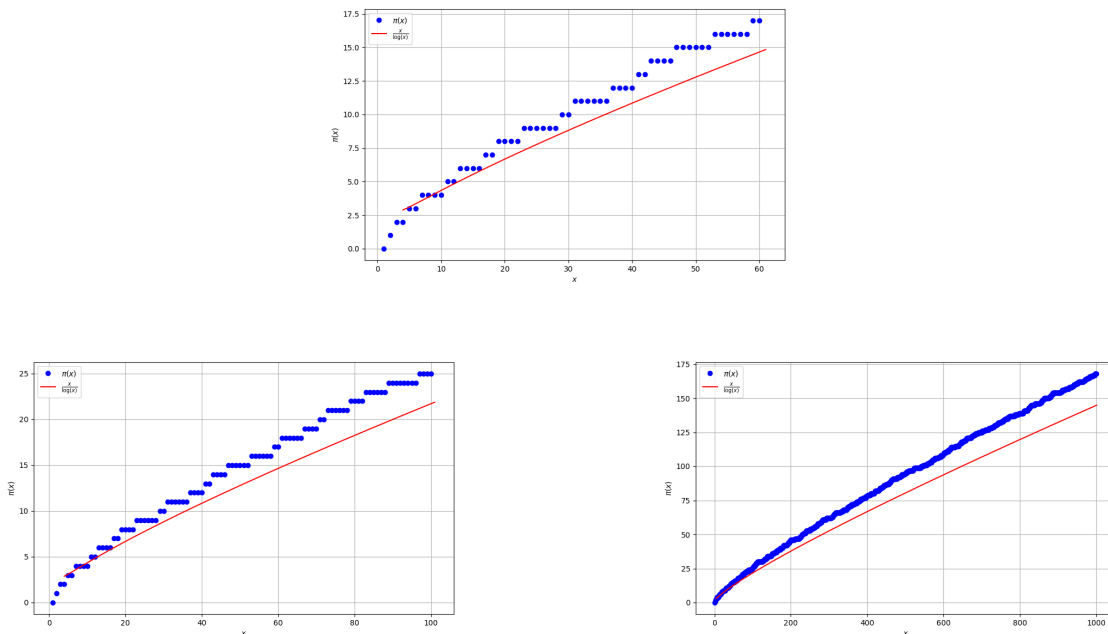


Figura 19: Las funciones $\pi(x)$ y $x/\log x$.

conocen mejores (esto es, más precisas) aproximaciones de $\pi(x)$. Encontrar una fórmula basada en funciones conocidas que permita aproximar $\pi(x)$ con toda la precisión que se desee está muy relacionado con el problema sin resolver más famoso de las matemáticas actuales: **La hipótesis de Riemann**.

Enunciar con más precisión esta conjetura nos alejaría demasiado de nuestro problema original, demostrar que se puede oír la forma de un tambor circular. Si quieres aprender más sobre esta fascinante parte de la matemática, te recomiendo que consultes [Bayer(2017)] o [Derbyshire(2003)].

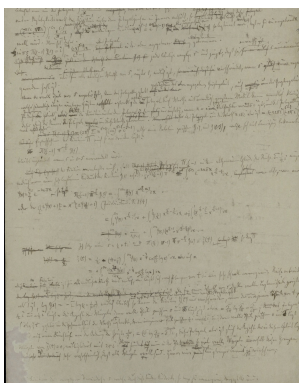
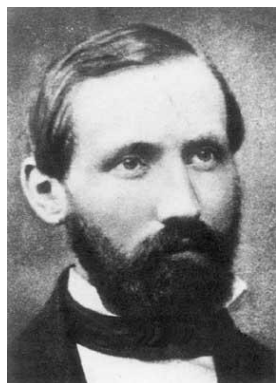


Figura 20: Bernhard Riemann (1826–1866) y el manuscrito donde escribió su conjetura.

6. De los armónicos a la geometría de la membrana: la fórmula de Weyl

Es posible demostrar que **dos membranas que tienen los mismos armónicos tienen necesariamente la misma área**. Esto es consecuencia del trabajo del matemático alemán Hermann Weyl en 1911, recogido en [Weyl(1911)].



Figura 21: Hermann Weyl (1885–1955).

Weyl introdujo la función de conteo de armónicos de una membrana D :

$$N_D(\lambda) = \text{número de armónicos de } D \text{ más pequeños que } \lambda.$$

Esta juega el mismo papel en el contexto de los armónicos de una membrana que la función $\pi(x)$ en el contexto de los números primos.

Weyl demostró que, si λ es muy grande, entonces:

$$N_D(\lambda) \approx \frac{\text{Área}(D)}{4\pi} \lambda^2,$$

o, en un lenguaje más preciso:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_D(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\text{Área}(D)}{4\pi}.$$

Nuevamente, esto quiere decir que el error relativo entre $N_D(\lambda)$ y $(\text{Área}(D)/4\pi)\lambda^2$ tiende a cero cuando λ se hace arbitrariamente grande. Este es el análogo en nuestro caso de la fórmula de aproximación de Hadamard $\pi(x) \approx x/\log x$.

Este resultado tiene por consecuencia que, si dos membranas D_1 y D_2 tienen los mismos armónicos, entonces tienen la misma área, puesto que en ese caso $N_{D_1}(\lambda) = N_{D_2}(\lambda)$ y, por el teorema de Weyl,

$$\frac{\text{Área}(D_1)}{4\pi} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{D_1}(\lambda)}{\lambda^2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_{D_2}(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\text{Área}(D_2)}{4\pi} \implies \text{Área}(D_1) = \text{Área}(D_2).$$

Es importante enfatizar que el teorema de Weyl, $N_D(\lambda) \approx (\text{Área}(D)/4\pi)\lambda^2$, implica que el comportamiento asintótico del número de armónicos de D menores que λ sólo depende del área de la membrana, al orden más grande. La **conjetura de Weyl** consiste en encontrar una mejor aproximación de la función de conteo de armónicos de una membrana D que involucre términos que crezcan más lentamente que $(\text{Área}(D)/4\pi)\lambda^2$:

$$N_D(\lambda) \approx \frac{\text{Área}(D)}{4\pi} \lambda^2 - \frac{\text{Perímetro}(D)}{4\pi} \lambda + R(\lambda)$$

con un error de tamaño

$$R(\lambda) \approx \sqrt{\lambda}.$$

La conjetura fue demostrada en 1980 por el matemático ruso Victor Ivrii, suponiendo ciertas hipótesis sobre las trayectorias del billar de D (la conjetura puede ser falsa sin esas hipótesis). El refinamiento de la fórmula de Weyl permite probar que, **si dos membranas**



Figura 22: Victor Ivrii (1949–).

tienen los mismos armónicos, entonces tienen el mismo perímetro. Este resultado se puede demostrar sin este refinamiento de la ley de Weyl (y, por tanto, sin ninguna restricción en la geometría de la membrana). La prueba alternativa involucra un objeto matemático mucho más complicado que **se construye únicamente a partir de los armónicos** (como ocurre con la función de conteo), **la traza del núcleo del calor**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}.$$

Este objeto está relacionado con las propiedades de conducción del calor de la membrana; pero ahondar en esto nos llevaría demasiado lejos. El lector interesado puede consultar el artículo original de Kac [Kac(1966)] para ahondar en las propiedades de este objeto.

En resumen, a través del trabajo de varios matemáticos a lo largo de los años, hemos demostrado que si una membrana D posee los mismos armónicos que los de una membrana que es un círculo de radio $R > 0$, entonces:

- La función de conteo y el núcleo del calor de la membrana tienen que ser los mismos que los del **círculo** de radio R .
- La membrana tiene que tener la misma **área** que el **círculo** de radio R , es decir

$$\text{Área}(D) = \pi R^2.$$

- La membrana tiene que tener el mismo **perímetro** que un **círculo** de radio R , es decir

$$\text{Perímetro}(D) = 2\pi R.$$

7. Se puede oír la forma de un tambor circular. El problema isoperimétrico

Estamos, a falta de un ingrediente, en condiciones de demostrar que:

Si una membrana tiene los mismos armónicos que un tambor circular, entonces necesariamente es un tambor circular.

El tercer ingrediente es puramente geométrico, e involucra **la respuesta al problema isoperimétrico**.

De entre todas las curvas cerradas del plano de perímetro fijado P , ¿cuál maximiza el área de la región que delimita?

El mito lo relaciona con la reina Dido de Cartago, como se describe en el siguiente texto procedente de un artículo de Carlos Beltrán e Irene Olmo aparecido en el diario *El País* [Beltrán and Olmo(2021)]:

“Unos 1000 años antes de nuestra era, Dido fue obligada a huir de su ciudad por las amenazas de su hermano, que no estaba dispuesto a compartir el trono, como era el deseo del anterior rey. Tras varias aventuras, llegó con una escuadra a las costas de África, donde un gobernante local le dio permiso para ocupar temporalmente el trozo de tierra que fuera capaz de cubrir con la piel de un toro. Dido ordenó cortar la piel en tiras finísimas y atarlas para obtener una cuerda de longitud considerable, y rodeó con ella un terreno en el que fundaría la célebre ciudad de Cartago.

Si la cuerda tenía una longitud fija y Dido quería tener una ciudad lo más grande posible, con una buena salida al mar, ¿qué forma habría de dibujar con la cuerda? ¿Sería mejor rodear un terreno cuadrado, o circular, o con forma de triángulo?”



Figura 23: *Dido construyendo Cartago* de Giovanni Battista Pittoni (1721), State Hermitage, S. Petersburgo.

La respuesta al **problema isoperimétrico** es.... solo hay una figura con esta propiedad, que es el **círculo** que tiene ese perímetro, naturalmente. Cualquier otra figura con ese perímetro encierra un área menor.

Si una membrana tiene los mismos armónicos que un tambor circular de radio $R > 0$, entonces necesariamente

- la membrana tiene que tener la misma **área** que un **círculo** de radio R .
- la membrana tiene que tener el mismo **perímetro** que un **círculo** de radio R .

Y la única membrana que tiene el área de un círculo de perímetro dado **ies ese mismo círculo!**.

8. ¿Y qué ocurre con otras membranas?

En toda generalidad, la respuesta a la pregunta “¿Se puede oír la forma de un tambor?” es NO. En 1992, los matemáticos Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert [Gordon et al.(1992)Gordon, Webb, and Wolpert] demostraron que la conjetura de Kac es falsa: es posible encontrar dos figuras distintas, en el sentido de que no podemos superponer una sobre la otra aplicando una traslación, simetría o giro, que poseen los mismos armónicos. En la Figura 24 puedes ver el contraejemplo encontrado por estos matemáticos. El descubrimiento de estos contraejemplos se basa muy fuertemente en el trabajo del

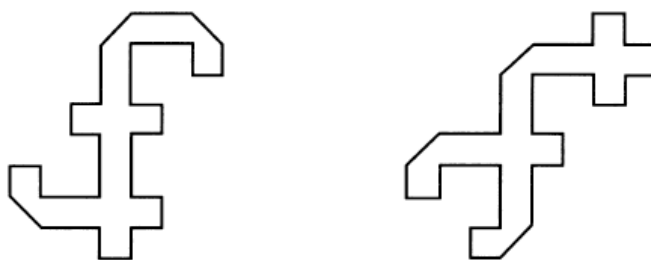


Figura 24: David Webb y Carolyn Gordon, con las dos membranas que tienen los mismos armónicos.

matemático japonés Toshikazu Sunada, que ideó en [Sunada(1985)] un método muy general y original para crear objetos que tienen el mismo espectro. Puedes reproducir la prueba

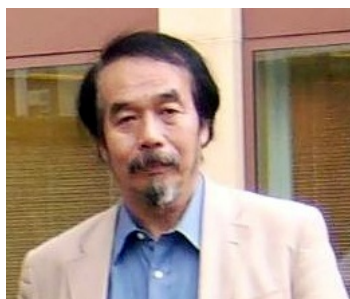


Figura 25: Toshikazu Sunada (1948-).

de Gordon, Webb y Wolpert en casa utilizando papiroflexia siguiendo las instrucciones de [Chapman(1995)].

¿Es el fin de esta historia? Definitivamente **NO**. Los tambores de Gordon *et al.* no son **convexos**, puesto que tienen ángulos “interiores”. Son ejemplos un poco artificiales; la pregunta:

¿Se puede oír la forma de cualquier tambor convexo (como hemos visto que ocurre con un tambor circular)?

sigue abierta a día de hoy. No obstante, ha habido cierto progreso en los últimos años. El resultado parcial más preciso a día de hoy es debido al matemático estadounidense Steve Zelditch, que demostró en [Zelditch(2009)] que dos membranas que poseen un eje de simetría (y cumplen algunas otras propiedades técnicas más difíciles de enunciar aquí)



Figura 26: Steve Morris Zelditch (1953–2022).

y que tienen el mismo espectro necesariamente tienen la misma forma. Además, junto con Hamid Hezari, demostró en [Hezari and Zelditch(2022)] que una membrana que tiene los mismos armónicos que una elipse de excentricidad pequeña necesariamente tiene forma de elipse.

Steve Zelditch falleció prematuramente hace tres años. Poco antes, se organizó una conferencia en su honor, en la que participaron matemáticos de primer nivel mundial. Las charlas de esa conferencia se grabaron y puedes consultarlas [aquí](#); aunque no comprendas el detalle de lo que se discute, puede ser interesante ver de primera mano el trabajo de un matemático profesional.

9. Algunas reflexiones finales: Matemáticas y realidad

A diferencia de las otras disciplinas, en Matemáticas no se revisan resultados conocidos y correctos. En Física no es así, por ejemplo: la **mecánica cuántica** se desarrolló a principios del siglo veinte como respuesta a las observaciones experimentales que contradecían la **mecánica clásica** desarrollada por Galileo y Newton, entre otros.

En Matemáticas esto no ocurre, puesto que la verdad matemática no es cambiante, se basa en última instancia en la verdad lógica. El mérito matemático de un resultado no solo tiene que ver con su corrección, sino en su capacidad de conectar problemas aparentemente sin relación, o descubrir patrones desconocidos.

Las Matemáticas son también muy generales. La misma teoría matemática sirve para explicar la física de las ondas sonoras, la mecánica cuántica, las olas en el mar, etc. Esto no deja de parecer un poco milagroso. El físico húngaro Eugene P. Wigner escribió una reflexión muy interesante al respecto: *La irrazonable efectividad de la Matemática en las ciencias naturales* [Wigner(1960)], que puedes consultar [aquí](#).

El precio a pagar por esta efectividad irrazonable es un lenguaje un poco antintuitivo. Esta es una de las razones que pueden estar detrás de que algunas personas no sientan mucha atracción hacia la disciplina.

La motivación de muchos matemáticos no radica exclusivamente en realizar algo útil (aunque, incluso a su pesar, muchísimas veces sea el caso), sino en descubrir algo *bello*. En palabras del físico-matemático belga David Ruelle:

“La belleza de las matemáticas radica en desvelar la simplicidad y complejidad que coexisten en el marco lógico tan rígido que viene impuesto por la propia disciplina.”

Este fragmento proviene de su libro [Ruelle(2007)], que proporciona una interesante, entretenida y accesible descripción del oficio del matemático.

Bibliografía

- [Bayer(2017)] Pilar Bayer. La hipótesis de Riemann: el gran reto pendiente. *Mètode Science Studies Journal*, 0(93):29–35, 2017. URL <https://ojs.uv.es/index.php/Metode/article/view/8903>. Available online.
- [Beltrán and Olmo(2021)] Carlos Beltrán and Irene Olmo. Sobre mates y mitos. *El País*, 2021. URL <https://elpais.com/ciencia/2021-01-04/sobre-mates-y-mitos.html>. Sección Café y Teoremas.
- [Chapman(1995)] S. J. Chapman. Drums that sound the same. *The American Mathematical Monthly*, 102(2):124–138, 1995. doi: 10.2307/2975346. URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2307/2975346>.
- [Chladni(1787)] Ernst Florens Friedrich Chladni. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Weidmanns Erben und Reich, Leipzig, 1787. URL <https://archive.org/details/entdeckungenuber00chla/mode/2up>.
- [Chladni(1794)] Ernst Florens Friedrich Chladni. *Ueber Feuer-Meteore: und über die mit denselben herabgefallenen Massen*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga and Leipzig, 1794. URL https://archive.org/details/bub_gb_mV5JAAAAcAAJ.
- [Derbyshire(2003)] John Derbyshire. *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. Joseph Henry Press, Washington, DC, 2003. ISBN 9780309085496. doi: 10.17226/10532. URL <https://nap.nationalacademies.org/catalog/10532/prime-obsession-bernhard-riemann-and-the-greatest-unsolved-problem-in>.
- [Ficken(1957)] F. A. Ficken. A derivation of the equation for a vibrating string. *The American Mathematical Monthly*, 64(3):155–157, 1957. doi: 10.2307/2310545. URL <https://doi.org/10.2307/2310545>.
- [Fourier(1822)] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot Père et Fils, Paris, 1822.
- [Gordon et al.(1992)Gordon, Webb, and Wolpert] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott A. Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1):134–138, 1992. doi: 10.1090/S0273-0979-1992-00266-8. URL <https://arxiv.org/abs/math/9207215>.
- [Hezari and Zelditch(2022)] Hamid Hezari and Steve Zelditch. One can hear the shape of ellipses of small eccentricity. *Ann. of Math. (2)*, 196(3):1083–1134, 2022. ISSN 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2022.196.3.4. URL <https://doi.org/10.4007/annals.2022.196.3.4>.
- [Kac(1966)] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4):1–23, 1966. ISSN 0002-9890,1930-0972. doi: 10.2307/2313748. URL <https://doi.org/10.2307/2313748>.
- [Newton(1672)] Isaac Newton. A letter of mr. isaac newton, professor of the mathematicks in the university of cambridge; containing his new theory about light and colors. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 6:3075–3087, 1672. doi: 10.1098/rstl.1671.0072. URL <https://doi.org/10.1098/rstl.1671.0072>.
- [Ruelle(2007)] David Ruelle. *The mathematician's brain*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. ISBN 978-0-691-12982-2; 0-691-12982-7.
- [Stone(1879)] William Henry Stone. *Elementary Lessons on Sound*. Macmillan and Co., London, 1879. URL <https://archive.org/details/elementarylesson00stonrich>.
- [Sunada(1985)] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Annals of Mathematics*, 121(1):169–186, 1985. doi: 10.2307/1971195. URL <https://annals.math.princeton.edu/1985/121-1/p04>.

- [Weyl(1911)] Hermann Weyl. Über die asymptotische verteilung der eigenwerte. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911: 110–117, 1911. URL <http://eudml.org/doc/58792>.
- [Wigner(1960)] Eugene P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1):1–14, 1960. doi: 10.1002/cpa.3160130102. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160130102>.
- [Zelditch(2009)] Steve Zelditch. Inverse spectral problem for analytic domains. II. \mathbb{Z}_2 -symmetric domains. *Ann. of Math. (2)*, 170(1):205–269, 2009. ISSN 0003-486X,1939-8980. doi: 10.4007/annals.2009.170.205. URL <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.205>.