Simetría eres tú

María Jesús Vázquez-Gallo [1]

ETSI Caminos, Canales y Puertos.
Universidad Politécnica de Madrid.

1 Introducción

Si te gusta jugar y hacerte preguntas... Si disfrutas con el conocimiento y la precisión... Si admiras lo bello, pero también lo útil... La matemática puede ser tu universo y la simetría uno de tus lugares favoritos.

Estarás pensando que tampoco es para tanto: ¿la simetría? Conoces esa sensación producida por una mariposa al cerrar sus alas, sensación de correspondencia exacta entre sus dos 'mitades', una reflejo de la otra. Sí, es una sensación agradable y estética que nos producen muchos otros seres vivos, incluidos los seres humanos, pero no parece que esto sea tan relevante.

Sensaciones parecidas nos despierta una estrella de mar o un molinillo de viento con el que jugamos a soplar, quizá porque los imaginamos girando sin perder su peculiar aspecto. Esa idea

Figura 1: Una mariposa o un molinillo nos sugieren simetrías [1]

de mover algo sin alterar su aspecto es la idea de simetría en matemáticas. Al hablar de simetría, no nos referimos al objeto en sí, sino a una transformación del objeto que no cambia su aspecto. Como idea puede parecer modesta, pero resulta que, además de conectar con lo estético, tanto en la naturaleza como en las creaciones humanas, la simetría está relacionada con la configuración de los seres vivos y del propio universo, como veremos aquí.

En el ámbito matemático, la idea de simetría se desarrolló a través del concepto abstracto de grupo, surgido a finales del siglo XVIII y que intentaremos comprender aquí. Desde entonces, este concepto se ha aplicado a cuestiones de física, química, biología, medicina o incluso de criptografía, para hacer seguras nuestras comunicaciones. Los grupos constituyen un área de investigación activa en el marco de la matemática teórica y también en combinación con muchas otras disciplinas.

[1] mariajesus.vazquez@upm.es

Quién sabe qué nuevos resultados sobre grupos o qué otras aplicaciones del concepto abstracto de grupo surgirán en el futuro. Y quién sabe si tú, que lees estas líneas, lo vivirás en primera persona.

A continuación, vamos a introducir el concepto de grupo de simetría con un ejemplo sencillo, intercalando algo de su larga historia. Después recorreremos algunas de sus variadas aplicaciones hasta el momento actual y terminaremos con unas breves conclusiones.

2 Grupos de simetría

Imagina que juegas con un molinillo de viento como los de la figura 2, con 4 aspas espaciadas regularmente en torno a un punto central al que están sujetas (puedes construirlo con tus propias manos [2]). Le pides a otra persona que observe el molinillo en reposo y que luego cierre los ojos, mientras tú juegas con él, girándolo siempre en el mismo sentido. Pongamos que, cuando esa persona vuelve a abrir los ojos, ve el molinillo exactamente con el mismo aspecto, no solo la misma forma y el mismo tamaño, sino también la misma posición de las aspas. Eso no significa que el molinillo haya estado quieto ¿verdad? Claro, podría haber dado exactamente una vuelta completa o varias... Pero también podría haber dado media vuelta... ¡O un cuarto de vuelta!, o también...

En este ejemplo, esos giros de ángulos específicos que no alteran la forma, ni el tamaño, ni la posición de nuestro molinillo, son simetrías de este objeto. Sin embargo, un giro de un tercio de vuelta no sería una simetría del molinillo, porque cambiaría la posición de las aspas ¡y la persona que juega contigo lo detectaría!

Si nuestro molino fuera uno de un parque eólico con 3 aspas equiespaciadas girando alrededor de punto central, ahora el giro de un tercio de vuelta sí sería una simetría del molino, y también el de dos tercios de vuelta o el de una vuelta completa, pero dejarían de serlo los giros de cuarto de vuelta, media vuelta y tres cuartos de vuelta.

Como una simetría de un objeto no altera su aspecto, aunque pueda mover sus puntos, es claro que, si aplicamos una simetría tras otra, esta composición es una nueva simetría del objeto. Por ejemplo, si giramos el molinillo de 4 aspas un cuarto de vuelta y luego media vuelta, en el mismo sentido, la composición consistirá en girar tres cuartos de vuelta, que es otra simetría del objeto.

2.1 ¿En qué consiste un grupo?

Esta sencilla observación es clave en el concepto de grupo (de simetrías de un objeto). Al componer dos de ellas se obtiene otra. En términos técnicos, se dice que la composición de simetrías es una operación cerrada.

Para ver qué otras propiedades caracterizan matemáticamente a un grupo frente a un conjunto de elementos sin más, abstraemos un poco, interpretando el molinillo como un cuadrado cuyos vértices son las puntas de las aspas y cuyo centro es el punto en torno al que giran, siempre en el mismo sentido. Fijado el sentido de giro, pensemos en qué giros de un cuadrado respecto a su

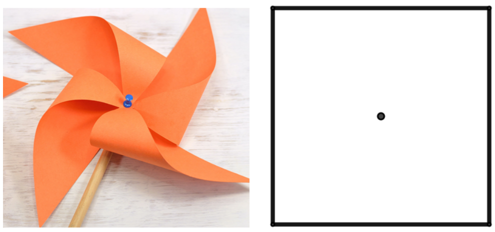

Figura 2: Cuadrado como abstracción de un molinillo ([3]) y elaboración propia.

centro no alteran su aspecto y, por tanto, son simetrías del cuadrado. Esencialmente, salvo añadir vueltas completas, tendremos cuatro de estos giros: giro de un cuarto de vuelta, de media vuelta, de tres cuartos de vuelta y de una vuelta completa. Observamos que:

- Si el resultado de aplicar un giro es la vuelta a la posición previa a dicho giro se le llama identidad. Consiste en dar una vuelta completa, es decir, girar $360° = 2\pi$ radianes. Este elemento del grupo también se denomina elemento neutro, ya que mantiene idéntica la posición de cualquier punto.
- Por ejemplo, si se gira un cuarto de vuelta ($90° = \pi/2$ radianes) y después se vuelve a girar tres cuartos de vuelta ($270° = 3\pi/2$ radianes), el molinillo vuelve a la posición inicial. Es decir, la composición de ambos giros (aplicar un giro después de otro) da la identidad".

  En esta situación decimos que los dos giros son inversos entre sí, cada giro deshace el efecto del otro. Puede ocurrir que el inverso de un giro sea el mismo giro, como al girar media vuelta, que son $180° = \pi$ radianes. Y cada giro tiene un único inverso (recuerda que suponíamos que giramos siempre en el mismo sentido).
- ¿Y si componemos tres giros de este tipo, digamos g_1, g_2 y g_3? ¿En qué orden hacerlo? Se comprueba que se obtiene lo mismo si:

  - actúa primero g_1 y, tras él, el giro composición que aplica primero g_2 y después g_3;

  - actúa primero la composición de g_1, en primer lugar, con g_2 después, y finalmente actúa g_3 sobre la composición anterior.

  Es decir, empleando el símbolo $\circ$ para la composición, se cumple la siguiente igualdad (fíjate que se lee de derecha a izquierda):

  $$(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1).$$

  En lenguaje formal, se dice que la composición es una operación asociativa.

De este modo, esta colección de giros no es una colección cualquiera, no es un conjunto sin más, sino que, cuando lo consideramos con la operación de composición, sucede que la operación es cerrada, es asociativa, hay un elemento identidad y cada elemento tiene un único inverso. Este es el concepto abstracto de grupo: un conjunto con una operación en él, para los que se cumplen las propiedades mencionadas. La operación con la que un conjunto es un grupo suele denominarse ley de grupo y, para resumir el comportamiento de un grupo, se emplea una tabla como la siguiente:

	I	g_{90}	g_{180}	g_{270}
I	I	g_{90}	g_{180}	g_{270}
g_{90}	g_{90}	g_{180}	g_{270}	I
g_{180}	g_{180}	g_{270}	I	g_{90}
g_{270}	g_{270}	I	g_{90}	g_{180}

En esta tabla de grupo, se colocan las simetrías o elementos del grupo en la primera fila y en la primera columna de la tabla, dejando libre la primera casilla, y en el mismo orden. Por ejemplo, en nuestro caso del grupo de giros de un cuadrado alrededor de su centro: $I, g_{90}, g_{180}, g_{270}$ (¡ojo! que aquí, por ejemplo en g_{90}, el subíndice indica el ángulo que se gira, ¡y no que hay 90 giros!). A continuación, en cada casilla restante de la tabla, se coloca la composición de la simetría que corresponde a su fila con la que corresponde a su columna. Por ejemplo, en la casilla de la fila de g_{90} y columna de g_{180}, se coloca la simetría composición: $g_{180} \circ g_{90} = g_{270}$. La propia tabla ya nos muestra que los 4 giros forman un grupo con la composición (porque se ve que es una operación cerrada, que hay una identidad, que cada elemento tiene su inverso y que hay asociatividad).

Grupos con la misma tabla se consideran 'iguales' o isomorfos. Es decir, la tabla identifica un tipo de grupo. Y cada grupo describe una manifestación de la idea de simetría. Este concepto de grupo es una abstracción, como también lo es el concepto de número, por ejemplo. Cada número describe una manifestación de la idea de cantidad: 5 dedos de una mano, 5 dedos de un pie, 5 pétalos de una flor, 5 patas de una estrella de mar, frente a 4 patas de un animal, 4 estaciones, 4 lados de un cuadrado…

Quizá lleves un tiempo pensando que, además de los giros respecto al centro de un cuadrado, hay otras transformaciones geométricas que no alteran su aspecto… Y seguramente has pensado en reflexiones, como las de la imagen de una mariposa, que no cambia su aspecto cuando la reflejamos respecto a un eje que atravesara su cuerpo por 'la mitad'. Efectivamente, podemos reflejar un cuadrado respecto a una de sus diagonales y nadie se habrá enterado. Y tampoco se enterarán si el eje de la reflexión es una recta que una los puntos medios de lados opuestos. ¡Acabamos de encontrar otras 4 simetrías del cuadrado! ¿Formarán otro grupo con la composición?

Enseguida te habrás dado cuenta de que las reflexiones de un cuadrado por sí mismas no pueden formar un grupo, porque entre ellas no está la identidad, por ejemplo. Pero, si las añadimos a la colección de 4 giros del cuadrado cuya tabla de grupo hemos visto antes, ahora sí se cumple todo lo necesario y obtenemos el grupo de las simetrías del cuadrado, consistente en 8 simetrías del objeto: 4 giros y 4 reflexiones. Este grupo se llama grupo diédrico de orden 4 y suele denotarse por D_4. En general, el grupo diédrico de orden n, D_n, es el grupo de las simetrías de un polígono regular de n lados y tiene $2n$ elementos: n giros y n reflexiones.

Por ejemplo, la tabla del grupo D_3 de las simetrías de un triángulo equilátero, sería la siguiente:

	I	g_{120}	g_{240}	L_1	L_2	L_3
I	I	g_{120}	g_{240}	L_1	L_2	L_3
g_{120}	g_{120}	g_{240}	I	L_3	L_1	L_2
g_{240}	g_{240}	I	g_{120}	L_2	L_3	L_1
L_1	L_1	L_2	L_3	I	g_{120}	g_{240}
L_2	L_2	L_3	L_1	g_{240}	I	g_{120}
L_3	L_3	L_1	L_2	g_{120}	g_{240}	I

con $L_i, i = 1, 2, 3$, la reflexión respecto a la mediana que parte del vértice del triángulo numerado con i. En la parte superior izquierda de la tabla, podemos reconocer una subtabla que mantiene las propiedades de grupo, y corresponde al grupo de los giros de un triángulo como subgrupo del grupo D_3.

En general, el grupo C_n de los n giros de un polígono regular de n lados alrededor de su centro es un grupo de los denominados cíclicos, en los que cada elemento del grupo se puede generar componiendo cierto número de veces un elemento básico. Por ejemplo, en este caso de los giros, el elemento básico es el giro de ángulo $360°/n$, o sea $2\pi/n$ radianes. La tabla del grupo D_3 responde

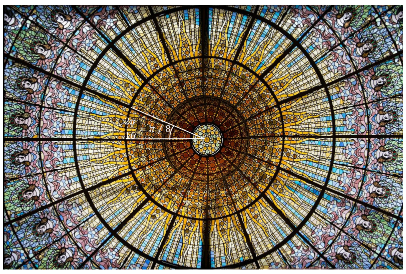

Figura 3: El generador del grupo C_{16} es un giro de ángulo $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ radianes, [3] y elaboración propia.

a una pregunta que seguramente rondaba tu cabeza y es que el orden en el que se componen dos simetrías puede alterar el resultado, es decir, que una ley de grupo no siempre es conmutativa. La ley del grupo de los giros de un polígono regular sí es conmutativa, pero la del grupo D_3 de simetrías de un triángulo equilátero no lo es. A los grupos con ley conmutativa se los llama también abelianos -por N.H. Abel (1802-1829)- del que hablaremos en breve y que quizá has oído mencionar en relación con los premios Abel a la investigación matemática, establecidos con motivo del segundo centenario del nacimiento de este gran matemático noruego.

¿Te atreverías ahora a construir la tabla del grupo D_4? Solo hay que ampliar la tabla del subgrupo de los giros del cuadrado, añadiendo las reflexiones y calcular las nuevas composiciones. En algunos casos es muy fácil, observando por ejemplo que una reflexión es su propia inversa.

2.2 Estructuras matemáticas

Estamos contemplando un ejemplo de estructura matemática, la estructura de grupo: una colección de objetos con una operación entre ellos que cumple determinadas propiedades. La estructura de grupo es una de las muchas estructuras que encontrarás si buceas en las matemáticas y que constituyen potentes recursos para el razonamiento y el reconocimiento de patrones. Dos colecciones de elementos pueden ser distintas, pero pueden poseer la misma estructura (ser isomorfas) y eso permite tratar a las dos colecciones de la misma manera y trasladar resultados de un contexto a otro.

Por ejemplo, si piensas en las posibles reordenaciones o permutaciones de un conjunto de tres elementos, digamos $\{a, b, c\}$, que son $\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$, puedes ver cada permutación como una simetría del conjunto $\{a, b, c\}$, puesto que una reordenación de los elementos de un conjunto no cambia el conjunto en sí. Entonces, es sencillo comprobar que el conjunto de estas seis permutaciones es un grupo con la composición, conocido como grupo simétrico de 3 elementos o S_3. Y si construyes su tabla, comprobarás que es isomorfo al grupo D_3, el de las seis simetrías de un triángulo equilátero.

Sin embargo, los grupos S_4 y D_4 no son isomorfos. ¿Encuentras una razón sencilla para demostrar que no pueden tener la misma tabla?

Este grupo simétrico no es un ejemplo más de grupo. Se podría decir que es ¡el rey de los grupos!, pues un teorema de Cayley (1821-1895) afirma que todo grupo con un número finito de elementos es isomorfo a un subgrupo de un grupo simétrico, es decir, ambos tienen la misma tabla.

De hecho, Cayley se percató de que, con tamaños adecuados, las permutaciones (con la composición), las matrices (con la operación producto) y los cuaterniones (también con el producto) compartían la misma estructura. Sus trabajos con matrices fueron de gran utilidad en los inicios de la mecánica cuántica. Antes de que surgiera el concepto axiomático de grupo, tras los resultados de Cayley, se trabajaba directamente con colecciones de permutaciones. Eso tuvo tiempo de

Figura 4: Siglo XIX: N. H. Abel, É. Galois y A. Cayley, [4].

hacer É. Galois (1811-1832) en su corta vida, al proponer una teoría revolucionaria, según la cual, el que exista una fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación polinómica -una fórmula que involucre raíces, como la que solemos aprender para resolver una ecuación de segundo gradodepende del comportamiento de la colección de permutaciones de las supuestas soluciones, es decir, del grupo de simetrías del conjunto de soluciones de la ecuación, que acabó llamándose grupo de Galois.

En relación con los trabajos de Galois, el matemático noruego Abel, que también murió muy joven, demostró en 1824 que lo que tanto se había buscado durante tres siglos -esto es, una fórmula algebraica que diera las soluciones de una ecuación polinómica de grado 5 en función de sus coeficientes- ¡no podía existir! [5]. La historia de esta búsqueda la cuenta Mario Livio en su libro [6]. La demostración opera por reducción al absurdo: esto es, supone que existe tal fórmula y llega a una contradicción que muestra que esa fórmula no puede existir.

En este caso, se comprueba que, si existiera dicha fórmula, el grupo simétrico S_5, con sus 120 permutaciones, debería poseer una cadena de subgrupos normales -un subgrupo H de un grupo G es normal cuando los elementos de G conmutan con los de H-, todos ellos con un número primo de elementos. Eso ocurre con los grupos simétricos de orden 2, 3 y 4, pero resulta que S_5 posee un subgrupo normal de 60 elementos (el de las permutaciones pares, es decir, permutaciones que se pueden escribir como composición de un número par de intercambios). Se puede ver que este subgrupo de las permutaciones pares, con 60 elementos, es un grupo simple, o sea, no posee subgrupos normales no triviales. Pero entonces, en la cadena de subgrupos normales de S_5, este subgrupo de permutaciones pares tendría un número de elementos que no es primo. ¡Y habríamos llegado a una contradicción!

Para ir terminando con estas nociones básicas sobre estructuras matemáticas, ¿te apetece otro ejemplo de grupos isomorfos? Pues bien, los giros alrededor de un punto, de cualquier ángulo, con la operación de composición también constituyen un grupo -¡esta vez con infinitos elementos!- que es isomorfo a otro grupo no finito, el de los números complejos de módulo 1 con la multiplicación, y también es isomorfo a cierto grupo de matrices cuadradas con la multiplicación [7].

Si el ejemplo anterior no te suena mucho, aquí va otro que a la fuerza suena: trabajando con vibraciones de un puente en ingeniería o con sonidos en música, la estructura matemática de espacio vectorial -que se construye a partir de la estructura de cuerpo y esta a su vez a partir de la de grupo- permite estudiar ondas complicadas como combinación de ondas muy sencillas, que se llaman armónicas. Cada onda se ve como un elemento de cierto espacio vectorial. Tu timbre de voz es una de estas combinaciones particulares de ondas, sí, es una combinación de vectores de cierto espacio vectorial. Y resulta que un puente posee unos modos elementales de vibración, que posibilitan la predicción de su comportamiento al vibrar, y que también son vectores de un espacio vectorial, muy especiales, eso sí.

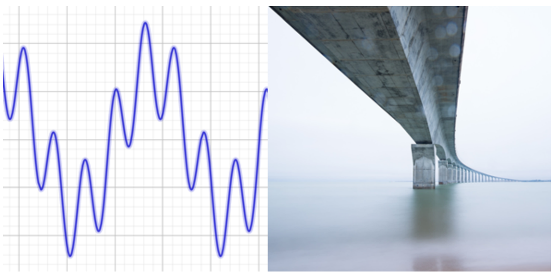

Figura 5: Ondas complicadas como combinación de ondas sencillas, [8].

3 Aplicaciones

Hay numerosas cuestiones de la matemática en las que el concepto de grupo y los vinculados con él, como el de invariantes o el de simetrías, tienen un papel importante.

Un ejemplo muy frecuente es el problema de clasificar elementos de un espacio dado, como cuando distribuimos en cajones nuestras prendas de ropa según su tipo. Para clasificar, se construyen espacios cociente, empezando por establecer una relación de equivalencia de forma que elementos equivalentes del espacio inicial pertenecen a la misma clase -al mismo cajón- y cada elemento del espacio cociente representa a una de esas clases, como una etiqueta en un cajón representa a los objetos que están contenidos en él.

Para construir espacios cociente con buenas propiedades geométricas, D. Mumford (1937-) empleó ideas de la teoría clásica de invariantes para desarrollar la teoría geométrica de invariantes -GIT, por sus siglas en inglés-, por lo que recibió en 1974 la medalla Fields -otro de los premios internacionales a descubrimientos sobresalientes en matemáticas realizados por personas que no superen los 40 años-. En GIT, la relación de equivalencia viene dada precisamente por un grupo de transformaciones que actúan en una variedad algebraica (dada por los ceros de unos cuantos polinomios) o en espacios más generales como los llamados esquemas, de forma que las clases de equivalencia son las órbitas buenas o estables del grupo y de este modo el espacio cociente resultante tiene propiedades geométricas razonables. Se construyeron así espacios de moduli –el término moduli indica variación y lo introdujo B. Riemann a mediados del siglo XIX- que parametrizan objetos como curvas de cierto tipo (a veces con estructura extra, como un conjunto de puntos marcados) u otros objetos. Estos nuevos espacios tienen sus propias características geométricas y topológicas [9] y, en el contexto de la física matemática, algunos de ellos se interpretan como espacios de soluciones de ciertas ecuaciones relevantes para la teoría de supercuerdas o para el concepto de supersimetría (SUSY, por sus siglas en inglés).

Por cierto, y ya que los grupos son útiles para clasificar, surge el problema de clasificación de los propios grupos. Para los grupos finitos, el teorema de Jordan-Hölder, de finales del siglo XIX, implica que cada grupo finito se puede construir usando grupos finitos simples como ladrillos básicos, es decir, los grupos finitos simples son, a los grupos finitos, lo que los números primos a los números enteros, ya que cada número entero se descompone en producto de factores primos. Y para los grupos finitos simples, el teorema 'enorme' afirma que cada grupo finito simple, o bien es uno entre los llamados grupos esporádicos (hay una lista) o, si no, entonces pertenece a una de las 18 familias posibles, pero, ¡en cada una de estas familias hay infinitos grupos!

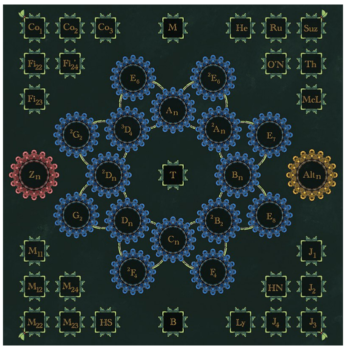

Figura 6: Mapa para la clasificación de grupos finitos, [10].

Lo de llamar enorme al teorema viene de que consiste en miles de páginas de resultados de una centena de matemáticos que comenzaron a demostrarse hacia 1940 y la ingente tarea culminó a principios del siglo XXI. Actualmente se trabaja en simplificar demostraciones y en el llamado problema de extensión, es decir, determinar las reglas de construcción de nuevos grupos a partir de grupos finitos simples.

Para los grupos infinitos, dada la inmensa variedad de formas en las que aparecen estos grupos, todavía no existe nada parecido a una clasificación, así que ahí hay mucho por explorar...

De una sencilla clasificación de ropa en los cajones de tu armario a los espacios de moduli o a la clasificación de los propios grupos... Podría parecer que este enfoque abstracto, que incide en los conceptos de invariancia por un grupo y de grupo de simetrías, es innecesariamente complicado, pero sorprendentemente es el que ha permitido predecir la existencia de ciertas partículas fundamentales subatómicas en física o el que ayuda a comprender la estructura de las proteínas en biología, como veremos a continuación.

3.1 Grupos de simetría en física

Una de las señales de la profunda conexión de las leyes físicas con el concepto abstracto de grupo de simetrías y sus invariantes puede verse en el trabajo de Emmy Noether (1882-1935), hija del también matemático Max Noether (1844-1921), quien, superando todas las dificultades propias de la época, fue capaz de conectar la simetría del espacio y del tiempo con la compleja dinámica del mundo físico [11]. Emmy Noether realizó una tesis doctoral sobre invariantes algebraicos y demostró el grandioso teorema de Noether: 'Por cada simetría continua de las leyes físicas ha de existir una ley de conservación. Por cada ley de conservación, ha de existir una simetría continua'. De este modo, el que las leyes físicas sean invariantes respecto a cualquier traslación en el espacio

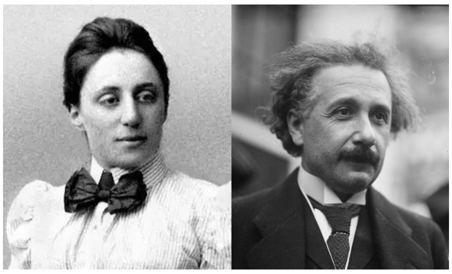

Figura 7: Emmy Noether y Albert Einstein, [12].

da lugar a la ley de conservación del momento o cantidad de movimiento -la masa por el vector velocidad, en mecánica clásica-. Es lo que sucede cuando chocan dos bolas de billar pero también cuando interaccionan los átomos. Y al revés, el hecho comprobado de que el momento se conserva, implica que las leyes físicas no cambian al variar la posición en el espacio. Análogamente, la invariancia de las leyes físicas respecto a rotaciones equivale a la ley de conservación del momento angular y el que las leyes físicas permanezcan invariantes bajo traslaciones en el tiempo equivale a la ley de conservación de la energía.

Este resultado de E. Noether fue muy valorado por el propio A. Einstein (1879-1955) en el marco de su teoría de la relatividad general, concebida como unificadora del espacio, el tiempo y la gravedad, sin necesidad de realizar experimentos específicos, estableciendo que las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas -bajo cualquier cambio en las coordenadas del espacio-tiempo-. Así que la relatividad general expresa una simetría continua de las leyes físicas, como en el teorema de Noether.

Y todavía más, en mecánica cuántica, a nivel subatómico, la existencia de algunas partículas fundamentales como los quarks, que forman parte de protones y neutrones, se predijo gracias a los grupos de simetría, en este caso gracias a los grupos de Lie y a las llamadas representaciones de un grupo [13]. M. Gell-Mann (1929-2019) conjeturó que debía existir cierta partícula, la $\Omega-$, con una serie de propiedades determinadas por la simetría, ¡dos años antes de que se la detectara en un acelerador, con las mismas propiedades predichas por Gell-Mann!, lo que le valió el premio Nobel en 1969.

Actualmente se busca una visión unificadora global que conectaría la mecánica cuántica con la gravedad. Películas de ciencia ficción como "Interestellar", de C. Nolan (2019), abordan este tema.

El modelo estándar describe las fuerzas de electromagnetismo, interacción fuerte e interacción débil, a través de los llamados grupos de simetría *gauge* (calibre o escala), pero aún falta por incluir la gravedad de manera satisfactoria, incluso se debate sobre la existencia de la supersimetría. Quizá la eventual teoría física global se escriba en términos de ¡invariancia por ciertos grupos de simetría!

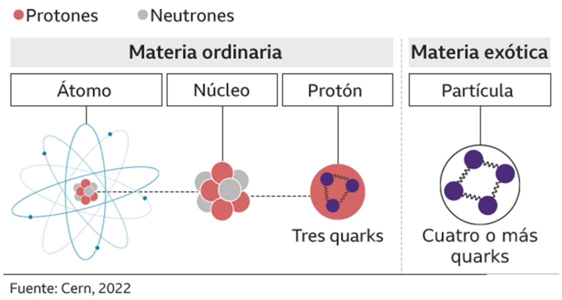

Figura 8: Los grupos de simetría han ayudado a descubrir ciertas partículas subatómicas, [14].

En el caso de las teorías *gauge*, como el electromagnetismo, se usan unas funciones complejas llamadas campos, en lugar de fuerzas. Sin embargo, estas teorías se describen con el módulo de estos campos complejos, por lo que se pierde la información de la fase angular. En el caso del electromagnetismo, esta invariancia bajo cambios de fase [15] se traduce, a través del teorema de Noether, ¡en la conservación de la carga eléctrica!

La faceta matemática de esta visión unificadora, que propone relaciones entre conceptos de áreas muy diversas como las representaciones de grupos y el análisis armónico, se conoce como Programa Langlands, por R. Langlands (1936-), el matemático que ocupa actualmente el mismo despacho que tuvo Einstein en Princeton [16] y que recibió el Premio Abel en 2018. A pesar de lo ambicioso del programa, en 2024 se anunciaron prometedores avances en la conjetura de Langlands geométrica, que se encuentran en fase de validación por la comunidad matemática.

Así que los grupos de simetría se muestran como una potente herramienta de clasificación conectada con las leyes de la física, pero también con el comportamiento químico y biológico, como veremos a continuación.

3.2 Grupos de simetría en otras ciencias

Seguramente habrás oído hablar de reacciones químicas alguna vez. Los modelos atómicos actuales proponen el concepto de orbitales o regiones donde la probabilidad de encontrar a los electrones se maximiza. Los orbitales moleculares se obtienen por combinación de orbitales atómicos y, para que dos orbitales se solapen, sus grupos de simetría deben tener unas propiedades compatibles. Así, los grupos de simetría permiten clasificar orbitales atómicos y moleculares y, por tanto, sirven

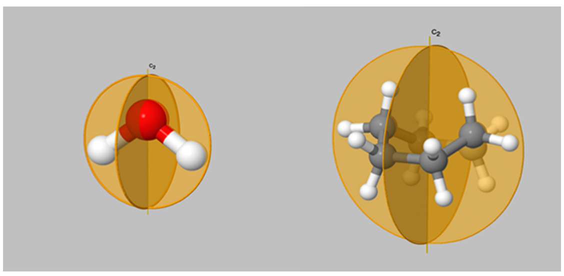

Figura 9: Los grupos de simetría permite predecir comportamientos moleculares, [17].

para predecir el comportamiento de los elementos en las reacciones químicas.

Por ejemplo, el agua y el ciclohexano (con el que se produce nailon) poseen el mismo grupo de simetría (ver figura 9), que incluye cuatro transformaciones que dejan la molécula invariante (dos reflexiones respecto a sendos planos y dos giros respecto a la recta intersección de los dos planos anteriores). Conocido el grupo de simetría molecular, se pueden adivinar una serie de propiedades. Entre ellas, el comportamiento de las vibraciones de los enlaces en moléculas sencillas, midiéndolas bajo luz infrarroja.

En los materiales cristalinos, los átomos y las moléculas se distribuyen de manera ordenada y paralela de acuerdo con ciertas reglas de simetría formando una red. En 1891, el geómetra y cristalógrafo ruso E.S. Fedorov (1853-1919) clasificó las redes cristalinas por medio de la teoría de grupos, resolviendo uno de los problemas fundamentales de la cristalografía. En sus inicios, la cristalografía se incluía como parte de la mineralogía, pero pronto se conectó con otras disciplinas como la química y la biología.

Y, si hablamos de vida, las proteínas son las sustancias constituyentes de la materia viva que regulan la actividad celular, entre otras muchas funciones. Cada proteína se conforma como una cadena estable de aminoácidos dictada por el material genético. Hay una variedad enorme de proteínas en los seres vivos, sin que todavía esté claro cuántas diferentes existen, pero todas ellas se forman a partir de unos cuantos tipos distintos de aminoácidos. A veces, por efectos ambientales, por herencia o por la propia evolución, sucede una mutación en un gen y se altera la cadena de aminoácidos de las proteínas que lo expresan, pudiendo causar diversas enfermedades. Así que una proteína defectuosa puede originar enfermedades o una proteína presente en un virus puede facilitar su entrada en nuestro organismo, pero a la vez algunas de las vacunas frente a virus están basadas en el diseño de proteínas adecuadas. Otras veces, las proteínas que constituyen nuestros anticuerpos interpretan a nuestras propias moléculas como antígenos atacantes y desencadenan respuestas inesperadas, generando enfermedades autoinmunes, a veces muy graves. En este tipo de enfermedades, la naturaleza exacta de la interacción anticuerpo-antígeno, en parte geométrica, todavía plantea muchas incógnitas.

Para entender el comportamiento de una proteína es útil conocer su estructura tridimensional molecular, que se origina por plegado a partir de la cadena lineal de aminoácidos. El método más común para determinar esta estructura es la difracción por rayos X, que consiste en hacer interferir un haz de rayos X con un cristal de proteína, es decir, con una agrupación ordenada de moléculas de proteína, obtenida por un proceso de cristalización bastante trabajoso. De esta forma, se ha construido la base de datos Protein Data Bank [18], que contiene archivos con las coordenadas tridimensionales de cientos de miles de proteínas. Por lo que hemos visto, el grupo de simetrías de

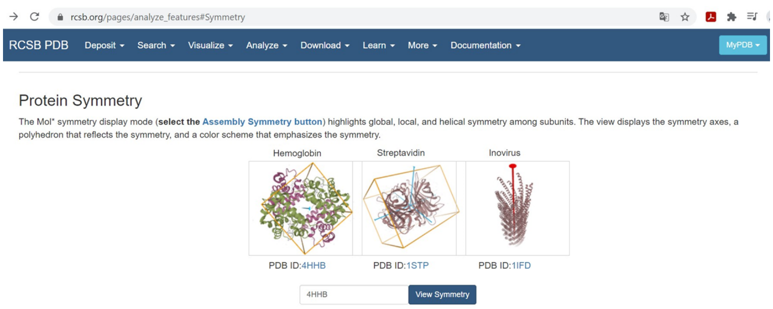

Figura 10: Los grupos de simetría ayudan a modelar proteínas, [19].

un objeto es algo intrínsecamente relacionado con su forma y medidas, con su geometría. Y jugar con las simetrías de las proteínas es lo que han hecho en el Protein Data Bank para clasificarlas y visualizar su estructura a través de esquemas o caricaturas.

Aplicando teoría de grupos, se ha obtenido una lista completa de los patrones de movimiento global asociados a proteínas con grupo de simetría cíclico, diédrico, tetraédrico (grupo de simetrías de un tetraedro) u octaédrico (grupo de simetrías de un octaedro) [20]. Las proteínas con grupos cíclicos de orden 2 suelen especializarse en funciones que requieren direccionalidad o distinción de mitades como la formación de tubos o la interacción con membranas. Los grupos de simetría diédricos proporcionan mayor variedad de interfaces y conducen a proteínas con mayor estabilidad. Las simetrías helicoidales, con invariancia por traslación más rotación, se vinculan a la formación de filamentos extendidos. Además, desde 2018, el programa de inteligencia artificial AlphaFold ([21])

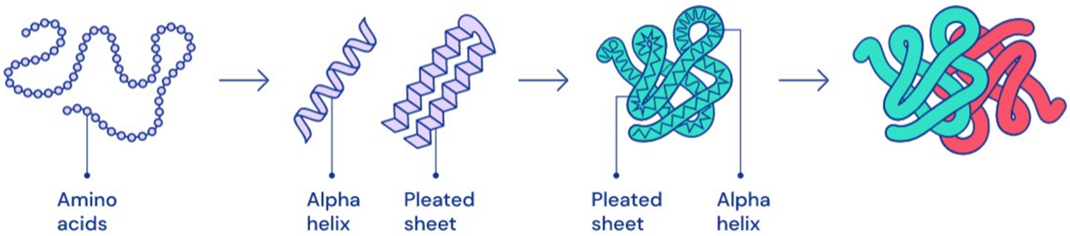

Figura 11: El proceso de plegado 3D de proteínas aún plantea preguntas, [21].

utiliza aprendizaje profundo para realizar con rapidez asombrosa predicciones de la estructura 3D de las proteínas a partir de la cadena de aminoácidos, si bien no aporta información sobre cómo se pliega esta cadena para llegar a la estructura tridimensional de la proteína.

El proyecto computacional distribuido Folding@home [22] simula la dinámica de proteínas implicadas en diversas enfermedades. Se trata de un proyecto de ciencia ciudadana en el que la contribución de cientos de miles de ordenadores de personas voluntarias, realizando simulaciones de plegado de proteínas, ayuda a entender cómo las proteínas alcanzan su estructura final.

La relación entre estructura y función, mediada por los grupos de simetría, también comienza a tenerse en cuenta al estudiar conectomas, que son redes de conexiones neuronales. Al igual que los grupos de simetría gauge ayudan a describir las fuerzas de la mecánica cuántica en la física, la invariancia por una serie de grupos puede ayudar a caracterizar las redes neuronales relacionadas con cierta función de un organismo. Por ejemplo, se ha relacionado la locomoción de ciertos gusanos con algunos grupos cíclicos determinados a partir del grupo de simetría del circuito neuronal correspondiente [23].

En resumen, con una mayor comprensión de la interrelación entre estructura y función, vinculada a conceptos teóricos como la invariancia por grupos de simetría, podría mejorar el conocimiento del organismo humano y la lucha contra algunas enfermedades.

4 Conclusiones

La predilección estética por aquello que posee grupos de simetría más grandes; la sorpresa ante la ruptura de patrones simétricos; los algoritmos para encriptar mensajes; la selección natural por razones funcionales a nivel molecular, a nivel celular y a nivel de organismo; las teorías físicas sobre el comportamiento del universo... De lo más pequeño a lo más grande, de lo superficial a lo profundo, de lo estético a lo funcional, los grupos de simetría nos dan una medida del mundo y de nosotros mismos.

¿Qué es simetría? ... Y tú me lo preguntas ... Simetría eres tú ... [24]

Y es que tener en cuenta lo que permanece sin alterarse, pese a los cambios, ayuda a entender cuestiones dinámicas. Así, la matemática abstracta, a través del concepto de invariantes por una transformación o simetría, junto con el concepto de grupo de simetrías, permite avanzar en cuestiones aparentemente inconexas. Entre otras, diferentes geometrías, creaciones humanas, teorías físicas, partículas elementales, codificación de mensajes o la función de estructuras biológicas.

Bibliografía

[1] https://pixabay.com/es/photos/mariposa-insectos-mano-naturaleza-4396444/, https://pixabay.com/es/photos/juguete-juego-giro-rehilete-molino-2828273/. Visitadas el 31/01/2025.

[2] https://manulunaclara.blogspot.com/2012/08/como-hacer-un-molinillo-de-viento-de.html. Visitada el 31/01/2025.

[3] Elaboración propia sobre imagen de https://pixabay.com/es/. Visitada el 31/01/2025.

[4] https://scienceworld.wolfram.com/biography/Abel.html, https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois#/media/Archivo:Evariste_Galois.jpg, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley/. Visitadas el 31/01/2025.

[5] Sánchez Muñoz, J.M., Abel y la imposibilidad de resolver la "quíntica" por radicales, Pensamiento Matemático, vol. I, 1-31, 2011.

[6] Livio, M,, La ecuación jamás resuelta: Cómo dos genios matemáticos descubrieron el lenguaje de la simetría. Barcelona, Ariel, 2007.

[7] Dorronsoro, J., Hernández, E., Números, grupos y anillos. Ed. Addison-Wesley, 1996.

[8] https://pixabay.com/es/photos/arcos-arquitectura-puente-columnas-1837166/ y elaboración propia (izqda). Visitada el 31/01/2025.

[9] Muñoz, V., Ortega, D., Vázquez-Gallo, M.J., Hodge polynomials of the moduli spaces of triples of rank (2, 2), The Quarterly Journal of Mathematics 60 (2), 235–272, 2008.

[10] Elaboración propia y https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Classification_of_the_finite_simple_groups.jpg. Visitada el 31/01/2025.

[11] Cariñena, J.F., Emmy Noether: innovación y creatividad en Ciencia, La Gaceta de la RSME, Vol. 7.2, 347–369, 2004.

[12] https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether, https://pixabay.com/es/photos/albert-einstein-retrato-1165151/. Visitadas el 31/01/2025.

[13] Gell-Mann, M., El quark y el jaguar. Aventuras de lo simple y lo complejo. Tusquets Ed., 1995.

[14] https://home.cern/. Visitada el 31/01/2025.

[15] Fernández-Jambrina, L., *comunicación privada.*

[16] Frenkel, E., Amor y matemáticas. Editorial Ariel, 2015.

[17] https://symotter.org/assets/img/c2vfig.png. Visitada el 31/01/2025.

[18] The Protein Data Bank, http://www.rcsb.org/pdb/. Visitada el 31/01/2025.

[19] https://www.rcsb.org/docs/search-and-browse/browse-options/protein-symmetry. Visitada el 31/01/2025.

[20] Song, G., The finite number of global motion patterns available to symmetric protein complexes, https://doi.org/10.1002/prot.25331, 2017.

[21] https://deepmind.google/discover/blog/alphafold-using-ai-for-scientific-discovery-2020/. Visitada el 31/01/2025.

[22] Folding@home, https://foldingathome.org/. Visitada el 31/01/2025

[23] Morone F., Makse, H.A., Symmetry group factorization reveals the structure-function relation in the neural connectome of Caenorhabditis elegans, Nat. Comm. `https://doi.org/10.1038/s41467-019-12675-8`, 2019.

[24] Alsina, C., Por qué la Geometría. Ed. Síntesis, 1967. (Los versos originales forman parte de la obra 'Rimas' de Gustavo Adolfo Bécquer, 1871.)