Desentrañando tus intereses, desentrañando nudos

Pedro M. G. Manchón[1,2]

ETS de Ingeniería y Diseño Industrial
Universidad Politécnica de Madrid

1 Introducción

Probablemente leas estas líneas, porque estés tratando de decidir si estudiar un Grado en Matemáticas es o no una buena idea. Las matemáticas gozan hoy en día, al menos en España y acá por 2024, de un prestigio enorme. Constantemente leemos en los periódicos que las empresas se rifan a los matemáticos, que estos tienen una tasa de empleo casi del 100%, o que las grandes tecnológicas, bancos, compañías de seguros o consultoras quieren, ante todo, una persona con una cabeza muy bien amueblada, a la que identifican de manera casi invariable con la figura de un matemático.

Reconozcámoslo, esto nos llena de cierto orgullo a los profesores de matemáticas. Me atrevería a decir que casi infla nuestro ego, nos hace necesarios e importantes. . . Pero tal vez, solo tal vez, haya una trampa escondida en todo esto. Voy a tratar de desvelar esta trampa a lo largo de este artículo; y lo haré hablando de matemáticas con las que, posiblemente, no hayas tenido nunca (o casi nunca) un mínimo de contacto. Y, no obstante, estoy seguro de que podrás seguirme. ¿Me acompañas?

2 Coloreando nudos

Empecemos por quitarnos un cordón elástico de los zapatos, anudarlo de alguna manera, y unir los extremos del cordón. Acabas de construir un modelo físico de lo que los matemáticos llamamos nudo. He aquí dos ejemplos:

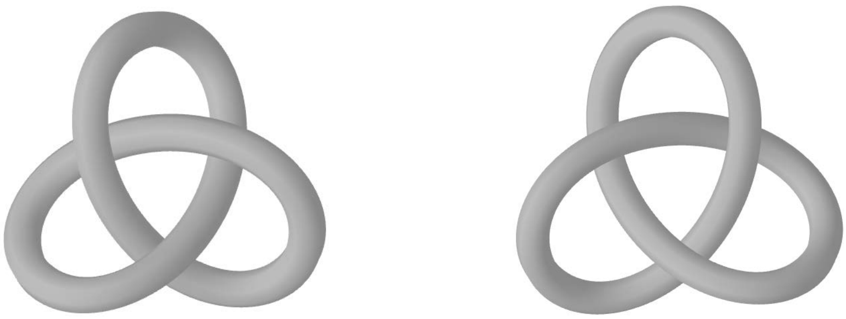

Figura 1: Los nudos trébol de mano izquierda y de mano derecha.

[1]pedro.gmanchon@upm.es
[2]El autor está parcialmente apoyado por el Proyecto Nacional de Investigación PID2020-117971GB-C21.

Estos nudos se representan mediante diagramas que dibujamos en el plano. Aquí van algunos ejemplos:

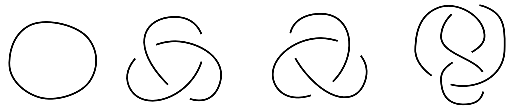

Figura 2: Diagramas del nudo trivial, tréboles de mano izquierda y derecha, y nudo de la figura ocho.

El diagrama de la izquierda representa al nudo trivial. Los dos diagramas centrales, aunque muy parecidos, representan nudos diferentes: son el trébol de mano izquierda y el trébol de mano derecha. Que dos nudos sean diferentes significa que, por mucho que deformes uno de ellos, no podrás obtener el otro. Al deformarlo podrás estirar, contraer o doblar el nudo cuanto quieras, pero nunca romperlo, ni atravesarlo consigo mismo.

Volviendo a los nudos tréboles, observa que, si pones uno de los dos frente a un espejo, el reflejo te mostraré el otro, por lo que acostumbramos a decir que estos dos nudos son uno la imagen especular del otro. En el caso del trébol, la imagen especular es un nudo diferente; por esta razón, llamamos a los tréboles nudos quirales. El término quiral procede del término griego *kheir*, que significa mano: de la misma manera que los guantes de mano izquierda y derecha no son intercambiables, los nudos tréboles de mano derecha e izquierda son diferentes. No obstante, otros muchos nudos son aquirales, es decir, el propio nudo y su imagen especular son el mismo (deformando adecuadamente uno de ellos, sin romperlo ni atravesarlo consigo mismo, podremos obtener el otro). Este es el caso del cuarto nudo mostrado en la figura, llamado el nudo de la figura ocho (porque en su dibujo se aprecia un 8). En este caso, la imagen especular puede deformarse (sin romperse, ni atravesarse consigo mismo) para dar el nudo de partida. Después volveremos sobre la quiralidad de los nudos, pero recuperemos por ahora nuestro discurso.

Cuando dibujamos dos diagramas de nudos, siempre puede entrarnos la duda de si estarán representando o no el mismo nudo. Por ejemplo, el diagrama que se muestra a continuación (llamado diagrama de Goeritz en honor a su descubridor) es, aunque no lo parezca a primera vista, un diagrama del nudo trivial (puedes convencerte de ello fabricando dicho diagrama con un cordón de los zapatos y zarandeándolo en el aire):

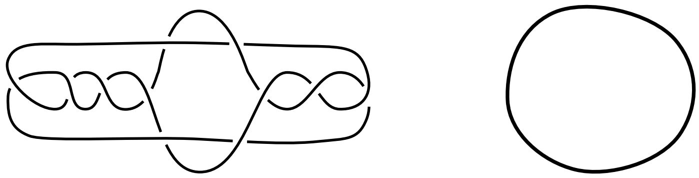

Figura 3: ¡Estos dos diagramas representan al mismo nudo!

Podemos modificar un diagrama cambiando una pequeña porción de él, como se muestra en la siguiente figura:

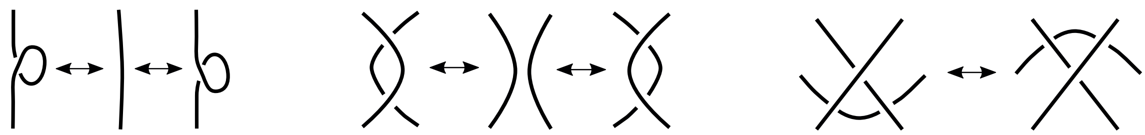

Figura 4: Movimientos de Reidemeister de tipos uno, dos y tres. Observa que el número uno, dos o tres, indica cuántos cruces se ven involucrados en el movimiento

Estos cambios reciben el nombre de movimientos de Reidemeister, en honor al matemático alemán Kurt W. F. Reidemeister (recuerda que sólo la parte que se muestra en el dibujo se modifica: el resto del diagrama debe permanecer igual). No es difícil convencerse de que los movimientos de Reidemeister producen diagramas del mismo nudo [1]. Menos obvio es demostrar el resultado recíproco, que también es cierto: si dos diagramas representan al mismo nudo, existe una secuencia de estos movimientos que permiten transformar un diagrama en otro. Como este es un resultado importante, vamos a destacarlo dándole forma de teorema (un teorema es una proposición o enunciado que podemos demostrar de modo lógico, partiendo de axiomas, postulados o de otras proposiciones ya demostradas).

Teorema 1 (Kurt Reidemeister, 1927)
Dos diagramas de nudos representan al mismo nudo si y solo si podemos aplicar una secuencia finita de movimientos de Reidemeister a uno de los diagramas para llegar al otro.

Es importante entender que los movimientos de Reidemeister pueden hacerse en los dos sentidos: por ejemplo, el movimiento de tipo dos puede utilizarse para crear un diagrama con dos cruces menos, pero podría también utilizarse para crear un diagrama con dos cruces más. Curiosamente, para transformar el diagrama de Goeritz en el círculo trivial sin cruces, es necesario incrementar su número de cruces antes de poder eliminarlos todos.

Aquí puedes ver un ejemplo: si te fijas bien, los siguientes dos diagramas lo son del mismo nudo, el nudo trébol (de mano izquierda):

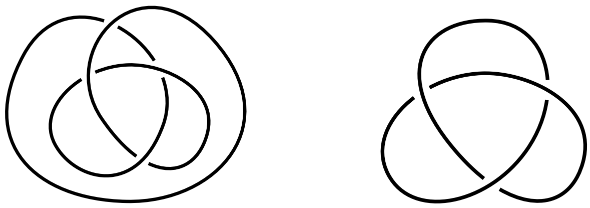

Figura 5: Dos diagramas del mismo nudo, el trébol de mano izquierda.

Sabemos pues que, aplicando una secuencia de movimientos de Reidemeister adecuados a uno de los diagramas, podremos llegar al otro. Para convencerte de esto, necesitas hacer un buen número de dibujos, y probablemente algunos de estos dibujos los tendrás que desechar, por contener errores o no llevar al camino deseado. Por cierto, que esta es otra constante del trabajo del matemático, tanto del estudiante de un grado en matemáticas, como del profesor e investigador sénior.

Llegados a este punto, cabría preguntarse si realmente todos los nudos que hemos dibujado antes son diferentes, incluso si son diferentes al nudo trivial. Tal vez te apresures a responder que son diferentes, pero... ¿estás seguro? Por ejemplo, ¿no podríamos manipular el nudo trébol de alguna manera especial (sin romperlo ni atravesarlo consigo mismo) y convertirlo en el nudo trivial? Preguntado de otra manera, ¿no habrá una secuencia de movimientos de Reidemeister que conviertan el diagrama del trébol en el diagrama del nudo trivial?

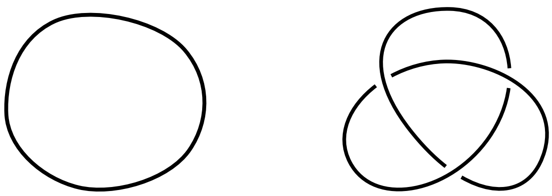

Figura 6: ¿Estás seguro de que los dos nudos que se muestran son diferentes?

Esta es otra cualidad importante del matemático: antes de hacer una afirmación, trata de demostrarla y, si no logra hacerlo, buscará un ejemplo que contradiga dicha afirmación. Si tampoco encuentra dicho ejemplo, volverá a intentar demostrarlo. En general irá, con muchos intentos y errores (o sea, muchas hojas garabateadas que acabarán en la papelera) desarrollando cierta intuición sobre si la afirmación es o no cierta, y en muchas ocasiones será el contacto con otros matemáticos lo que permitirá encontrar una solución final. Por supuesto, en otras ocasiones la pregunta permanece sin respuesta.

Volvamos ahora a nuestros nudos, y a aquel deseo irrefrenable de estar al menos seguro de que el nudo trébol y el nudo trivial son dos nudos diferentes. Nuestra intuición, qué duda cabe, nos dice que son nudos diferentes, pero debemos convencernos de este hecho aportando una demostración (es decir, una secuencia de razonamientos que, de manera rigurosa y sin dejar lugar a dudas, nos haga ver que ambos nudos son diferentes).

Los matemáticos han desarrollado muchas demostraciones diferentes de este hecho, pero aquí te voy a presentar una bastante sencilla, una sencillez que la hace especialmente hermosa. La idea se puede resumir así: vamos a ver que hay diagramas que se pueden colorear con una paleta de tres colores (en breve diremos qué significa esto exactamente) y hay otros que no se pueden colorear. Comprobaremos fácilmente que el diagrama sin cruces del nudo trivial no se puede colorear, mientras que el diagrama estándar del nudo trébol sí se puede colorear. Demostraremos entonces que, si un diagrama se puede colorear, al modificarlo mediante un movimiento de Reidemeister cualquiera, obtendremos un nuevo diagrama que también se podrá colorear. En consecuencia, habremos demostrado que no hay ninguna secuencia de movimientos de Reidemeister que transforme el diagrama del trébol en el diagrama trivial sin cruces. Concluiremos entonces, por el teorema de Reidemeister, que los nudos trébol y trivial son nudos diferentes.

El párrafo anterior es largo y posiblemente te has perdido algún detalle. Quizás es el momento de releerlo antes de continuar, pero, si incluso entonces te asaltan dudas, no te apures y continúa leyendo, porque con seguridad podrás llegar a entenderlo todo al final de la lectura. Empecemos por aclarar qué entendemos por hebra de un diagrama:

Definición 1
Una hebra de un diagrama es un trazo del diagrama que va de un paso por debajo hasta otro paso por debajo, atravesando únicamente pasos por encima.

Ahora ya podemos decir qué significa que un diagrama de nudos se pueda colorear. Para ello trabajaremos con tres colores: rojo, verde y azul (la llamada paleta RGB).

Definición 2
Diremos que un diagrama de un nudo se puede colorear, si podemos elegir para cada hebra del diagrama un color, rojo, verde o azul, de manera que se satisfagan las siguientes reglas:

1. En cada cruce, o bien concurren los tres colores, o bien solo concurre un único color. Así que, en la siguiente figura, las dos primeras formas de colorear un cruce son admisibles, pero la tercera no lo es.

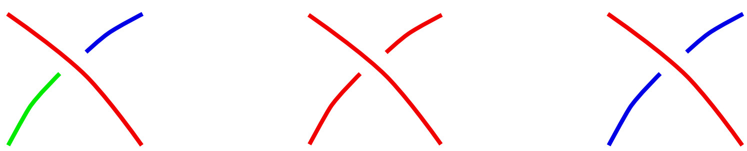

Figura 7: Las dos primeras formas de colorear un cruce son admisibles; la tercera no lo es.

2. Deben usarse los tres colores, rojo, verde y azul, para colorear el diagrama. Con otras palabras, debe haber al menos una hebra roja, una hebra verde y una hebra azul.

Es claro que el diagrama sin cruces del nudo trivial no se puede colorear ya que, al tener un única hebra, la condición 2 no puede cumplirse. En cambio, el diagrama estándar del nudo trébol sí puede colorearse, como se ve en la figura:

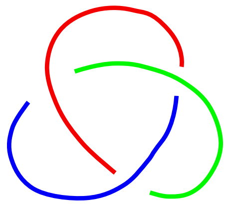

Figura 8: El diagrama estándar del trébol puede colorearse.

Veamos si te ha quedado clara esta definición: ¿sabrías decir si el diagrama estándar del nudo de la figura ocho se puede colorear?

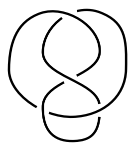

Figura 9: ¿Me puedes colorear?

Demostraremos a continuación que, si un diagrama se puede colorear, y le aplicamos un movimiento de Reidemeister, entonces el nuevo diagrama también se puede colorear. Vamos a enunciarlo como teorema, dada la importancia que tiene en nuestro argumento:

Teorema 2
Supongamos que un diagrama se ha obtenido a partir de otro mediante una serie de movimientos de Reidemeister. Entonces, o bien ambos diagramas se pueden colorear, o bien ninguno de los dos se puede.

Para demostrar este teorema, supongamos que cierto diagrama es el resultado de modificar otro diagrama mediante un movimiento de Reidemeister de tipo uno. Ya que en un bucle sólo concurren dos hebras (de hecho una, si el diagrama no tiene más cruces), en el bucle solo puede concurrir un color, que sería el mismo que utilizaríamos en la hebra que queda al eliminar el bucle. La siguiente figura aclara lo dicho:

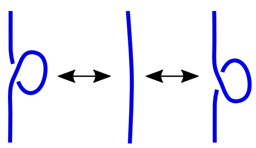

Figura 10: Si dos diagramas difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo uno, entonces, o bien ambos diagramas se pueden colorear, o bien ninguno se puede.

Supongamos ahora que un diagrama se obtiene modificando otro diagrama mediante un movimiento de Reidemeister de tipo dos. La siguiente figura muestra entonces que la coloración de uno implica la del otro:

Figura 11: Si dos diagramas difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo dos, entonces, o bien ambos diagramas se pueden colorear, o bien ninguno se puede.

Finalmente, supongamos que un diagrama se obtiene modificando otro diagrama mediante un movimiento de Reidemeister de tipo tres. En este caso, hay más posibilidades para colorear todas las hebras que intervienen en el movimiento. En cualquier caso, debemos recordar que los seis extremos de las hebras que conectan con el resto del diagrama deben conservar el color, para que nuestro argumento no afecte a lo que pasa con la coloración de la parte del diagrama que no se ve. La siguiente figura muestra que la coloración de uno implica la del otro:

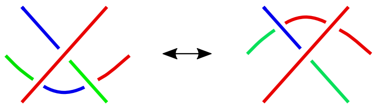

Figura 12: Si dos diagramas difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo tres, entonces o bien ambos diagramas se pueden colorear, o bien ninguno se puede; se muestra un caso.

Claro que, si te muestras crítico con lo que lees (como habrás ya adivinado, una cualidad esencial en el matemático y en todo científico), puedes objetar el hecho de que ahora hay otras posibles coloraciones. En efecto, hay cuatro posibilidades más y, para completar la demostración, comprobamos que en todas ellas la coloración se puede mantener:

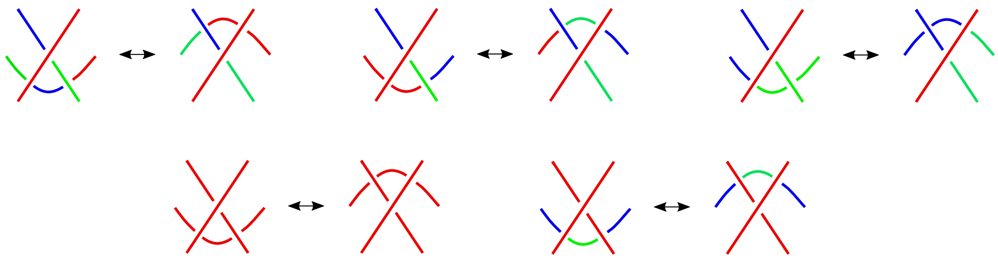

Figura 13: Si dos diagramas difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo tres, entonces, o bien ambos diagramas se pueden colorear, o bien ninguno se puede; se muestran todos los casos.

En resumen, hemos demostrado que, si un diagrama se puede colorear, también se puede colorear cualquier diagrama que se obtenga a partir de él mediante movimientos de Reidemeister. Por tanto, no podemos pasar mediante movimientos de Reidemeister del diagrama estándar del trébol (que sí se puede colorear) al diagrama sin cruces del nudo trivial (que no se puede colorear), ya que, tras algún movimiento de Reidemeister, habríamos perdido la coloración, cosa que acabamos de ver que no es posible. En consecuencia, el nudo trébol es un nudo diferente del nudo trivial. Expresemos esto de una manera formal como un corolario (consecuencia de los teoremas anteriores):

Corolario
El nudo trébol y el nudo trivial son nudos diferentes.

Probablemente, hasta ahora asociabas las matemáticas con matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, y seguro que también con funciones, límites, derivadas e integrales. En cambio, en este pequeño artículo no han aparecido ninguna de estas cuestiones. Y lo que acabamos de hacer, teoría de nudos, son genuinas matemáticas. La teoría de nudos es quizás una de las áreas más destacadas de una rama de las matemáticas llamada topología. La topología estudia las propiedades de los objetos geométricos que se preservan bajo deformaciones. De la misma manera que pensamos en los nudos como cuerdas que podemos deformar y estirar, pero no romper ni atravesar, así lo hacemos en general en topología. Por esta razón, para un topólogo, un círculo y un triángulo son un mismo objeto o, algo que se suele decir con cierta sorna, un topólogo es aquel señor o señora que confunde una taza con un *dónut* (prueba a hacer una taza de plastilina y, después, a base de moldear la plastilina, pero sin romperla, convierte la taza en un dónut).

Con estas bromas y a base de los dibujitos que hemos estado haciendo en este artículo, es muy posible que estés pensando que, al fin y al cabo, la teoría de nudos es un juego de niños. En parte esto es así, ya que, a diferencia de otros muchos campos de las matemáticas, muchos de los problemas no resueltos hoy en día sobre teoría de nudos son fáciles de enunciar, incluso para una audiencia infantil. Imaginarás también que a pesar de ello los problemas pueden ser difíciles; también esto es así: muchos de estos problemas han resistido el ataque de grandes matemáticos durante un siglo, y otros muchos quedan sin resolver aún, sin duda esperando tu contribución. Por supuesto, la investigación en este tema es de máxima actualidad, y las herramientas desarrolladas han ido evolucionando de manera espectacular, relacionándose con otros muchos campos de las matemáticas y de la física, e incluso con notables repercusiones en la biología y en la química.

3 Algunas aplicaciones de la teoría de nudos

En este párrafo intentaré explicarte algunas de las conexiones que tiene la teoría de nudos con otras ramas de las matemáticas y de la física. Serán algunos ejemplos escogidos, y sólo te daré algunas pinceladas para que puedas echar a volar tu imaginación... Con ellas comprobarás que el trabajo de un topólogo (y en general de un matemático) puede ir por derroteros más fundamentales, pero también hacerlo desde una perspectiva más aplicada. Vamos allá:

- La construcción de variedades de dimensión tres. Dicho así, esto suena duro, admitámoslo, pero empecemos por el principio. Tal vez hayas oído hablar de un precioso librito, *Planilandia*, escrito en 1884 por Edwin A. Abbott [2]. En Planilandia, una sátira social de la sociedad victoriana de la época, descrita con una ingeniosa y certera intuición matemática, seres inteligentes con diferentes formas geométricas habitan un mundo plano. De pronto, el protagonista se encuentra con una esfera a la que no puede ver en su totalidad, por tratarse de un ser que proviene del fantasmagórico espacio tridimensional (imagina a la esfera elevándose por encima del plano en donde habitan los triángulos y otros seres poligonales, dejando ver tan solo una circunferencia que puede hacerse cada vez menor, hasta llegar a un punto que acaba por desaparecer, justo cuando la esfera se posa encima del plano).

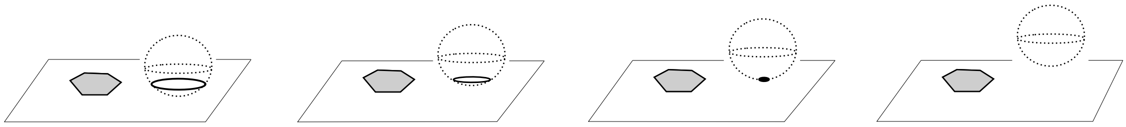

Figura 14: Hexagonín alucinando al ver cómo don círculo desaparece por arte de magia.

  Con base en esta novela, el matemático español Vicente Muñoz desarrolla, en el magnífico (y sutilmente divertido) libro *Formas que se deforman* [3], la necesidad que tienen los planilandeses (en concreto, su flamante departamento de topología) de entender cómo es su universo. Plano sí, pero, ¿es un simple plano infinito? De acuerdo que sus seres se mueven con dos grados de libertad (hacia delante o hacia atrás, hacia la izquierda o hacia la derecha), pero pronto descubren que su mundo podría ser una esfera, o incluso la superficie de un dónut...

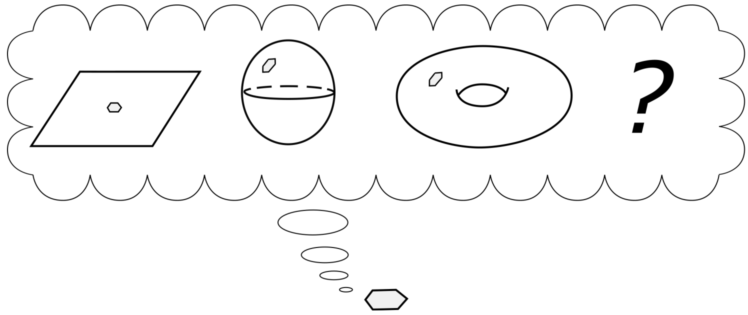

Figura 15: Hexagonín tratando de imaginar cómo es el Universo: ¿un plano?, ¿tal vez esférico?, ¿o será como la superficie de un dónut? Quizás haya incluso otras posibilidades. . .

Ahora abandonemos a nuestros queridos planilandeses y pensemos en nosotros mismos. Nuestra percepción espacial es que vivimos en un mundo espacial de tres dimensiones (dejando de lado la teoría de la relatividad y su cuarta dimensión). Como los planilandeses, cabe ahora preguntarse qué posibles mundos de tres dimensiones son aquellos en los que podríamos estar habitando. Ajá, ¡estas son las variedades de dimensión tres! Seguramente te costará imaginar otro mundo tridimensional que no sea nuestro espacio. Pero ahora te digo que la teoría de nudos permite construir todos estos posibles mundos. ¿Cómo? Bueno, esa es otra historia que podríamos aprender en un Grado en Matemáticas. . .

- Quiralidad y nuevos compuestos químicos. Quizás te hayas preguntado quién y por qué se empezaron a estudiar los nudos matemáticos. Gran parte de esta culpa la tuvo el físico matemático escocés Peter Guthrie Tait, quien a finales del siglo XIX creó las primeras listas de nudos. Su afán por dibujar todos los posibles nudos que hay (sabemos que hay infinitos) venía motivado por el hecho de que William Thomson (el famoso Lord Kelvin) había conjeturado que los átomos eran vórtices (remolinos) de éter anudados en el espacio; así Tait comenzó a dibujar las posibles formas de estos nudos, con la esperanza de que cada uno de ellos representara un elemento químico diferente. En la siguiente figura podemos ver todos los nudos que hay con siete o menos cruces (las imágenes especulares de los nudos quirales no se incluyen):

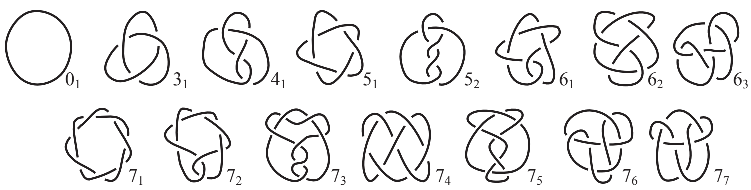

Figura 16: Hay 15 nudos diferentes con 7 o menos cruces.

La teoría de los vórtices anudados fue (afortunadamente) rápidamente descartada, ante los modelos atómicos de Bohr y otros. No obstante, los matemáticos se sintieron atraídos rápidamente por estos listados (en realidad el mismo Gauss ya había sentido esta atracción casi cien años antes). Como ves, esta parece ser la historia de un (aparente) fracaso científico, que en cambio dio lugar posteriormente a todo un desarrollo matemático espectacular. Y aún así, la historia escondía algo sorprendente que deberías saber, y que de alguna manera reconciliaría a Tait y a Lord Kelvin con sus primeras intenciones. Y es que, tras años de arduo trabajo, el químico Jean-Pierre Sauvage logró sintetizar en 1989 la primera molécula con la forma de un nudo, en concreto con las formas de los nudos trébol de mano izquierda y de mano derecha.

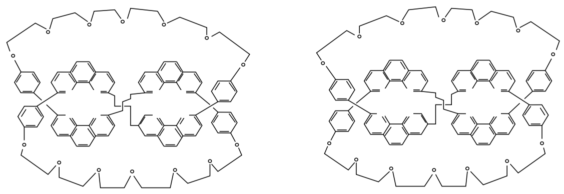

Figura 17: Los estereoisómeros sintetizados por Sauvage con las formas de los dos nudos tréboles, de mano izquierda y derecha respectivamente: teniendo los mismos átomos y enlaces químicos, sólo la topología los convierte en moléculas con propiedades diferentes.

Estas moléculas, llamadas estereoisómeros, comparten los mismos átomos y los mismos enlaces químicos. Pero la topología nos muestra que son moléculas diferentes, al ser el nudo trébol quiral, y esto conllevará propiedades físico-químicas diferentes. En este ejemplo, ¡la topología es un aspecto determinante en la Naturaleza! El éxito de Sauvage y las consecuencias prácticas de su desarrollo le hicieron recibir, en 2016 y junto a otros dos químicos, el premio Nobel de química, por el diseño y la síntesis de las primeras máquinas moleculares.

- Nudos y medicina: la triste historia de la talidomida. El anterior punto te puede parecer, tal vez, lejos de la realidad. Dos moléculas que sólo pueden distinguirse topológicamente, ¿pueden realmente tener distintas propiedades físico-químicas? Para convencerte de ello, deja que te cuente la triste historia de la talidomida. La talidomida es un medicamento que se comercializó en Europa en la década de los sesenta del siglo pasado para evitar el mareo en la mujer embarazada. La talidomida era un compuesto racémico, hecho con dos moléculas aparentemente iguales, salvo que una era la imagen especular de la otra (como los dos tréboles moleculares de mano izquierda y derecha de Sauvage). Los mismos átomos, los mismos enlaces, pero sólo la geometría podía distinguirlas. Cada una de estas moléculas se conoce con el nombre de enantiómero. Así, mientras que uno de estos enantiómeros evitaba el mareo a la mujer embarazada, el otro enantiómero provocaba trágicos defectos en el feto. Como ves, la topología se antoja en este caso terriblemente decisiva a la hora de determinar las propiedades físico-químicas de las moléculas.

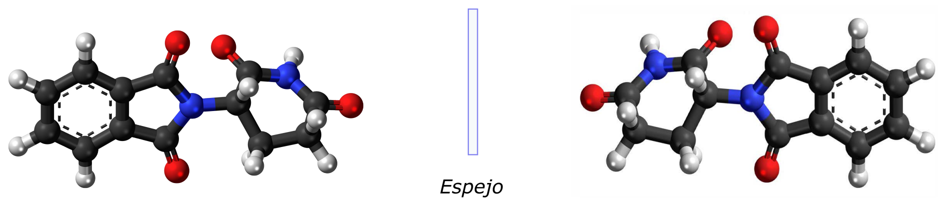

Figura 18: Enantiómeros de la talidomida: el levo evitaba el mareo en las embarazadas, el dextro causaba malformaciones en el feto.

En 1990 Vaughan V. Jones recibió la medalla Field (algo así como el premio Nobel para los matemáticos) por desarrollar una teoría que asocia un polinomio (el polinomio de Jones) a cada diagrama orientado de un nudo, de manera que, si dos diagramas representan el mismo nudo, los polinomios son el mismo. Así, si dos polinomios de distintos diagramas resultan ser diferentes, podemos deducir que los nudos representados por dichos diagramas son nudos diferentes. Jones demostró también que los polinomios asociados a un nudo y a su imagen especular son el mismo, salvo que se han intercambiado t y t^{-1}. De esa manera nudos aquirales, es decir, aquellos que son iguales a su imagen especular (o sea, con simetría especular), tienen necesariamente un polinomio de Jones simétrico, lo que convierte al polinomio de Jones en un test para discernir si un nudo es o no quiral.

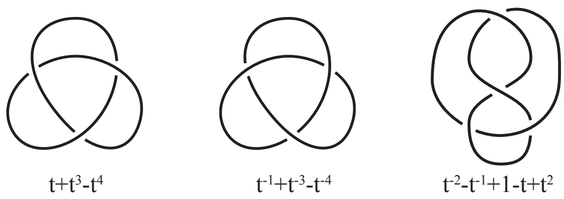

Figura 19: Tres nudos y sus correspondientes polinomios de Jones. La simetría especular se refleja en la simetría del polinomio, intercambiando t y t^{-1}. En el caso de los tréboles, los polinomios son diferentes, así que los tréboles lo son. En cambio, la simetría del polinomio del nudo de la figura ocho no permite deducir que dicho nudo sea quiral, y de hecho no lo es.

Podríamos también mencionar otras muchas implicaciones de la teoría de nudos en las matemáticas y en la física. Por ejemplo, la teoría de nudos está presente en el análisis de las mutaciones genéticas, ayudando a determinar cómo es la acción de una enzima sobre la doble hélice de ADN. Y en un campo tan diferente a este, la teoría de nudos (y su hermana, la teoría de trenzas) están en el corazón del desarrollo teórico de los llamados ordenadores cuánticos topológicos, sobre los que se desarrolla una potente investigación y que están en el punto de mira de compañías como Google o IBM.

4 Conclusiones

Comencé este artículo recordando que las matemáticas están de moda, pero que, tal vez, todo esto escondía una trampa, así que tenía la intención de desvelarte esta trampa. Para ello te pedí que me acompañases en la lectura de este artículo. Ahora que vamos llegando al final, te preguntarás qué es lo que te ha sido desvelado. Estarás buscando una respuesta concreta, y a cambio solo te ofrezco nuevas preguntas: ¿encontraste placer en la lectura de este artículo (o al menos en otros artículos de este pequeño libro)?, ¿trataste de reproducir algunos de los dibujos que aquí aparecen (o al menos te quedaste con las ganas de hacerlo)?, ¿te resultaron interesantes las relaciones mencionadas con otras áreas de las matemáticas u otras ciencias? Querido estudiante, probablemente al responder estas preguntas quede desvelado el misterio de si las matemáticas pueden ser tu camino... [3]

Para saber más

Si te ha gustado lo que has leído, puedes continuar adentrándote en el mundo de la teoría de los nudos leyendo el libro *The knot book*, de Colin C. Adams [4]. Cuidado, ¡puede resultar adictivo!

Y para aprender más sobre nudos, aquí tienes dos vídeos interactivos muy elaborados (el primero, más corto, está en inglés):

- `https://www.youtube.com/watch?v=aqyyhhnGraw`
- `https://www.youtube.com/watch?v=O3WiD6X2-9M`

[3] Acceder hoy en día (en 2024) a un Grado en Matemáticas en España requiere una calificación en el Bachillerato y en la EVAU muy alta. Desgraciadamente esto deja fuera a algunos estudiantes que, teniendo una inclinación natural hacia estos estudios, no han logrado obtener la calificación necesaria. Por otro lado, algunos estudiantes, con menor inclinación hacia las matemáticas, aprovechan su alta calificación para entrar en un grado que suele garantizar un puesto de trabajo bien remunerado. Existen otras situaciones llamativas, como la de aquellos buenos estudiantes que tienden a creer que no serán capaces de superar los estudios, pensando tal vez que otros lo sabrán hacer mejor. Si intuyes que esto es lo que te gusta, no lo dudes: por supuesto que tendrás que trabajar duro, pero ese mismo trabajo te devolverá con creces la recompensa del placer que da dedicarte a lo que te gusta.

Un librito mencionado en este artículo, y que te hará pasar un buen rato, es *Planilandia*, de Edwin A. Abbott [2]. Una crítica social, divertida y amena, con muchas matemáticas sutilmente mostradas.

Por último, te recomiendo el libro *Formas que se deforman*, de Vicente Muñoz. Este libro te mostrará un camino a la topología (y a muchas matemáticas en general) de una manera muy natural y a la vez profunda, muy amena y con un toque de humor.

Agradecimientos

Agradezco a Carmen García-Miguel Fernández, Andrea Tellini y Alejandra Hernández Sieber la lectura de una versión previa de este artículo. Sus correcciones, comentarios y observaciones han contribuido de manera importante a mejorarlo. Las sugerencias de los editores contribuyeron a mejorar la versión final.

Bibliografía

[1] Knotbuck, Reidemeister moves, `https://www.youtube.com/watch?v=X4BLfkQLce8`.

[2] Abbott, E.A, Planilandia. Una novela de muchas dimensiones... por un Cuadrado, Madrid, EDAF, 2019.

[3] Muñoz, V., Formas que se deforman. La topología. Barcelona, RBA, 2019.

[4] Adams, C.C, The knot book. An elementary introduction to the Mathematical Theory of Knots, Providence, American Mathematical Society, 1994.