Capítulo 6 . CINEMÁTICA DIFERENCIAL

6.1 INTRODUCCIÓN

El modelo cinemático diferencial (MCD) busca entre otras cosas encontrar la relación existente entre las velocidades articulares y la velocidad del extremo operativo del robot, y por extensión de cualquier otro punto asociado al mismo.

Esta relación que parece obtenible del modelo cinemático directo ya visto, contiene en sí una información especialmente relevante dado que nos permitirá identificar singularidades, obtener datos sobre la capacidad manipuladora de un robot en el espacio, y establecer la base de métodos numéricos para resolver de modo iterativo la cinemática inversa de cualquier robot, e incluso para controlar el movimiento en el espacio de la tarea del mismo.

En capítulos anteriores se obtuvo la solución al modelo cinemático directo , que nos permitía obtener la localización espacial del extremo ξ_E como función de los valores articulares q, de tal forma que la solución al mismo quedaba reflejada como $\xi_E = f(q)$, y que si resolvíamos por medio de D-H y las matrices homogéneas, la expresamos en base a una matriz homogénea obtenida como producto de las matrices A: $\xi_E = {}^0T_E(q) = {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\ldots{}^{n-1}A_n(q_n)$.

La solución al problema cinemático inverso resulta con la relación contraria, de forma que partiendo de una localización espacial del extremo conocida, obtenemos los valores articulares que logran dicha posición. De forma que el MCI queda expresado como $q = f(\xi_E)$. Pues bien, la cinemática diferencial busca obtener la evolución de estas relaciones a lo largo del tiempo, es decir, la relación entre velocidades del extremo del robot y las velocidades de las articulaciones.

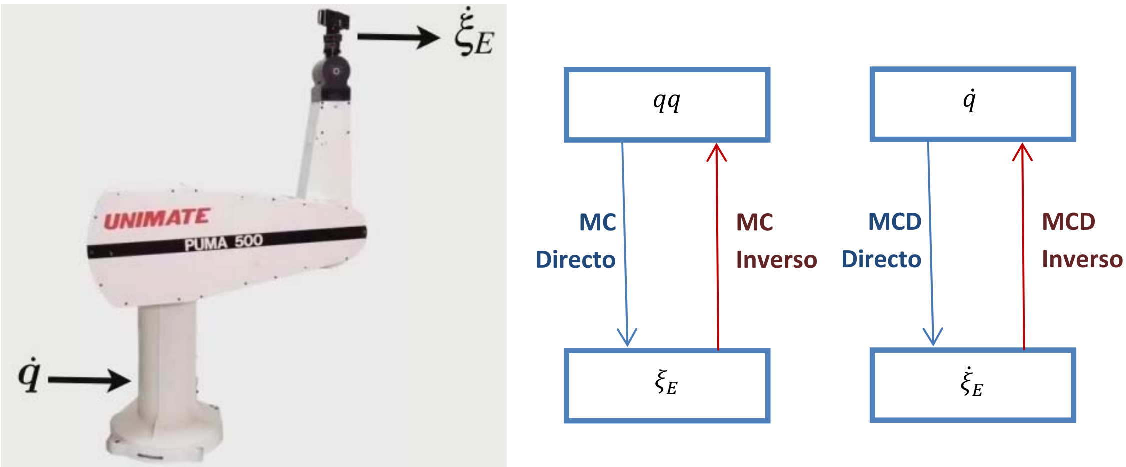


FIGURA 6-1. CONCEPTO DE CINEMÁTICA DIFERENCIAL

Análogamente al modo de proceder desarrollado en el problema cinemático, podremos hablar de una relación directa o inversa en función de si obtenemos las velocidades articulares o las velocidades asociadas al mundo de la tarea. La Figura 6-1, refleja gráficamente estos conceptos para el caso más sencillo que sería el de un robot con dos grados de libertad.

Adicionalmente y como se podrá ver al final del capítulo, el modelo cinemático está directamente relacionado con lo que podríamos denominar como el modelo estático, entendiendo que nos relacionará también el efecto que los pares y fuerzas ejercidos por los actuadores generarán en los pares y fuerzas activos ejercidos por el extremo del robot y viceversa.

Por ello podemos concluir la introducción resaltando la importancia que el modelo diferencial tiene en todos los niveles de control y análisis del robot.

Veremos que el elemento central de estos desarrollos se basará en un concepto matemático asociado a la diferenciación de funciones vectoriales $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ denominada como matriz jacobiana. Gracias a esta matriz podremos de forma directa obtener la siguiente información:

- Define la relación entre las velocidades articulares y las velocidades alcanzables en el espacio de trabajo del robot.
- Define la relación entre los pares y fuerzas estáticas que aparecen en las articulaciones como consecuencia de los pares y fuerzas ejercidos sobre el extremo del robot.
- Determina o permite estudiar las singularidades mecánicas del robot
- Nos permite la resolución de la cinemática inversa por medio de métodos numéricos
- Permite analizar el grado de manipulabilidad del robot en su espacio de trabajo
- Nos permite controlar el movimiento del robot en el espacio de la tarea aún en ausencia de una cinemática inversa algebraica explícita.

Pero antes de ir abordando cada uno de estos temas será necesario revisar algunos conceptos matemáticos previos.

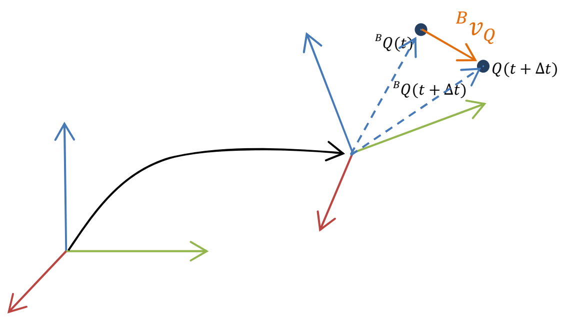
6.2 Definiciones y Conceptos Matemáticos

6.2.1 Posición variable en el tiempo

La velocidad lineal de un punto en el espacio queda determinada por la diferenciación en el tiempo del vector asociado. Luego sea un punto Q, representado por un vector de coordenadas ^BQ respecto del sistema $\{S_B\}$, entonces definimos la velocidad instantánea ^Bv_Q de dicho punto respecto de $\{S_B\}$ como:

$$^Bv_Q = \frac{d}{dt}\,{}^BQ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{^BQ(t+\Delta t) - {}^BQ(t)}{\Delta t} = {}^B(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Expresión que representa la velocidad relativa de Q respecto del sistema $\{S_B\}$ y expresada en términos de $\{S_B\}$. Este vector podemos verlo desde otro sistema de referencia manteniendo su mismo significado pero con una base de representación distinta. Luego si consideramos que un sistema $\{S_A\}$ fijo, y relacionado con el sistema $\{S_B\}$ mediante la localización $^A\xi_B$, entonces el vector de velocidad ^Bv_Q puede obtenerse en base a A mediante la siguiente transformación:



$$^A\left({}^Bv_Q\right) = {}^A\left(\frac{d}{dt}\,{}^BQ\right) = {}^AR_B\,{}^Bv_Q$$

Luego al tratarse de un vector, $^A\left({}^Bv_Q\right)$ para ser reflejado en componentes de A, deberá ser multiplicado por la matriz de rotación de la transformación $^A\xi_B$ y sin quedar por tanto afectado por la traslación. En el caso de que ambos sistemas estuvieran fijos, la velocidad de Q relativa a A y a B será equivalente, y por tanto ambos verán el mismo vector aunque lo hagan representado en coordenadas diferentes tal y como se desprende de la expresión. La notación que seguiremos es la siguiente:

- ${}^{A}\left({}^{B}v_{Q}\right)$ vector de velocidad relativa de Q respecto de B expresado en el sistema A.
- ${}^{B}v_{Q}$ vector de velocidad relativa de Q respecto de B expresado en el sistema B.

Por tanto para finalizar este apartado, es importante considerar que un vector velocidad tiene dos sistemas de referencia asociados.

6.2.2 ORIENTACIÓN VARIABLE EN EL TIEMPO

Mientras que la velocidad lineal es un atributo que se asocia a un punto, la velocidad angular es algo que se asocia a un cuerpo, o lo que es lo mismo desde un punto de vista ya más asociado a la robótica, a un sistema de referencia.

Pongamos por ejemplo el movimiento de un *frisbee*. Para describir su movimiento en un instante determinado utilizaremos dos vectores. En primer lugar tendremos su velocidad de desplazamiento del cuerpo en su conjunto que normalmente referiremos como la variación de posición de un punto que es su centro de masas. Esto lo indicamos por medio de un vector referido a una base, y que refleja el ritmo de cambio a lo largo del tiempo de las coordenadas del objeto (su c.g.):

$$v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Como hemos visto se representa como un vector cuya dirección indica el sentido en el que las coordenadas cambian, y su magnitud, el ritmo en que este cambio se produce en un instante de tiempo determinado. Obviamente este ritmo de cambio (velocidad) debe referirse a un sistema de referencia.

Pero además de desplazarse, el *frisbee* también gira en el aire, y esto lo representaremos por medio del el vector ω denominado como vector de velocidad angular. Es interesante destacar que estas medidas del ritmo de cambio en un objeto son medidas instantáneas y que a lo largo del tiempo van modificándose según el objeto describe una determinada trayectoria.

La dirección del vector de velocidad angular representa el eje respecto del cual el objeto gira, y la magnitud refleja el ritmo de este cambio, de forma que si el objeto gira muy rápidamente entonces el vector de velocidad angular será muy grande. De nuevo el vector de velocidad angular tiene una representación vectorial en base a tres componentes sobre el sistema de representación escogido:

$$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Por tanto en tres dimensiones el movimiento del *frisbee* en cada instante de tiempo podemos expresarlo en base a su ritmo de cambio por medio de un vector ϑ denominado *velocidad espacial*[1], que contiene la información de los dos vectores descritos, por lo que consiste en un vector de 6 componentes:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

De igual forma un robot tiene asociado en cada instante una velocidad espacial del extremo o de cualquier eslabón definida por una velocidad angular y una velocidad lineal del correspondiente sistema de referencia. En ambos casos (tanto para el frisbee como para el robot) se está representando la velocidad espacial de un sistema respecto de otro, y siempre se verá como un vector aplicado en el origen del sistema de referencia que se mueve, independientemente de desde donde se mire.

Consideramos ahora un sistema de referencia en principio fijo $\{S_A\}$ y otro sistema $\{S_B\}$ que coincidente su origen con A se encuentra rotado y gira según una velocidad angular ${}^A\omega_B$. Este vector, representa la velocidad angular representada en componentes de A, pero al ser un vector, podría representarlo también en coordenadas de B aún siendo la representación del cambio en la orientación del sistema B respecto del sistema A. Por tanto:

$${}^A\omega_B = {}^AR_B\,{}^B({}^A\omega_B)$$

Ahora consideremos un punto Q asociado al sistema $\{S_B\}$ y que por tanto se mueve con él. Obviamente las coordenadas de Q no variarán respecto del sistema al que es solidario, sin embargo desde el sistema A se verá su movimiento como consecuencia del giro de $\{S_B\}$. La velocidad tangencial del punto se calcula directamente mediante el producto vectorial de la velocidad angular y el vector que une el punto con el eje. Lógicamente, ambos vectores deben estar representados en la misma base:

$${}^Av_Q = {}^A\omega_B \times \overline{{}^ABQ} = {}^A\omega_B \times {}^AQ$$

Al ser los orígenes en este caso coincidentes, el vector ${}^ABQ$ que une el punto de aplicación de la velocidad angular con el punto, coincide con ${}^AQ$. Por tanto, si representamos Q en coordenadas de $\{S_B\}$ que son constantes, tendremos:

$${}^AQ = {}^AR_B\,{}^BQ \quad \Longrightarrow \quad {}^Av_Q = {}^A\omega_B \times {}^AR_B\,{}^BQ$$

[1] El término inglés para denominar este vector es "*twist*" o "spatial velocity"

Esta expresión refleja el efecto que tiene el giro sobre cualquiera de los puntos asociados al sistema B, como consecuencia exclusiva de la velocidad angular con la que este rota.

La aplicación del vector de velocidad angular sobre otro vector mediante el producto vectorial en tres dimensiones tiene asociada una representación matricial por medio de una matriz antisimétrica[2] S(a) como sigue:

Si a un vector $a \in R^3$: (a_1, a_2, a_3) se le asocia una matriz $S \in so(3)$ -álgebra de Lie del grupo SO(3)- tal que:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a \times b = S(a)b^t$$

De forma que podemos asociar $S(a)$ al conjunto $[a\ \times]$.

La matriz S es una matriz antisimétrica en R^{3x3} y cumple una serie de propiedades realmente interesantes:

1. $S(a) + S(a)^t = 0 \quad o\ lo\ que\ es\ lo\ mismo: S(a) = -S(a)^t$
2. $S(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha S(\vec{a}) + \beta S(\vec{b}) \qquad \alpha, \beta \in R$
3. $RS(\vec{a})R^t = S(R\vec{a}) \qquad R \in SO(3)$
4. $x^t S(a)x = 0 \quad x \in R^3$
5. $\det(S(a)) = 0$

Luego las matrices que reflejan la velocidad angular (esto es la rotación instantánea) no son matrices de rotación, son singulares, y son antisimétricas. En breve hablaremos sobre este tipo de matrices cuando relacionemos las matrices de rotación con el vector de velocidad angular.

Volvamos de nuevo al caso del vuelo del *frisbee* y concentremos la atención en el movimiento desarrollado por el punto Q situado en la superficie del mismo. ¿Cómo será el movimiento realizado por el punto como consecuencia del vuelo y giro del *frisbee*?. Es decir, ¿qué velocidad instantánea ve el sistema fijo que describe Q como consecuencia de que el sistema de referencia al que está asociado gira y se desplaza en el tiempo?

Respecto de $\{S_A\}$ el movimiento del *frisbee* queda descrito por el vector de velocidad espacial, que en concreto nos define el movimiento instantáneo del sistema de referencia asociado al mismo. En la cinemática de los sólidos este se hace coincidir con el centro de gravedad, y a menudo por simplicidad respecto del análisis dinámico, los ejes del sistema se hacen coincidentes con los de los ejes principales de inercia. En este caso quedémonos con que se ha definido un sistema $\{S_B\}$ que nos permite situar y orientar el objeto en el espacio, y del cual tenemos su vector de velocidad espacial. Un punto Q perteneciente al objeto tendrá unas coordenadas definidas en $\{S_B\}$ que no variarán por el movimiento del mismo (consideramos un sólido no deformable). Por tanto la velocidad de dicho punto visto desde $\{S_A\}$ podrá calcularse como:

$${}^{A}v_Q = {}^{A}v_B + {}^{A}\omega_B \times {}^{A}R_B\, {}^{B}Q$$

Notese como el vector ${}^{B}Q$ refleja el radio de Q respecto de el eje de giro, y al ser multiplicado por la matriz de rotación, es este mismo radio visto desde el sistema A.

[2] "Skew symmetric matrix" o "antisymmetric"

Es decir, al vuelo del sistema se le agrega la velocidad tangencial que aparecerá en Q como consecuencia de la velocidad angular del sistema.

6.3 LA MATRIZ JACOBIANA

Aunque en matemáticas, el concepto de Jacobiana asociado a una función vectorial es claro y unívoco, en robótica se habla de matriz jacobiana siempre que se trate de una matriz que transforma de un sistema de velocidades a otro. Por defecto, cuando se habla de la matriz jacobiana [3] de un robot, hablaremos de aquella que relaciona las velocidades articulares con la velocidad espacial, sin embargo existen más jacobianas. Comenzaremos en primer lugar por ver la más sencilla de todas, que es aquella matriz que nos permite transformar un vector de velocidades dado en un sistema de referencia a otro sistema de referencia.

6.3.1 LA JACOBIANA COMO TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

Dado un sistema $\{S_B\}$ del cual tenemos su velocidad espacial relativa a $\{S_A\}$ expresado en términos de este último por medio del vector ${}^{A}\vartheta_B$. Consideremos un tercer sistema de referencia $\{S_C\}$ que tenemos perfectamente situado en el espacio tanto respecto de A y de B mediante las correspondientes matrices homogéneas de transformación (y por tanto las submatrices R de rotación). Entonces es inmediato ver que la representación del vector de velocidad ${}^{A}v_B$ y del vector de velocidad angular ${}^{A}\omega_B$ en términos de $\{S_C\}$ se puede obtener por un cambio de base de ambos vectores mediante la correspondiente matriz de rotación:

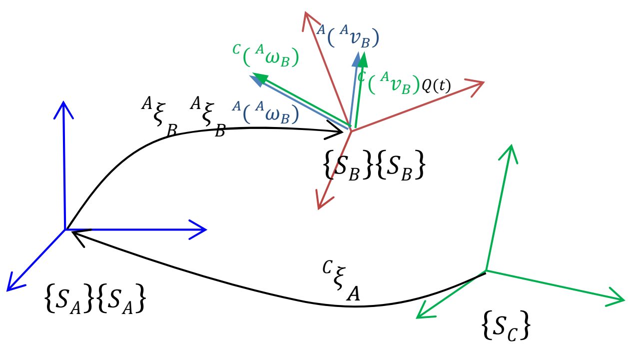
$$ {}^{C}\left({}^{A}v_B\right) = {}^{C}R_A\,{}^{A}v_B $$

$$ {}^{C}\left({}^{A}\omega_B\right) = {}^{C}R_A\,{}^{A}\omega_B $$

Lo cual se puede expresar de forma matricial mediante la aplicación de una Jacobiana de cambio de base:

$$ {}^{C}\left({}^{A}\vartheta_B\right) = {}^{C}\begin{bmatrix} {}^{A}v_B \\ {}^{A}\omega_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{C}R_A & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & {}^{C}R_A \end{bmatrix} {}^{A}\vartheta_B = {}^{C}J_A\,{}^{A}\vartheta_B $$

Esta matriz ${}^{C}J_A$ que no es más que un cambio de base desacoplado para ambos vectores de velocidad, a menudo recibe este nombre de jacobiana de cambio de base entre dos sistemas. Es importante resaltar que estamos describiendo el mismo vector de velocidad relativa entre A y B, pero en componentes de el sistema C. No hablamos de la velocidad relativa entre B y C, dado que en ningún momento hemos hablado ni tenido en cuenta que el sistema C podría estar moviéndose.



[3] "jacobian"

6.3.2 LA JACOBIANA COMO OPERACIÓN VECTORIAL

El nombre de Jacobiana proviene del operador Jacobiana[4] definido por el matemático prusiano *Carl Gustav Jacob Jacobi*. Como bien es conocido, la matriz jacobiana de una función vectorial multivariable es el equivalente a la operación derivar de las funciones de una variable.

Sea $F: R^n \to R^m$ una función que va del espacio euclídeo[5] n-dimensional a otro espacio euclídeo m-dimensional, y que por tanto puede ser representada por un conjunto de m funciones multivariables $F_i: R^n \to R$ de tal forma que si $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$,

$$y = F(x) \implies (y_1, y_2, \dots, y_m) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))$$

Entonces, si F es diferenciable, la matriz jacobiana de F se define matemáticamente como:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Nótese que cada fila está determinada por el gradiente de la función F, de ahí que a menudo se utilice el operador nabla ($\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$) para representar esta operación cuando se aplica sobre una función vectorial multivariable.

Al igual que la derivada, una de las aplicaciones más directas de la jacobiana es la aproximación lineal de la función F en el entorno de un punto x_o, de forma que:

$$F(x) \cong F(x_o) + J_F(x_o)(x - x_o)$$

O lo que es lo mismo, expresado de forma más cercana al uso que haremos de la jacobiana en robótica:

$$F(x) - F(x_o) = \Delta F(x) = \Delta y \cong J_F(x_o)\Delta x$$

6.3.3 LA JACOBIANA GEOMÉTRICA

Se habla propiamente de la Jacobiana del robot cuando relacionamos el mundo articular con el mundo cartesiano. A esta matriz, cuando se quiere especificar, se la denomina como Jacobiana Geométrica, y es la más importante respecto de la Cinemática diferencial. En concreto hablamos de aquella matriz que en un instante determinado nos obtiene la velocidad espacial instantánea del extremo del robot en base a la posición y velocidad articular en dicho instante:

$$\vartheta_E = \begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Para ver en que consiste seguiremos una exposición basándonos en el caso más sencillo que es el de un robot de dos grados de libertad sin considerar la orientación (que en 2 dimensiones quedara determinada por el ángulo polar θ). Posteriormente consideraremos la orientación y finalmente

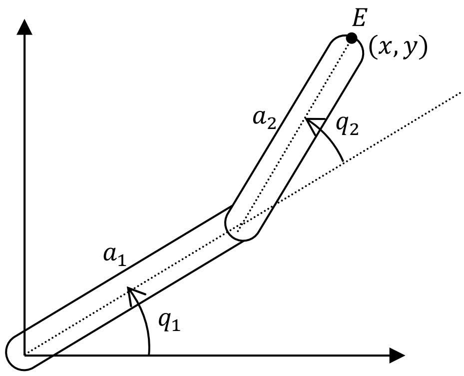
---

[4] Se denomina Jacobiana a la matriz que se enuncia a continuación, mientras que el término masculino se aplica al determinante en caso de que este exista. Así que en matemáticas cuando se dice el Jacobiano de una función, se hace referencia al determinante de la matriz Jacobiana (cuadrada) de dicha función.

[5] El espacio euclídeo es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría. Estos son tales como su infinitud, el concepto de paralelismo, recta, etc.

extenderemos el razonamiento al caso tridimensional que como bien sabemos se complicará como consecuencia del tratamiento de la orientación.

La cinemática directa $\xi_E = f(q)$ podemos expresarla como una función vectorial multivariable, que nos de la expresión de la coordenada x y la coordenada y en función de los dos valores articulares q_1, q_2.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(q) \\ F_y(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

Si diferenciamos mediante el operador Jacobiana esta función vectorial:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_x(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_x(q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial F_y(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_y(q)}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{pmatrix}$$

Tomando estos incrementos respecto a variaciones infinitesimales de tiempo, llegamos al concepto de velocidad instantánea , y de forma directa a la equivalencia:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_x(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_x(q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial F_y(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_y(q)}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dq_1}{dt} \\ \dfrac{dq_2}{dt} \end{pmatrix}$$

O bien, por la regla de la cadena en derivación a la expresión equivalente:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F_x}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F_y}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial F_y}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\partial F_y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F_y}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

Si calculamos estas derivadas y las expresamos matricialmente para el caso particular del robot de dos grados de libertad, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Que como indicábamos al principio responde a la expresión buscada $v_E = J(q)\dot{q}$, siendo J(q) la jacobiana del robot. En este caso al considerar solo la velocidad del extremo (x,y) y ser dos el número de grados de libertad del robot, es una matriz cuadrada 2x2.

Pero antes de agregar la orientación (que en 2D es un escalar) hagamos algunas consideraciones relativas al cálculo.

Obtención a partir de la Cinemática Directa

La matriz Jacobiana se puede obtener de forma relativamente cómoda -aunque tediosa- mediante la derivación parcial de las distintas funciones que componen la cinemática directa (en concreto en la posición del extremo). Así, normalmente la posición del extremo la terminaremos expresando mediante un vector en el que cada componente aparecerá una función escalar multivariable en base a las variables articulares:

$$F(q) = \begin{pmatrix} F_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ F_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ F_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{pmatrix}$$

La Jacobiana se puede construir entonces como una composición de la derivada parcial por columnas de la función $F(q)$:

$$J(q) = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial q_1} \;\middle|\; \dots \;\; \frac{\partial F}{\partial q_n} \right)$$

Se observa que la matriz Jacobiana varía en función de la posición articular del robot, de ahí que se ponga que dicha matriz depende de q. J tendrá tantas filas como dimensiones tenga el espacio de velocidades considerado (en este caso $\dot{x}\ e\ \dot{y}$), y columnas como grados de libertad tenga el robot. De ahí que la matriz no tiene por qué ser cuadrada.

Por ejemplo, extendamos ahora el caso anterior a obtener además la velocidad angular en 2 dimensiones. Para ello, agregaremos la función de la cinemática directa que nos da el valor de la orientación que en el caso bidimensional es un escalar (el ángulo polar):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(q) \\ F_y(q) \\ F_\varphi(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1+q_2) \\ a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1+q_2) \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz Jacobiana será por diferenciación directa:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1\sin(q_1) - a_2\sin(q_1+q_2) & -a_2\sin(q_1+q_2) \\ a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1+q_2) & a_2\cos(q_1+q_2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

que como vemos es una matriz $J(q) \in R^{3x2}$. Puesto que lo que estamos obteniendo es el vector de velocidad espacial en el espacio euclídeo bidimensional, podemos hablar de la matriz Jacobiana geométrica , que como veremos más adelante, para este caso es coincidente con la Jacobiana analítica.

Sin embargo cuando extendemos este razonamiento a las tres dimensiones, el cálculo de la jacobiana se complica como consecuencia del modo en que representamos las orientaciones y su relación con el vector de velocidad angular.

En el caso tridimensional la orientación del extremo tiene diversas representaciones. La forma más compacta es mediante la terna de ángulos de Euler. Sin embargo la derivada temporal de estos ángulos no coincide con el concepto de velocidad angular que es el que físicamente nos permite describir el movimiento de rotación. De igual forma ocurre con la representación mediante matrices de orientación o por cuaternios, que por su naturaleza podríamos pensar que son los más cercanos.

Nos centraremos en el modo más corriente de resolver el problema cinemático directo, que es mediante las matrices homogéneas de transformación. La expresión de la solución es una matriz homogénea, habitualmente resultado del producto de las matrices A de cada articulación:

$$\xi_E = F(q) = {}^0A_1(q_1)\,{}^1A_2(q_2)\ldots{}^{n-1}A_n(q_n) = T_E(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Por tanto, la matriz T_E estará compuesta por dos submatrices especialmente interesantes, la submatriz $R_E(q) \in SO(3)$ y el vector de posición $P_E(q) \in R^3$:

$$\xi_E = \begin{pmatrix} R_E^{3\times3} & P_E^{3\times1} \\ 0^{1\times3} & 1^{1\times1} \end{pmatrix}$$

La velocidad lineal instantánea del extremo se puede obtener directamente por derivación de la función vectorial de la posición, es decir de $P_E(q)$, dando lugar a la submatriz Jacobiana de posición:

$$J_P(q) = \left(\frac{\partial P_E}{\partial q_1} \;\middle|\; \frac{\partial P_E}{\partial q_2} \;\middle|\; \ldots \;\; \frac{\partial P_E}{\partial q_n} \right)$$

$$v_E = J_P(q)\dot{q}$$

Es decir, lo indicado anteriormente es directamente aplicable para el cálculo de la velocidad lineal. Sin embargo, ¿como obtenemos el vector de velocidad angular partiendo de la variación a lo largo del tiempo de la matriz R?. Para poder deducir esta relación vamos a estudiar el caso de un punto que se mueve como consecuencia de un giro del sistema de referencia al que está solidariamente unido.

Dado un punto Q asociado a un sistema $\{S_B\}$ podrá ser representado en dicho sistema mediante un vector ${}^BQ$ de coordenadas invariantes en el tiempo. Dicho sistema gira respecto de otro sistema $\{S_A\}$. En un instante determinado el punto Q en $\{S_A\}$ quedará representado por ${}^AQ$ que es directamente obtenible por la matriz de rotación que en ese instante relaciona ambos sistemas, de forma que:

$${}^AQ(t) = {}^AR_B(t)\,{}^BQ$$

Si derivamos esta expresión respecto del tiempo, obtendremos la velocidad tangencia observada desde $\{S_A\}$ como consecuencia del giro, por tanto:

$${}^A\dot{Q}(t) = {}^A\dot{R}_B(t)\,{}^BQ$$

que representado el punto en ese instante respecto de $\{S_A\}$ por la ecuación anterior, y teniendo en cuenta que la inversa de una matriz de rotación es su traspuesta quedará como:

$${}^A\dot{Q} = {}^A\dot{R}_B\,{}^BR_A\,{}^AQ = {}^A\dot{R}_B\left({}^AR_B\right)^T\,{}^AQ$$

por otro lado, dada una matriz de rotación cualquiera, se cumple:

$$R \cdot R^T = I$$

que si derivamos con respecto del tiempo, y aplicando que la traspuesta de un producto de matrices es el producto conmutado de orden de sus traspuestas, y que la transposición y la derivación son operaciones conmutativas:

$$\dot{R} \cdot R^T + R \cdot \dot{R}^T = 0 \Longrightarrow \dot{R} \cdot R^T + \left(\dot{R} \cdot R^T\right)^T = 0$$

Nos dice que el producto de $\dot{R} \cdot R^T \in so(3)$ y es una matriz antisimétrica . Por tanto si denominamos ${}^{\mathrm{A}}\Omega_{\mathrm{B}}$ al producto ${}^{A}\dot{R}_B\left({}^{A}R_B\right)^T$, podemos reescribir la ecuación de la velocidad tangencial del punto Q como:

$$ {}^{A}\dot{Q}(t) = {}^{\mathrm{A}}\Omega_{\mathrm{B}}\, {}^{A}Q $$

Lo cual nos lleva al tensor antisimétrico asociado a un vector de velocidad angular tal y como vimos en el apartado anterior. La expresión anterior podrá reescribirse en base a un producto vectorial de la forma:

$$ {}^{A}\dot{Q}(t) = {}^{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{B}} \times {}^{A}Q $$

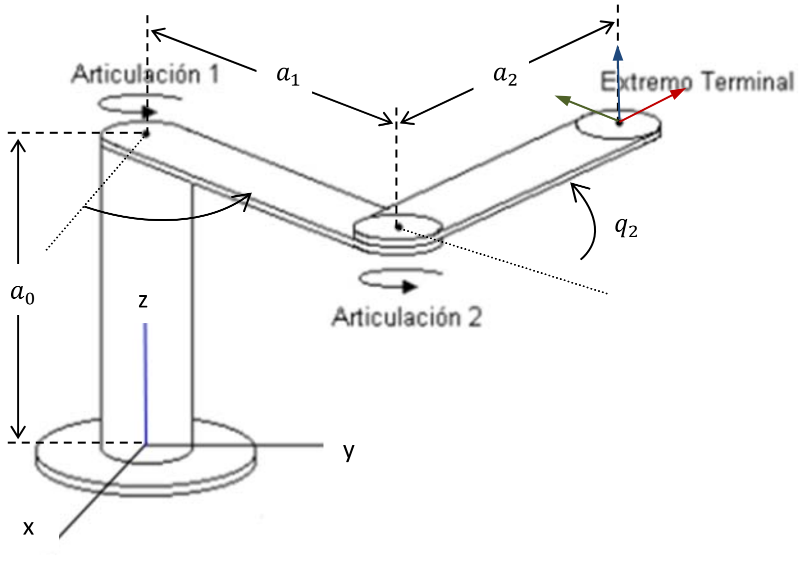
Que es precisamente lo que estábamos buscando. Es decir, el producto ${}^{A}\dot{R}_B\left({}^{A}R_B\right)^T$adoptará la forma de una matriz antisimétrica cuyos elementos son las componentes del vector de velocidad angular según la disposición del producto vectorial:

$$ {}^{A}\dot{R}_B\left({}^{A}R_B\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} $$

Por tanto mediante el producto de la derivada de la matriz de rotación por su traspuesta, a la que denotaremos como ${}^{\mathrm{A}}\Omega_{\mathrm{B}}$, se podrán obtener las componentes del vector de velocidad angular.

Un procedimiento para obtener la Jacobiana geométrica consistirá en obtener la matriz Jacobiana de posición, y la matriz Jacobiana de orientación precisamente mediante la obtención de la matriz ${}^{\mathrm{A}}\Omega_{\mathrm{B}}$ a partir de la matriz de rotación. Después identificando y factorizando correctamente los términos, se llega a la expresión de la matriz Jacobiana. La mejor forma de ilustrarlo es mediante un ejemplo, lo más sencillo posible pero totalmente generalizable.

Se obtendrá la Jacobiana de rotación del robot de la figura, que como vemos es compatible con los cálculos realizados para el ejemplo bidimensional, al que ahora se le ha agregado la componente de altura, a pesar de que no controlamos ninguna articulación en el nuevo subespacio.



La matriz T que define el modelo cinemático directo es fácilmente obtenible por métodos geométricos:

$$\xi_E = \begin{pmatrix} R_E^{3\times3} & P_E^{3\times1} \\ 0^{1\times3} & 1^{1\times1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & a_1\cos(q_1)+a_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & a_1\sin(q_1)+a_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por evitar expresiones demasiado largas, usaremos una expresión compacta de los senos y cosenos de sumas de ángulos, de tal forma que $c_1 \equiv \cos(q_1), s_{12} \equiv \sin(q_1+q_2), etc.$ Por tanto la matriz de rotación ${}^0R_E$ la expresaremos como:

$${}^0R_E = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedemos a calcular $\dot{R}\cdot R^T$:

$${}^0\dot{R}_E(q) = \frac{\partial R(q)}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial R(q)}{\partial q_2}\dot{q}_2 = \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dot{q}_2 + \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dot{q}_2$$

$$\begin{aligned} {}^0\Omega_\mathrm{E}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}) = {}^0\dot{R}_E(q)\,{}^0R_E^T(q) &= \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \end{aligned}$$

Identificando los términos de la matriz, y expresando la relación de forma matricial, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} {}^0\Omega_{\mathrm{E}_{3,2}} &= \omega_x = 0(\dot{q}_1+\dot{q}_2) = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix} \\ {}^0\Omega_{\mathrm{E}_{1,3}} &= \omega_y = 0(\dot{q}_1+\dot{q}_2) = (0 \quad 0)\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix} \\ {}^0\Omega_{\mathrm{E}_{2,1}} &= \omega_z = 1(\dot{q}_1+\dot{q}_2) = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix}$$

es decir,

$$J_\omega(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

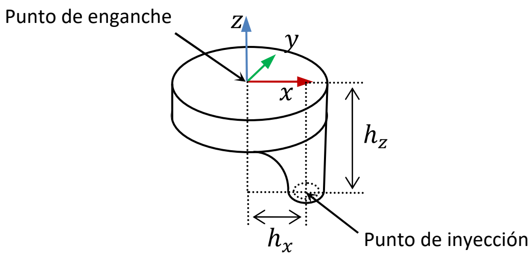
En este caso, por su sencillez, aparecen los términos de $J_\omega(q)$ como constantes, pero lo habitual es que dependan de las variables articulares. Uniendo la jacobiana de posición y la de orientación, tenemos la jacobiana del robot:

$$\vartheta_E = \begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = J(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} J_P(q) \\ J_\omega(q) \end{pmatrix}\dot{q} = \begin{pmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix}$$

Como se observa, al considerar el robot en un espacio de 6 grados de libertad (3 de posición, 3 de orientación) pero contar con sólo dos variables articulares, la matriz Jacobiana es no cuadrada, de rango 2 y de dimensiones 6x2. Normalmente, si trabajamos con un robot de 6 articulaciones, el resultado es una matriz de 6x6, cuadrada, y para la mayoría de los casos no singular y de rango 6.

EJEMPLO de interpretación:

Considérese que al robot anterior se le agrega una herramienta de inyección de pegamento con la geometría indicada por la figura. El punto de enganche de la herramienta se hace coincidir con el sistema de referencia del extremo del robot. ¿Cuál será la velocidad de la boquilla de inyección cuando el robot se encuentra en la posición articular $(0,\frac{\pi}{2})$, y se mueve a una velocidad en la primera articulación de 0.2 radianes por segundo?



Para calcular la velocidad de cualquier punto asociado al extremo haremos uso de la jacobiana en esa posición articular:

$$\vartheta_E = \begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_2 \\ a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2a_2 \\ 0.2a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

La velocidad de la boquilla se calculará mediante la expresión vista al principio del capítulo:

$$^0v_h = {}^0v_E + {}^0\omega_E \times {}^0R_E \, {}^Eh$$

siendo ${}^Eh = (h_x, 0\,, h_z)^T$ las coordenadas de la boquilla respecto de su base (coincidente con la del extremo). Obviamente la matriz ${}^0R_E$ es evaluada para el valor articular (0, 0) tal y como se indica en el enunciado.

$$^0v_h = \begin{pmatrix} -0.2a_2 \\ 0.2a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ 0 \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2a_2 - 0.2h_x \\ 0.2a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OBTENCIÓN POR MÉTODOS GEOMÉTRICOS

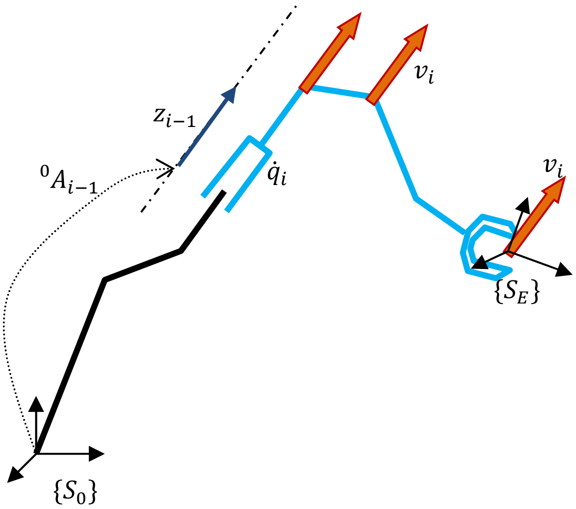
El cálculo de la Jacobiana geométrica es posible obtenerlo por medio de las matrices A de la cinemática directa, o más exactamente por la posición y orientación de los sistemas de referencia utilizados en el convenio de D-H. Esto es así, porque por convenio se han hecho coincidir los ejes z de los distintos eslabones en los ejes de giro de las articulaciones posteriores. Desde el punto de vista geométrico es bastante inmediato obtener cual es la contribución que un eje independientemente tiene sobre la velocidad angular y lineal del extremo. Si observamos atentamente la estructura de la matriz Jacobiana, se observa que cada columna representa la contribución que independientemente tiene cada articulación en el vector de velocidad angular:

$$J(q) = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial q_2} \;\middle|\; \dots \;\; \frac{\partial F}{\partial q_n} \right)$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + J(q) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + J(q) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Por lo que podríamos obtener las columnas de la jacobiana geométrica analizando el efecto que sobre la velocidad lineal y angular tiene cada una de las articulaciones por separado. Además, será posible por una lado analizar la contribución al vector de velocidad lineal y angular por separado.

Veamos el caso genérico de una articulación prismática como el reflejado en la figura:



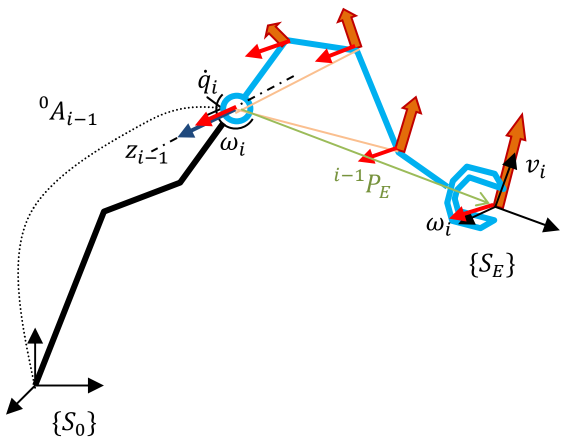
Si la articulación *i-esima* es prismática, se observa que puesto que consideramos el resto de articulaciones inmóviles, el efecto de moverla se transmite a toda la estructura posterior (color azul) . Es decir, si seguimos el sentido de su eje de aplicación - z_{i-1} según el convenio de D-H – al imprimir una velocidad $\dot{q}_i$ a la articulación primática, todos los puntos de la estructura aguas arriba del robot (incluido el extremo) se moverán según,

$$\vec{v_i} = \overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i$$

Mientras que es inmediato ver que no tendrá ningún efecto de rotación sobre la estructura: $\omega_i = 0$. Es decir, la columna de 6 elementos correspondiente de la matriz Jacobiana se podrá construir mediante la composición del vector z_{i-1}expresado en coordenadas de la base y el vector nulo para las tres componentes de la orientación.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J(q) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{z_{i-1}} \\ 0_{3x1} \end{pmatrix} \dot{q}_i = J_i(q)\dot{q}_i \quad tal\ que \quad J_i(q) \in \mathbb{R}^{6x1}$$

De forma análoga se puede razonar para el caso de que la articulación sea rotativa. En este caso el convenio de D-H establece que el eje Z del eslabón anterior se situará sobre el eje de giro de la articulación *i-esima*:



La rotación que en el origen de $\{S_{i-1}\}$ imprime a la estructura dependiente –azul- será $\overrightarrow{\omega_i} = \overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i$ y como consecuencia el origen de $\{S_E\}$ experimentará una velocidad tangencial fácilmente calculable mediante el radio que pasando por el eje de giro une éste con el extremo y el producto vectorial. Como se sabe, la velocidad angular imprimida al cuerpo móvil es la misma para todos sus puntos, es decir $\overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i$. Por tanto:

$$\overrightarrow{\omega_i} = \overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i$$

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i \times \overrightarrow{{}^{i-1}P_E} = \overrightarrow{z_{i-1}}\dot{q}_i \times \left(\overrightarrow{{}^{0}P_E} - \overrightarrow{{}^{0}P_{i-1}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J(q) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{z_{i-1}} \times \left(\overrightarrow{{}^{0}P_E} - \overrightarrow{{}^{0}P_{i-1}} \right) \\ \overrightarrow{z_{i-1}} \end{pmatrix} \dot{q}_i = J_i(q)\dot{q}_i \quad tal\ que \quad J_i(q) \in \mathbb{R}^{6x1}$$

Nótese que el término ${}^{i-1}P_E$es el vector que une el eje de giro con el extremo referido al mismo sistema de referencia respecto del que está definida la velocidad angular (es decir respecto de la base).

Por tanto la jacobiana geométrica se puede obtener por medio de la composición por columnas de la contribución de cada articulación al vector espacial de velocidad del extremo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(q) & J_2(q) & \dots & J_n(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Este modo de cálculo de la matriz jacobiana es especialmente útil para el cómputo por medio del ordenador. De ahí que a veces se mencione este método como computación geométrica de la jacobiana.

6.3.4 La Jacobiana analítica

Existe otra jacobiana también muy común, que por el procedimiento por el que se obtiene recibe el nombre de jacobiana analítica. Consiste básicamente en la diferenciación directa de la cinemática directa aunque con ello perdamos en un principio el significaco físico de la velocidad angular.

El modelo cinemático directo, en base a como representemos la orientación adoptará diferentes expresiones. En todos los casos la posición es universalmente representada por las componentes x, y, z del extremo, sin embargo en la orientación tenemos diversas alternativas. Si se opta por una representación compacta mediante los ángulos de Euler, tendremos:

$$x = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Pero si se opta por una representación mediante la matriz de rotación, cada uno de sus elementos será expresión de las variables articulares:

$$x = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$r11 = f_{r11}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r12 = f_{12}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r13 = f_{r13}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$r21 = f_{r21}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r22 = f_{22}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r23 = f_{r23}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$r31 = f_{r31}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r32 = f_{32}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad r33 = f_{r33}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

aunque normalmente lo representemos directamente por su forma matricial.

De forma análoga ocurriría en caso de tener una representación por cuaternios o mediante un par de rotación. Los elementos de la orientación reflejarán expresiones en base a los valores articulares.

La jacobiana analítica consiste básicamente en la diferenciación respecto del tiempo de estas expresiones. El caso más común es el de los ángulos de euler por lo que a continuación se desarrollará el aspecto final que adquiere la jocabiana analítica para este caso particular, siendo inmediato la extensión a los otros casos. Nótese, que en el caso de las matrices de rotación la jacobiana resultante constará de 12 filas (3 de la posición + 9 de los elementos de la matriz de rotación).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_x(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_y(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y(q)}{\partial q_2} & & \frac{\partial f_y(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\gamma(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J_a(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Luego se observa que partiendo de las expresiones de la posición y orientación, la Jacobiana analítica se obtiene directamente por diferenciación.

Dado que para el ejemplo resuelto anteriormente, los ángulos de roll, pitch y yaw, en cualquiera de sus convenios, son tales que $yaw = q_1 + q_2$, la jacobiana analítica y la geométrica son coincidentes. Pero esto normalmente no es así, aunque es posible obtener una matriz jacobiana que nos transforme la jacobiana analítica a la geométrica y viceversa.

6.3.5 Relación entre la Jacobiana analítica de los ángulos de Euler y la jacobiana geométrica.

En el fondo hay que lograr una expresión que sea capaz de relacional las velocidades angulares con las velocidades de los ángulos de Euler. El modo de establecer esta equivalencia es precisamente ese, observar las velocidades angulares que se generan como consecuencia de la aplicación de unas ciertas velocidades en la variación de los ángulos de Euler.

Así, si consideramos el mecanismo resultante de la composición sobre los ejes móviles de los distintos ángulos de Euler, es posible obtener el vector velocidad angular resultante en el extremo. Por ejemplo, considerese la siguiente terna de ángulos de orientación (cardan) :

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = Rot_x(\alpha)Rot_y(\beta)Rot_z(\gamma) = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta c\gamma & s\beta \\ c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -c\beta s\alpha \\ s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma & c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

Para obtener la equivalencia, calcularemos el producto $\dot{R}(\alpha,\beta,\gamma)R(\alpha,\beta,\gamma)^T$ e identificaremos los términos de la matriz Ω resultante. Es como si el robot consistiera de tres grados de libertad que coincide con los correspondientes ángulos de Euler. Por tanto llegamos a una expresión de la forma:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J_B(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

Es inmediato ver que se puede construir una matriz 6x6 que nos permitirá realizar la transformación del resultado dado por la jacobiana analítica, al que resultaría por la jacobiana geométrica en base a esta matriz J_B:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & J_B(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = J_a(q)\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

entonces multiplicando por la izquierda ambos términos de la igualdad mediante la matriz de cambio de base, se observa que llegamos a la expresión de la jacobiana geométrica:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & J_B(\alpha,\beta,\gamma) \end{pmatrix} J_a(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Luego la matriz $J_B(\alpha,\beta,\gamma)$ -otra jacobiana- nos permite pasar de un modelo al otro, dado que salvo en casos de bloqueo giroscópico de la representación angular, el resultado será una matriz invertible.

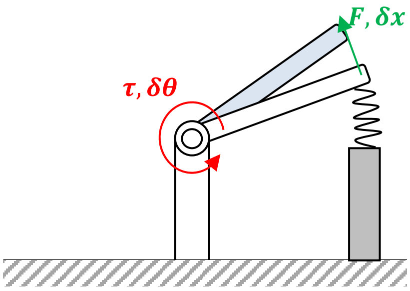
Por ejemplo, la matriz $J_B(\alpha,\beta,\gamma)$ para el convenio wuw, es decir para $Rot_z(\alpha)Rot_y(\beta)Rot_z(\gamma)$ que se obtiene tras realizar esta operación es:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J_B(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\,\alpha & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ 1 & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

6.4LA JACOBIANA Y LAS FUERZAS ESTÁTICAS

Cuando fuerzas y pares actúan sobre un me3canismo, se realizará trabajo en la medida en que hay desplazamiento en el sentido de las fuerzas y pares aplicados. Por mecánica se sabe que los pares y fuerzas ejercidos por las articulaciones tienen que equilibrarse con los pares y fuerzas ejercidos por el extremo siempre que consideremos que el robot permanece inmóvil. Dicho de otra forma, si una articulación ejerce un par determinado, si el robot no se mueve, quiere decir que externamete se realiza una fuerza tal que genera un par igual y opuesto en la articulación considerada, de forma que se cancelan.

Para ello haremos uso de la leu de la conservación de la energía que cumplen todos los sistemas físicos y la cual para el caso que nos ocupa podemos enunciar como que la energía invertida en realizar un movimiento es la misma independientemente del medio de representación utilizado. Es decir, la energía realizada por las articulaciones en un movimiento deberá coincidir (no hay perdidas en toda la estructura, todo es 100% ideal) con la realizada por el extremo del robot. Veamos un ejemplo sencillo del concepto que se quiere expresar mediante un mecanismo de un solo grado de libertad con el extremo apretando un resorte:



Supongamos que como consecuencia del par ejercido por una articulación, esta se mueve infinitesimalmente lo cual produce un desplazamiento infinitesimal del extremo. Despreciadas las fuerzas de inercia y de rozamiento, el par visto desde la articulación viene provocado por la fuerza ejercida en el extremo. Puesto que no hay perdidas de energía, si analizamos el trabajo realizado tanto en el espacio articular como en el cartesiano, obtenemos:

$$F \cdot \delta x = \tau \cdot \delta\theta$$

Este mismo planteamiento puede extenderse al caso de un mecanismo con múltiples articulaciones. A este equilibrio o equivalencia se lo denomina planteamiento del *trabajo virtual* [6] (dado que se trata de un movimiento infinitesimal y por tanto se establece una relación de incrementos sin que realmente se produzca un movimiento). Luego si denominamos $\mathcal{F} = \left(f_x, f_y, f_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z\right)^T$ al vector formado por las fuerzas y pares ejercidos por el extremo, y $\mathcal{T} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$ al vector formado por la fuerza o par ejercido por cada articulación, entonces la generalización de la expresión anterior será,

$$\mathcal{F}^T \cdot \delta x = \mathcal{T}^T \cdot \delta q$$

Siendo δx variación infinitesimal de la localización espacial del extremo del robot y δq el vector de variación articular que lo provoca.

Expresando en términos de potencia virtual que se transmitiría, y considerando que $\frac{\delta x}{\delta t}$ es precisamente el vector de velocidad espacial del extremo:

$$\mathcal{F}^T \vartheta_E = \mathcal{T}^T \dot{q}$$

Por lo que mediante la jacobiana geométrica:

$$\mathcal{F}^T J(q)\dot{q} = \mathcal{T}^T \dot{q} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}^T J(q) = \mathcal{T}^T$$

Y por tanto llegamos a la expresión fundamental que nos relaciona fuerzas/pares articulares con las fuerzas y pares del extremo:

$$\boldsymbol{J(q)^T \mathcal{F} = \mathcal{T}}$$

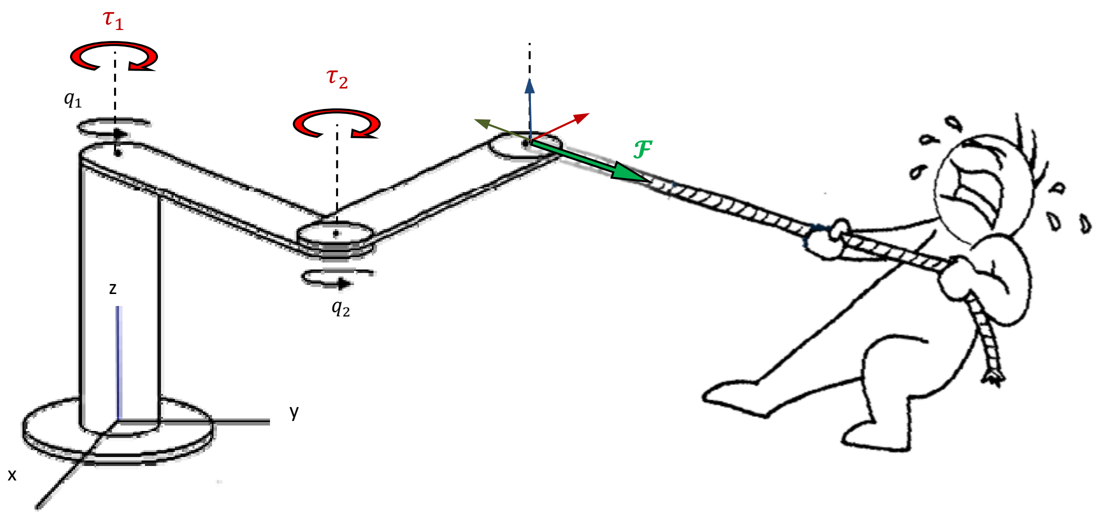
La cual nos indica que la traspuesta de la Jacobiana del robot relaciona las fuerzas ejercidas por el extremo con las fuerzas ejercidas por cada articulación. Esta relación es bastante interesante dado que observamos que en cierta forma, refleja una relación inversa a la originalmente representada por la Jacobiana. Es decir en el mundo de las fuerzas estáticas la Jacobiana (su traspuesta) permite ver los pares/fuerzas reflejados en las articulaciones a partir de las fuerzas y pares realizados por el extremo del robot.

Para el robot del ejemplo, vemos que realmente sólo es capaz de actuar o ejercer fuerza en el plano xy, mientras que las fuerzas en Z son anuladas o compensadas por la propia estructura sin ser transmitidas a los actuadores. Dado que la Jacobiana está referida al sistema de la base, el vector de fuerza espacial deberá también ser representado en dicho sistema. Si no, debería utilizarse la correspondiente matriz jacobiana de cambio de base.

Así si en la posición (45º , 45º) alguien tirase con una cuerda del extremo con una fuerza $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (f_x, f_y, f_z, 0 , 0 , 0)$, los pares reflejados en las articulaciones vendrían determinados por la Jacobiana traspuesta:

---

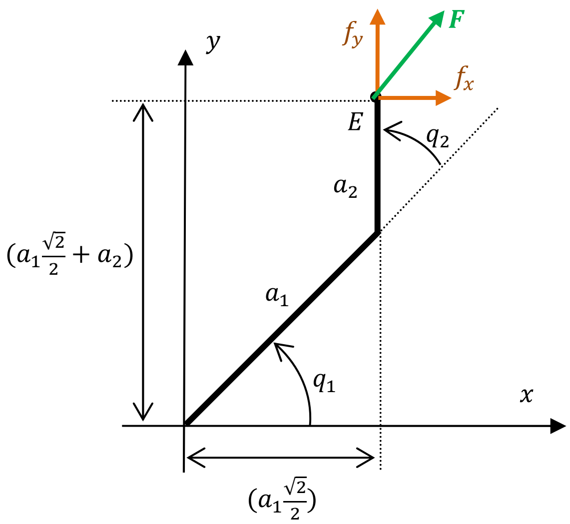
[6] Richard P.Paul . “Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control : the Computer Control of Robot Manipulators”. MIT Press series in artificial Intelligence. 1981. ISBN: 026216082X



$$\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1\sin(45) - a_2\sin(90) & a_1\cos(45) + a_2\cos(90) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_2\sin(90) & a_2\cos(90) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(a_1\frac{\sqrt{2}}{2} + a_2)f_x + a_1\frac{\sqrt{2}}{2}f_y \\ -a_2 f_x \end{pmatrix}$$

Que como se puede observar coincide con el análisis físico que esquemáticamente se puede ver en la figura siguiente. Nótese como para este robot concreto las fuerzas en Z, así como los pares en X e Y nunca tendrán efecto sobre las articulaciones dado que son absorbidas por la propia estructura del robot.



6.5 EL MODELO CINEMÁTICO DIFERENCIAL INVERSO

Del mismo modo que se ha obtenido la relación directa, y de forma análoga al planteado para el problema cinemático, es posible obtener la relación inversa. Es decir, dada una velocidad espacial del extremo, obtener como función de la misma las velocidades articulares que provocan dicho movimiento.

Dado que tenemos una relación matricial entre ambos vectores, la primera opción que se plantea es invertir la matriz Jacobiana. Cuando la matriz es cuadrada esto no suponen ningún problema salvo que se trate de una matriz singular[7] (y por tanto no invertible) :

$$\dot{q} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-\boldsymbol{1}}\, \vartheta_E$$

La inversión analítica de una matriz Jacobiana es una tarea normalmente inasequible llevando a expresiones extremadamente complejas. Por ello, cuando se requiere del cálculo de la inversa se hace directamente por inversión matricial de la Jacobiana en un punto determinado.

Como se verá en el apartado dedicado al análisis, una matriz Jacobiana cuadrada puede volverse singular en puntos concretos del área de trabajo del robot como consecuencia de la pérdida de alguno de los grados de libertad. En robótica a estos puntos se los denomina *puntos singulares*.

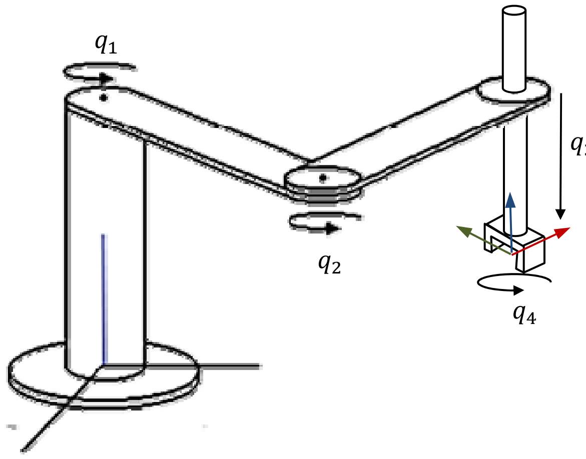
Además de poder no ser invertible como consecuencia de la pérdida de rango de la matriz, es posible que de por sí, por la configuración del robot o del espacio de trabajo, la matriz Jacobiana inicialmente no sea cuadrada. Recuérdese que la matriz Jacobiana cuenta con una columna por cada articulación y una fila por cada componente de velocidad espacial. Así, a un robot de 6 dgl le corresponderá una matriz $J(q) \in \mathbb{R}^{6\times6}$ si consideramos que en el espacio tridimensional tenemos seis componentes de velocidad espacial. Sin embargo es posible que trabajemos con robots infra-actuados (un robot SCARA de 4dgl en un espacio 3D) o redundantes (un robot antropomórfico de 7 gdl).

6.5.1 MODELO CINEMÁTICO INVERSO DE ROBOTS INFRA-ACTUADOS

¿Cómo se resuelve el problema cinemático diferencial inverso cuando trabajamos con un robot infra-actuado?

La solución más inmediata es la que se adopta en el caso de los robots tipo SCARA. En este caso, suponiendo una configuración RRPR, contamos con 4 articulaciónes, permitiendo al robot moverse en cualquier dirección del espacio pero sólo orientarse respecto de Z (yaw). El robot carece de la capacidad de generar velocidades angulares tanto en el eje x como en el eje y.

[7] Matriz cuyo determinante es nulo. La consecuencia más inmediata es que son matrices no invertibles.



$$\xi_E = \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & a_0 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La obtención de la matriz jacobiana es muy parecida a la calculada anteriormente dado que en la parte de rotación el efecto de la articulación 4 es igual al de la 1 y la 2, y en posición, la articulación prismática afecta exclusivamente a Z:

$$\vartheta_E = \begin{pmatrix} v_E \\ \omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} & 0 & 0 \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix}$$

Obviamente esta matriz es no-cuadrada y por tanto no invertible. Sin embargo es sencillo reducir el problema a un subespacio en el que el numero de gdl controlados coincida con el numero de gdl de un subespacio de velocidad espacial. Si prescindimos de las velocidades angulares ω_x, ω_y, se eliminan las dos filas nulas que hacen singular y no cuadrada la matriz quedando una Jacobiana de 4x4 en principio perfectamente invertible salvo que degenere en algún valor articular concreto:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} & 0 & 0 \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix}$$

No siempre es tan sencillo obtener el subespacio controlable o que este mantenga un significado práctico. En estos casos podemos hacer uso de la matriz pseudoinversa. Cuando el número de filas de la matriz es mayor que el número de columnas se utilizará la pseudoinversa por la izquierda.

Sea una matriz $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define la pseudoinversa por la izquierda a la matriz $J_i^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a la matriz:

$$J_i^\dagger = (J^TJ)^{-1}J^T$$

Estas matrices pseudoinversas tanto por la izquierda como por la derecha cumplen las siguientes propiedades:

$$J^\dagger JJ^\dagger = J^\dagger \qquad (JJ^\dagger)^T = JJ^\dagger \qquad (J^\dagger)^\dagger = J$$
$$JJ^\dagger J = J \qquad (J^\dagger J)^T = J^\dagger J \qquad (J^\dagger)^T = (J^T)^\dagger$$

Pero lo que más interesa para este caso es que la pre-multiplicación de la pseudoinversa por la matriz original es la matriz identidad:

$$J_i^\dagger J = I_{n \times n}$$

y por tanto, si partimos de la expresión:

$$\vartheta_E = J\dot{q}$$

premultiplicando ambos términos de la ecuación por $J_i^\dagger$, llegamos a la relación inversa:

$$J_i^\dagger \vartheta_E = J_i^\dagger J\dot{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\dot{q}} \ = \boldsymbol{J_i^\dagger \vartheta_E}$$

Lógicamente, salvo algunos puntos particulares del espacio, la solución obtenida no es exacta, pero sí la más cercana desde el punto de vista de los mínimos cuadrados. Es decir, la velocidad espacial que desarrollará el extremo del robot como consecuencia de imprimir las velocidades angulares $\boldsymbol{\dot{q}}$ obtenidas mediante la pseudoinversa por la izquierda, son tales que minimizan la función de error cuadrático. Sea $\hat{\vartheta}_E \in \mathbb{R}^n$: $\hat{\vartheta}_E = J(q)\boldsymbol{\dot{q}}$ el vector de velocidad espacial obtenido con la solución dada por la pseudoinversa para la velocidad espacial deseada $\vartheta_E \in \mathbb{R}^m$, entonces la siguiente función de error alcanzará un mínimo:

$$E\left(\vartheta_E, \hat{\vartheta}_E\right) = \frac{\left(\vartheta_E - \hat{\vartheta}_E\right)^T (\vartheta_E - \hat{\vartheta}_E)}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\vartheta_{E_i} - \hat{\vartheta}_{E_i}\right)^2}{m}$$

6.5.2 Modelo cinemático inverso de robots sobre-actuados

De igual forma se puede plantear el mismo problema para el caso en el que dispongamos de más grados de libertad en el robot de los necesarios para controlar la velocidad del extremo. Un ejemplo extremo sería el de los robots tipo serpiente, con -por ejemplo- 100 grados de libertad. Lógicamente, para alcanzar una determinada velocidad en el extremo del robot se puede optar por usar casi cualquier subconjunto de 6 articulaciones de las 100 disponibles. Sin embargo es posible de nuevo hacer uso de la pseudoinversa -esta vez por la derecha- para obtener la solución que requiera del conjunto de velocidades articulares más bajas.

Sea una matriz $J \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se define la pseudoinversa por la derecha a la matriz $J_d^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a la matriz:

$$J_d^\dagger = J^T (JJ^T)^{-1}$$

La cual cumple además de las propiedades comunes de las pseudoinversas,

$$JJ_d^\dagger = I_{m\times m}$$

Haciendo uso de dichas propiedades y de la traspuesta de un producto se llega de nuevo a la verificación de la expresión:

$$\boldsymbol{\dot{q}} \ = \boldsymbol{J_d^\dagger \vartheta_E}$$

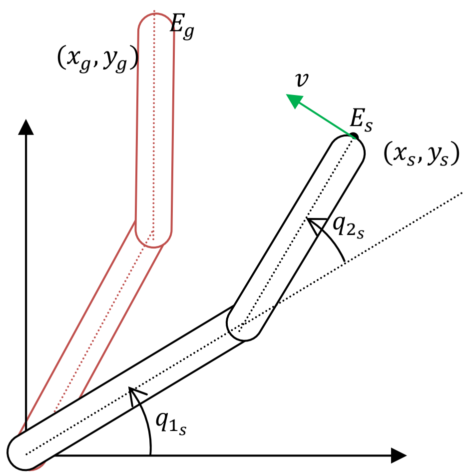
Pero en este caso, el que se minimiza es el modulo del vector de velocidades articulares dado que el error anterior salvo situaciones singulares será nulo (la solución obtiene la velocidad espacial deseada).

Los robots redundantes como se puede deducir pueden alcanzar el movimiento deseado de formas muy diversas. Los grados de libertad adicionales se utilizarán para maniobrar con el cuerpo mientras el extremo mantiene una actitud determinada. Piense en el caso del robot serpiente. Mientras que la *cabeza* mantiene una posición y orientación determinada y con una velocidad espacial específica, el cuerpo puede desplazarse casi libremente y acomodarse a su entorno o preparar otro movimiento posterior. O el caso del brazo humano, en el que hacemos uso de ese grado de libertad adicional para esquivar obstáculos elevando el codo. Por norma general, si no hay necesidad, el ser humano adopta la configuración energéticamente menos costosa, y por eso siempre que se puede manipulamos con el codo abajo o apoyado.

6.5.3 Control de movimiento Resuelto en Velocidad.

Por medio de la Jacobiana y su inversa es posible ver un primer esquema que permite controlar el movimiento del extremo del robot en base a una referencia en el espacio cartesiano. Es decir, aunque el control por razones mecánicas esté trabajando en el espacio articular, a menudo interesa que el movimiento conjunto del robot se realice por ejemplo en línea recta entre dos puntos del espacio.

Se usara por simplificación el ejemplo bidimensional para explicar este concepto. Supongamos el robot de 2 gdl de la figura:



Un primer modo de movimiento consistirá en pasar el robot de la posición inicial (negro) a la final (rojo) en variables articulares. Así que calculamos mediante la cinemática inversa la posición objetivo en variables articulares: $q_g = \xi^{-1}(x_g, y_g)$ y movemos las articulaciones del robot hacia ese objetivo. El robot como consecuencia realizará un arco. Si quisiésemos obtener el movimiento en línea recta, el siguiente paso que nos plantearíamos sería el de discretizar la trayectoria en una serie de puntos intermedios y de nuevo mediante la cinemática inversa obtener los valores articulares para alcanzar dichos puntos.

En ambos casos requeriremos la obtención de la cinemática inversa. El método que se muestra a continuación permite obtener trayectorias en el espacio cartesiano sin necesidad de calcular o tener la solución del problema cinemático inverso.

Supongamos que queremos mover en línea recta el extremo del robot desde $E_s = (x_s, y_s)$ hasta $E_g = (x_g, y_g)$. Obtener el vector de velocidad espacial que se necesita para realizar ese movimiento es una operación geométrica inmediata. Dada una velocidad lineal específica (μ), el vector de velocidad espacial que refleja el movimiento de E será:

$$v = \mu \frac{E_g - E_s}{\left|E_g - E_s\right|}$$

Por tanto, haciendo uso de la Jacobiana inversa para esta posición articular será posible obtener las velocidades articulares que producen esa velocidad. Al tratarse de matrices 2x2 es posible realizar todo el cálculo de forma simbólica:

$$J(q)^{-1} = \frac{1}{a_1 a_2 \sin q_2}\begin{pmatrix} a_2\cos(q_1+q_2) & a_2\sin(q_1+q_2) \\ a_1\cos q_1 + a_2\cos(q_1+q_2) & -a_1\sin q_1 - a_2\sin(q_1+q_2)\end{pmatrix}$$

$$\dot{q} = J(q_s)^{-1}v$$

Estos valores de velocidad los introducimos en los controladores del robot para que este los siga como referencia. Sin embargo, transcurrido un tiempo breve, los valores angulares habrán cambiado y como consecuencia también las matrices jacobianas, por lo que será necesario realizar de nuevo el cómputo.

Se observa que repitiendo el procedimiento, y sin necesidad de la cinemática inversa, es posible generar una trayectoria en el espacio de la tarea gracias a la jacobiana y su inversa cuyo computo numérico solo depende del modelo cinemático directo y por tanto, en el caso de los manipuladores serie, es completamente metodológico.

De forma más general es posible plantear el seguimiento de una trayectoria predefinida E_d mediante una expresión parametrizada en el tiempo de $E_d(t) = (x_d(t), y_d(t))$ para el caso del ejemplo de dos dimensiones. El sistema de control del robot trabaja con un tiempo de refresco determinado por el intervalo Δt –típicamente entre 1 a 10 ms-, y consideremos que tras un número k de iteraciones tenemos como dato conocido el valor articular en ese momento q_k, entones el algoritmo de control para cada ciclo se puede enunciar con los siguientes pasos:

Control Resuelto en Velocidad[8]

1.- Obtener la localización espacial actual mediante el MCD: $E_k = \xi(q_k)$

2.- Calcular el vector de velocidad que nos llevará al siguiente punto de la trayectoria:

$$v_k = \frac{E_d(t+\Delta t) - E_k}{\Delta t}$$

3.- Calcular el vector de velocidad articular por medio de la Jacobiana en el q_k actual:

$$\dot{q_k} = J(q_k)^{-1}v_k$$

4.- Calcular la nueva posición articular que debe alcanzar el robot (se observa que realmente no es necesario dividir y multiplicar por Δt al ser la jacobiana para una posición determinada una aplicación lineal). Los pasos 2,3 y 4 se pueden resumir en uno solo con la segunda expresión:

$$q_{k+1} = q_k + \Delta t\,\dot{q_k} \qquad \equiv \qquad q_{k+1} = q_k + J(q_k)^{-1}(E_d((k+1)\Delta t) - E_k)$$

5.- Modificar cada referencia articular en el controlador del robot con los valores de q_{k+1}

6.5.4 MODELO CINEMÁTICO INVERSO MEDIANTE LA JACOBIANA

En principio el problema cinemático inverso es algo que ya está resuelto en el capítulo anterior. Sin embargo ya se ha comentado que la solución analítica no siempre es posible obtenerla, además de haber obviado temas como la redundancia o la infra-actuación. Además, las soluciones analíticas no son metodológicas ni generales, lo cual obliga a tener expresiones específicas para cada configuración cinemática. En la cinemática directa y como consecuencia en la obtención de la Jacobiana, se observa que para robot serie los procedimientos, aunque tediosos, son metodológicos. Es decir, es posible

[8] Resolved Motion Rate control

obtener la Jacobiana de cualquier robot serie de forma general (por ejemplo mediante el uso del métodod de computación geométrico), y de igual forma la solución al problema cinemático directo.

Se plantea entonces la necesidad de utilizar algún tipo de método numérico que permita obtener la solución al problema cinemático inverso de forma eficiente. Como cualquier método numérico, se intentará que:

- Sea rápido
- Preciso
- Robusto (en cuanto a convergencia)

Consideremos que $E = \xi(q)$ es la solución cinemática del robot, por lo que E_k es una representación de la localización espacial del extremo. Para explicar las distintas metodologías no se considerará el comportamiento particular de la orientación, dado que eso se verá cuando se hable de la interpolación de la orientación. A efectos prácticos de momento, vamos a considerar que son posiciones para facilitar la exposición.
El problema cinemático inverso busca obtener ξ^{-1} de forma que

$$q = \xi^{-1}(E)$$

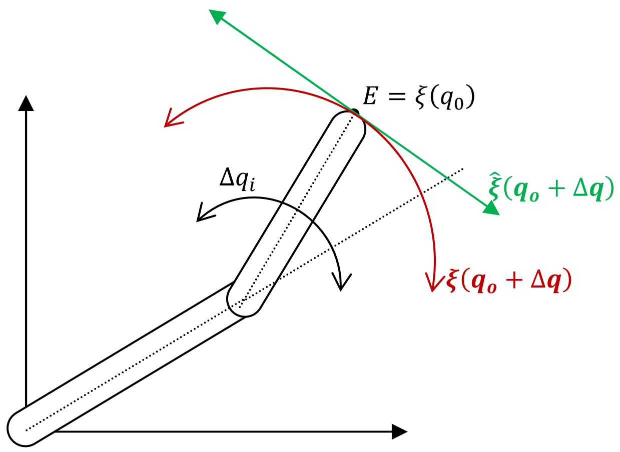
Habitualmente la formulación que se tiene es para el MCD:

$$\xi(q) = \ {}^{0}A_1(q_1)\ {}^{1}A_2(q_2)\ {}^{2}A_3(q_3) \dots {}^{n-1}A_n(q_n)$$

Plantearse la relación inversa es realmente complejo –y habitualmente analíticamente irrealizable- , fundamentalmente como consecuencia de las combinaciones de senos y cosenos presentes en los términos de la matriz.
La Jacobiana puede considerarse como el núcleo de una aproximación lineal del MCM, es decir:

$$\hat{\xi}(q) \cong \xi(q_0) + J(q_0)(q - q_0)$$

Dicho de otra forma, por su propia definición la Jacobiana no dice aproximadamente cuanto cambia E en el espacio cartesiano en el entorno de un punto articular q_0 ante variaciones articulares. De hecho, cada columna de la Jacobiana nos informa del cambio que sufre el extremo por la variación de la correspondiente variable articular. Esta estimación –como en cualquier aproximación tangencial- será peor en la medida en que nos alejamos más del punto en el que se ha calculado la Jacobiana:



Que normalmente expresamos en base al incremento infinitesimal respecto del tiempo, pero que nos muestra la aproximación incremental. Es decir, respecto de un punto E_0, q_0 como se vió al principio del capítulo, y por su propia definición, se puede escribir:

$$\Delta E \cong J(q_0)\Delta q$$

Esta expresión es mucho más manejable y nos permite plantearnos la relación inversa directamente por inversión de la Jacobiana:

$$\Delta q \cong J^{-1}(q_0)\Delta E$$

Y plantear la aproximación lineal de la relación inversa:

$$\hat{q} \cong q_0 + J^{-1}(q_0)(E - E_0)$$

Que obviamente es la aproximación lineal de la cinemática inversa en torno al punto E_0

En principio el cálculo de la inversa se puede generalizar con el uso de la pseudo-inversa, por lo que reescribimos la expresión última como:

$$\hat{q} \cong q_0 + J^{\dagger}(q_0)(E - E_0)$$

La pseudoinversa es una solución matemática elegante pero requiere de tediosas operaciones matriciales que en el caso de robots de un elevado número de articulaciones puede llevar a operaciones realmente lentas y tediosas de calcular.

Por eso y por comodidad, en muchos casos se ha propuesto utilizar un sucedáneo de la inversa que es la jacobiana traspuesta. La ventaja de la traspuesta es que es una operación sin prácticamente coste computacional y además, al no realizar inversiones, aun en la pérdida de rango sigue dando una respuesta evitando el problema de las singularidades.

¿Y porqué es un sucedáneo? Es decir, ¿Cómo se justifica que la traspuesta pueda de alguna forma sutituir a la inversa?. La razón proviene precisamente de las consideraciones del trabajo virtual vistas anteriormente. La traspuesta nos informa de cuanto par hay por cada articulación como consecuencia de una fuerza en el extremo. Luego de alguna forma está indicando la tendencia de variación de cada articulación con los movimientos en un sentido del extremo.

Se puede pensar que, de cara al objetivo de calcular la cinemática inversa , la fuerza es proporcional a la distancia al punto objetivo, y si esto lo introducimos en la ecuación de fuerzas estáticas, nos marca como siente cada articulación esta atracción… por lo que poco a poco, con cuidado, basta con dejar que el robot se mueva como consecuencia de esta fuerza atractiva virtual.

La gran ventaja de la pseudoinversa es que en cada paso la solución es optima desde el punto de vista de la linealización y el criterio de los mínimos cuadrados. Sin embargo con la traspuesta no ocurre así, y las articulaciones primeras tenderán a asumir más desplazamiento que las últimas dado que el par generado en ellas por esa fuerza virtual atractora es mayor. Además, como es de esperar, la convergencia hacia la solución es mucho más lenta (en cuanto al número de iteraciones necesarias) que la pseudoinversa.

Obviamente, mientras que la inversa da una solución exacta a la linealización del desplazamiento del extremo, la traspuesta ya no es exacta y por ello no se realizan movimientos pequeños que terminan convergiendo en la posición objetivo.

Luego en cada paso del método numérico se utilizará

$$\hat{q} \cong q_0 + \beta J^{T}(q_0)(E - E_0)$$

Siendo βun valor pequeño a determinar que afectará fundamentalmente a la convergencia.

De forma general se puede establecer un algoritmo numérico muy semejante al utilizado para el control resuelto en velocidad pero que sirve para obtener soluciones concretas al problema cinemático inverso.

El algoritmo requerirá de un valor de partida $q_s \in \mathbb{R}^n$ que estime la posible solución al problema, punto desde el que se iterará para lograr el valor articular final que logra el objetivo. También deberá establecerse un tamaño de paso que establecerá lo rápido que tenderá a converger el algoritmo dado que establece los puntos en los que se recalculará la aproximación lineal:

$q_g : InvKinematics(\ E_g\ : localicazión\ objetivo, q_s : semilla, \Delta P\!: paso)$

1. $E_i \leftarrow \xi(q_s); q_i \leftarrow q_s; i \leftarrow 0$
2. $\Delta E_i \leftarrow \Delta P\,\frac{E_g - E_i}{\|E_g - E_i\|}$
3. $\Delta q_i \leftarrow J^{\dagger}(q_s)\Delta E_i$ ó $\Delta q_i \leftarrow \beta J^T(q_s)\Delta E_i$
4. $q_{i+1} \leftarrow q_i + \Delta q_i$
5. $E_{i+1} \leftarrow \xi(q_{i+1})$
6. $error \leftarrow \left\|E_g - E_i\right\|$
7. $if(error > E)\!: i \leftarrow (i+1), repeat\ from\ 2$
8. $return\ q_{i+1}$

Es sencillo ver que dado que se trata de la inversa de la aproximación lineal de una función, este algoritmo es equivalente al método de Newton para la resolución iterativa de funciones continuas.

Existe otra aproximación que es el *Cyclic Coordinate Descent* (CCD) muy sencillo y efectivo, que en el fondo es una aplicación específica del método de Gauss-Seidel[9] , pero dado que no hace uso de la Jacobiana Inversa se enuncia como posible tema de ampliación.

6.6LA JACOBIANA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS

6.6.1SINGULARIDADES DEL MANIPULADOR

Como se ha visto la matriz Jacobiana define un mapeo lineal entre la velocidad del extremo operativo del robot y las velocidades articulares para una configuración específica del robot.

Suponiendo -para simplificar el concepto- el caso de una matriz jacobiana cuadrada $J(q) \in \mathbb{R}^{nxn}$, en aquellas configuraciones donde el rango de la matriz disminuye $rango(J(q)) < n$, el determinante de la matriz es nulo. En esos puntos no será posible invertir la matriz dado que se ha vuelto singular.

Los valores de q que hacen singular una matriz Jacobiana se conocen como puntos singulares. En ellos la pérdida de un grado de libertad impide que el manipulador realice desplazamientos en un determinado sentido. Es más, matemáticamente, el movimiento cartesiano en el sentido de la singularidad conllevaría una velocidad infinita en el espacio articular en alguna de sus variables articulares.

Resumidamente:

- En las inmediaciones de las configuraciones singulares, un movimiento a velocidad constante en el espacio cartesiano del extremo del robot, obligaría a movientos de las articulaciones más rápidos en la medida en que más cerca se encuentre de la configuración singular volviéndose inabordables por el sistema de actuación.
- Las singularidades representan configuraciones en las que la movilidad de la estructura se reduce, es decir, no es posible imponer un movimiento arbitrario (de los habitualmente posibles) al efector final.

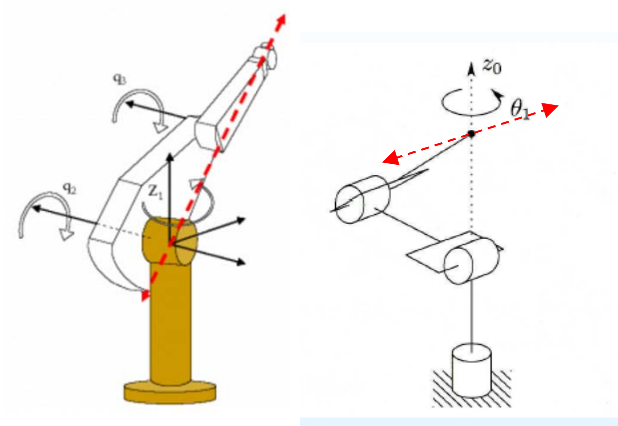
Las diferentes singularidades del robot se pueden clasificar en dos tipos:

- Singularidades de contorno: Se presentan cuando el extremo del robot está en algún punto del límite del espacio de trabajo interior o exterior. Estas configuraciones por su propia naturaleza no son especialmente peligrosas ya que son evitables no llevando el manipulador a las zonas extremas del espacio de trabajo alcanzable.

[9] En análisis numérico el método de Gauss-Seidel es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- Singularidades internas: Se producen en el interior del espacio de trabajo alcanzable y son generalmente causadas por la alineación de dos o más articulaciones del robot.

Un ejemplo de singularidad de contorno se puede ver en la figura siguiente en donde el robot Puma extendido es incapaz de moverse tanto hacia el exterior o el interior de la flecha roja. De forma análoga la figura de la derecha representa una singularidad interna, en donde si se intenta desplazar el extremo del robot en cualquier dirección con componente perpendicular al plano formado por la segunda y tercera articulación, se obligará a la primera articulación a realizar un giro a velocidad infinita:



Uno de los casos más clásicos en robots de seis grados de libertad se produce cuando hay una alineación de ejes de orientación de la muñeca, normalmente el 4º con el 6º.

Para obtener matemáticamente los puntos de singularidad del robot, como se ha visto, es suficiente con plantear la ecuación:

$$\det\big(J(q)\big) = 0$$

Obviamente analíticamente esta es una operación ciertamente compleja.

DESACOPLO DE LA JACOBIANA

Debido a la alta complejidad de cálculo que requiere el cómputo de las singularidades, se divide el problema en dos: Hallar las singularidades del brazo robótico por un lado y hallar las singularidades de orientación del extremo operativo por otro. Es decir, si en vez de utilizar como sistema de referencia del extremo el extremo operativo, se utiliza el punto de muñeca, la matriz Jacobiana resultante, tratándose del mismo mecanismo, es triangular inferior por cajas. Es decir, sea $J_m(q)$ la matriz jacobiana del sistema de referencia que localiza el punto de muñeca -su posición no es afectada por las tres últimas articulaciones aunque sí su orientación-, entonces:

$$J_m(q) = \begin{bmatrix} J_{11_{3x3}} & 0_{3x3} \\ J_{21_{3x3}} & J_{22_{3x3}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(J_m) = \det(J_{11}) \det(J_{22})$$

y por tanto el resultado de analizar el primer determinante $\det(J_{11}) = 0$ se denomina como **singularidades de brazo**, mientras que el análisis $\det(J_{22}) = 0$ tendrá como resultado lo que se denomina como **singularidades de muñeca**.

6.6.2 MANIPULABILIDAD Y ELIPSOIDE DE VELOCIDADES

La jacobiana tiene otra aplicación práctica que es el análisis sobre la capacidad manipuladora de un robot en una posición determinada. Para ello se obtiene un índice como medida de esta cualidad al cual se denomina como índice de manipulabilidad y los elipsoides de velocidad y fuerza.

Considérese el conjunto de variaciones articulares cuya norma es la unidad:

$$\dot{q}^T \dot{q} = 1$$

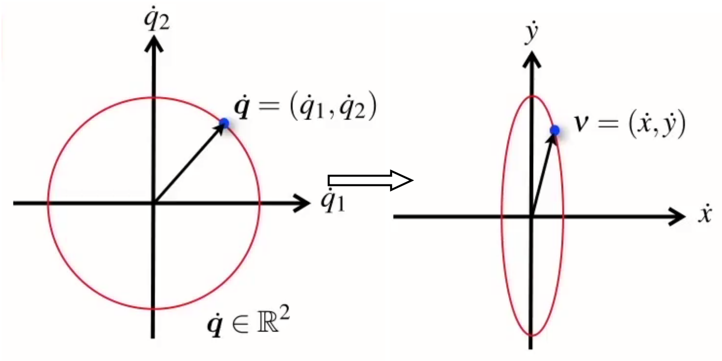
Si observamos el conjunto de variaciones espaciales que corresponde a este conjunto de vectores, obtenemos por aplicación directa de la relación Jacobiana inversa: $\dot{q} = J(q)^{-1}\vartheta$

$$(J(q)^{-1}\vartheta)^T \, J(q)^{-1}\vartheta = 1$$

$$\vartheta^T \left(J(q)J^T(q)\right)^{-1}\vartheta = 1$$

Lo cual es una representación de un elipsoide en *m* coordenadas. Si lo vemos en un espacio bidimensional, la expresión anterior no es más que la extensión a n dimensiones del mismo concepto. Hasta las 3 dimensiones somos capaces de realizar una representación gráfica, pero a partir de ahí no es posible pintar aunque sí intuir el concepto. De hecho la ecuación articular de partida es la representación de una hyperesfera n-dimensional de radio unitario.

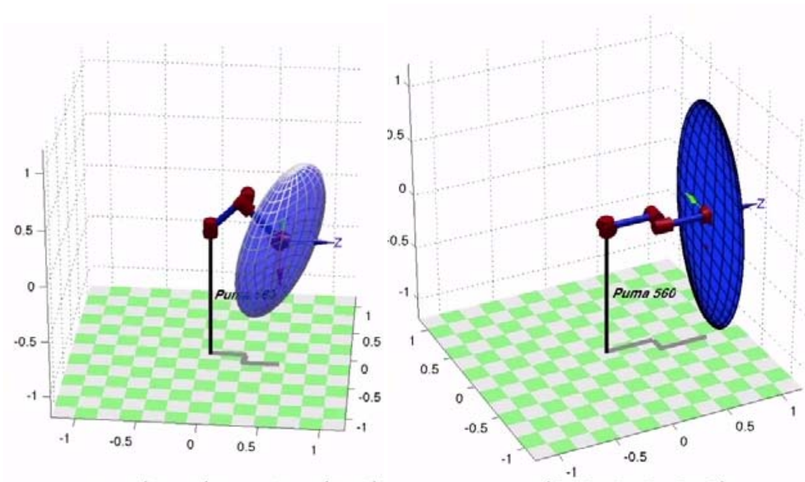
Por tanto a cada punto de la superficie de la esfera de velocidades articulares le corresponde un punto del hyper-elipsoide en el espacio de las velocidades espaciales tal y como se refleja en la figura para el caso bidimensional.



Esta figura es especialmente significativa dado que nos informa que para ese punto del espacio determinado, es posible lograr una elevada velocidad en la dirección del eje y mientras que en el sentido de las x, las articulaciones tienen menos efecto. En dos dimensiones la hyperesfera es un círculo y el hyperelipsoude una elipse.

Para el caso de las 6 dimensiones es posible concentrarse en los elipsoides resultantes para la velocidad lineal y para la velocidad angular, de forma que es posible su representación gráfica de forma independiente. Las siguientes figuras están obtenidas del material docente utilizado por Peter Coke[10] así como el código de la toolbox desarrollada por él.

[10] Peter Corke (Melbourne, Australia) es profesor en Queensland University of Technology (QUT), y el desarrollador de la conocida Toolbox de robótica.



$q = (0, \pi/4, \pi, 0, \pi/4, 0)$ $\qquad$ $q = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$

En ellas se ha representado el elipsoide de velocidad para dos posiciones articulares distintas para el robot Puma 560. En la primera se observa que el robot puede moverse libremente en cualquier dirección aunque hay algunas preferibles a otras. Así, el elipsoide aparece aplastado en el sentido de Y por lo que es una dirección no tan facil de moverse como en z o en x. En el segundo caso se ha escogido una posición en la que el rebot pierde un gdl por tener el codo completamente extendido. En este caso el elipsoide ha ido achatándose en el eje y hasta convertirse en un elipsoide degenerado a una elipse, indicando que no es posible realizar ningún desplazamiento en el sentido de y.

La toolbox de robótica permite la visualización rápida de estos elipsoides por lo que se recomienda vivamente utilizarla para ayudar a entender el concepto y ver la evolución del mismo en el espacio de trabajo del robot. A continuación se incluye el código que pinta las imágenes anteriores para el valor articular dado por la variable *qn*:

```
>>mdl_puma560
>>p560.plot(qn)
>>p560.vellipse(qn, 'fillcolor', 'b', 'edgecolor', 'w', 'alpha', 0.5)
```

Cuando el robot puede moverse igualmente en cualquier dirección entonces el elipsoide se transforma en una esfera y se dice que el movimiento es isotrópico (típico en robots cartesianos para todo su espacio articular).
El grado de degeneración del elipsoide nos informa de lo lejos que se encuentra de la condición isotropica ideal. A este índice, con una aproximación u otra, se lo denomina como índice de manipulabilidad. Matemáticamente se hace corresponder con el número de condición del elipsoide que se calcula como el cociente entre el mínimo radio y el máximo del mismo:

$$m = \frac{\min R}{\max R}, 0 \leq m \leq 1$$

De esta forma, un valor unitario de m, indica que se trata de un movimiento isotrópico, mientras que la pérdida de un grado de libertad en el espacio cartesiano y se manifestará con un índice de 0, y el elipsoide habrá degenerado a una elipse. En la medida que el índice de manipulabilidad se va haciendo menor, nos irá indicando que existe una dirección en la que el robot no será capaz de moverse rápido comparativamente al resto.

Es importante recalcar que existen diversas formas de definir el índice de manipulabilidad de un robot, aunque la expuesta es una de las más extendidas. Existe otro índice especialmente famosos que es el índice propuesto por Yoshikawa. Este índice es proporcional al volumen del elipsoide de velocidad y se puede calcular de forma general como:

$$w = \sqrt{\det(JJ^T)}$$

para jacobianas cuadradas no degeneradas, el índice es equivalente a calcular el determinante de la matriz Jacobiana.

Lo que es más interesante aún es que Yoshikawa también presenta el índide de manipulabilidad de fuerza siguiendo un razonamiento análogo. Para generar el elipsoide de fuerza se utiliza el modelo estático del robot, esto es la relación vista entre el vector de fuerzas estáticas en el extremo y el vector de fuerzas y pares articulares:

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\mathcal{F}}$$

Planteamos entonces el conjunto de pares/fuerzas articulares de módulo unitario, esto es $\mathcal{T}^T\mathcal{T} = 1$, que por sustitución directa le corresponde:

$$(J(q)^T\mathcal{F})^T J(q)^T\mathcal{F} = 1 \quad \Longrightarrow \mathcal{F}^T J(q)J(q)^T\mathcal{F} = 1$$

Es decir que es el elipsoide dual o inverso al que se obtuvo con las velocidades. El elipsoide de fuerza resultará que es inversamente proporcional al elipsoide de velocidad. Su determinante (indice de Yoshikawa) será el velor inverso.

MATRIZ ASOCIADA A UNA FORMA CUADRÁTICA

Si A es una matriz simétrica de orden n, la forma cuadrática asociada a A es una aplicación $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^tAx$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Las cuadricas son superficies determinadas por ecuaciones de la forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda$ en donde f es un polinomio de 2º grado y λ es un escalar , y que tiene una forma matricial simétrica de ser representadas:

$$(x_1, x_2, \dots., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad x^TAx = \lambda$$

que desarrollado es igual que la expresión:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ \dots + a_{1n}x_1x_n + \ \dots + a_{nn}x_n^2 = \lambda$$

se observa que:

- los coeficientes de los cuadrados en el polinomio son los elementos de la diagonal de la matriz asociada
- El elemento a_{ij} multiplicará a x_i y a x_j, es decir, en el polinomio aparecerá $a_{ij}x_ix_j$, pero al ser el producto conmutativo tendremos el término completo con $(a_{ij} + a_{ji})x_ix_j$
- Al considerar la matriz simétrica, los términos a_{ij} se pueden obtener directamente con la mitad del término cuadrático x_ix_j una vez agrupada la ecuación.

Por su propia definición los elipsoides de fuerza y de velocidad son formas cuadráticas definidas positivas y por tanto sus autovalores[11] deberán ser positivos salvo que haya pérdida de rango. Por teoría de cuádricas se sabe que existe una trasformación de giro

[11] Recordatorio sobre el concepto de autovalor y autovector. Un vector propio $x \in R^n$ de una aplicación lineal $A \in R^{nxn}$, es un vector tal que aplicándole A obtiene un vector igual pero escalado por el valor propio asociado λ . Es decir, se cumple la ecuación: $Ax = \lambda x$.

$x' = Qx : Q \in \mathbb{R}^{3x3}$ cuyas columnas son por los vectores propios de A que consigue que la ecuación de la cuádrica adopte la forma:

$$x = Qx' \longrightarrow x^t A x \equiv (Qx')^T A Q x' = x'^T Q^T A Q x' = x'^T D x'$$

Siendo D una matriz diagonal. Por lo que podemos decir que existe un cambio de base (rotación) que aplicado a la cuádrica obtendrá una representación matrizcial Diagonal y por tanto le corresponderá una expresión cuadrática de la forma:

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$$

Siendo además, como bien se sabe, los valores de la diagonal los valores propios de la matriz A correspondientes a los vectores propios de A ordenados según las columnas de Q.

Total, que dado que un elipsoide tiene como forma canónica la expresión:

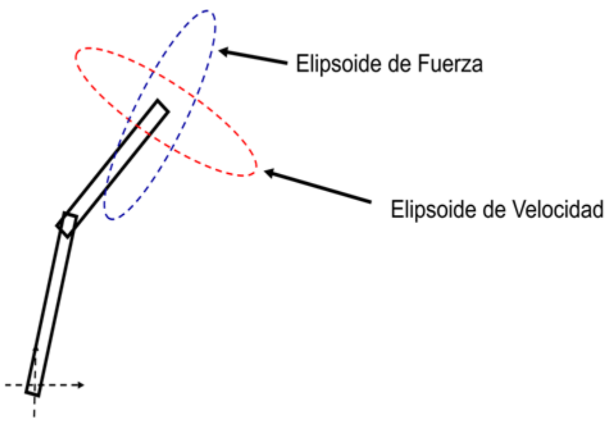
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

siendo a,b,c la longitud de los ejes principales del elipsoide según los ejes coordenados (dado que en su forma canónica el elipsoide está orientado) es directo concluir que la longitud de los ejes de un elipsoide representado matricialmente por la matriz A son de la forma $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ dado que los valores propios λ_i son invariantes de la matriz ante cambios de base ortonormales, es decir rotaciones. Los vectores propios u_i además, por definición, constituirán la dirección de estos ejes principales del elipsoide.

Volviendo al concepto de manipulabilidad, se ha visto que el elipsoide de velocidades queda determinado por:

$$\vartheta^T \left(J(q) J^T(q)\right)^{-1} \vartheta = 1$$

dado que la inversa de una matriz A tiene como autovalores los inversos de los autovalores de A y los autovectores son los mismos, se observa que puesto que el elipsoide tiene como cuadrica asociada la inversa de $J(q)J^T(q)$, entonces la longitud de los ejes de dicho elipsoide referidos a los autovalores λ_i de $J(q)J^T(q)$, quedan determinados por $\sqrt{\lambda_i}$. El número de condición del elipsoide de velocidad se puede calcular directamente por $m = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}$.



Finalmente, es interesante observar que cuando el elipsoide de velocidades es máximo (eje mayor) entonces el elipsoide de fuerzas es mínimo y viceversa. Esto nos lleva al conocido principio de dualidad en fuerza y velocidad en mecánica. Cuando el mecanismo pierde capacidad de generar velocidad entonces se incrementa su capacidad de trasmitir fuerza.