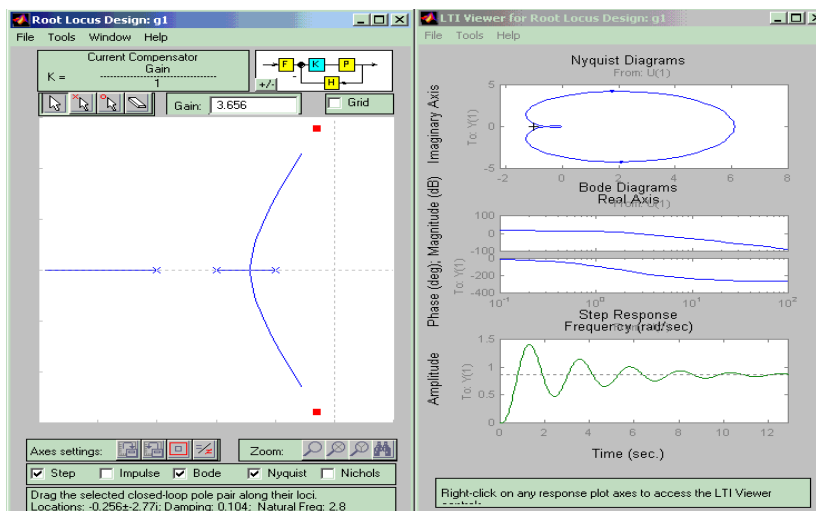




ESCUELA UNIVERSITARIA
DE INGENIERIA TÉCNICA INDUSTRIAL
DE MADRID

Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Departamento de Electrónica, Automática e Informática Industrial

Apuntes de Regulación Automática II



Por:
Miguel Hernando Gutiérrez
(Profesor de E.L.A.I.)
Carlos Platero Dueñas
(Catedrático de E.L.A.I.)

SERVICIO DE PUBLICACIONES
CURSO 2004/2005

Presentación

Las siguientes páginas constituyen unos apuntes, sobre la asignatura de Regulación Automática II, herencia del segundo cuatrimestre de la asignatura anual de Servosistemas. Es verdad que hay una muy buena bibliografía sobre un curso básico de Ingeniería de Control; sólo basta con mirar las referencias marcadas en las hojas de presentación de curso. Los libros de Ogata y Kuo son dos buenos ejemplos y ambos son empleados en muchas escuelas de ingeniería tanto nacionales como extranjeras. Sin embargo, estos autores opinan que, sin menoscabar los anteriores textos, y con una visión más humilde, unos apuntes que recojan la línea argumental del programa propuesto a principio de curso son de gran utilidad para nuestros alumnos. Esta argumentación se sustenta al menos en un doble motivo: ayudan al estudiante a prepararse mejor en esta materia y pone en negro sobre blanco las ideas que deseamos transmitir en clase. Pero también hay que decir que los apuntes son un recurso más en la docencia de esta apasionante asignatura. Los profesores nos reservamos más puntos de vistas y exposiciones alternativas que enriquecen y llenan de matices a una materia fundamental en el desarrollo intelectual y profesional de nuestros futuros ingenieros. Además, debemos de destacar que en estos últimos años, nuestro departamento ha hecho el esfuerzo de ir cubriendo tanto en las clases de teoría-problemas así como en el laboratorio de guiones que sirvan de punto de apoyo para estos alumnos que han elegido tan exigente especialidad.

En cuanto a los capítulos redactados todos tratan de seguir una misma dirección de trabajo: primero se realiza una exposición teórica agrupada alrededor de un punto de la materia, luego se acompaña con un ejemplo de aplicación y por último, se resuelve empleando MATLAB. Tenemos una obsesión: que los ejemplos sean representativos de las problemáticas reales. En una materia tan abstracta, es fácil caer en el “cubismo” (mal empleada la palabra, pero llamando la atención en el uso exclusivo de ‘cajas negras’). A veces y de cara a los estudiantes, les resulta difícil de entender la importancia de la Teoría que se explica, ya que las referencias a las magnitudes físicas y de cómo se está interviniendo en el proceso, se ha caído en el proceso de modelado, de análisis y hasta en las etapas de diseño.

Aun más, en algunas ocasiones de estos apuntes se hacen referencias cruzadas a ciertas habilidades experimentales. Sin duda, el lugar ideal para madurarlas es en el laboratorio. No obstante, creemos que resulta gratificante el encontrar y destacar las reglas de correspondencia entre el marco teórico y el trabajo experimental. De hecho, pensamos que es una de las cualidades más importante que debe de tener un ingeniero, la búsqueda de objetivos profesionales en relación con las teoría, en este caso, con las de Control.

Índice

<u>1. CONSIDERACIONES Y ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL</u>	<u>9</u>
1.1.1. ESPECIFICACIONES DE FUNCIONAMIENTO.....	11
1.1.2. CONDICIONES BÁSICAS EXIGIBLES QUE DEBE TENER EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	13
1.1.3. METODOLOGÍA PARA EL DISEÑO DE LOS COMPENSADORES	20
1.2. REGULADORES Y REDES DE COMPENSACIÓN	20
14.2.1. REGULADORES DE TIPO PROPORCIONAL (P)	21
14.2.2. REGULADORES PROPORCIONALES DERIVATIVOS, (PD).....	22
14.2.3. REGULADORES PROPORCIONALES INTEGRADORES, (PI).....	25
14.2.4. REGULADORES PROPORCIONALES, DERIVATIVOS E INTEGRALES (PID).....	28
 <u>2. TÉCNICAS DE COMPENSACIÓN BASADAS EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES.....</u>	<u>31</u>
2.1. INTRODUCCIÓN.....	31
2.2. MÉTODOS EXPERIMENTALES.....	32
2.2.1. ZIEGLER-NICHOLS.....	32
2.3. MÉTODOS ANALÍTICOS BASADOS EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES	40
2.3.1. AJUSTE DE UN REGULADOR PROPORCIONAL.....	40
2.3.2. AJUSTE DE UN REGULADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO (PD IDEAL).....	44
2.3.3. AJUSTE DE UNA RED DE ADELANTO DE FASE (PD REAL).....	47
2.3.4. AJUSTE DEL REGULADOR PI.....	50
2.3.5. AJUSTE DE UNA RED DE RETRASO DE FASE (PI REAL).....	51
2.3.6. AJUSTE DEL REGULADOR PID IDEAL	53
2.3.7. AJUSTE DEL REGULADOR DE ADELANTO-RETRASO	58
 <u>3. COMPENSACIÓN EN FRECUENCIA</u>	<u>63</u>
3.1. RED DE ADELANTO DE FASE	65
3.1.1. TÉCNICA DE COMPENSACIÓN EN ADELANTO DE FASE.....	67
3.2. RED DE RETRASO DE FASE	71
3.3. REDES DE ADELANTO-RETRASO DE FASE.....	79
3.4. PROBLEMAS	84
3.4.1. PROBLEMA 3.1	84
3.4.2. PROBLEMA 3.2.....	87
 <u>4. SISTEMAS DISCRETOS DE CONTROL.....</u>	<u>91</u>
4.1. EL COMPUTADOR COMO ELEMENTO DE CONTROL	92

4.1.1. EL BUCLE ELEMENTAL DE CONTROL CON COMPUTADOR	92
4.1.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL CONTROL DIGITAL.....	93
4.1.3. FUNCIONES DE LAS COMPUTADORAS EN EL CONTROL DE PROCESOS	94
4.1.4. ESQUEMAS DE CONTROL CON COMPUTADOR	94
4.2. SECUENCIAS Y SISTEMAS DISCRETOS	97
4.2.1. SECUENCIA DE PONDERACIÓN.....	100
4.2.2. ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DISCRETO	102
4.3. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA DISCRETO	102
4.3.1. PROPIEDADES DE PERIODICIDAD DE LAS SEÑALES EXPONENCIALES DISCRETAS.....	103
4.3.2. RESPUESTA DE UN SISTEMA DISCRETO ANTE UNA EXPONENCIAL PERIÓDICA	104
4.4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA SECUENCIA.....	107
4.5. TRANSFORMADA Z.....	109
4.5.1. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS Z.....	110
4.5.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN Z.....	111
<u>5. MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN.....</u>	<u>119</u>
5.1. MUESTREO DE SEÑALES	120
5.1.1. REGLAS PRÁCTICAS	127
5.2. RECONSTRUCCIÓN	129
5.3. REPRESENTACIÓN DISCRETA DE UN SISTEMA CONTINUO.....	133
5.3.1. SISTEMAS REALIMENTADOS.....	137
5.4. EJEMPLOS	142
5.4.1. PRIMER EJERCICIO	142
5.4.2. SEGUNDO EJERCICIO.....	143
<u>6.ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS DISCRETOS.....</u>	<u>145</u>
6.1. CORRESPONDENCIA ENTRE EL PLANO S Y EL PLANO Z	145
6.1.1. CORRESPONDENCIA DEL SEMIPLANO NEGATIVO EN S.	149
6.1.2. LUGAR GEOMÉTRICO PARA UNA CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO FIJA	150
6.1.3. LUGAR GEOMÉTRICO DE FRECUENCIA AMORTIGUADA CONSTANTE	151
6.1.4. LUGAR GEOMÉTRICO DE FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO CONSTANTE.....	152
6.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO EN EL PLANO Z.....	153
6.2.1. MÉTODOS PARA VERIFICAR LA ESTABILIDAD ABSOLUTA.....	155
6.3. RESPUESTA TEMPORAL DE LOS SISTEMAS DISCRETOS	159
6.3.1. RESPUESTA ANTE LA SECUENCIA IMPULSO	159
6.3.2. RESPUESTA ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN	161

6.4. SISTEMA REDUCIDO EQUIVALENTE.....	163
6.5. CARACTERIZACIÓN DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.....	165
6.5.1. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN.....	165
6.5.2. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.....	169
6.6. ERRORES EN RÉGIMEN PERMANENTE DE SISTEMAS DISCRETOS	176
6.6.1. ERROR DE POSICIÓN. CONSTANTE DE ERROR DE POSICIÓN.....	178
6.6.2. ERROR DE VELOCIDAD. CONSTANTE DE ERROR DE VELOCIDAD.....	179
6.6.3. ERROR DE ACELERACIÓN. CONSTANTE DE ERROR DE ACELERACIÓN.....	179
<u>7. DISEÑO DE REGULADORES DISCRETOS.....</u>	<u>185</u>
7.1. CONSIDERACIONES GENERALES	185
7.1.1. EL PERIODO DE MUESTREO	187
7.1.2. DISEÑO DEL REGULADOR DIGITAL	188
7.2. DISCRETIZACIÓN DE REGULADORES CONTINUOS	188
7.2.1. APROXIMACIÓN DEL OPERADOR DERIVADA	189
7.2.2. TRANSFORMACIÓN BILINEAL.....	192
7.3. DISEÑO EN FRECUENCIA DE REGULADORES DISCRETOS.....	197
<u>8. INTRODUCCIÓN A LOS AUTOMATISMOS.....</u>	<u>205</u>
8.1. DEFINICIÓN Y CONCEPTO DE AUTOMATISMO.....	206
8.2. CONCEPTOS BÁSICOS	209
8.2.1. ÁLGEBRA BINARIA	80
8.2.2. SISTEMAS COMBINACIONALES	81
8.2.3. SISTEMAS SECUENCIALES	81
8.2.4. MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN	82
8.3. SÍNTESIS DE SISTEMAS COMBINACIONALES	86
8.4. DISEÑO DE SISTEMAS SECUENCIALES	87
8.5. EL AUTÓMATA PROGRAMABLE	223
8.5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS AUTÓMATAS.....	223
8.5.2. ARQUITECTURA DEL AUTÓMATA	225
8.5.3. FUNCIONAMIENTO BÁSICO DE UN AUTÓMATA.....	227
8.6. NOCIONES DE NEUMÁTICA	229
8.6.1. INTRODUCCIÓN	229
8.6.2. PRODUCCIÓN DE AIRE COMPRIMIDO.....	230
8.6.3. ACTUADORES NEUMÁTICOS.....	233
8.6.4. VÁLVULAS DE DISTRIBUCIÓN	235
8.6.5. VÁLVULAS DE BLOQUEO	237
8.6.6. VÁLVULAS REGULADORAS DE CAUDAL.....	238

9. PROGRAMACIÓN DE LOS AUTÓMATAS PROGRAMABLES.....	243
9.1. TIPOS DE INSTRUCCIONES	244
9.1.1. INSTRUCCIONES DE FUNCIONES LÓGICAS.....	244
9.1.2. INSTRUCCIONES DE TEMPORIZACIÓN Y CONTAJE	245
9.1.3. INSTRUCCIONES ARITMÉTICAS	245
9.1.4. INSTRUCCIONES DE MANIPULACIÓN DE DATOS	246
9.1.5. INSTRUCCIONES DE TRATAMIENTO DE DATOS	246
9.1.6. INSTRUCCIONES DE CONTROL DEL CICLO DE EJECUCIÓN	246
9.2. LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN	246
9.2.1. DIAGRAMA DE CONTACTOS O LADDER (LD O KOP).....	246
9.2.2. DIAGRAMA DE FUNCIONES (FUP).....	247
9.2.3. LISTA DE INSTRUCCIONES (LDI O AWL)	247
9.2.4. ESTRUCTURA DE LOS PROGRAMAS EN STEP5	257
9.3. INTRODUCCIÓN A GRAFCET.....	259
9.4. DISEÑO BASADO EN GRAFCET	259
9.4.1. ELEMENTOS GRÁFICOS DE BASE	260
9.4.2. EVOLUCIÓN DEL GRAFCET.....	261
9.4.3. ESTRUCTURAS BÁSICAS DEL GRAFCET	264
9.4.4. MACROETAPAS.....	272
9.4.5. LAS ECUACIONES LÓGICAS DE CONTROL DEL GRAFCET.....	272
9.4.6. ARRANQUES, PARADAS, EMERGENCIAS Y AVERÍAS.....	276
9.5. EJERCICIOS	278
9.5.1. PRIMER EJERCICIO	278
9.5.2. EJERCICIO 2.....	281

1 Consideraciones y acciones básicas de Control

Si bien las técnicas de análisis permiten caracterizar la evolución dinámica de los sistemas ante una excitación, las de diseño tratan de variar la composición de éstos para que sus respuestas se acomoden a unas especificaciones determinadas. Estas condiciones fijan el tipo de respuesta transitoria, la precisión del equipo así como garantizar la estabilidad de su comportamiento ante estímulos externos. Por tanto, todos los conocimientos desarrollados dentro de las técnicas de análisis serán utilizados para realizar las tareas de diseño capaces de responder a una dinámica adecuada.

Hasta estos momentos se ha trabajado en la modelización del comportamiento dinámico de los sistemas, y una vez obtenida sus funciones de transferencia se pueden predecir cómo van a responder ante las excitaciones. Sin duda, las soluciones resultan ser únicas y la validez entre las respuestas teóricas y las reales dependerán sólo de los modelos empleados. En definitiva, una adecuada función de transferencia acompañada por las herramientas del análisis dinámico darán resultados similares al comportamiento físico real.

Sin embargo, al emplear las técnicas de diseño sobre los sistemas para que cumplan ciertas condiciones (estabilidad, precisión y respuesta transitoria) resulta que no suele existir una única solución, sino varias. La experiencia del ingeniero de control resultará ser fundamental para encontrar soluciones óptimas. Como se verá en los siguientes capítulos, muchas de las reglas a emplear son de carácter empírico, sin ningún fundamento matemático plausible, simplemente utilizado por que muchas de las plantas industriales al ser aplicadas estas técnicas, sus respuestas dinámicas resultan ser satisfactorias. Aun más, la búsqueda sistemática de soluciones óptimas de control sigue siendo hoy en día un reto de la investigación de este saber científico.

Las acotaciones de este curso básico de Control hacen centrarse en el empleo de modelos lineales e invariantes en el tiempo (*Linear Invariant Time, LTI*), esto es, los

comportamientos dinámicos de los sistemas vendrán determinados por ecuaciones diferenciales ordinarias, en el caso de los sistemas continuos, o por ecuaciones en diferencias, si resulta ser un sistema discreto. Además sólo se emplearán las herramientas del lugar de las raíces y aquellas basadas en la respuesta en frecuencias. Concluyendo, el modo de actuar será que dado la función de transferencia de una planta de carácter LTI y con las técnicas mencionadas, las cuales permiten determinar la evolución del sistema, se tratará de mejorar el comportamiento del equipo mediante la inserción de algún elemento de compensación. Véanse a continuación cuales son los pasos a seguir.

En primer lugar, habrá de citar los datos de partida. Por lo anteriormente expuesto se requerirá del modelo de la planta, esto es, de su función de transferencia. Además, se necesitará saber cual va a ser la señal o señales a controlar. Llegado a este punto y teniendo en cuenta el carácter introductorio del curso, este temario sólo se centrará sobre reguladores monovariantes o también llamados SISO (*Single Input Single Output*), por lo que se tratará del control de la única variable de salida. Sobre esta señal a controlar se enumerarán cuales son las condiciones dinámicas que deben de cumplirse. Por tanto, los datos de partida que se disponen para el diseño suelen ser:

- a) El modelo de la planta o proceso a regular,
- b) la variable a controlar,
- c) las perturbaciones posibles,
- d) y las especificaciones dinámicas a que debe de ajustarse el sistema.

En segundo lugar, será necesario fijar la arquitectura de control. La misión del diseñador consiste en definir una estructura adecuada para los sistemas de regulación, para ello se deberá de elegir un accionador, un dispositivo de medida para captar la señal y un detector de error, y todas ellas vienen definidas por la característica de la planta. Sin embargo, el desarrollo tecnológico actual trata de emplear el procesamiento de las señales eléctricas, llevando a que en la mayoría de las soluciones emplee las técnicas de la Electrónica de Potencia y de la Instrumentación Electrónica, sin menoscabar el uso de otras tecnologías. En este sentido es fácil encontrar reguladores que empleen microprocesadores o autómatas programables, y en menor medida soluciones basadas en la Electrónica Lineal. Los dos primeros casos corresponden al tratamiento de señales eléctricas digitales y requerirán de la Teoría de los Sistemas Discretos, que se verá en posteriores capítulos. En cambio, el desarrollo de la teoría de Control sobre sistemas continuos se apoya sobre los circuitos electrónicos lineales. Tampoco hay que olvidar las posibilidades de implementación de sistemas de regulación mediante otras tecnologías como es el caso de los elementos neumáticos, sistemas mecánicos, etc. Pero con independencia del tipo de solución física, al menos se podría indicar tres tipos distintos de sistemas de regulación automática:

a) Compensación en serie o en cascada: Se basa en una estructura de realimentación negativa con un único lazo, donde el elemento compensador, $G_C(s)$, procesa la señal de error y ataca directamente, su salida, a la entrada de la planta, $G_P(s)$. Es la estructura más comúnmente empleada, ya que separa las señales de control (baja potencia), de las requeridas para manipular a la planta que en general necesitan ser abastecidas con grandes cantidades de energía (figura 14.1.a).

b) Compensación en paralelo o por realimentación: Consiste en realimentar la señal de salida de algún elemento de la planta, de forma que el compensador se ubica en una realimentación interna (figura 14.1b).

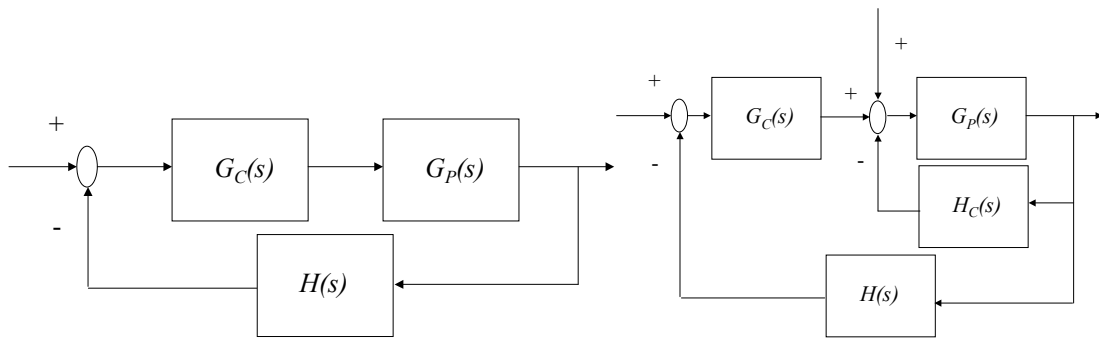


Figura 14. 1. a) Compensación en serie, b) Compensación en paralelo

c) Compensación predictiva o por prealimentación: Trata de adelantarse en su acción correctora tras la medición de las perturbaciones (figura 14.2). La señal perturbadora (que ha de ser medible) es llevada directamente a la entrada a través del compensador de prealimentación $G_{CP}(s)$.

1.1.1 Especificaciones de funcionamiento

Son el conjunto de especificaciones dinámicas que han de presentarse para cumplir determinados objetivos en cuanto al funcionamiento del sistema. Para un diseño correcto se debe de elegir una serie de requisitos posibles, tratando además, de que las condiciones que se fijen no sean necesariamente severas.

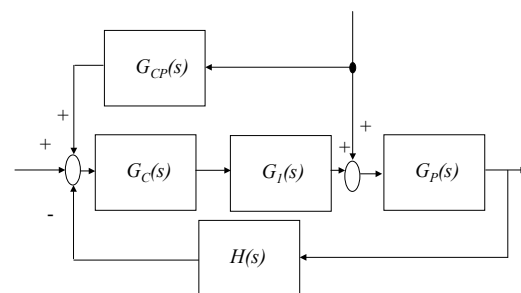


Figura 14. 2. Compensación predictiva

Por otro lado, al tratar con sistemas LTI y al emplear la teoría de polos dominantes, el resultado de la compensación en cadena cerrada se puede aproximar a un sistema de segundo orden equivalente. Por esta razón se hace extensible dar las especificaciones dinámicas del equipo haciendo referencia a los parámetros típicos de los sistemas de segundo orden.

El grupo de los requisitos puede ser dado en el dominio del tiempo, de la frecuencia o en el dominio complejo. En el caso de emplear las técnicas del lugar de las raíces se emplearán especificaciones del dominio temporal, tales como el tiempo de establecimiento y la amplitud de pico ante una entrada en escalón, junto con las características de precisión. Si el diseño se hace en frecuencias, el margen de fase y la frecuencia de cruce de ganancia junto con las constantes de error serán las especificaciones. Al final, lo que se pretende es que el conjunto realimentado tenga unos polos complejos conjugados y dominantes (esta elección vendrá justificada posteriormente, pero se puede decir que es un compromiso entre la rapidez de respuesta y la estabilidad del conjunto) que pueden definirse en términos del factor de amortiguamiento y de frecuencia natural no amortiguada. En el

cuadro adjunto se ponen de manifiesto las especificaciones dependiendo del dominio con el que se trabaje.

Dominio del tiempo	Sobreoscilación	M_p
	Tiempo de subida	t_r
	Tiempo de establecimiento	t_s
	Constantes de error	K_p, K_v, K_a
Dominio de la frecuencia	Margen de fase	γ
	Frecuencia de cruce	ω_g
	Pico de resonancia	M_r
	Constantes de error	K_p, K_v, K_a
Dominio complejo	Coefficiente de amortiguamiento	ζ
	Factor de amortiguamiento	σ
	Frecuencia amortiguada	ω_d
	Frecuencia natural no amortiguada	ω_n
	Constantes de error	K_p, K_v, K_a

Tabla 14. 1 Parámetros de un sistema de segundo orden equivalente

Sin embargo, estas especificaciones no son independientes entre sí, existiendo relaciones entre estos parámetros. Por ejemplo, el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional al factor de amortiguamiento, o bien, el margen de fase es proporcional al coeficiente de amortiguamiento. La tabla siguiente muestra algunos de estos vínculos matemáticos entre los parámetros de los distintos dominios para sistemas de segundo orden.

Tabla 14. 2. Relaciones entre los parámetros de sistemas de segundo orden

Sobreoscilación	$M_p = 100e^{-\pi/\zeta\theta}$	$M_p \approx 75 - \gamma$ Si : $\gamma > 27^\circ$ y $M_p < 46\%$
Tiempo de subida	$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$	Si : $0 < \zeta < 1$
Tiempo de pico	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$	Si : $0 < \zeta < 1$
Tiempo de establecimiento	$t_s = \frac{\pi}{\sigma}$	Si : $0 < \zeta < 0.4$
Margen de fase	$\gamma \approx 100\zeta$	Si : $0 < \zeta < 0.7$
Pico de resonancia	$M_r \approx \frac{1}{2\zeta}$	Si : $0 < \zeta < 0.7$
Frecuencia de resonancia	$\omega_r \approx \omega_d$	Si : $0 < \zeta < 0.7$
Ancho de banda	$AB \approx \frac{1}{2t_r}$	Si : $0 < \zeta < 1$

1.1.2 Condiciones básicas exigibles que debe tener el diseño de un sistema de control

El objetivo fundamental de un sistema de control SISO es que la señal de salida siga a la entrada, haciendo que las perturbaciones sobre el sistema no influyan nada o minimamente sobre el equipo. Por ejemplo, en el diseño de un servosistema de dirección de un coche el objetivo será que las ruedas del vehículo (señal de salida) persiga la señal del volante (señal de entrada), con independencia del tipo de carretera o de las variables climatológicas (perturbaciones).

Para el propósito marcado el sistema deberá de cumplir cuatro requisitos:

1. El sistema debe ser estable,
2. debe de tener una determinada precisión,
3. debe de estar adecuadamente amortiguado y
4. debe ser lo suficientemente rápido.

Sin embargo, se observará que estos cuatro objetivos entre sí son contradictorias y deberá de haber un compromiso cuantitativo de cada una de estas exigencias. La primera de ellas, la de estabilidad, exige que el sistema deberá de volver al reposo cuando haya terminado la excitación de entrada y no existan perturbaciones que influyan al sistema. Los procedimientos de Routh en el dominio complejo, de Nyquist en la frecuencia o las técnicas de lugar de las raíces permitirán determinar si el sistema es o no estable.

Para que el sistema sea preciso requerirá que la ganancia estática entre la señal de salida y de mando sea unitaria, esto es, que la señal de salida siga a la entrada, mientras que la ganancia entre la señal de salida y la de perturbación tienda a ser nula. Suponiendo una compensación serie y una realimentación unitaria (figura 14.3), las funciones de transferencia entre la salida y la entrada, $M_1(s)$, junto con la salida y la perturbación, $M_2(s)$, serán calculadas mediante la aplicación del teorema de superposición:

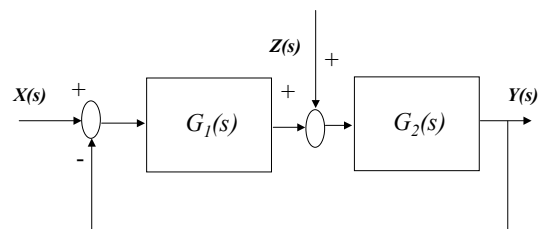


Figura 14. 3. Arquitectura de control típica

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} X(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} Z(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \\ M_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \end{array} \right. \quad (14. 1)$$

Tal cual se ha comentado se deseará que $M_1(s)$ tenga una ganancia estática que tienda a ser uno, mientras que $M_2(s)$ consiga ser nulo. Para obtener este doble efecto se necesitará que $G_1(s)$ posea una alta ganancia estática, así como la ganancia de la cadena abierta, $G_1(s) G_2(s)$, ya que si es así:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) \gg 1 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s) \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} M_1(s) \rightarrow 1 \\ \lim_{s \rightarrow 0} M_2(s) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (14. 2)$$

Concluyendo, que si $G_1(s)$, cuya FDT incluye el compensador, tiene el efecto de un integrador, el cual se caracteriza por tener una alta ganancia estática, podrá cumplirse el requisito de precisión. Pero también es conocido que la acción integradora en la cadena abierta hace que el bucle cerrado de control tienda a ser inestable. Por tanto, se observa que un exceso de precisión puede hacer que el sistema se vuelva inestable y viceversa. Desde el punto de vista de la respuesta frecuencial, se sabe que a medida de que se aumente la ganancia estática disminuirá el margen de fase y aun más, la inclusión de una acción integral supone la inserción de un desfase de -90 , provocando una disminución del margen de fase. Estas conclusiones indican que habrá de buscar un compromiso entre la estabilidad y la precisión del equipo.

La tercera y cuarta condición están unidas a la respuesta del régimen transitorio. Se ha demostrado que si un sistema tiene una buena pauta de comportamiento en la respuesta de transitorio ante una entrada en escalón, cualquier otro tipo de entrada prestará una tendencia óptima de transitorio al seguir la señal de mando. Al considerar el modelo equivalente del sistema de control a uno de segundo orden, implica que el sistema será más rápido a medida que los polos dominantes se alejen del eje imaginario. Desde el punto de vista matemático se observa que si el factor de amortiguamiento aumenta disminuye el tiempo de establecimiento, $t_s = \frac{\pi}{\sigma}$.

Un compromiso entre rapidez y estabilidad requiere que los polos dominantes sean complejos conjugados. Este efecto provoca que el sistema sea subamortiguado, es decir, presentarán oscilaciones alrededor del valor final ante una entrada en escalón. No obstante, una excesiva oscilación acabará volviendo al sistema inestable y lento. Por el contrario, si el sistema resultante es sobreamortiguado la respuesta del transitorio será también lenta aunque habrá un aumento de la estabilidad. Un compromiso entre la rapidez del transitorio y la estabilidad se garantiza con valores de sobreoscilación, M_p , entre el 5% y el 35%.

Resultados similares se obtienen con la respuesta en frecuencia. La evolución del transitorio temporal corresponde con la respuesta frecuencial del equipo de alta frecuencia. A medida de que un sistema tenga un mayor ancho de banda más rápido responderá, pero también se hará más sensible al ruido, ya que los espectros de las perturbaciones suelen tener componentes de alta frecuencia. De hecho, la respuesta del régimen transitorio depende del margen de fase y de la frecuencia de cruce. Así, un sistema con bajo nivel de margen de fase resulta tendente a ser sobreoscilatorio y a la inestabilidad ($\gamma \approx 100\zeta$), en cambio, un alto valor de margen de fase hace al sistema sobreamortiguado y lento. Por otro lado, la rapidez del sistema está ligada con la frecuencia de cruce. A medida de que aumente este valor disminuye el tiempo de establecimiento. Sin embargo, vuelve aparecer una nueva contradicción, al hacer que la frecuencia de cruce tienda a la alta frecuencia supone que disminuye el margen de fase. De vuelta al mismo compromiso anterior entre el amortiguamiento, la estabilidad y la rapidez, un buen diseño exige márgenes de fase entre 50° y 70° . Por ejemplo, en los amplificadores electrónicos realimentados se piden que tengan un margen de fase por encima de los 45° .

En el siguiente ejemplo se va a tratar de asentar las contradicciones comentadas y los compromisos necesarios entre los parámetros para hacer cumplir las exigencias de un buen diseño de control. En primer lugar, se emplearán las técnicas del lugar de las raíces y posteriormente, sobre el mismo ejemplo, se aplicará la respuesta en frecuencias.

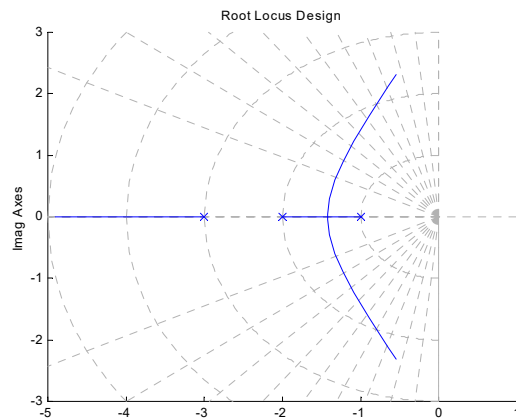
Ejemplo 14.1

Se tiene una planta del tipo $G_p(s) = \frac{10}{(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$ al que se le coloca un compensador en serie de tipo proporcional, con una ganancia que vale 1 y 5. La realimentación es unitaria. Se pide:

1. Obtener la respuesta del conjunto ante la entrada en escalón y calcular los parámetros más significativos.
2. Si el regulador es reemplazado por un integrador ideal con una constante de tiempo de 2 s, caracterizar su respuesta temporal.
3. Determinar para los tres anteriores casos los márgenes de fase y las frecuencias de cruce.

Resolución

1. La descomposición polinómica del denominador de la planta se observa que tiene tres polos reales a los valores de -1 , -2 y -3 . De otro, al emplear el criterio de Routh, el valor de ganancia crítica del compensador proporcional será de $k_{cr} = 6$. La figura adjunta muestra las ramas del lugar de las raíces. La primera observación constata el compromiso entre la estabilidad y la precisión. Un aumento de la ganancia estática del regulador hará que el sistema sea más preciso, pero también tenderá a ser más inestable, hasta alcanzar el valor de k_{cr} . Desde el punto de vista analítico habrá de calcular la constante de error ante la entrada en escalón y el error del régimen permanente:



$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} kG_p(s) = k \frac{10}{6} \begin{cases} k = 1 \rightarrow e_{ss} = 37.5\% \\ k = 5 \rightarrow e_{ss} = 10.7\% \end{cases} \quad (14.3)$$

Una segunda conclusión resalta que una aceptable precisión ($k = 5$), produce una excesiva oscilación y además el sistema se vuelve más lento. Con el objeto de calcular los parámetros del régimen transitorio será necesario determinar cuales son los polos dominantes de la cadena cerrada en función de la ganancia del regulador proporcional:

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 10k) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow s = \begin{cases} -4.3 \\ -0.845 \pm j1.73 \end{cases} \\ k = 5 \rightarrow s = \begin{cases} -5.77 \\ -0.11 \pm j3.11 \end{cases} \end{cases} \quad (14.4)$$

Por polos dominantes se observa que las respuestas para estos dos valores corresponden a las de uno equivalente subamortiguado, cuyos valores serán:

$$\begin{aligned} k = 1 &\rightarrow t_r = 1.17s \quad t_p = 1.8s \quad M_p = 21.56\% \quad t_s = 3.71s \\ k = 5 &\rightarrow t_r = 0.51s \quad t_p = 1s \quad M_p = 89.48\% \quad t_s = 27.8s \end{aligned}$$

En el ejemplo se contempla como la precisión del equipo está en contraposición con la propia estabilidad y una sobrada oscilación, llevando consigo a un comportamiento excesivamente lento. También se puede destacar cómo una sobreoscilación de un 20%

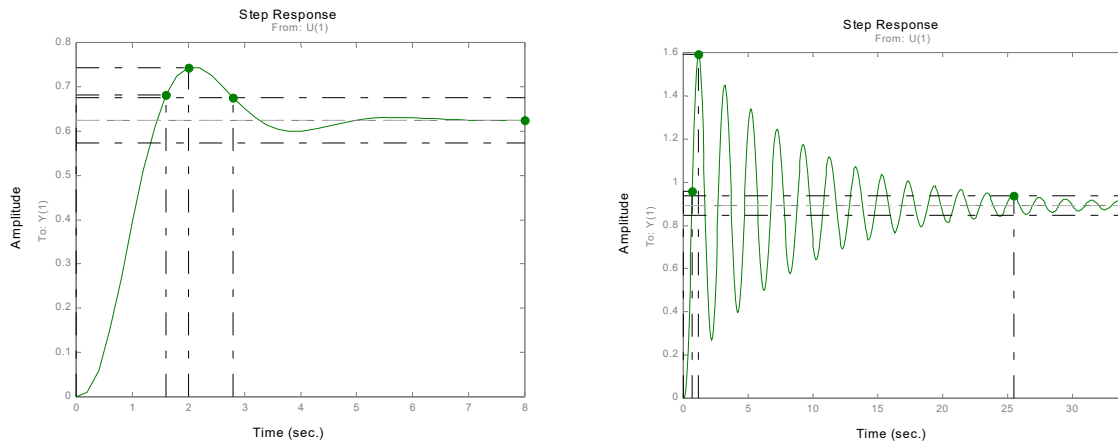


Figura 14. 4. Respuesta de salida ante una entrada en escalón a) k=1, b) k=5

permite obtener una aceptable respuesta transitoria y de estabilidad. Sin embargo, el error del régimen permanente es muy grande. Por eso, en el siguiente apartado se propone utilizar un integrador ideal.

2. Obviamente al poner un polo sobre el origen en la cadena abierta hace que el sistema se convierta a uno de tipo uno y por lo tanto no habrá error ante una entrada en escalón:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2s} G_p(s) = \infty \rightarrow e_{ss} = 0\%$$

El nuevo trazado del LDR pone de manifiesto la pérdida de estabilidad del conjunto, al acercarse las ramas principales al semiplano positivo. A su vez, los nuevos polos dominantes se aproximan al eje imaginario, lo que conlleva una disminución del factor de amortiguamiento y por lo tanto un aumento del tiempo de establecimiento. Ahora los nuevos polos dominantes de la cadena cerrada serán:

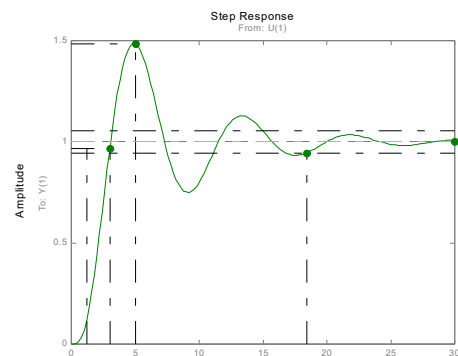
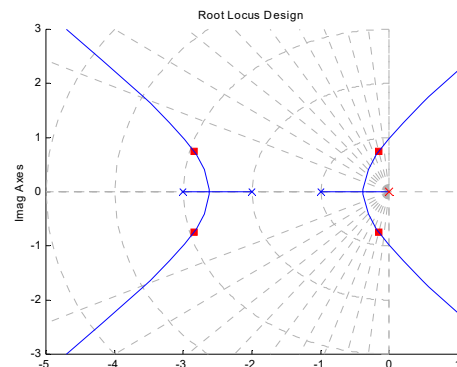
$$D(s) = 2s^4 + 12s^3 + 22s^2 + 12s + 10 = 0 \rightarrow s = \begin{cases} -0.16 \pm j0.74 \\ -2.84 \pm j0.74 \end{cases} \quad (14.5)$$

Los nuevos parámetros del régimen transitorio ante una entrada en escalón serán:

$$t_r = 2.41s \quad t_p = 4.24s$$

$$M_p = 50.7\% \quad t_s = 19.63s$$

Mostrándose que tienen una mejor precisión respecto del aparatado anterior, pero con el inconveniente de un mayor tiempo de establecimiento y de oscilación respecto cuando el compensador era de tipo proporcional con una ganancia igual a la unidad.



3. En cuanto a la respuesta en frecuencia se pasará en primer lugar a normalizar la expresión de la cadena abierta para su representación en diagrama de Bode; modificando la FDT del conjunto planta-compensador de forma que aparezcan las constantes de tiempo de los polos y ceros se tendrá para el primer caso:

$$kG_p(\omega) = \frac{\frac{10}{6}k}{(1 + j\omega)(1 + j\omega 0.5)(1 + j\omega 0.33)} \quad (14.6)$$

Con la expresión resulta sencillo tanto dibujar la respuesta en frecuencias como obtener el margen de fase, a partir de la frecuencia de cruce. Recuérdese que esta frecuencia es aquella que viene definida cuando el módulo de la ganancia de la cadena abierta es unitario, por tanto las expresiones serán:

$$\left(\frac{10}{6}k\right)^2 = 0.0272\omega_g^6 + 0.3861\omega_g^4 + 1.3578\omega_g^2 + 1$$

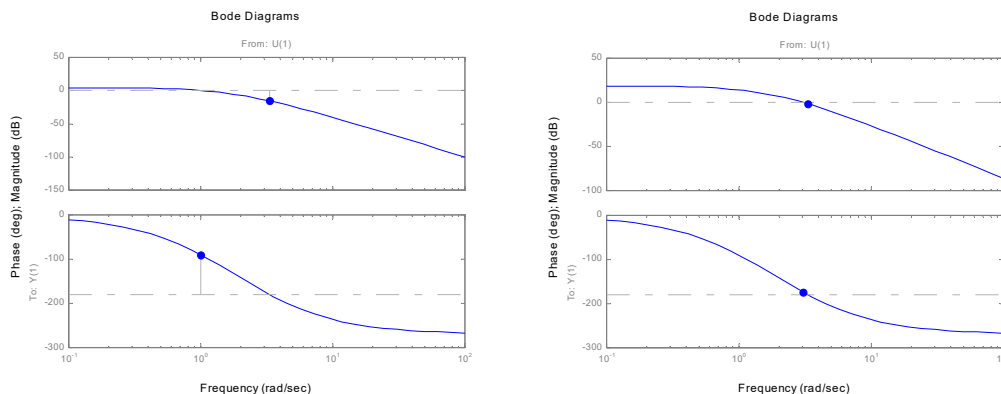
$$\gamma = 180 - \arctg(\omega_g) - \arctg(0.5\omega_g) - \arctg(0.33\omega_g) \quad (14. 7)$$

Los valores de frecuencia de cruce y de margen de fase están dependientes del valor de k, para los casos aquí tratados serán:

$$k = 1 \rightarrow \omega_g = 1rad / s \quad \gamma = 90^\circ$$

$$k = 5 \rightarrow \omega_g = 3rad / s \quad \gamma = 6^\circ \quad (14. 8)$$

Si además se analiza los diagramas de Bode se confirma las anteriores conclusiones. A medida de que se tiene un aumento de la ganancia estática en la cadena abierta se observa que disminuye el margen de fase, lo que implica una pérdida de la estabilidad. Por el contrario, se observa que también varía la frecuencia de cruce, esto supone, un aumento del ancho de banda de amplificación, pudiendo conseguir una mejora de la respuesta transitoria. A ello habrá de añadir la conclusión de la precisión del sistema realimentado; por supuesto, como ya se vio anteriormente, el aumento de k conllevará una mayor precisión.



Para el caso del compensador tipo integrador ideal, la FDT normalizada corresponderá a:

$$kG_p(\omega) = \frac{10}{12} \frac{1}{j\omega(1+j\omega)(1+j\omega 0.5)(1+j\omega 0.33)} \quad (14. 9)$$

De nuevo se procederá al cálculo de la frecuencia de cruce y del margen de fase, obteniendo:

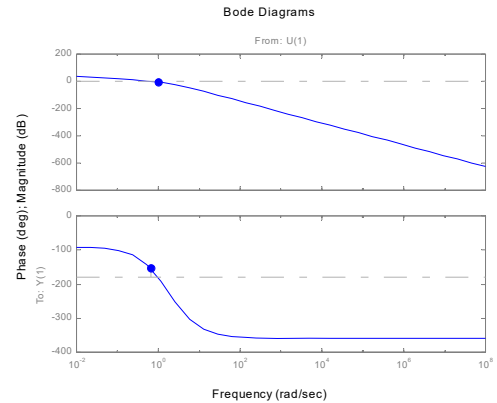
$$\left(\frac{10}{12}\right)^2 = 0.0272\omega_g^8 + 0.3861\omega_g^6 + 1.3578\omega_g^4 + \omega_g^2$$

$$\gamma = 90 - \arctg(\omega_g) - \arctg(0.5\omega_g) - \arctg(0.33\omega_g)$$

Resultando que:

$$\omega_g = 0.65 \text{ rad/s} \quad \gamma = 26.8^\circ$$

Tanto los resultados obtenidos como el diagrama de Bode de la nueva FDT son reveladores. Ha habido una disminución de la frecuencia de corte, lo que conduce a que el sistema será más lento. La introducción del polo en el origen ciertamente llevará a que la ganancia estática tienda al infinito, por tanto, el error ante una entrada en escalón será nulo. Pero también introduce un desfase de -90° haciendo disminuir tanto la frecuencia de cruce de ganancia como el margen de fase.



RESOLUCIÓN MATLAB

```
%Definición de la planta, Gp(s)
g1=tf(10,[1 6 11 6])
%Polos de Gp(s)
roots([1 6 11 6])
%FDT del conjunto con un regulador P igual a 1
g2=feedback(series(1,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g2)
%LDR
rlocus(g1)
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 1
p1=rlocus(g1,1)
%FDT del conjunto con un regulador P igual a 5
g3=feedback(series(5,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g3)
%LDR
rlocus(g1)
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 5
p2=rlocus(g1,5)
%FDT del conjunto con un regulador I con una constante de tiempo de 2s
g4=tf(1,[2 0])
g5=feedback(series(g4,g1),1)
%Respuesta del sistema ante una entrada en escalón unitario
step(g5,g3,g2)
%LDR
rlocus(series(g4,g1))
%raíces de la cadena cerrada con un regulador P igual a 1
p3=rlocus(series(g4,g1),1)
%Respuesta en frecuencia con compensador proporcional igual a 1
bode(g1)
[mag1,fase1]=bode(g1,1)
%Respuesta en frecuencia con compensador proporcional igual a 5
bode(series(5,g1))
[mag2,fase2]=bode(series(5,g1),3)
%Respuesta en frecuencia con compensador integral con constante de
tiempo igual a 2s
bode(series(g4,g1))
[mag3,fase3]=bode(series(g4,g1),0.65)
```

1.1.3 Metodología para el diseño de los compensadores

Se podrían destacar dos estrategias para la determinación de la función de transferencia de los compensadores: métodos experimentales y métodos analíticos. Los primeros no requieren de conocer del modelo de FDT de la planta, $G_p(s)$; emplean herramientas de laboratorio y excitan a la entrada para poder sintonizar los parámetros de los reguladores. Hay una gran variedad de técnicas de sintonía, aunque en este temario se verán sólo los métodos de Ziegler-Nichols. Respecto a los segundos, los métodos analíticos, exigen de una etapa de identificación de la planta, obteniendo el modelo matemático de comportamiento dinámico. A su vez los métodos analíticos se dividen en:

- a) Métodos de análisis
- b) Métodos de síntesis

En el primer grupo tratan de compensar la planta en la cadena abierta, de forma que la respuesta en el bucle cerrado cumpla con las especificaciones fijadas. Salvo en el diseño de sistemas muy críticos y de alto grado de precisión, se utilizará el empleo de reguladores normalizados (P, PD, PI o PID), con configuraciones sobradamente experimentadas que mediante el ajuste de sus parámetros, permiten ser utilizados en una amplia gama de sistemas.

En el método de síntesis se parte directamente de las especificaciones deseadas, determinando en forma analítica el tipo de compensación necesaria y sus parámetros, obteniendo un compensador único y definido. No obstante, la experiencia ha demostrado que son excesivamente complejos y muy sensibles a las variaciones.

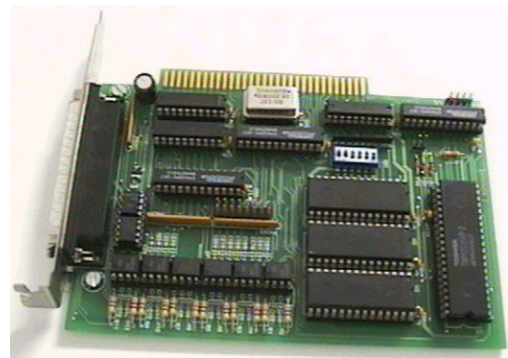


Figura 14. 5. Tarjeta PID en bus ISA basado en el controlador LM628. Equipo empleado en las prácticas de la asignatura

1.2 Reguladores y redes de compensación

Durante este curso se empleará el primero de los métodos expuestos, ya que no se realizan compensadores para cada tipo de planta, sino que se utiliza reguladores normalizados. La experiencia ha demostrado que los cuatro tipos de reguladores, correspondiente a las acciones básicas de control, constituyen la base fundamental para el tratamiento de la mayor parte de las aplicaciones prácticas.

Los siguientes párrafos analizarán las influencias de las acciones proporcionales, derivativas e integradoras, así como sus combinaciones y las formas de implementación mediante el procesamiento analógico de las señales eléctricas.

1.2.1 Reguladores de tipo proporcional (P)

Estos compensadores se caracterizan por variar la ganancia estática de la FDT de la cadena abierta, son los más simples y su FDT es del tipo:

$$G_c(s) = k \quad (14. 10)$$

El efecto dinámico que produce se manifiesta en la evolución de los polos según el LDR. Habitualmente hacen que el sistema sea más rápido, más oscilatorio y disminuya el error al aumentar el valor de k . Sin embargo, un incremento desmedido de este parámetro hará excesivo las oscilaciones y convertirá al equipo en un sistema más lento. Por tanto, habrá de buscar un compromiso entre la respuesta dinámica y la precisión. Efecto que dependerá de la variación de las raíces de la planta en el LDR. De hecho, hay que tener en cuenta que el LDR con este compensador no queda modificado, a diferencia del resto de reguladores.

Un ejemplo del efecto proporcional se ha observado en el anterior ejemplo. La variación de k de 1 a 5 mostró cómo varía tanto la evolución del régimen transitorio como del permanente. Con k igual a uno el sistema era subamortiguado con una sobreoscilación de alrededor del 20% y un tiempo de establecimiento de menos de 4s. En cambio, con k igual a 5, la sobreoscilación superaba el 80% y el tiempo en alcanzar el régimen permanente era superior a 25 s. Por el contrario, el error ante la entrada en escalón evolucionó desde casi el 40% hasta el 10%. Concluyendo, estos reguladores resultan ser un débil compromiso entre la respuesta dinámica y la precisión. Será necesario introducir nuevas estructuras y más complejas para mejorar las eficacias de los diseños sobre las estructuras del control automático.

En cuanto a su implementación electrónica, se suele emplear circuitos de amplificadores diferenciales. Esta elección viene dada por la posibilidad de cumplir con el doble objetivo de realizar físicamente el amplificador de error y el regulador tipo P. Considerando el circuito de la figura y garantizada la suficiente estabilidad del montaje, la señal de salida, u_s , es proporcional a la diferencia entre las dos entradas:

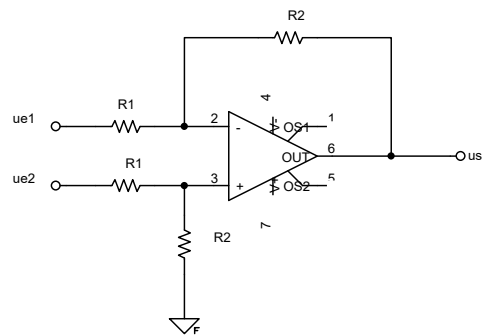


Figura 14. 6. El amplificador diferencial implementa al amplificador de error y al regulador P

(14. 11)

$$\frac{u_s}{u_{e1} - u_{e2}} = -\frac{R2}{R1}$$

Nótese que el amplificador diferencial puede producir, por un lado, la resta de las dos señales eléctricas de entrada, el resultado es una señal diferencial, y de otro, esta señal de mezcla puede ser amplificada. Con estas funcionalidades cumple las exigencias de generar la señal de error, diferencia entre la señal de mando con la realimentada, y de otro lado, puede amplificar esta señal, produciendo el efecto de compensación proporcional.

1.2.2 Reguladores proporcionales derivativos, (PD)

Estos compensadores son una combinación lineal entre la señal de error y su derivada, lo que le va a dar carácter anticipador. Desde el punto de vista analítico se tendrá que la salida del regulador es del tipo:

$$y(t) = k \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

donde k es la ganancia estática del regulador y T_d es la constante de tiempo del derivador, ambos son los parámetros de este compensador. Véase en la figura el efecto de la derivada. Dada una señal de error determinada, por ejemplo, la obtenida en el ejercicio anterior con un integrador puro, es fácil notar cómo su derivada es una anticipación de la propia señal de error. Los máximos y mínimos de la señal corresponderán a pasos por cero en la derivada. Más aun, la señal derivada se encuentra desfasada $+90^\circ$ respecto a la señal de error. Otro detalle a resaltar es la discontinuidad de la derivada en el instante inicial, nótese que al aplicar una entrada en escalón se produce un error que prácticamente genera un cambio brusco y por ende una derivada que tiende al infinito. Este efecto será tratado más adelante, pero antes véanse más conclusiones de este regulador. Las reflexiones de este párrafo derivan del análisis temporal, realizado a partir de la ecuación diferencial del compensador, otra vertiente a inspeccionar sería empleando el dominio complejo y el LDR. Para ello, si se aplica la transformada de Laplace sobre la anterior expresión, el resultado permitirá conocer su FDT:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k(1 + sT_d) \quad (14.12)$$

Nótese que la expresión del compensador es no causal. De la relación de este compensador se desprende que un regulador PD introduce un cero en la cadena abierta, por tanto, modificará el LDR del conjunto planta-compensador. La adición de un cero en el lazo abierto suele lograr que el sistema realimentado sea más estable y menos oscilatorio, consecuentemente mejora el comportamiento dinámico de conjunto. Sin embargo, no tiene la capacidad de modificar el régimen permanente de forma independiente, puesto que los parámetros de regulador PD, k y T_d , son empleados para ajustar el transitorio.

La figura pone de manifiesto sobre la planta del ejemplo 14.1 que la adición del cero modifica el LDR. Para este caso concreto las ramas de los polos dominantes están siendo alejadas del eje imaginario, provocando que el sistema sea más estable, más rápido y algo más oscilatorio.

La FDT del regulador muestra que también es no causal, esto es, no se puede implementar físicamente. De hecho, se está tratando con el regulador PD ideal.



Desde el punto de vista del análisis frecuencial, el regulador PD presenta un

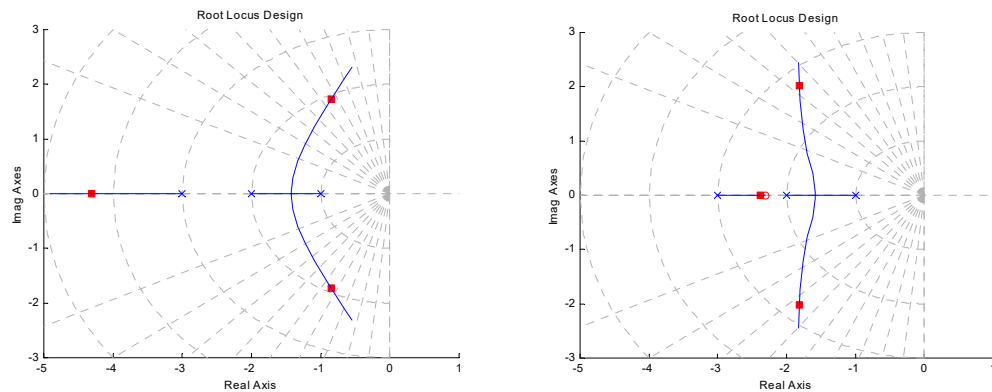


Figura 14. 8. Modificación del LDR con la adición de un cero

aumento de la ganancia en las componentes de mayor frecuencia a $\frac{1}{T_d}$ y la inserción de un

desfase de +90 grados en la cadena abierta (ver figura 14.6). Las consecuencias sobre el conjunto serán que la frecuencia de cruce y el margen de fase aumenten. Por tanto, el sistema será, en general, más estable y más rápido. La primera conclusión viene dado por el aumento del margen de fase, la segunda se deriva de que el espectro de alta frecuencia de la señal de error está siendo amplificada por la red de compensación. Sin embargo, los espectros frecuenciales de las perturbaciones también tienen componente de alta frecuencia, lo que significa que los ruidos también serán amplificados, esto es, los reguladores PD hacen que el conjunto sea más sensible a las perturbaciones externas, que por supuesto representa una gran desventaja.

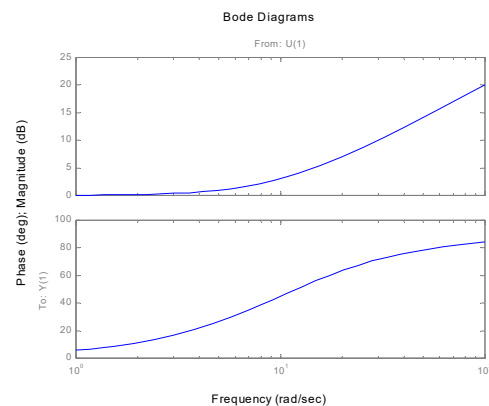


Figura 14. 7. Respuesta en frecuencia de un regulador PD ideal

La respuesta en frecuencia también corrobora la falta de influencia sobre el régimen permanente. Téngase en cuenta que esta red muestra una ganancia fija en la baja frecuencia, por tanto, al procesar las componentes de baja frecuencia se mantiene fija, no incrementándose la ganancia al bajar la frecuencia, efecto necesario para reducir el error.

Tanto desde el teorema de valor inicial como de la propia respuesta frecuencial, se obtiene la misma conclusión, la ganancia a altas frecuencias tiende a ser infinito. Sin duda, no es posible su implementación desde el punto de vista físico (ya se había indicado anteriormente el carácter no causal del regulador). No es posible hacer amplificadores que tengan una ganancia infinita, ya que necesitarían infinita energía.

En resumen, esta acción diferenciadora resulta ser bastante problemática en dos aspectos distintos. En primer lugar, al reforzar las componentes de alta frecuencia también hace que el conjunto sea más sensibles a las perturbaciones. De otro, la salida del regulador ataca al accionador y normalmente, este último tiene elementos limitadores, esto es, no

linealidades en las que no se debe de entrar. Por ejemplo, las curvas de magnetización en las máquinas eléctricas. Como se ha comentado anteriormente, la salida del diferenciador será un impulso de gran amplitud ante una entrada en escalón. Sin embargo, la salida del accionador estará acotado a unos valores de Y_{max} e Y_{min} . Al transmitir la propagación del error a través de la red PD originará un gran impulso inicial que será limitado por el accionador, lo que hará inadecuado el regulador, ya que su efecto no será transmitido íntegramente por los accionadores.

En la figura de abajo y a la izquierda se observa la curva típica de transferencia donde existen elementos de magnetización. La alta respuesta inicial generada por el compensador PD no es transmitida directamente por los accionadores al entrar en zonas de saturaciones y por lo tanto, no se cumple con las condiciones establecidas de diseño.

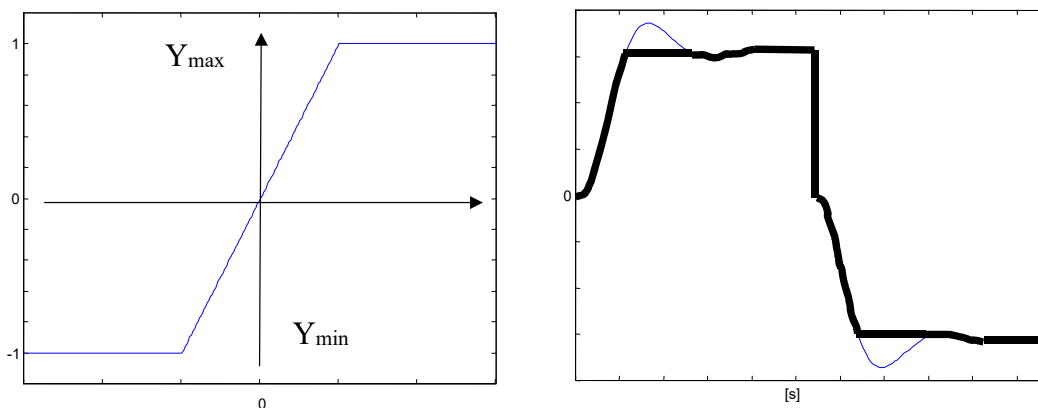


Figura 14. 9. Saturaciones y no linealidades: a) Curva de transferencia, b) Propagación de la señal

En consecuencia, el regulador real de tipo PD necesitará de una diferenciación atenuada, esto es, se limitará el efecto derivativo en los instantes iniciales. La forma de actuar será suavizando la respuesta frecuencial mediante la inserción de un polo a mayor frecuencia que la del cero. De esta forma, se hace que la ganancia a la alta frecuencia se estabilice. Desde el punto de vista del dominio complejo significa colocar un polo adicional más alejado del eje imaginario respecto al cero. En este caso, se dice que en la red el efecto del cero domina sobre el polo. A este tipo de compensador se le llama de adelanto de fase. La ecuación diferencial de esta red será:

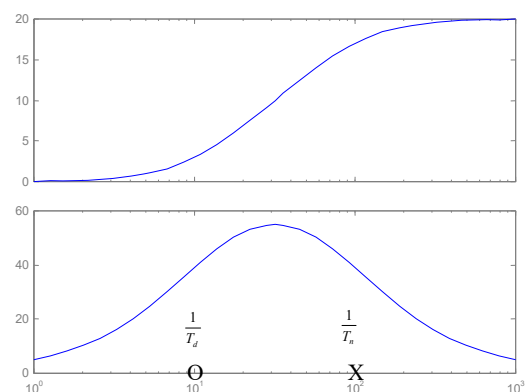


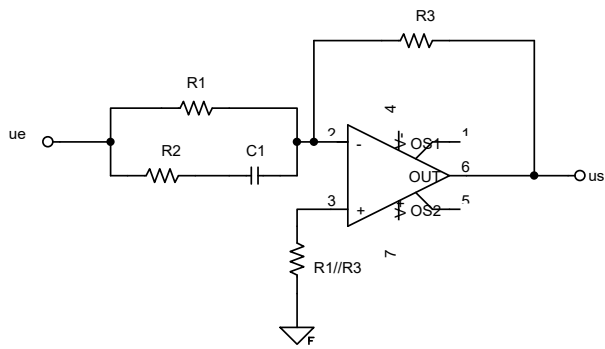
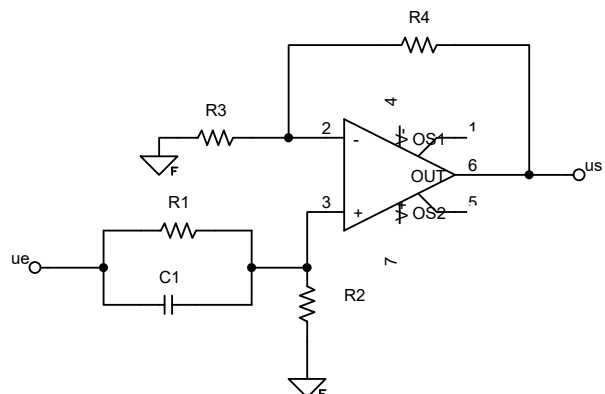
Figura 14. 10. Red de adelanto de fase

$$T_n \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

cumpliendo con la condición de que la constante de tiempo T_n es más pequeña que el tiempo del efecto derivador, T_d . Aplicando la transformada de Laplace se conseguirá la FDT de este compensador:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_d)}{(1 + sT_n)} \quad T_d > T_n$$

Respecto a la implementación con sistemas electrónicos, se puede diseñar bien con estructura de amplificación no inversora o de amplificación inversora. En el cuadro adjunto se muestran los esquemas y las FDT considerando que los amplificadores operaciones se consideren ideales.

<p>Estructura inversora</p>	$A_V(s) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1 + (R_1 + R_2)C_1s}{1 + R_2C_1s}$	
<p>Estructura no inversora</p>	$A_V(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1 + R_1C_1s}{1 + R_2 // R_1 C_1s}$	

1.2.3 Reguladores proporcionales integradores, (PI)

La acción proporcional consigue rapidez, pero no precisión; en cambio, la integradora obtiene bajo error en el régimen permanente pero la evolución de transitorio se hace más lenta. Parece lógico utilizar las ventajas de ambas acciones en un único regulador. A este tipo de regulador se le conoce con el acrónimo PI (proporcional-integrador). Desde el punto de vista matemático, la ecuación diferencial que caracteriza la dinámica de este compensador será:

$$y(t) = k \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right) \quad (14. 13)$$

La componente integradora de esta red funcionará mientras exista error, de ahí su fuerza en alcanzar el mínimo error en el régimen permanente. Para analizar su comportamiento desde el dominio complejo será necesario calcular su FDT; aplicando transformadas a ambos lados de la igualdad y agrupando, la nueva $G_c(s)$ será:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_i)}{sT_i} \quad (14. 14)$$

De la expresión destaca la introducción de un polo en el origen en la cadena abierta, lo que conlleva el aumento en una unidad del orden del sistema, disminuyendo por esta razón en un orden el nivel de error. Si el sistema es de tipo cero, por ejemplo, se habrá convertido en uno de tipo uno y así sucesivamente.

No obstante, y al igual que en los reguladores PD, no es posible su implementación física. Según la expresión (14. 14), este compensador tiene una ganancia estática que tiende a ser infinita, consiguientemente imposible de realizar físicamente. Para el diseño real de este compensador se puede aproximar mediante redes de retraso de fase. Esta estructura está constituida por un sistema de primer orden con un polo y un cero, donde la condición es que la constante de tiempo de polo es mayor que la del cero. El modelo de una red de retraso de fase es de la forma:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{(1 + sT_i)}{(1 + sT_r)} \quad T_r > T_i \quad (14. 15)$$

Sacando factor común en el denominador con T_r e imponiendo la condición de diseño sobre el signo de desigualdad entre constantes de tiempo se verá la aproximación entre la expresión del PI ideal y la de la red de retraso de fase:

$$G_c(s) = \frac{k}{T_r} \frac{(1 + sT_i)}{\left(\frac{1}{T_r} + s\right)^{T_r > 1}} \cong k' \frac{(1 + sT_i)}{s} \quad (14. 16)$$

Sin embargo, esta aproximación lleva consigo el no tener un polo en el origen sino próximo a él. El efecto de este resultado será que el error no será exactamente nulo sino próximo a cero.

Como esta red sólo tiene el objetivo de mejorar la respuesta del régimen permanente sin perturbar el transitorio, las técnicas de diseño basadas en el LDR ubican la red de retraso de fase casi sin modificar el original trazado. Por ejemplo, en la planta utilizada en el ejemplo 14.1 se han empleado variadas redes de retraso de fase con distintos valores (ver figura 14.11). La ubicación de polo-cero del compensador no hace variar sustancialmente las ramas del LDR, con el objeto de preservar los polos dominantes de la planta. A su vez el incremento de una unidad del orden del denominador del conjunto, supone que existe un polo próximo al origen, haciendo las funciones de integrador.

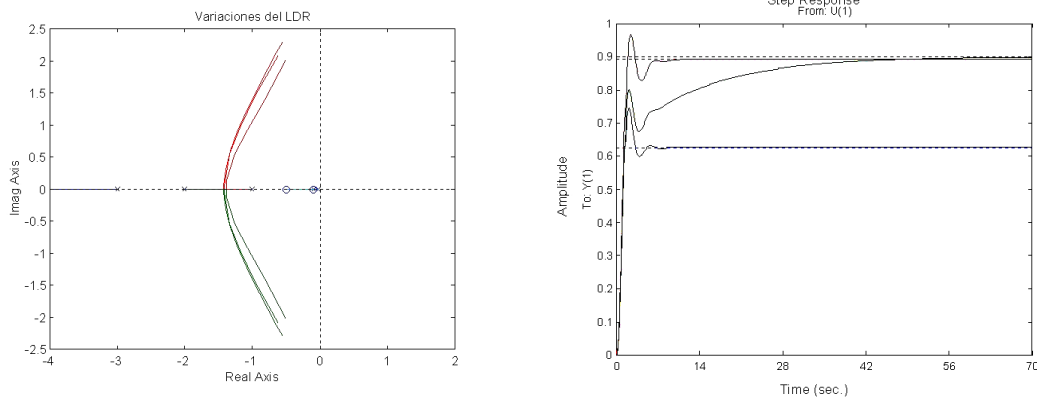


Figura 14. 11. Técnicas de diseño sobre redes de retraso de fase: a) LDR casi sin modificar b) Evolución temporal del conjunto

Este regulador tendrá una respuesta frecuencial como la indicada en la figura 14.12. Trabaja a bajas frecuencias como un integrador y a altas como un proporcional; no afectará, por ende, a la respuesta transitoria, pero si al permanente, eliminando el error de posición como consecuencia del aumento de ganancia estática. Hay que observar el desfase negativo que introduce en la cadena abierta, lo que provocaría un efecto desestabilizador. Por eso, en el diseño de las redes de retraso de fase mediante técnicas frecuenciales, no se emplean para disminuir el desfase de la cadena abierta (recuérdese que con las redes de adelanto de fase se trabaja mejorando el desfase). De hecho estas redes se posicionan para aportar atenuación en las altas frecuencias, disminuyendo la frecuencia de cruce y mejorando con ello el margen de fase. Estos aspectos serán desarrollados en los siguientes capítulos.

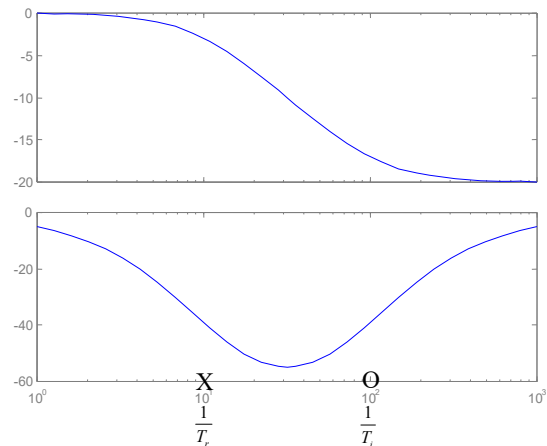
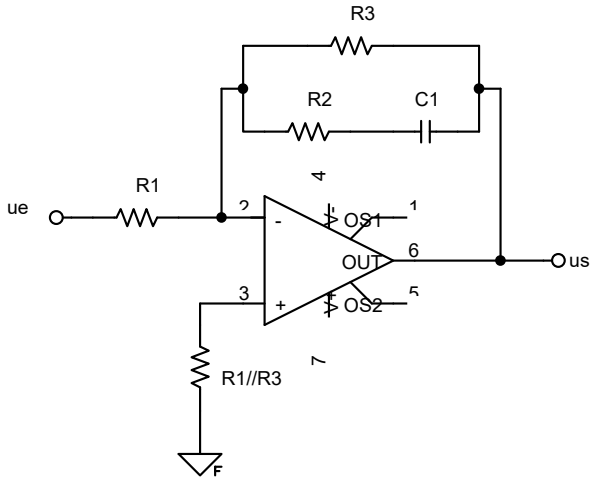
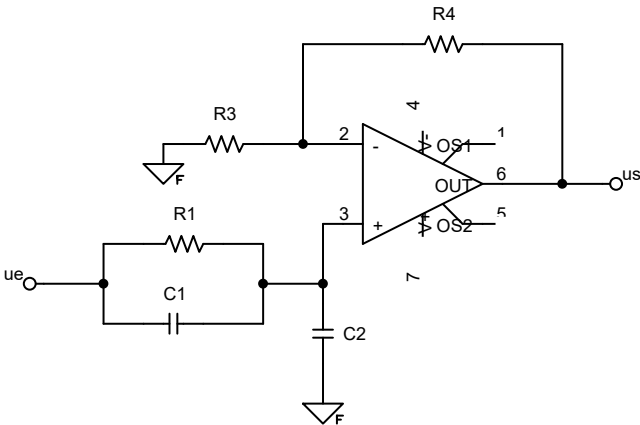


Figura 14. 12. Respuesta en frecuencia de una red de retraso de fase

En cuanto a las técnicas de implementación electrónica de estas redes de compensación pueden hacerse igualmente con estructura inversora o no inversora. En el cuadro adjunto se muestran sus FDTs y los circuitos a emplear:

<p>Estructura inversora</p>	$A_v(s) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1 + R_2 C_1 s}{1 + (R_2 + R_3) C_1 s}$	
<p>Estructura no inversora</p>	$A_v(s) = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + (C_1 + C_2) R_1 s}$	

1.2.4 Reguladores proporcionales, derivativos e integrales (PID)

La mayoría de los compensadores industriales son de tipo PID. Según algunos autores han cuantificado su uso en un 95% de los reguladores. Éstos se presentan comercialmente como tarjetas enchufables a los buses estándar o integrables dentro de los PLCs. Se caracterizan por tener un procesamiento que combinan linealmente la señal de error, su derivada y su integral, esto es,

$$y(t) = k \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \tag{14. 17}$$

pero este comportamiento es simplemente ideal, no es posible su realización física. Analizando su FDT se observa que hay más ceros que polos:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = k \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i} \tag{14. 18}$$

Esta relación muestra que este compensador no cumple el requisito de causalidad. Por lo tanto, se necesita hacer aproximaciones. La primera en realizarla es el desarrollo del numerador en dos ceros de primer orden; razón que se valida al ser la constante de tiempo del integrador mayor que del derivador, $T_i \gg T_d$:

$$G_c(s) = k \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{sT_i} = k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d) - sT_d}{sT_i} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i} \quad (14. 19)$$

Las dificultades de la acción diferencial se evita con una acción diferencial atenuada, tal cual se contempló con los reguladores PD:

$$G_c(s) \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i(1 + sT_n)} \quad (14. 20)$$

Realizando análoga modificación sobre la zona PI, para materializarlo en una red física real, se llega a la definitiva FDT:

$$G_c(s) \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i(1 + sT_n)} \approx k \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{(1 + sT_r)(1 + sT_n)} \quad T_r > T_i \gg T_d > T_n \quad (14. 21)$$

En definitiva, un buen acercamiento al regulador PID ideal puede hacerse con la combinación de una red de retraso de fase con otra de adelanto de fase. La primera trabajará en mejorar el régimen permanente y la red de adelanto tratará de hacer que el conjunto sea más rápido. Como se estudiará más adelante tanto las técnicas del LDR como de respuesta en frecuencia, presentan técnicas de ubicación de las dos redes casi de forma independiente, esto es, el diseño de los PID será una combinación de las técnicas de posicionamiento de las redes de adelanto y de retraso de fase.

La respuesta en frecuencia de la expresión (14. 21) avala la anterior afirmación. En la gama de las bajas frecuencias se encontrará la red de retraso de fase, mientras en el espectro de alta frecuencia está la red de adelanto de fase (figura 14.13)

Por último, la implementación física de los PID mediante estructuras electrónicas se confeccionarán a partir del encadenamiento de una red de atraso de fase más una de adelanto de fase. Esta posibilidad se fundamenta en la utilización de amplificadores operacionales, resolviéndose así el problema de adaptación de impedancias entre etapas y por tanto de independencia de ajuste entre los parámetros del regulador. Obviamente, existen cuadripolos pasivos que constituyen redes de adelanto y retraso de fase, pero son incapaces de tener ganancia mayor de la unidad en las bandas pasante y no es posible el ajuste

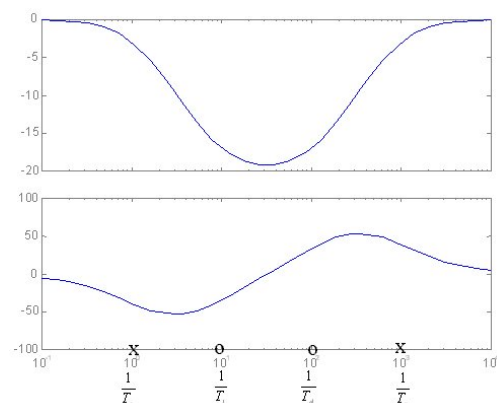


Figura 14. 13. Respuesta en frecuencias de un regulador PID real

independiente de los parámetros del PID ya que no se resuelve el problema mencionado anteriormente de adaptación de impedancias.

2 Técnicas de compensación basadas en el lugar de las raíces.

2.1 Introducción.

Ya se ha visto como el ajuste de un regulador se realiza en la práctica de modos muy diversos, dependiendo fundamentalmente de los datos de partida, y de las posibilidades de actuación experimental sobre la planta a regular. Podemos distinguir básicamente dos formas de abordar el problema: el ajuste experimental y el ajuste analítico.

El ajuste de reguladores de forma experimental, responde a la capacidad del personal especializado para identificar debido a la experiencia adquirida el efecto que los distintos parámetros del regulador va a tener sobre el sistema. De esta forma, y siguiendo un método de ensayo y error, se ajusta el regulador de forma eficiente. Empíricamente se han desarrollado una serie de métodos que intentan resumir este bagaje experimental de los operadores de planta. Basándose en parámetros obtenidos de la respuesta del sistema, se

pueden establecer una serie de reglas empíricas para la obtención de un punto de partida en el ajuste de los distintos reguladores. Es muy normal comenzar ajustando un regulador comercial mediante uno de estos métodos empíricos, que suelen dar un buen punto de funcionamiento del regulador, para a partir de ahí, irlo ajustando hacia especificaciones más concretas.

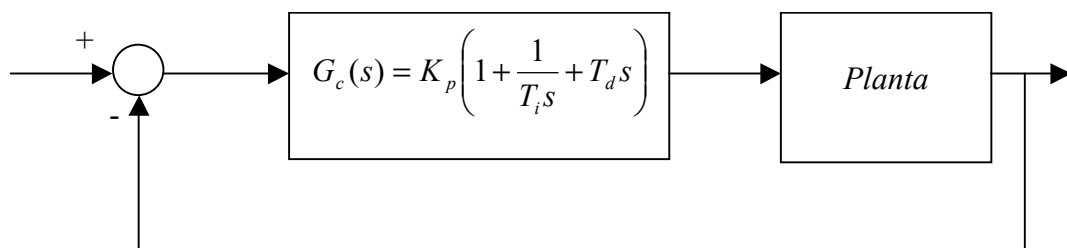
El ajuste del regulador basándose en los métodos de análisis parten del inconveniente de la necesidad de disponer de un modelo, lo cual no siempre es posible. Si se dispusiese de un buen modelo del sistema, y este es fácilmente simplificable, el método basado en el análisis puede ser muy efectivo, necesitando de un posterior ajuste menor que el necesario para el ajuste caso experimental.

El orden seguido en este capítulo es el siguiente: inicialmente, veremos los métodos experimentales más extendidos, así como su aplicación en caso de disponer de un modelo de la planta, convirtiéndolos de esta forma en métodos analíticos. Posteriormente, se pasará a describir el ajuste analítico de los distintos reguladores mediante técnicas basadas en la herramienta del Lugar de las Raíces (LDR).

2.2 Métodos experimentales

2.2.1 Ziegler-Nichols.

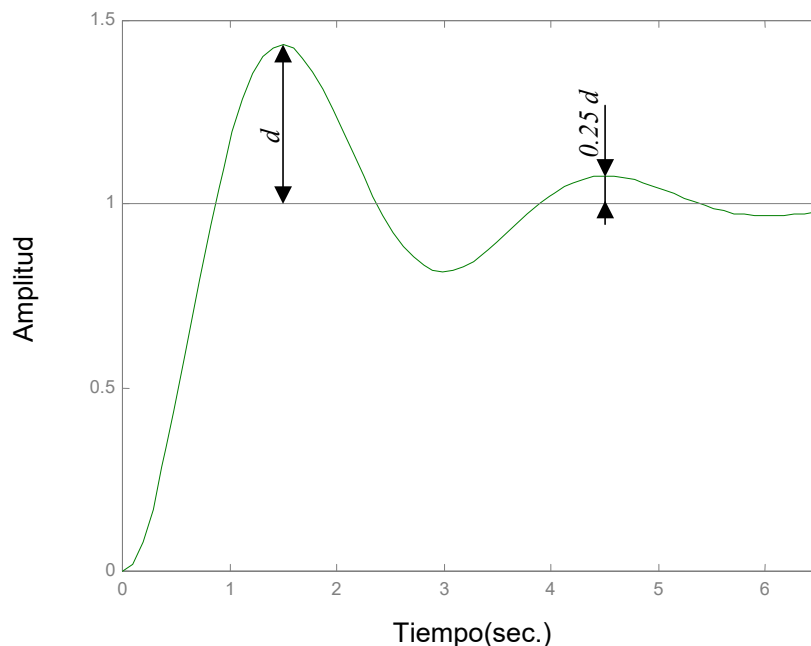
Ziegler y Nichols, en 1950, experimentaron sobre un gran número de sistemas los valores más adecuados para las acciones de un regulador PID tratando de esta forma de encontrar unas reglas que permitiesen su ajuste a partir de la observación del comportamiento del sistema. Estas reglas permiten determinar los valores de la ganancia proporcional K_p , del tiempo integral T_i , y del tiempo derivativo T_d basándose en las características de la respuesta transitoria de una planta dada. Esto permite la determinación de los parámetros del PID por parte de los ingenieros en la misma planta, basándose únicamente en las respuestas experimentales obtenidas al efectuar experimentos en el sistema a controlar. Las constantes deducidas de las reglas corresponden con la siguiente realización del PID:



Las reglas de *Ziegler-Nichols* que se verán a continuación, son de especial utilidad para realizar un primer ajuste del controlador de un sistema –afinación del controlador- cuando no se conoce el modelo matemático del mismo. Evidentemente, estas reglas pueden aplicarse también cuando se conoce este modelo matemático, aunque pierdan en cierta medida su sentido frente a otros métodos de ajuste basados en el análisis.

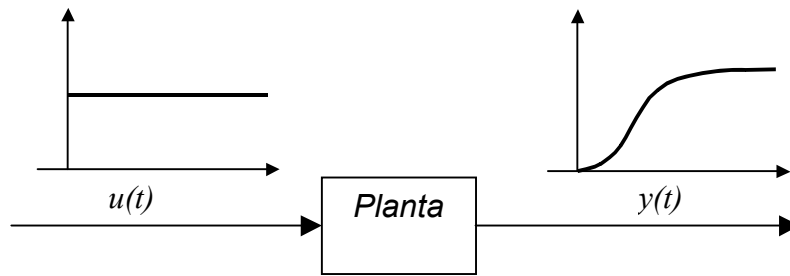
Si el sistema cumple los requisitos impuestos para cada uno de los dos métodos propuestos por *Ziegler-Nichols*, el ajuste del PID mediante estas reglas intenta conseguir un *buen* regulador, es decir, suficientemente rápido, con poca sobreoscilación y con error de posición nulo.

La métrica utilizada por este método para evaluar la bondad de un determinado ajuste es denominada como QDR (*Quarter Decay Ratio*), que puede interpretarse como la proporción de un cuarto entre la primera sobreoscilación y la segunda.

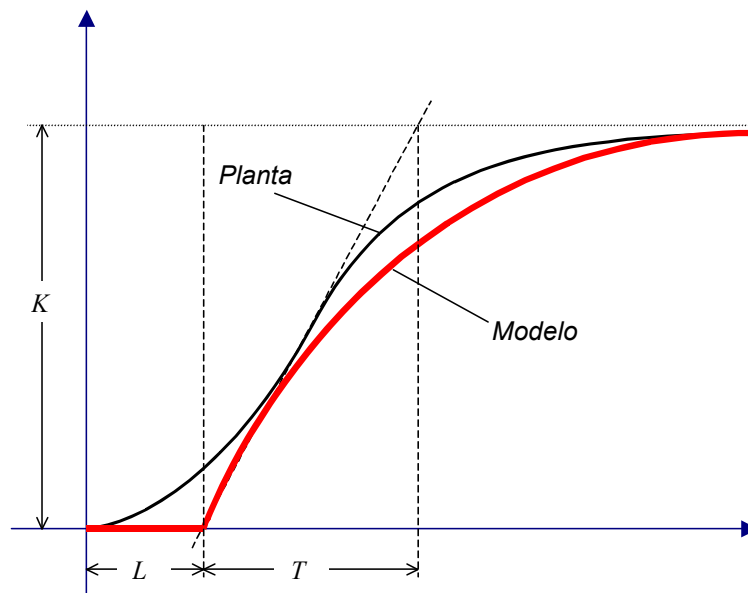


Primer método. Ajuste en Cadena Abierta o Curva de Reacción de Proceso.

Este método se ha desarrollado para sistemas que en cadena abierta no son oscilatorios, y que responden ante el escalón con una curva en forma de S. En caso de que la respuesta no presente esta forma, este primer método no es aplicable.



Este método de *Ziegler-Nichols*, lo que pretende es modelizar esta respuesta mediante un sistema de primer orden con un retardo puro. Sobre este sistema se han desarrollado las reglas que permiten obtener la acción de control requerida para lograr una respuesta satisfactoria. Se expone a continuación el método para aproximar el sistema físico a este sistema de primer orden mediante la obtención de sus tres parámetros característicos: la constante de tiempo T del polo, el valor L del retardo, y la ganancia estática K . Si superponemos la respuesta en S del sistema con la del modelo aproximado del mismo para una **entrada de escalón unitario** se obtendría la siguiente figura:



La expresión matemática de este modelo de primer orden aproximado del sistema, es de la forma siguiente:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (2.1)$$

Para obtener tanto de forma matemática como gráfica el valor de L y T , es necesario trazar la recta inclinada de la figura. Dicha recta queda definida mediante la tangente en el punto de inflexión de la curva de la respuesta real del sistema en cadena abierta. El corte de dicha recta con el eje de abscisas, indicará el tiempo de retardo puro de modelo (L), mientras que la constante de tiempo (T), se obtiene aproximadamente

midiendo el tiempo transcurrido entre este punto de corte y el de la misma recta con la abscisa correspondiente al valor final obtenido.

Obtenido el modelo (L, T, K) , este método de Ziegler-Nichols nos da los parámetros para distintos reguladores, de forma que se cumpla el criterio QDR . Estos valores quedan reflejados en la siguiente tabla:

TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{K \cdot L}$	∞	0
PI	$\frac{0.9T}{K \cdot L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$\frac{1.2T}{K \cdot L}$	$2L$	$0.5 L$

Estos parámetros corresponden con la siguiente expresión del PID:

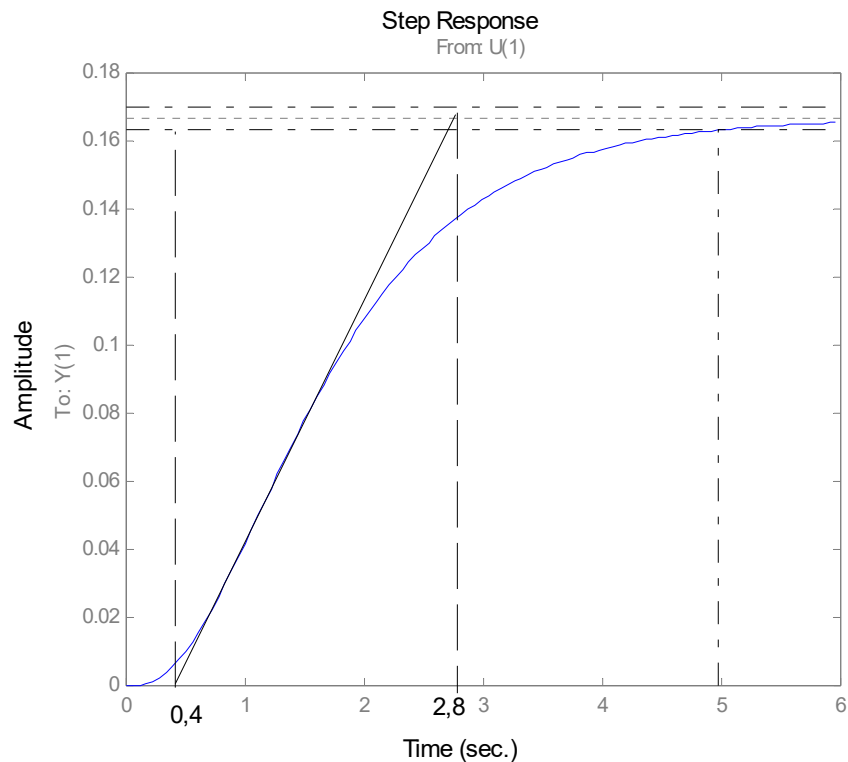
$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) = 0.6 \frac{T \left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{K s} \quad (2.2)$$

Se observa que se implementa un regulador con un polo en el origen y un cero doble en $-1/L$.

Ejemplo: Diseñar un regulador PID para el sistema cuya función de transferencia es la siguiente $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ según el método de ajuste en cadena abierta de Ziegler-Nichols. Nota: comprobar la validez del método para dicho sistema.

En primer lugar resolveremos el problema de una forma más práctica mediante el uso de MatLab.

```
>>gs=tf(1,poly([-1,-2,-3])
>>step(gs)
```



De esta forma comprobamos que el sistema responde ante un escalón con una curva en forma de S, sin sobre oscilación. Por tanto el método de Z-N propuesto por el enunciado es aplicable.

Procedemos entonces a medir sobre la figura los parámetros necesarios para realizar el modelo del sistema. Obtenemos gráficamente los valores:

$$\begin{aligned} K &= 0,165 \\ L &= 0,4 \text{ sec.} \\ T &= 2,8 - 0,4 = 2,2 \text{ sec.} \end{aligned}$$

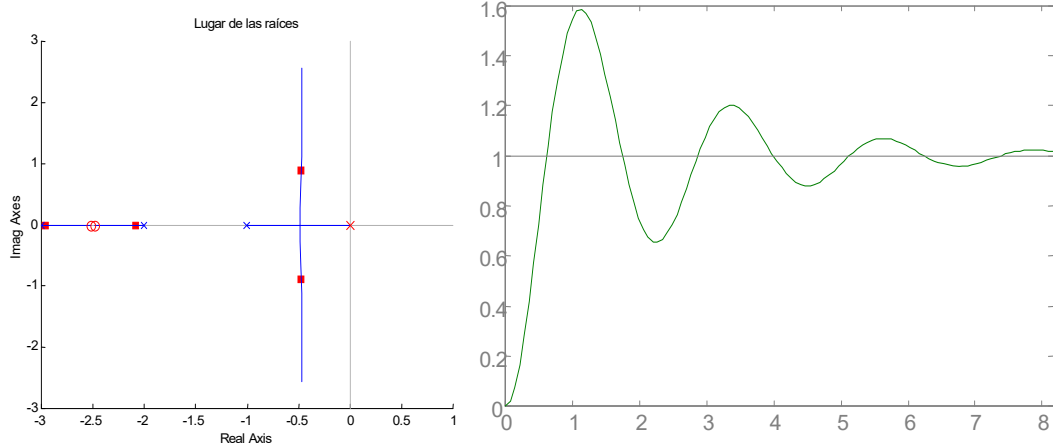
Introduciéndolos en la tabla obtenemos el regulador PID siguiente :

$$G_c = 41,25 \left(1 + \frac{1}{0,8 \cdot s} + 0,2 \cdot s \right) = 8,25 \frac{(s + 2,5)^2}{s}$$

Simulamos ahora el comportamiento del sistema regulado mediante MathLab. Para ello utilizaremos la herramienta *rltool*. Especificaremos mediante el diálogo del regulador la definición del PID.

```
>>rltool(gs)
```

Obtenemos entonces el siguiente lugar de las raíces con la siguiente respuesta ante el escalón en cadena cerrada:



De esta forma la experiencia obtenida por Ziegler-Nichols, puede ser también aplicada para el caso en que tengamos un modelo de la planta, como es el del ejemplo. Veamos ahora como resolveríamos este ejercicio en caso de carecer de una herramienta de simulación:

1.- Obtenemos la respuesta ante el escalón del sistema en cadena abierta de forma analítica mediante la antitransformada de $\frac{1}{s} G(s)$:

$$y_s(t) = 0,166 - 0,5e^{-t} + 0,5e^{-2t} - 0,166e^{-3t}$$

2.-Obtenemos el punto de inflexión de dicha curva igualando a cero la segunda derivada:

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = y_s(t) = 0,5e^{-t} - e^{-2t} + 0,5e^{-3t}$$

$$\frac{d^2y_s(t)}{dt^2} = -0,5e^{-t} + 2e^{-2t} - 1,5e^{-3t} = 0 \Rightarrow t = 1,1s.$$

$$\frac{dy_s(1,1)}{dt} = 0,074 \quad y(1,1) = 0,049$$

3.- Aplicamos el Teorema del valor final para calcular K:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = 0,166$$

4.- Obtenemos el resto de valores del modelo por relaciones geométricas:

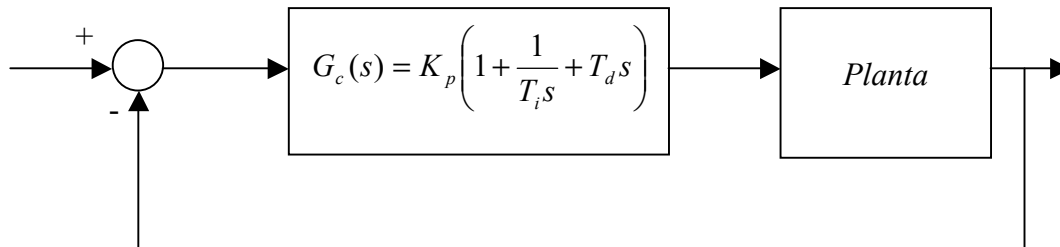
$$T = \frac{0,166}{0,074} = 2,25 \quad L = 1,1 - \frac{0,05}{0,074} = 0,43$$

5.- Finalmente utilizando la Tabla obtenemos el PID que es muy parecido al calculado anteriormente por observación gráfica:

$$G_c(s) = 8,13 \frac{(s + 2,32)^2}{s}$$

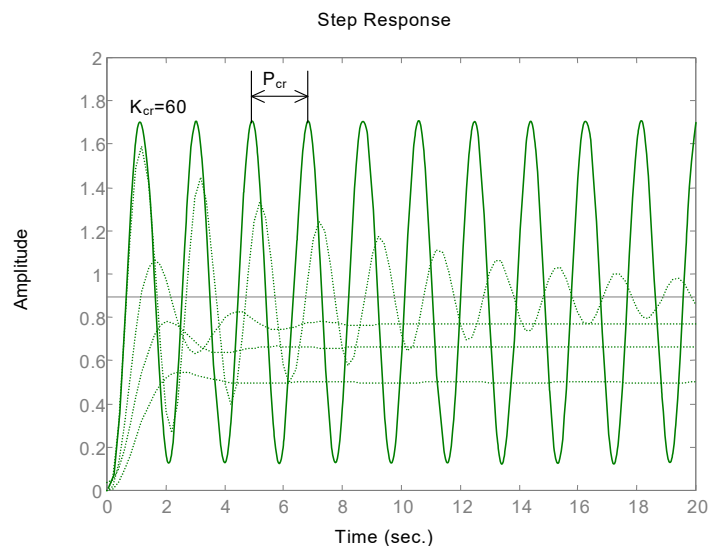
Segundo método. Ajuste en Cadena Cerrada o de Respuesta Crítica.

Al contrario que el anterior método, en este caso se realizan los ensayos o experimentos sobre la planta con el regulador PID ajustable ya montado. De ahí que se denomine *ajuste en cadena cerrada* puesto que el montaje del regulador se realizará como se indica en la figura:



Inicialmente anulamos las acciones derivativa e integradora, haciendo que $T_i = \infty$ y $T_d = 0$ siguiendo la notación del regulador utilizada en el primer método. De esta forma sólo regulamos la acción proporcional dada por la constante K_p . Usando solamente esta acción de control, partiendo de cero vamos incrementando hasta alcanzar un valor crítico K_{cr} en el cual la salida exhiba por vez primera oscilaciones sostenidas. Si estas oscilaciones no se producen para algún valor de K_p , es decir, que el sistema no se vuelve inestable nunca, entonces este método no se puede aplicar.

Obtenida esta respuesta, anotamos los valores de ganancia crítica y el correspondiente periodo crítico obtenido.



Estos dos valores, de forma análoga a como procedíamos en el caso del primer método, nos sirven para obtener los valores que definen las distintas acciones del regulador, a través de la siguiente tabla:

TIPO DE CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K$	∞	0
PI	0.45	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	0
PID	$0.6K$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

$$G_c(s) = 0,075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

Ejemplo: Diseñar un regulador PID para el sistema cuya función de transferencia es la siguiente $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ según el método de ajuste en cadena cerrada de Ziegler-Nichols.

En primer lugar se realiza el cálculo de la K_{cr} que hace al sistema inestable. Este valor coincide con el valor de la acción proporcional que hace al sistema críticamente estable, y que por tanto sitúa dos polos en el eje imaginario. Desde el punto de vista del lugar de las raíces, es el punto del LDR en el que dos ramas conjugadas cortan el eje imaginario. Aplicamos el método de Routh para calcular el valor de K:

$$P(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + K_p = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K_p$$

1	11
6	$6+K_p$
m	0

$$m = \frac{66 - 6 - K_p}{6} > 0 \Rightarrow K_{cr} = 60$$

Obtenida la ganancia crítica, debo calcular el valor del periodo. Para ello debo obtener las raíces imaginarias puras que se generan en cadena cerrada por esta acción proporcional sobre la planta. Sustituyo en la ecuación auxiliar y las obtengo, así como la frecuencia de la oscilación crítica que generan:

$$6s^2 + 6 + K_{cr} = 6s^2 + 66 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{11}j = \pm 3,31j$$

$$\omega_n = \omega_d = \omega_{cr} = 3,31$$

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = 1,9$$

Finalmente utilizando la Tabla obtenemos el PID

$$G_c(s) = 8,55 \frac{(s+2)^2}{s}$$

2.3 Métodos analíticos basados en el Lugar de las Raíces

Cómo se ha visto en el apartado anterior, mediante los métodos de Ziegler-Nichols, se ha obtenido una metodología genérica para la definición de un regulador que consiga un “buen” comportamiento de cualquier sistema. El concepto de “bueno” quedaba establecido por el índice QDR previamente establecido. Aunque existen otros índices que consiguen resultados mejores, se pretende ahora abordar el diseño de reguladores que logren un comportamiento del sistema más específico. Mediante el diseño en el Lugar de las Raíces (LDR) se intentará que el sistema se comporte exactamente de acuerdo con unas especificaciones en el dominio del tiempo.

Se expondrá seguidamente un conjunto de metodologías clásicas que permiten el diseño aproximado de un controlador que alcance unas determinadas prestaciones. La efectividad de este diseño dependerá en gran medida de la viabilidad de las aproximaciones realizadas.

En la mayoría de los casos se procede a la evaluación y modificación de los polos dominantes del sistema y a la cancelación de otros. Si por presencia de más ceros o polos, estas cancelaciones, o la suposición de que los polos modificados sean los dominantes, no se diera, el resultado sería muy distinto del esperado.

Por tanto, como idea inicial, es importante destacar la fragilidad de las distintas metodologías, y la importancia que tiene la simulación antes de proceder a la implantación del regulador. No hay fórmulas mágicas, y en cada caso, cada metodología intenta resolver primordialmente alguno de los problemas presentes

2.3.1 Ajuste de un regulador proporcional

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K \tag{2.3}$$

De esta forma se puede modificar la ganancia del sistema en bucle abierto, y por tanto quedará afectada la dinámica del sistema realimentado (desplazamiento de los polos en el lugar de las raíces), así como el régimen permanente (efecto sobre la constante de error). Habitualmente estos efectos son opuestos desde el punto de vista del comportamiento óptimo. Utilizando un regulador proporcional, si se mejora el comportamiento en régimen permanente, es habitual que empeore el transitorio y viceversa.

El ajuste de este regulador, no es más que la selección del punto de funcionamiento deseado sobre el lugar de las raíces.

Veamos el ajuste con un ejemplo:

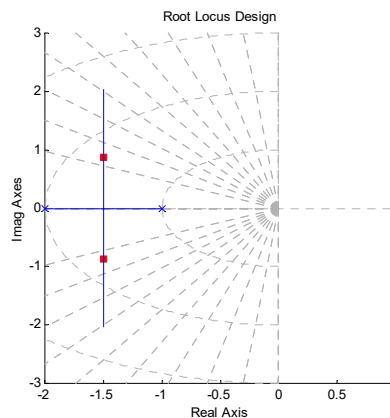
Supongamos que se quiere regular el sistema $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, de tal forma que cumpla las especificaciones siguientes: $M_p < 25\%$, $t_s < 2$ s y $e_p < 25\%$. Se va a ver si con un ajuste de ganancia, es posible lograr que estas se cumplan.

1.- Calcular los valores de K necesarios para cumplir los requerimientos estáticos:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} \leq 0,25 \Rightarrow K_p \geq 3$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} (K \cdot G(s)) = \frac{K}{2} \Rightarrow K \geq 6$$

2.- Dibujar el LDR del sistema G(s):



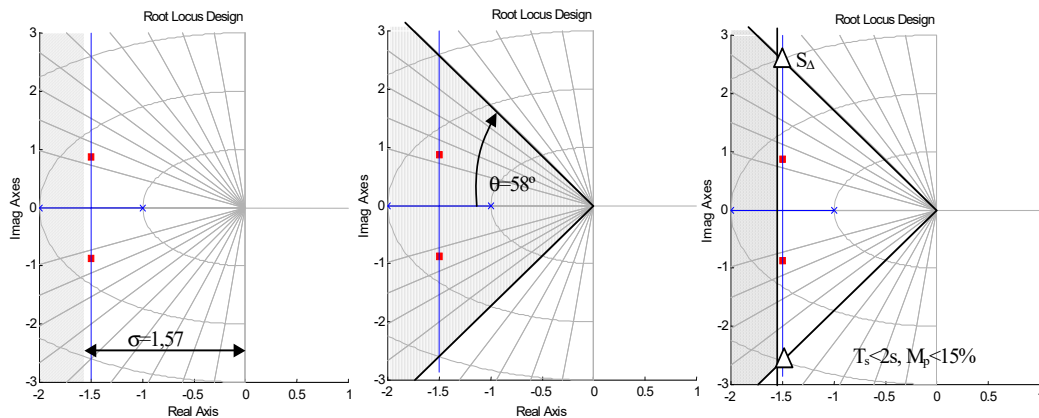
2.-Calcular la zona del lugar de las raíces en la que deben posicionarse los polos dominantes en cadena cerrada para que la dinámica del sistema cumpla las especificaciones:

Suponiendo que se lleva al sistema a la zona subamortiguada, entonces se tendrán dos polos conjugados. Vamos a calcular las zonas a la que nos restringen cada una de las condiciones del comportamiento dinámico.

$$t_s \leq 2s \Rightarrow \frac{\pi}{\sigma} \leq 2s \Rightarrow \sigma \geq 1,57$$

$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}} = 15 \Rightarrow \theta \leq 58,87^\circ$$

Se representan estos subespacios sobre el LDR para ver la zona en la que se deben posicionar los polos dominantes:



Aunque no cumple exactamente las restricciones, al ser la rama saliente del LDR una abscisa en el valor $-1,5$, podemos considerar que el comportamiento es casi totalmente satisfactorio, tal vez un poco más lento, pero en cualquier caso suficiente. El punto que cumpliendo los requisitos estáticos logra un menor error en régimen permanente es aquél que tenga una ganancia estática mayor. Por tanto, se escogen como polos dominantes del sistema los dos puntos del LDR indicados con Δ (tercer LDR de la figura).

$$S_{\Delta 1,2} = 1,57 \pm 2,6j$$

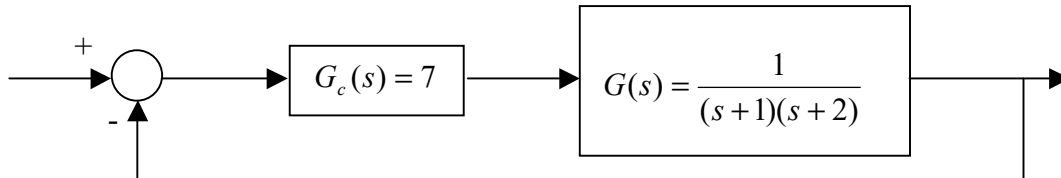
Aunque estrictamente este punto no pertenece al LDR, lo consideramos así, de forma que el mismo aparato matemático nos indique el valor de la ganancia que obtiene los polos más *parecidos* contenidos en el LDR.

Aplicamos el criterio del módulo obteniendo:

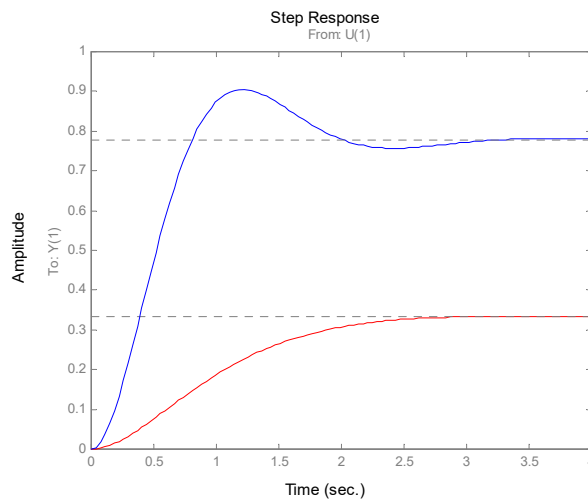
$$K = \frac{\prod dp}{\prod dz} = \left(\sqrt{(1-1,57)^2 + (0-2,6)^2} \right) \cdot \left(\sqrt{(1-1,5)^2 + (0-2,6)^2} \right) = 7,01$$

Observamos que este valor de la ganancia cumple con el criterio impuesto al régimen permanente, por lo que el ajuste ya está realizado.

Finalmente el sistema quedaría de la forma siguiente:



Las siguientes figuras muestran el comportamiento del sistema realimentado con regulación y sin regulación proporcional ($K=1$) mediante el uso de MatLab.



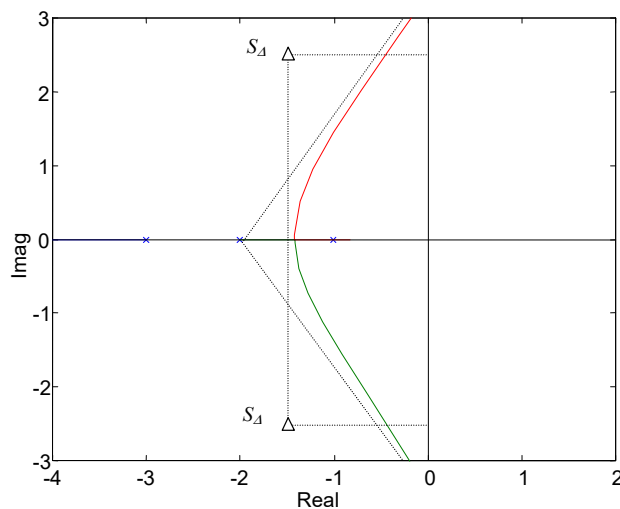
Finalmente los polos dominantes del sistema han quedado situados en cadena cerrada en $S_{\Delta} = 1,5 \pm 2,59j$.

RESOLUCIÓN EN MATLAB

```
%Definición de las FDT
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(1,poly([-1 -2]))
disp('FDT del regulador');
gr=tf(7,1)
disp('FDT del sistema regulado')
gr_gp=series(gr, gp);
disp('polos resultantes en cadena cerrada')
pole(feedback(gr_gp,1))
pause
```

```
%Respuesta temporal en cadena cerrada de ambos
disp('Respuesta ante el escalón de ambos sistemas');
step(feedback(gp,1), 'r', feedback(gr_gp,1), 'b');
pause
```

Sin embargo, en la mayoría de los casos no es posible lograr el comportamiento deseado con un sencillo ajuste de ganancia, y hay que recurrir a acciones derivativas o integrales. Por ejemplo, dado el sistema $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ y las mismas especificaciones de comportamiento anteriores $e_p \leq 25\%$, $M_p \leq 15\%$ y $t_s \approx 2s$, una acción proporcional sería insuficiente, puesto que el LDR no pasa por los puntos deseados para los polos dominantes. La siguiente figura muestra el LDR del sistema, indicando mediante S_Δ el lugar por donde debería pasar la rama compleja:



2.3.2 Ajuste de un regulador proporcional-derivativo (PD ideal).

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K(s+a) \equiv K_p + T_d s \quad \text{siendo } a = \frac{K_p}{T_d} \quad (2.4)$$

Por lo tanto al incluir una acción derivativa sumada a la acción proporcional, agregamos un cero a la función de transferencia en bucle abierto, además de variar su ganancia. Como consecuencia práctica, al poder posicionar dicho cero, también podremos modificar el LDR del sistema, para que éste termine comportándose de la forma que deseemos. Aunque la acción derivativa pura no existe físicamente, la consideración de este control es válida, para el caso en el que la dinámica del comportamiento del sistema que implementa el derivador sea mucho más rápida que la del resto de componentes del

sistema. Además, el hecho de introducir un cero sin atenuación a altas frecuencias (sin un polo que lo cancele a altas frecuencias) amplifica el efecto del ruido. Por ello es común optar, como se verá seguidamente, por una red de adelanto de fase.

Veamos como regulamos el sistema anterior $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ de forma que su respuesta temporal cumpla que $M_p \leq 10\%$ y $t_s \leq 2s$.

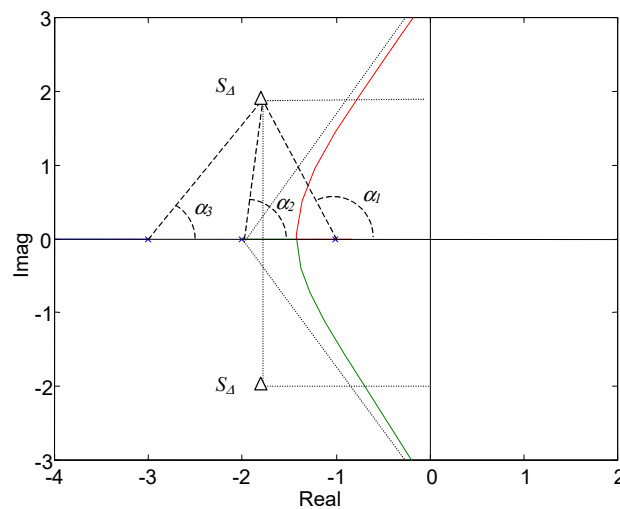
1. Dibujamos el LDR y el lugar de los polos dominantes deseados S_Δ .

$$t_s \leq 2s \Rightarrow \frac{\pi}{\sigma} \leq 2s \Rightarrow \sigma \geq 1,57$$

$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}} \leq 10 \Rightarrow \theta \leq 53,7^\circ$$

$$S_\Delta = 1,7 \pm 2j$$

Los puntos S_Δ seleccionados, corresponden al igual que antes a la zona del lugar de las raíces que cumpliendo las especificaciones dinámicas, poseen una ganancia mayor, de forma que el error de posición sea mínimo. La representación gráfica de estos puntos es la siguiente:



2. Mediante la aplicación del criterio del argumento, introduzco un cero de forma que las ramas del LDR pasen por el punto S_Δ . Para ello calculo el ángulo φ que debe aportar el cero adicional para que S_Δ pertenezca al LDR. Obtenido el ángulo obtengo el cero.

$$\sum \angle(S_{\Delta}, p_i) - \sum \angle(S_{\Delta}, z_i) = 180(2N + 1) \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 - \varphi_c = 180^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 180 - \arctan \frac{2}{0,7} = 109,3^\circ \\ \alpha_2 &= \arctan \frac{2}{0,3} = 81,47^\circ \\ \alpha_3 &= \arctan \frac{2}{1,3} = 57^\circ \\ \varphi_c &= \arctan \frac{2}{(a-1,7)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi_c &= 67,7^\circ \\ \tan \varphi_c &= 2,44 \\ a &= 2,51 \end{aligned}$$

3. Deformado el LDR para que pase por el punto deseado, se calcula aplicando el criterio del módulo, el valor de la ganancia para posicionar los polos dominantes en ese punto.

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{4 + 0,7^2} = 2,12 \\ d_2 &= \sqrt{4 + 0,3^2} = 2 \\ d_3 &= \sqrt{4 + 1,3^2} = 2,38 \\ d_z &= \sqrt{4 + 0,8^2} = 2,15 \end{aligned} \right\} K = \frac{d_1 d_2 d_3}{d_z} = 5,07$$

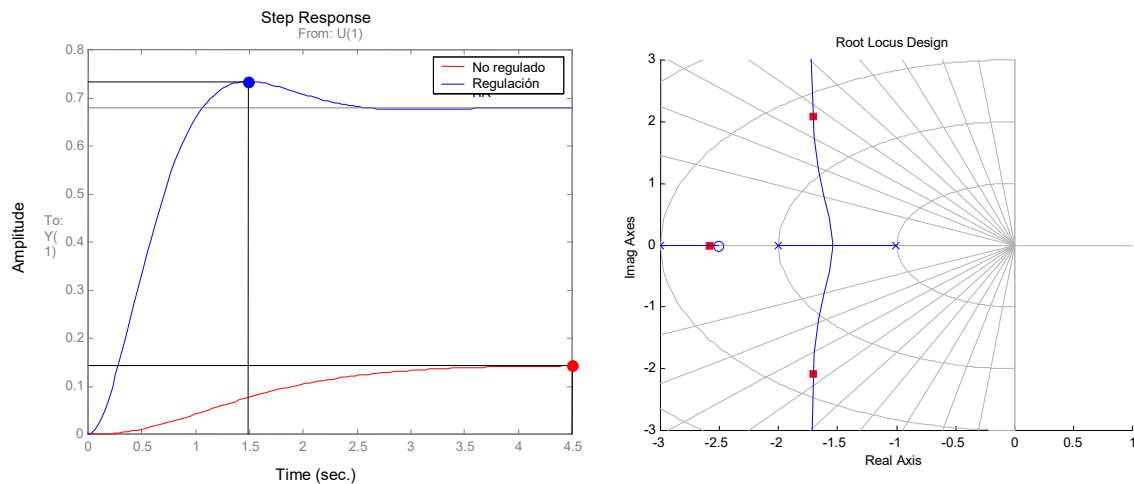
4. Puesto que la ganancia de la planta es unitaria, el valor de K será igual al de la ganancia del regulador, de forma que éste tendrá finalmente la siguiente función de transferencia:

$$R(s) = 5,07(s + 2,51) = 12,72 + 5,07s \Rightarrow T_d = 5,07 \text{ y } K_p = 12,72$$

Utilizando MatLab, se realiza la simulación del sistema obteniendo:

COMANDOS DE MATLAB

```
%Definicion de las FDT
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(1,poly([-1 -2 -3]))
disp('FDT del regulador');
gr=tf(5.07*[1 2.51],1)
disp('FDT del sistema regulado')
gr_gp=series(gr,gp);
disp('polos resultantes en cadena cerrada')
pole(feedback(gr_gp,1))
pause
%LDR modificado por el regulador
rlocus(gr_gp);
%Respuesta temporal en cadena cerrada de ambos
disp('Respuesta ante el escalón de ambos sistemas');
step(feedback(gp,1), 'r', feedback(gr_gp,1), 'b');
pause
```



Se observa en las gráficas que la sobreoscilación resultante es del 9% y el tiempo de establecimiento de 1.8 segundos, por lo que los requisitos se han cumplido. Sin embargo, el error en posición es del 33%, que es claramente excesivo para casi cualquier aplicación.

Hay dos aspectos que recalcar por tanto de este tipo de regulador. En primer lugar carecemos de un control directo sobre la constante de error, puesto que la acción proporcional y derivativa quedan combinadas para lograr el comportamiento dinámico deseado. Es por ello habitual en sistemas de tipo I o superior. En segundo lugar, es importante destacar que la utilización de acciones derivativas altas, lleva a la mayoría de los sistemas de actuación a un estado de saturación, por lo que el comportamiento real podrá diferir del teórico calculado.

2.3.3 Ajuste de una red de adelanto de fase (PD real).

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K \frac{s + a}{s + b} \quad \text{donde } a < b. \tag{2.5}$$

Se ha añadido un polo más alejado del origen a la función de transferencia del regulador PD ideal. De esta forma se obtiene la atenuación en altas frecuencias que cancela el efecto amplificador del cero.

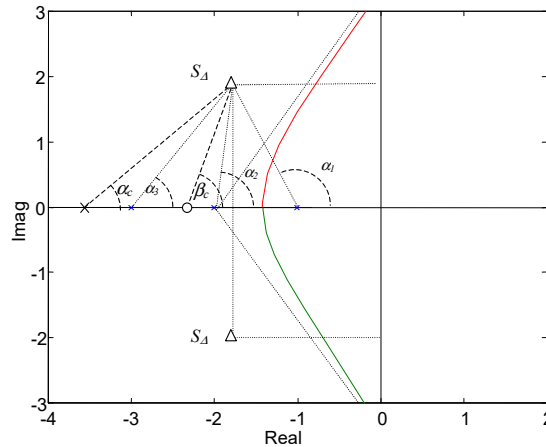
Buscamos un ajuste sencillo de K , a , y b , de forma que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Deben lograr que las ramas del LDR pasen por los puntos que definen el comportamiento deseado S_{Δ} .
- Los polos dominantes del sistema para el valor de K que los posiciona en el punto deseado, sean estos.

Por tanto, el polo adicional introducido por el regulador S_b no debe ser dominante y debe estar lo suficientemente alejado de S_{Δ} . Para ilustrar el ajuste del regulador, se aplicará

sobre el ejemplo anterior, por lo que el cálculo del punto S_A permanece inalterado. Para hacer el ajuste seguimos el siguiente procedimiento:

1. Al igual que en el ajuste del regulador proporcional derivativo ideal, se procede al cálculo del aporte de fase necesario φ_c para que S_A pertenezca al LDR. En este caso, este aporte de fase corresponde al del par polo-cero en vez de sólo el cero.



Definiendo φ_c como $\varphi_c = \beta_c - \alpha_c$

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 - \varphi_c = 180^\circ$$

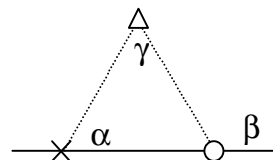
$$\varphi_c = \sum \alpha_i - \sum \beta_i - 180 = 109,3 + 81,47 + 57 - 180$$

$$\varphi_c = 67,7^\circ$$

Por relaciones trigonométricas observamos que el ángulo φ_c corresponde con el ángulo existente entre los dos segmentos que unen S_A con el cero y el polo:

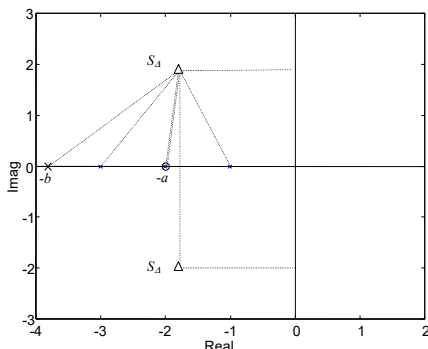
$$\alpha + \gamma + (180 - \beta) = 180$$

$$\gamma = \beta - \alpha = \varphi_c$$



2. Una vez fijado el polo o el cero, la posición del otro quedará determinada por este ángulo φ_c . No existe una norma fija para realizar este posicionamiento, y en la mayoría de los casos es necesario un ajuste fino posterior. Sin embargo, si existen una serie de criterios genéricos basados en la práctica que aconsejan recurrir a alguno de los siguientes métodos:

- Situamos el cero a cancelando el segundo polo más significativo en cadena abierta. Para el caso del ejemplo debemos cancelar el polo situado en -2 :

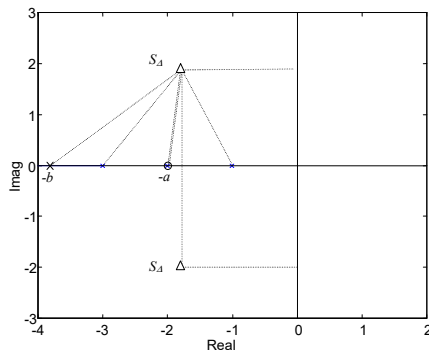


$$\varphi_c = \arctan \frac{b-1,7}{2} - \arctan \frac{2-1,7}{2} \Rightarrow$$

$$67,7 = \arctan \frac{b-1,7}{2} - 8,55 \Rightarrow$$

$$b = 9,86$$

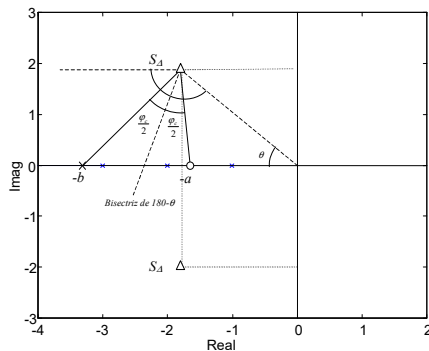
- Situamos el cero a bajo la vertical del polo S_{Δ} . Para el caso del ejemplo, a se situaría en el valor $-1,7$.



$$\varphi_c = \arctan \frac{b-1,7}{2}$$

$$b = 6,57$$

- Situamos el par polo cero siguiendo la construcción geométrica de la figura. Esta disposición logra que la ganancia de la red sea la mínima posible para el aporte de fase deseado.



$$\theta = 53$$

$$\tan\left(\frac{\theta - \varphi_c}{2}\right) = \frac{a-1,7}{2} \Rightarrow a = 1,44$$

$$\tan\left(\frac{\theta + \varphi_c}{2}\right) = \frac{b-1,7}{2} \Rightarrow b = 5,21$$

Para este ejemplo seguiremos habiendo optado por la primera de las alternativas, puesto que la cancelación nos simplificará los cálculos posteriores.

- Mediante la aplicación del criterio del módulo, calculamos la ganancia K que posiciona los polos dominantes del sistema en el lugar S_{Δ} deseado. Por la cancelación, tendremos que tener en cuenta sólo los polos en $-1, -3$, y $-9,86$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{4 + 0,7^2} \\ d_2 &= \sqrt{4 + 1,3^2} \\ d_3 &= \sqrt{4 + 8,16^2} \end{aligned} \right\} K = d_1 d_2 d_3 = 42$$

Por tanto, finalmente la red de adelanto de fase adoptará la forma siguiente:

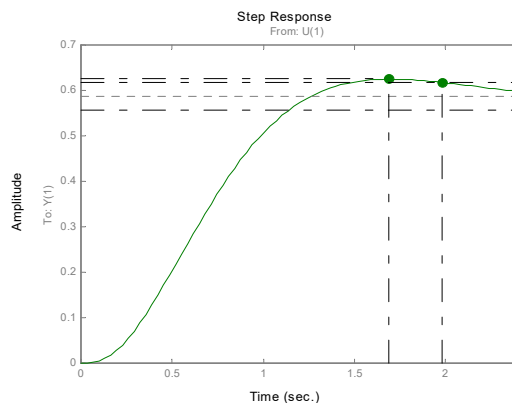
$$R(s) = K \frac{s+a}{s+b} = 42 \frac{s+2}{s+9,86}$$

El error en régimen permanente ante la entrada escalón será para el sistema regulado el siguiente:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} R(s)G(s) = 40 \frac{s+2}{s+9,86} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 1,4$$

$$e_p = \frac{100}{1+K_p} = 40\%$$

y simulando el sistema con MatLab obtenemos:



$$e_p = 41\%$$

$$t_s = 1,98s$$

$$M_p = 10\%$$

2.3.4 Ajuste del regulador PI.

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K + \frac{1}{T_i s} = \frac{KT_i s + 1}{T_i s} = \frac{K \left(s + \frac{1}{KT_i} \right)}{s} = \frac{K(s+a)}{s} \quad (2.6)$$

Por lo que aumentamos en una unidad el tipo del sistema, con el efecto que esto tiene sobre el error en el régimen permanente de la respuesta del sistema en cadena cerrada. Además, el regulador añade un cero a la función de transferencia. El posicionamiento de este cero se verá de forma indirecta en el ajuste del PID, puesto que se usará para mejorar la respuesta transitoria del sistema. Al realizar el ajuste, en muchos casos se observa que es necesario un desdoblamiento del cero llevándonos hasta la expresión de un regulador PID.

La inclusión de una acción integradora pura, lleva a la cancelación del error en el régimen permanente. Sin embargo en la práctica este elemento no existe aunque puede ser aproximado. El mayor inconveniente que aparece a la hora de introducir una acción integral en el regulador, es la facilidad con la que esta alcanza el punto de saturación del sistema de actuación.

2.3.5 Ajuste de una red de retraso de fase (PI real).

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K \frac{s+a}{s+b} \quad \text{donde } b < a. \quad (2.7)$$

Una red de retraso de fase es un par polo cero de forma que a bajas frecuencias - que afectan a la respuesta permanente del sistema- proporciona una ganancia suficientemente grande como para lograr las especificaciones del error en régimen permanente requeridas. Dicha red debe ser situada de forma que su efecto sobre la forma del lugar de las raíces y por tanto sobre su comportamiento transitorio sea mínimo.

Para ver el ajuste de esta red utilizaremos el ejemplo realizado para el regulador P, pero modificando las especificaciones del error. El sistema tiene la siguiente función de transferencia $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ y las especificaciones impuestas a su comportamiento en cadena cerrada son las siguientes:

$$e_p \leq 10\% \quad M_p = 15\% \quad t_s = 2s.$$

1. Ajustamos la acción proporcional de forma que los polos se sitúen en el punto de funcionamiento deseado. Este apartado se resolvió ya en el ajuste del regulador proporcional, obteniendo:

$$S_\Delta = -1,57 \pm 2,6j \Rightarrow \theta = 58,8^\circ \quad \sigma = 1,57$$

$$K = 7,01$$

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+3,51} = 0,22$$

Precisamente para corregir el error, introducimos la acción integral a través de la red de retraso de fase.

2. Calculo la ganancia estática del par polo cero, de forma que K_p cumpla con la condición exigida. La ganancia estática de la pareja de polo y cero vendrá dada por el cociente entre el cero y el polo $\frac{a}{b}$.

$$e_p = 0,1 = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow K_p \leq 9$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} R(s)G(s) = K \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2,57$$

3. Posicionamos el cero a una década por debajo del polo más cercano al origen en cadena abierta (sin contar los polos que estén en el origen). Este criterio es dispar en función de los autores de los libros de control. Así en otros casos se propone que se sitúe a un cuarto o a un sexto, todo ello con la idea de afectar poco al régimen dinámico del sistema, puesto que en teoría a esa distancia debe afectar poco al posicionamiento de las ramas del LDR.

Utilizando el criterio de una década obtenemos:

$$a = \frac{1}{10} = 0,1 \Rightarrow b = \frac{a}{2,57} = 0,04$$

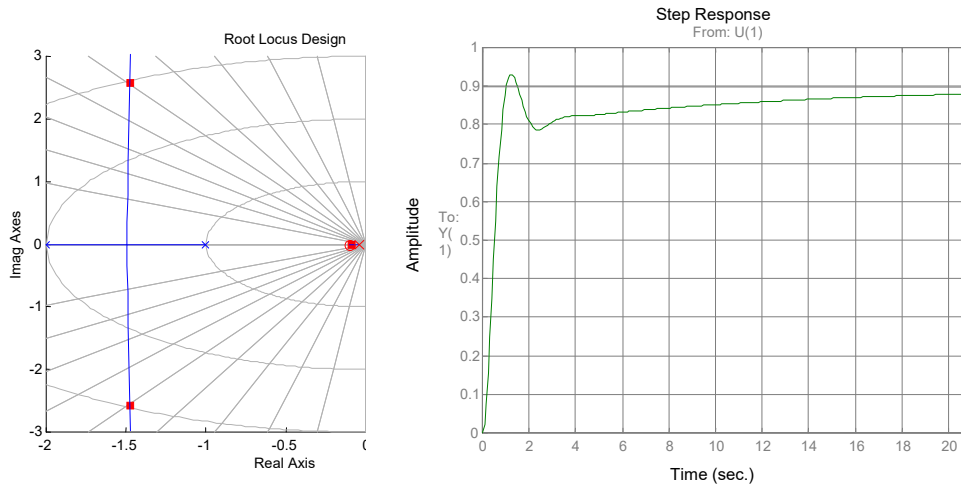
4. Recalculo el valor de K para que el sistema siga pasando por S_Δ :

$$K = \frac{\prod dp}{\prod dz} = \frac{\left(\sqrt{(1-1,5)^2 + (0-2,6)^2}\right) \cdot \left(\sqrt{(1-1,5)^2 + (0-2,6)^2}\right) \left(\sqrt{(0,04-1,5)^2 + (0-2,6)^2}\right)}{\sqrt{(0,1-1,57)^2 + (0-2,6)^2}} = 7$$

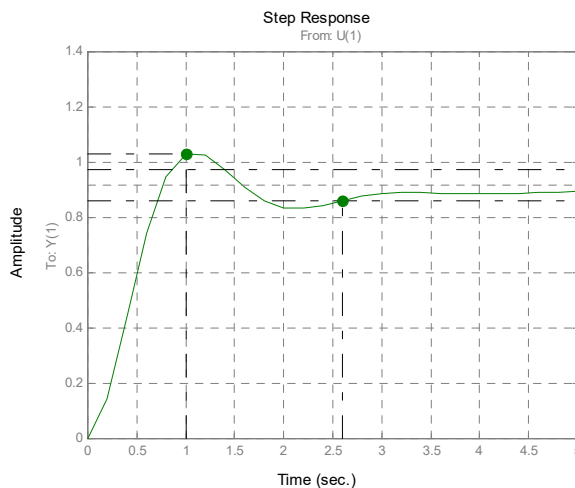
Por lo que finalmente el regulador adoptará la forma:

$$R(s) = 7 \frac{s + 0.1}{s + 0.04}$$

El cual si lo simulamos mediante MatLab, arroja los siguientes resultados:



A pesar del ajuste, observamos que el tiempo de establecimiento es de 10 s. Los requerimientos estáticos sí se cumplen, y el lugar de las raíces a penas ha variado tal y como deseábamos al alejar el par polo cero. Sin embargo, observamos que el par polo cero es dominante respecto de los puntos de diseño que habíamos previsto, sin que se lleguen a cancelar como era lo deseable. Localmente vemos que el comportamiento debido al sistema, si que cumple con las especificaciones dinámicas, pero quedan ocultas por la exponencial lenta que genera el polo del regulador. En cualquier caso, este punto de trabajo es un punto de comienzo que nos permite realizar ajustes posteriores. Debemos desplazar el par polo-cero más a la izquierda en el lugar de las raíces, manteniendo el aporte de ganancia. Si ajustamos el cero a un cuarto del polo dominante del sistema en cadena abierta, obtenemos:



$$e_p = 9\%$$

$$t_s = 2,6s$$

$$M_p = 11\%$$

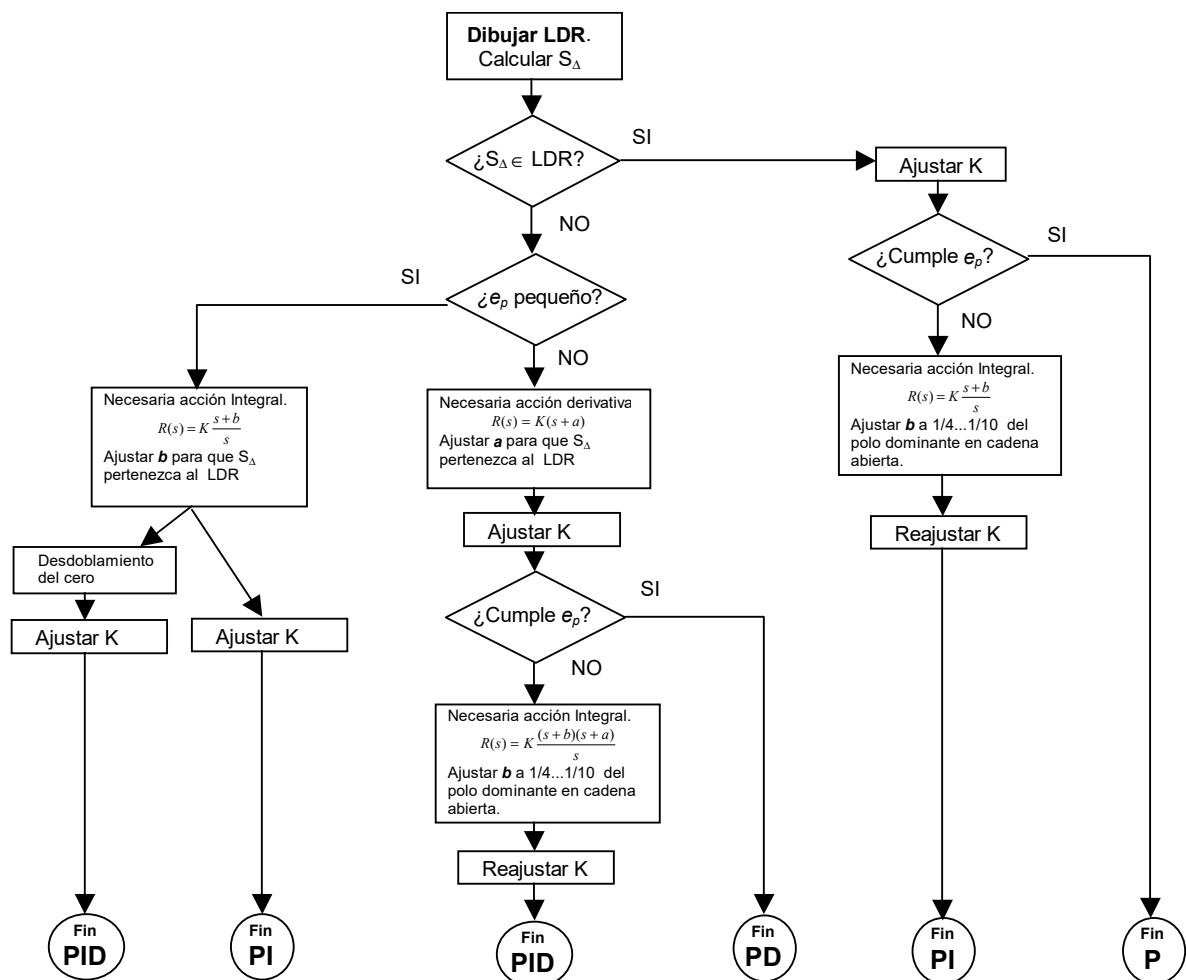
2.3.6 Ajuste del regulador PID ideal

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K_p + T_d s + \frac{1}{T_i}$$

Comercialmente los distintos reguladores que se pueden adquirir, utilizan diversas expresiones análogas a la expuesta. Sin embargo, este es un factor importante a tener en cuenta a la hora de realizar el ajuste numérico de los distintos parámetros del regulador.

El ajuste del regulador PID mediante técnicas basadas en el LDR del sistema, se basa fundamentalmente en las técnicas de ajuste ya vistas para los elementos integrador y derivativo. El siguiente esquema puede servir de orientación a la hora de seleccionar el método de ajuste y el regulador final necesario para un sistema en función de las especificaciones impuestas. Para el diseño del regulador se especifican unas condiciones temporales ($\Rightarrow S_\Delta$) y unas condiciones del régimen permanente ($\Rightarrow e_p$).



Se muestra mediante un ejemplo las dos posibles alternativas a seguir a la hora de realizar un ajuste de un regulador PID. Se irá comprobando durante el desarrollo del mismo las acciones de control necesarias, para intentar lograr de esta manera conseguir siempre el regulador más simple.

Ejemplo:

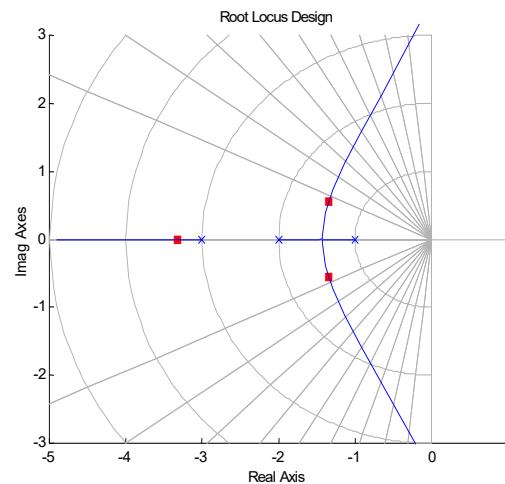
Diseñar el regulador más sencillo para el sistema cuya función de transferencia es la siguiente $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ de forma que el error de posición en cadena cerrada sea inferior al 1% con un tiempo de establecimiento de 1.9 segundos y su transitorio no supere una sobreoscilación del 10%.

1. Dibujo el LDR del sistema, y calculo la posición de los polos dominantes deseados para el sistema en cadena cerrada:

$$t_s \leq 1.9s \Rightarrow \frac{\pi}{\sigma} \leq 1.9s \Rightarrow \sigma \geq 1,65$$

$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}} \leq 10 \Rightarrow \theta \leq 53,7^\circ$$

$$S_\Delta = 1,7 \pm 2j$$



Observamos que el LDR no pasa por los puntos S_Δ . Consideramos primeramente la alternativa de ajuste de la acción derivativa: es decir, consideramos que la especificación del error no es muy pequeña (aunque lo es).

Alternativa 1. Ajuste de la acción derivativa y después la integral si es necesaria.

1.1 Ajusto el cero para que el LDR pase por S_Δ . Este mismo ajuste ya se realizó para el ejemplo del regulador PD ideal, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\sum \angle(S_{\Delta}, p_i) - \sum \angle(S_{\Delta}, z_i) = 180(k+1) \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 - \varphi_c = 180^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 180 - \arctan \frac{2}{0,7} = 109,3^\circ \\ \alpha_2 &= \arctan \frac{2}{0,3} = 81,47^\circ \\ \alpha_3 &= \arctan \frac{2}{1,3} = 57^\circ \\ \varphi_c &= \arctan \frac{2}{(a-1,7)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi_c &= 67,7^\circ \\ \tan \varphi_c &= 2,44 \\ a &= 2,51 \end{aligned}$$

1.2 Ajustamos la ganancia K para que los polos dominantes se sitúen en S_{Δ} . Para ello aplicamos el criterio del módulo:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{4 + 0,7^2} = 2,12 \\ d_2 &= \sqrt{4 + 0,3^2} = 2 \\ d_3 &= \sqrt{4 + 1,3^2} = 2,38 \\ d_z &= \sqrt{4 + 0,8^2} = 2,15 \end{aligned} \right\} K = \frac{d_1 d_2 d_3}{d_z} = 5,07$$

Por lo que el posible regulador PD tendría la siguiente función de transferencia:
 $R(s) = 5(s + 2,5)$

1.3 Calculamos el error de posición del sistema regulado con el controlador calculado:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} R(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5(s + 2,5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = 2,08$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 0,32 \equiv 32\%$$

Es necesaria por tanto la acción integral para lograr las especificaciones del régimen permanente.

1.4 Ajustamos la acción integradora. Al introducir el polo en el origen, se generará un cero que deberé ajustar de forma que afecte poco al LDR. Utilizaremos el criterio de ajustarlo a un cuarto del polo dominante en cadena **cerrada**. A la vez que intentamos alejar el polo del origen, buscamos modificar mínimamente el LDR, para que el ajuste de la acción derivativa siga siendo válida:

$$R(s) = k \frac{(s + b)(s + 2,51)}{s}$$

$$b = \frac{1,7}{4} = 0,42$$

1.5 Reajustamos el valor de K.

El valor de K quedará afectado por el valor derivado de la inclusión del cero y el polo. Por tanto, bastará con multiplicar por el factor añadido por estos:

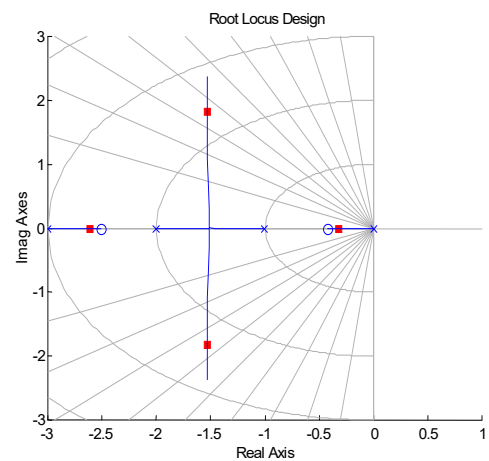
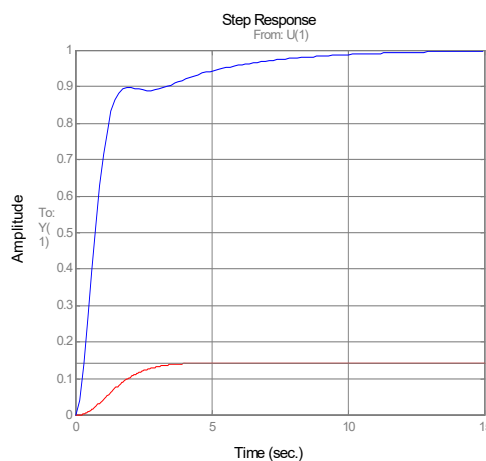
$$K = 5 \cdot K_{zp} = 5 \cdot \frac{\sqrt{1,7^2 + 4}}{\sqrt{(1,7 - 0,42)^2 + 4}} = 5,5$$

Por tanto, finalmente el regulador según esta alternativa tendría la expresión siguiente:

$$R(s) = 5,5 \frac{(s + 2,5)(s + 0,42)}{s}$$

Realizamos la simulación en Matlab:

```
%Definicion de las FDT
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(1,poly([-1 -2 -3]))
disp('FDT del regulador');
gr=tf(5.5*poly([-0.42 -2.51]),[1 0])
disp('FDT del sistema regulado')
gr_gp=series(gr,gp);
disp('polos resultantes en cadena cerrada')
pole(feedback(gr_gp,1))
pause
%Respuesta temporal en cadena cerrada de ambos
disp('Respuesta ante el escalón de ambos sistemas');
step(feedback(gp,1),'r',feedback(gr_gp,1),'b');
disp('Lugar de las Raíces');
rlocus(gr_gp);
pause
```



Y observamos cómo de nuevo el efecto de los polos que pretendíamos como dominantes, quedan inhibidos por el efecto del polo en cadena cerrada como consecuencia del polo introducido en el origen. Aunque la deformación del LDR ha sido pequeña, no se ha producido la esperada cancelación del polo cero. Es por ello que es habitual en este método la realización de un reajuste fino mediante el desplazamiento del cero hacia la izquierda.

Alternativa 2. Ajuste de la acción integral de forma que el cero provocado ajuste el comportamiento transitorio.

2.1 Consideramos a priori la necesidad de la acción integral (polo en el origen) y utilizamos el cero provocado para diseñar la acción correctora del cero:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \varphi_c = 180^\circ$$

$$\alpha_1 = 109,3^\circ$$

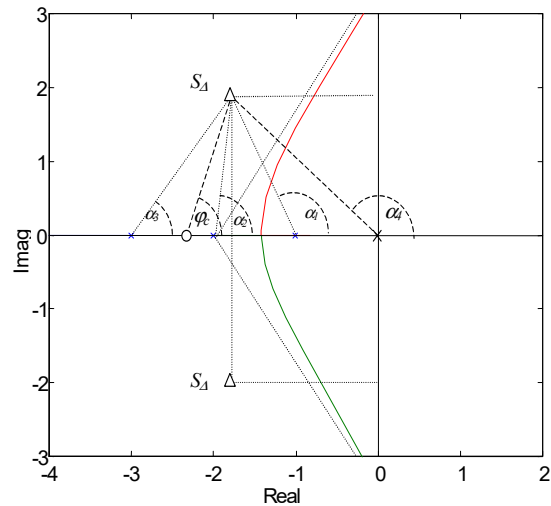
$$\alpha_2 = 81,47^\circ$$

$$\alpha_3 = 57^\circ$$

$$\alpha_4 = 130^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 109,3^\circ \\ \alpha_2 = 81,47^\circ \\ \alpha_3 = 57^\circ \\ \alpha_4 = 130^\circ \end{array} \right\} \varphi_c = 198,7^\circ$$

$$\varphi_c = \arctan \frac{2}{(a-1,7)}$$



Observamos que la aportación de este ángulo con un solo cero es irrealizable. Por ello, lo que procedemos es a realizar el desdoblamiento del mismo, de forma que entre dos ceros se aporte el ángulo necesario para que S_A pertenezca al LDR:

$$\varphi_c' = \frac{\varphi_c}{2} = \frac{198,17}{2} = 99^\circ$$

$$99^\circ = \arctan \frac{2}{a-1,7} \Rightarrow a = 1,38$$

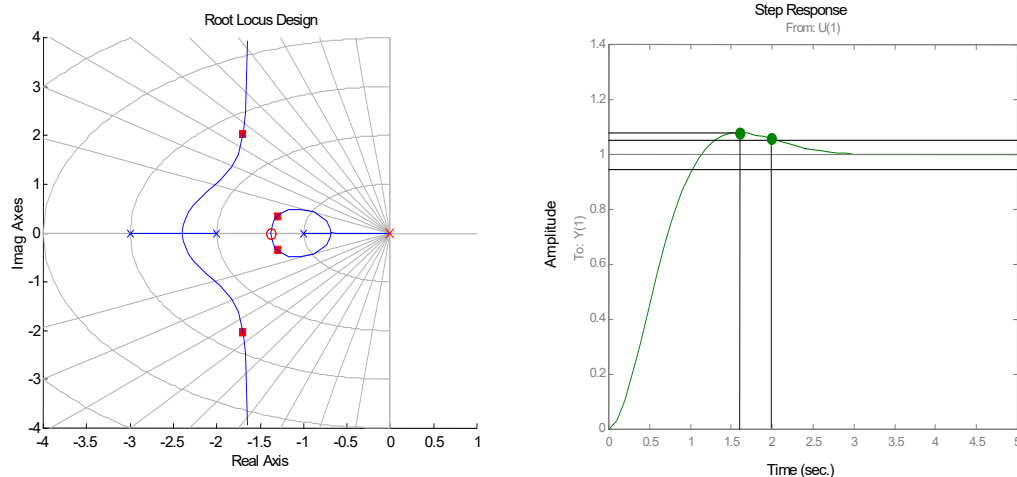
2.2 Calculo la ganancia necesaria para que los polos de las ramas se sitúen en 1,38:

$$K = \frac{2,12 \cdot 2 \cdot 2,38 \cdot \sqrt{4+1,7^2}}{\sqrt{4+(1,7-1,38)^2} \cdot \sqrt{4+(1,7-1,38)^2}} = 6,62$$

Por lo que el regulador PID (la acción derivativa es consecuencia de realizar el desdoblamiento del cero) adoptará la siguiente expresión:

$$R(s) = 6,62 \frac{(s+1,38)^2}{s}$$

Simulando en MatLab obtenemos:



Al medir la señal de respuesta, tenemos un tiempo de establecimiento de 2s, una sobreoscilación de un 8%, y un error de posición cero puesto que el sistema es de tipo I. Vemos cómo en este caso el ajuste ha sido casi exacto. En este caso los dos polos complejos conjugados que aparecen como consecuencia del regulador, si que se cancelan con el cero doble.

2.3.7 Ajuste del regulador de adelanto-retraso

Su función de transferencia es de la forma:

$$R(s) = K \frac{(s+a)(s+c)}{(s+b)(s+d)} \quad d < c < a < b$$

Como su propio nombre indica, esta red es el resultado de combinar una red de adelanto con una de retraso. Su método de ajuste, es también equivalente a realizar primero el ajuste de la red de adelanto (PD) para lograr el comportamiento dinámico del sistema, y posteriormente realizar el ajuste de la red de retraso de forma que se cumplan las condiciones impuestas al permanente.

Se realiza a continuación el ajuste de una red de adelanto-retraso para el ejemplo realizado en el apartado anterior:

1. Primero calculamos la red de adelanto de forma que las ramas del LDR pasen por el punto en el que deseamos que se posicionen los polos dominantes del sistema. Este ajuste es exactamente el mismo al que se realizó para el ajuste de la red de adelanto:

$$S_{\Delta} = 1,7 \pm 2j$$

$$\varphi_c = \beta - \alpha$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \varphi_c = 180^\circ \Rightarrow \varphi_c = 67,7^\circ$$

2. En este caso se va a fijar la posición del cero de forma que cancele el segundo polo más significativo en cadena abierta

$$a = 2$$

$$\varphi_c = \arctan \frac{b-1,7}{2} - \arctan \frac{2-1,7}{2} \Rightarrow b = 9,86$$

$$R(s) = K \frac{s+2}{s+9,8} \cdot \frac{s+c}{s+d}$$

3. Obtengo la ganancia K que posiciona los polos en el punto deseado. Tendré en cuenta la cancelación realizada para simplificar los cálculos:

$$K = d_1 d_3 d_b = 42,6$$

4. Calculo el error, y como consecuencia el factor necesario que debe aportar la red de retraso para cumplir con las especificaciones impuestas al régimen permanente:

$$e_p = 0,01 = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow K_p \geq 99$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} R(s)G(s) = \frac{42,6 \cdot c}{9,86 \cdot 3 \cdot d} \Rightarrow \frac{c}{d} = 68,74$$

Observamos que hay que aportar mucha ganancia estática, por lo que probablemente, el polo resultante en cadena cerrada se convierta en dominante, y por tanto provoque la ralentización de todo el sistema.

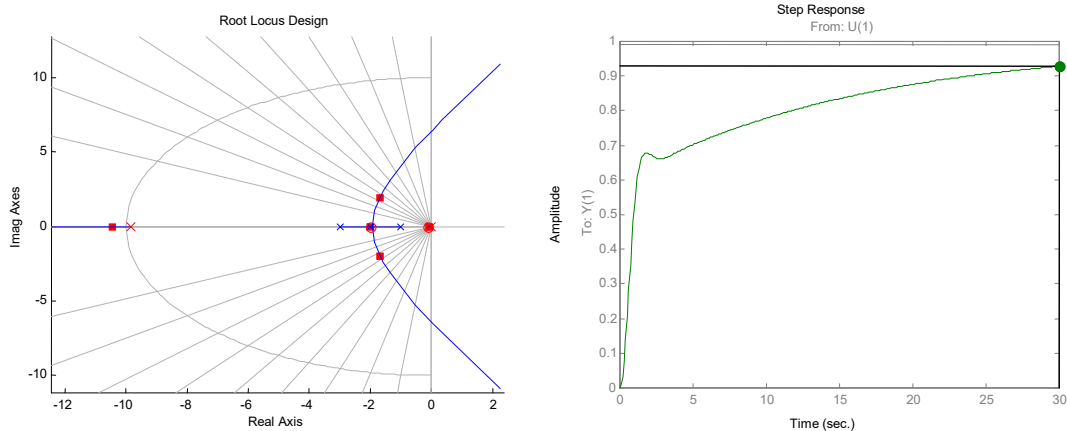
5. Fijo el cero a una década por debajo del polo más significativo en cadena abierta sin contar los polos en el origen si es que los hubiera:

$$c = \frac{1}{10} \cdot 1 = 0,1 \Rightarrow d = \frac{0,1}{68,74} = 0,0014$$

6. Recalculo K , y observo como la variación de la ganancia es insignificante. Por tanto el regulador finalmente queda como:

$$R(s) = 42,6 \frac{(s+2)(s+0,1)}{(s+9,86)(s+0,0014)}$$

Simulado en MatLab, observamos que el efecto del polo que va desde 0,0014 a 0,1, es dominante cómo ya habíamos previsto:



Al medir los parámetros de la respuesta, nos encontramos con una sobreoscilación nula, y un tiempo de establecimiento de 30 segundos. El error, puesto que sólo depende de las ganancias estáticas si que se cumple.

Experimentalmente observamos que para obtener una respuesta cercana a la deseada, debemos ajustar hasta un cuarto del polo, y aumentar la ganancia al doble.

Ejercicio:

Diseñar una red de adelanto de fase para la maqueta de prácticas de la Peltier, de forma que su respuesta ante el escalón no supere una sobreoscilación del 20 %, y alcance el régimen permanente en menos de 8 segundos. El error de posición deberá ser inferior al 10 %.

Para el ejercicio se considerará la función de transferencia para la maqueta dada por: $G(s) = \frac{0,045}{(s + 0,07)(s + 0,525)}$.

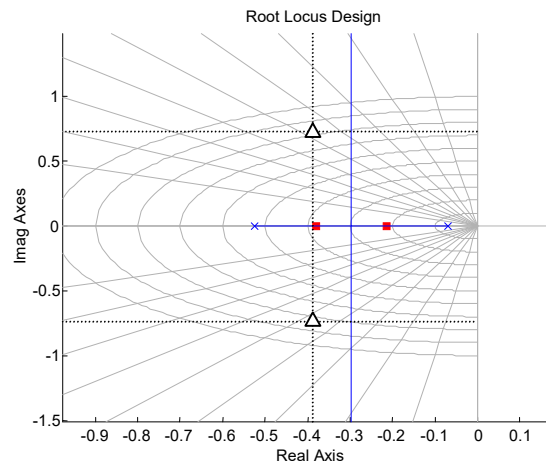
1. Calculo el punto donde queremos que se situen los polos dominantes en cadena cerrada:

$$\theta \leq \arctan \frac{-\pi}{\ln 0,2} = 62,87^\circ$$

$$\sigma \geq \frac{\pi}{t_s} = 0,039$$

$$S_\Delta = -0,39 \pm 0,76j$$

2. Dibujo el LDR, y compruebo si este pasa por el punto calculado:



3. Calculamos el aporte necesario de la red para lograr la deformación de las ramas, de forma que pasen por S_{Δ}

$$\alpha_{0,07} = 180 - \arctan \frac{0,76}{0,39 - 0,07} = 112^{\circ}$$

$$\alpha_{0,525} = \arctan \frac{0,76}{0,525 - 0,39} = 79,94^{\circ}$$

$$\varphi_c = 112,79 - 79,94 - 180 = 12,8^{\circ}$$

4. Utilizamos en este caso el ajuste que consigue la mínima ganancia de la red para evitar así saturaciones de la etapa de potencia. Utilizamos por tanto el criterio de la bisectriz.

$$\alpha_1 = 63^{\circ}$$

$$\alpha_2 = \frac{180 - \theta}{2} = 58.5^{\circ}$$

$$\alpha_3 = 90 - 58.5 = 31.5^{\circ}$$

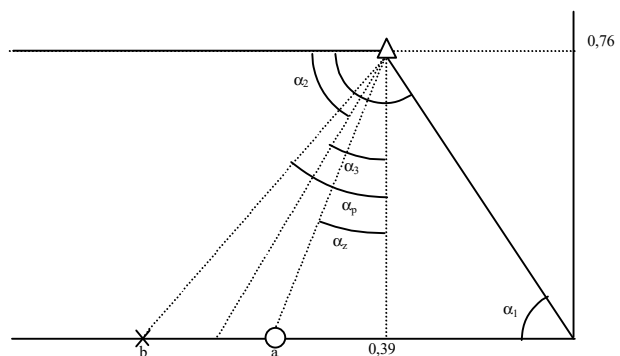
$$\alpha_z = \alpha_3 - \frac{\varphi}{2} = 31.5^{\circ} - 6.4^{\circ} = 25^{\circ}$$

$$\alpha_p = \alpha_3 + \frac{\varphi}{2} = 31.5^{\circ} + 6.4^{\circ} = 37.9^{\circ}$$

$$\frac{a - 0.39}{0.76} = \tan 25^{\circ} \Rightarrow$$

$$a = 0.46 \cdot 0.76 + 0.39 = 0.73$$

$$b = 0.77 \cdot 0.76 + 0.39 = 0.97$$



5. Ajustamos ahora el valor de la ganancia, con lo que tenemos el regulador:

$$K = \frac{\sqrt{0.76^2 + (0.97 - 0.39)^2} \sqrt{0.76^2 + (0.525 - 0.39)^2} \sqrt{0.76^2 + (0.39 - 0.07)^2}}{\sqrt{0.76^2 + (0.73 - 0.39)^2}} = 0.73$$

$$K_r = \frac{0.73}{0.045} = 16.24$$

$$R(s) = 16,24 \frac{s + 0.73}{s + 0.97}$$

3 Compensación en frecuencia

La importancia de esta técnica de compensación se basa en que muchas plantas carecen de un modelo teórico basado en ecuaciones diferenciales, por lo que no permite emplear las técnicas basadas en la modificación del LDR para el cálculo del compensador. La respuesta en frecuencia es una técnica experimental que caracteriza los sistemas de forma funcional, esto es, sin necesidad de conocer la física implícita de su dinámica. Nótese que se trabaja en la relación entre la señal de salida ante una excitación de un armónico de frecuencia variable, con independencia de lo que pudiera haber dentro de la ‘caja negra’ o planta.

Para la representación de la respuesta en frecuencia de un sistema, bien se emplea la curva polar, o bien se utiliza la traza de Bode. Sin embargo, como se va a ver a continuación, resultan más adecuado los diagramas de Bode. La razón está en que esta última no se modifica sustancialmente ante variaciones de la ganancia estática, a diferencia de la curva de Nyquist. Concretando, en el diagrama de Bode, las modificaciones de precisión estática no afectarán al trazado de desfase y en cuanto al módulo sólo significaría ligeros desplazamientos en paralelo al eje de las frecuencias. En la figura 16.1 se muestra una planta típica con un valor de ganancia estática igual a 1 y a 10. En la curva polar o de Nyquist se observa una modificación que afecta a todo el trazado, mientras en el diagrama de Bode hay una traslación paralela al eje de las frecuencias en el módulo, sin cambiar en el argumento. Por estas razones se empleará el trazado de Bode al aplicar las técnicas de compensación en frecuencia.

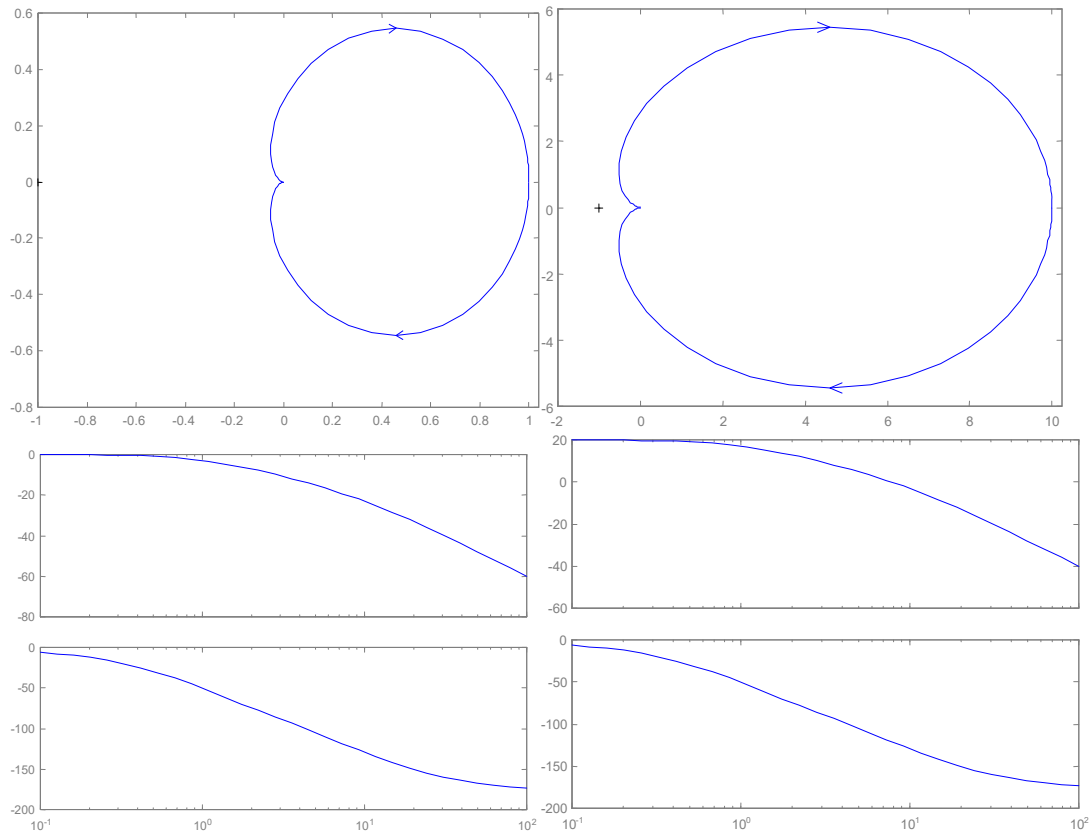


Figura 16. 1. Representación de respuesta de frecuencia con Nyquist y con Bode, con valor de ganancia estática 1 y 10

Los datos de partida para el diseño en frecuencia serán la precisión y el margen de fase. De hecho, podría decirse que en el diseño frecuencial se busca un compromiso entre el error del régimen permanente y la estabilidad relativa. Un aumento desmedido de la ganancia estática provocará, en general, que disminuya el margen de fase y viceversa (ver ejemplo 16.1).

Con el primer conjunto de especificaciones, las constantes estáticas de error, se podrá determinar la ganancia estática del compensador. Seguidamente, se procederá a representar el trazado de Bode de planta en combinación con la ganancia estática del regulador. Este paso permitirá conocer cual es la frecuencia de cruce y su margen de fase. Si se cumple con los requisitos de margen de fase y de frecuencia de cruce se habrá acabado esta iteración, en caso contrario se introducirán nuevas redes de compensación para mejorar estas especificaciones. Una vez obtenida la FDT del compensador, se procederá a calcular los polos de la cadena cerrada del conjunto planta-compensador y se verificará que la respuesta del transitorio y del permanente cumplen con las condiciones de diseño. Si no fuera así se volvería de nuevo a recalcular la FDT del compensador.

En cualquier caso, el trazado de Bode de la planta está dando mucha información que hay que tener en mente. A la baja frecuencia se está examinando cómo trabaja el equipo en el régimen permanente y cual será el grado de precisión del sistema. A medias frecuencias, alrededor de la frecuencia de cruce, se está inspeccionando la estabilidad relativa y por consiguiente trata sobre el amortiguamiento y la rapidez del transitorio. Un adecuado diseño sería que en este rango de frecuencias, el trazado en módulo fuese una

asíntota con pendiente de -20 dB/dec. Con esta condición se suele asegurar un margen de fase superior a los 45° . Por ejemplo, esta estrategia se utiliza mucho en las aplicaciones lineales de los amplificadores operacionales. Por último, la respuesta del sistema a la alta frecuencia, superior a la frecuencia de cruce, muestra la complejidad del sistema. Resultaría ser muy interesante que en este espectro de frecuencia hubiese mucha atenuación, con el propósito de que el equipo fuese más inmune al ruido. Recuérdese que las perturbaciones tienen espectro de alta frecuencia.

No hay que olvidar también que la respuesta transitoria es uno de los ejes principales en el diseño de los compensadores de control. En el método de la respuesta en frecuencia se especifica de forma indirecta. Así, el margen de fase, el margen de ganancia y el pico de resonancia se relacionan con el comportamiento oscilatorio del sistema; recuérdese, por ejemplo, la ecuación $\gamma \approx 100\zeta$. Por otro lado, la frecuencia de cruce, el ancho de banda y la frecuencia de resonancia están en correlación con la rapidez del sistema. Mientras la ganancia de la baja frecuencia se une a la precisión del sistema. En resumen, es verdad que las especificaciones del régimen transitorio no aparecen en las condiciones del diseño de un compensador mediante las técnicas de respuesta en frecuencia, sin embargo, los requisitos del transitorio se encuentran de forma implícita en las condiciones que se imponen en el diseño frecuencial.

Para acabar con esta introducción falta mencionar cuales son los objetivos que se pretenden abordar. En este tema se plantea tres estrategias de compensación. La utilización de redes de adelanto de fase que trabajarán en la incorporación de fase positiva en la cadena abierta, mejorando el margen de fase. Las redes de retraso de fase que atenuarán ganancia de la cadena abierta, para mejorar el margen de fase. Y la tercera solución que es una combinación de la red de adelanto encadenada con otra de retraso, con el propósito de mejorar el margen de fase mediante la acción combinada de atenuar ganancia y de incrementar positivamente el argumento de la cadena abierta.

3.1 Red de adelanto de fase

Como se ha visto en los dos capítulos anteriores esta red forma el regulador PD real, de hecho, es el mismo regulador pero observado desde otra perspectiva. Este compensador está constituido por un cero y un polo de primer orden, siendo, además, dominante el efecto del cero. Su FDT es del tipo:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (16.1)$$

Las constantes del cero y del polo hacen notar que por ser α menor a uno, el cero real está más próximo del eje imaginario que el polo en el dominio complejo. Aun más, a medida de que el valor de α sea más pequeño, el polo se alejará hacia la izquierda del semiplano negativo. Sin embargo, hay un valor mínimo de α condicionado por su realización física, éste deberá ser mayor a 0.07 para que la red sea fácilmente implementable, $\alpha > 0.07$; lo que supone un incremento en fase máximo de hasta 60 grados positivos.

Desde el dominio de la frecuencia y reordenado (16. 1) en términos de invariantes en frecuencia y de primer orden, se observa que la frecuencia del cero es menor que la del polo, indicando de nuevo que el efecto dominante es el del cero:

$$G_c(j\omega) = k_c \alpha \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \tag{16. 2}$$

A su vez se tendrá que la ganancia estática resultante es:

$$G_c(0) = k_c \alpha \tag{16. 3}$$

Esta técnica de compensación se base en incrementar positivamente el argumento del conjunto planta-compensador en la cadena abierta. Por este motivo y tal cual se contempla en la figura 16.2, habrá un desfase máximo positivo, ϕ_m , en la red de adelanto de fase que se hará coincidir con la frecuencia de cruce del conjunto. Con mayor detalle, la ubicación del cero-polo de la red se tomará de forma que la frecuencia del máximo desfase, ω_m , coincida con la frecuencia de cruce de la respuesta frecuencial en cadena abierta del conjunto planta-compensador. A continuación se va a demostrar que la frecuencia del máximo desfase, ω_m , se encuentra en la media geométrica entre la frecuencia del cero y del polo de la red de compensación. Empleando la expresión de desfase de la red y buscando el máximo de desfase se consigue obtener la determinación de ω_m :

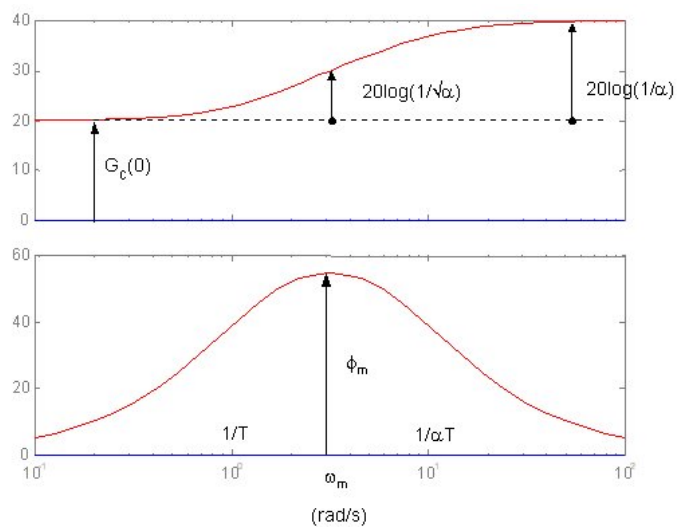


Figura 16. 2. Respuesta en frecuencia de una red de adelanto de fase

$$\left. \frac{d\phi}{d\omega} = 0 = \frac{\phi = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega \alpha T)}{T(1 + (\omega_m T)^2) - \alpha T(1 + (\omega_m \alpha T)^2)} \right\} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \tag{16. 4}$$

(1)

De otro lado, la media geométrica entre la frecuencia del cero y del polo ciertamente coincide con el máximo desfase:

$$^{(1)} \frac{d}{dx} (\arctan(u)) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (16.5)$$

Además, el incremento de ganancia a esta frecuencia respecto al nivel de amplificación de las bajas frecuencias será:

$$|\Delta G_c(\omega_m)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)}}{\sqrt{1 + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (16.6)$$

Por último, se puede demostrar la relación existente entre el ángulo de desfase máximo, ω_m , y el valor de α es:

$$\text{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (16.7)$$

3.1.1 Técnica de compensación en adelanto de fase

Al incorporar la red, el nuevo diagrama de Bode del sistema en cadena abierta se modifica y se observan dos efectos:

1. Las variaciones del argumento son localmente aumentadas; el diseño intentará que este incremento se dé en su valor máximo alrededor de la nueva frecuencia de cruce.
2. Igualmente se produce una modificación del módulo del conjunto en términos de $20 \log(k_c \alpha) [dB]$ para las bajas frecuencias, un incremento de ganancia de $20 \log(1/\sqrt{\alpha}) [dB]$ a la frecuencia del máximo desfase y una variación de $20 \log(1/\alpha) [dB]$ en las altas frecuencias (ver figura 16.2). Del primer efecto afectará a la precisión del sistema y del segundo y tercero tendrá repercusiones sobre nueva la frecuencia de cruce.

De emplear estos dos efectos surge el procedimiento de la ubicación de la red de adelanto de fase. Con el primer efecto y dada la especificación de precisión se modificará la ganancia estática de la cadena abierta. Con esta nueva FDT, $k_c \alpha G_p(\omega)$, se representa en Bode y se calcula la frecuencia de cruce y cual es el margen de fase, ω_g y γ . Con estos valores y con el requisito de margen de fase deseado quedara determinado el incremento de fase, ϕ_m . A partir de este último dato se calculará α . La especificación de mejora de fase debe ser compatible con las posibilidades reales de la red, esto se traduce a que α debe ser mayor a 0.07. En caso de ser menor, no es posible resolver el problema de compensación con una simple red de adelanto de fase.

Suponiendo que las especificaciones de control pueden darse con un regulador de este tipo, se procederá a recalculer la nueva frecuencia de cruce a partir del incremento de ganancia dado por la red en la nueva frecuencia de cruce, $(1/\sqrt{\alpha})$. La forma de proceder será localizar el valor de la frecuencia en el trazado de $k_c \alpha G_p(\omega)$ cuya ganancia en

módulo valga $\sqrt{\alpha}$. Sin duda, la nueva frecuencia de cruce, ω'_g , será superior a la anterior, ya que por el método se está localizando en valores negativos de decibelios de módulo y no en cero. Además, lógicamente, el desfase introducido a esta nueva frecuencia será más negativo que en el caso anterior. Pero en este procedimiento, el incremento de fase por la red se calcula a partir de ω_g y no de ω'_g . Por esta razón, se añade un valor mayor de grados en ϕ_m . ¿Cuanto más? No se sabe a priori, dependerá del valor de α , pero a su vez α está en función de ϕ_m . Lo que conduce a que el planteamiento de determinación de la red es por aproximaciones sucesivas. Se suele dar un valor de unos cinco grados más para un valor de α razonable, esto es, un α no muy pequeño. A modo de esquema el procedimiento de determinación de la red de adelanto de fase seguiría los siguientes pasos:

1. Con las especificaciones del régimen permanente se calcula la ganancia estática del regulador, $G_c(0) = k_c \alpha$.
2. El trazado en diagrama de Bode de $k_c \alpha G_p(\omega)$ permitirá conocer ω_g y γ . Si las especificaciones son cumplidas, significará que sólo con un ajuste de la ganancia estática de la cadena abierta es necesario, esto es, se diseñará un regulador P. En caso contrario y si se desea aumentar la frecuencia de cruce de ganancia, se procederá al diseño de la red de adelanto de paso, empleando los pasos siguientes.
3. El requisito de margen de fase deseado permitirá conocer el incremento de fase positiva requerida. A ello habrá de sumar el margen de seguridad necesario como consecuencia del desplazamiento a mayor frecuencia de cruce: $\phi_m = (\gamma_{deseado} - \gamma) + (\text{margen de seguridad})$
4. Conocido el desfase máximo a introducir en la cadena se determinará el valor de α a partir de (16. 7), $\text{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$. Este valor deberá de ser mayor a 0.07, en caso contrario, no será posible compensar el sistema con una red de adelanto de fase, habrá de emplear una red de adelanto-retraso de fase.
5. Dado la razón de las constantes de tiempo entre polo y el cero, α , quedará definido el valor de ganancia introducido por la red según (16. 6), $|\Delta G_c(\omega_m)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Llevando a que la nueva frecuencia de cruce, ω'_g , estará determinada por aquella que cumpla el nivel de atenuación de $\sqrt{\alpha}$ en el trazado de Bode de $k_c \alpha G_p(\omega)$.
6. Al considerar que coincide la nueva frecuencia de cruce, ω'_g , con la de máxima desfase aportado por la red, ω_m , y teniendo en cuenta (16. 5), $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \omega'_g$, se hace factible calcular la constante de tiempo de cero, T.

7. Dados la constante de tiempo de cero, T, la razón entre constantes de tiempo, α , y la ganancia estática del regulador resulta inmediato determinar la constante de tiempo de polo y la ganancia del regulador, k_c .
8. Por último, definida la FDT de la red de adelanto de fase se procederá a representar el diagrama de Bode de la nueva cadena abierta, $G_c(\omega)G_p(\omega)$. Pasándose a verificar el valor del nuevo margen de fase que tenderá a ser similar a las especificaciones deseadas (la incertidumbre está en el margen de seguridad). En caso contrario, se volverá sobre el punto tercero modificando los grados de margen de seguridad.

Como muestra del procedimiento presentado se hace un ejemplo donde se pretende determinar una red de adelanto de fase para compensar a una planta.

Ejemplo 16.1

Calcular una red de adelanto de fase para el equipo de control de temperatura de una célula Peltier, cuya FDT es $G_p(s) = \frac{u_{ACOND}(s)}{u_{CONTROL}(s)} = \frac{0.045}{(s + 0.07)(s + 0.525)}$. Sabiendo que la realimentación es unitaria y se desea que el error al escalón sea menor a un 10% y que el margen de fase sea de 65° .

Con la constante de error al escalón habrá que determinar cuanto debe valer la ganancia estática de la cadena abierta:

$$K_p = \frac{1}{e_{ss}} - 1 \approx 10 \Rightarrow k_c \alpha G_p(0) = 10 \Rightarrow k_c \alpha = 8.17$$

Seguidamente se procederá a normalizar la FDT de la planta para la respuesta en frecuencia, modificando, eso si, la ganancia estática con la calculada en el anterior paso:

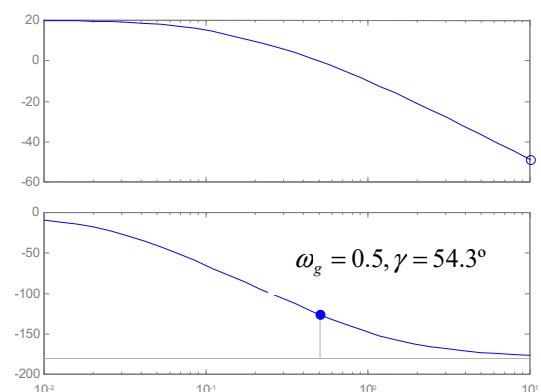
$$k_c \alpha G_p(\omega) = \frac{10}{(1 + j\omega 14.29)(1 + j\omega 1.9)}$$

Procediéndose a determinar la frecuencia de cruce y con este valor calcular el margen de fase:

$$100 = 1 + 207.81\omega_g^2 + 737.18\omega_g^4$$

$$\omega_g^2 = 0.2517 \Rightarrow \omega_g = 0.5 [\text{rad} / \text{s}]$$

$$\gamma = 180 - (\arctg(\omega_g 14.29) + \arctg(\omega_g 1.9)) = 54.3^\circ$$



Por lo tanto, se necesita que la red de adelanto de fase contribuya con una aportación positiva de argumento de:

$$\phi_m = (65^\circ - 54.3^\circ) + 5^\circ \approx 15^\circ$$

No hay que olvidar el carácter aproximativo del procedimiento. La suma añadida de un valor de grados mayor, en este caso de 5° , está ocasionada por el desplazamiento de la nueva frecuencia de cruce. Las causas están definidas por que no sólo la red de adelanto de fase introduce un aumento del argumento sino también una ganancia amplificadora en este rango de frecuencias.

El valor de la razón entre las constantes del polo y del cero, α , estará determinado por la expresión (16. 7):

$$\text{sen} \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rightarrow \alpha = 0.588$$

La implementación de la red es posible, ya que α es mayor a 0.07. Con este valor, el incremento de ganancia dada por la red es según (16. 6):

$$\alpha = 0.588 \rightarrow |\Delta G_c(\omega_m)| = 1.31$$

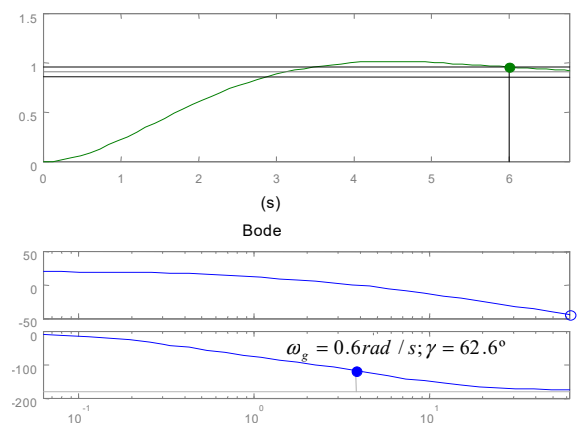
La nueva frecuencia de cruce será aquella que anule el incremento de módulo dado por la red:

$$\begin{aligned} |k_c \alpha G_p(\omega'_g)| &= \frac{1}{1.31} = 0.76 \rightarrow 171.61 = 1 + 207.81\omega_g^2 + 737.18\omega_g^4 \\ \omega_g'^2 &= 0.36 \Rightarrow \omega'_g = 0.6 [\text{rad} / \text{s}] \end{aligned}$$

La constante de tiempo del cero estará determinada por (16. 5) al hacer que la nueva frecuencia de cruce coincida con el máximo desfase introducido por la red:

$$\omega'_g = \frac{1}{T_{Z(RAF)} \sqrt{\alpha}} \rightarrow T_{Z(RAF)} = 2.17 \text{ s}$$

Sólo faltará deducir la constante del polo y la ganancia del regulador:



$$sT_{P(RAF)} = \alpha T_{Z(RAF)} = 1.27s \quad k_c = \frac{G_c(0)}{\alpha} = 13.94$$

La FDT de la red de adelanto será:

$$G_c(s) = 13.94 \frac{s + \frac{1}{2.17}}{s + \frac{1}{1.27}}$$

Posteriormente, se procedió a su simulación del conjunto compensador-planta, resultando que la frecuencia de cruce es de 0.6 rad/s y que el margen de fase es de 62.5°. En la figura no sólo se observa el nuevo diagrama de Bode, sino también la respuesta temporal ante una entrada en escalón. Nótese el carácter de comportamiento subamortiguado y con un error menor al 10%.

RESOLUCIÓN EN MATLAB

```
%Definición de la planta, Gp(s)
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(.045,poly([- .07 - .525]))
%Determinación de la frecuencia de cruce y el margen de fase con la
ganancia estática necesaria
bode(series(gp,8.17));
disp('Notar que wg=0.5 rad/s y MF=54.3°');
pause
%Respuesta del efecto del compensador RAF
disp('FDT de la RAF:');
gc=tf(13.94*[1 1/2.17],[1 1/1.27])
disp('Bode de la cadena abierta con la planta y con el conjunto
compensador-planta');
gc_gp=series(gc,gp);
bode(gp,'r',gc_gp,'b')
pause
disp('Respuesta temporal sin y con compensador');
step(feedback(gp,1),'r',feedback(gc_gp,1),'b')
pause
```

3.2 Red de retraso de fase

A diferencia del compensador de adelanto de fase, donde se plantea mejorar el comportamiento del sistema a partir del aporte de un incremento positivo de argumento, la red de retraso de fase se caracteriza por atenuar la ganancia del espectro de la media y la alta frecuencia, con el objeto de disminuir la frecuencia de cruce y por lo tanto de aumentar el margen de fase del conjunto. Resumiendo y a trazos generales se puede decir que la red de adelanto de fase trabaja en el argumento y la red de retraso de fase lo hace en el módulo.

Para su estudio se plantea su FDT, caracterizada por un polo y un cero de primer orden. Además, el efecto dominante está en el polo:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1 \quad (16.8)$$

Pasando la FDT por el recorrido de Nyquist se obtendrá su respuesta en frecuencias:

$$G_c(j\omega) = k_c \beta \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \beta T} \quad (16.9)$$

Analizando (16.9) se tiene que la ganancia estática es $k_c \beta$ y que la frecuencia del polo es menor que la del cero, al ser β mayor a la unidad. Al igual que en la red de adelanto de fase, la red de retraso produce dos efectos. El primero de ellos influye sobre el argumento de la cadena abierta al introducir un incremento negativo. Al principio y con esta consecuencia parece paradójico que esta red sirva para estabilizar cuando justamente lo que hace es disminuir el argumento. Obviamente, este efecto hay que atenuarlo lo más posible. De aquí nace la primera conclusión sobre la ubicación de este regulador. El polo-cero de este bloque se situarán a menores frecuencias que la de cruce. De hecho, la frecuencia del cero, la más elevada del compensador, al menos estará a una octava de la frecuencia de cruce. Este criterio trata de que el incremento de argumento que aporta la red a la cadena abierta sea prácticamente nulo.

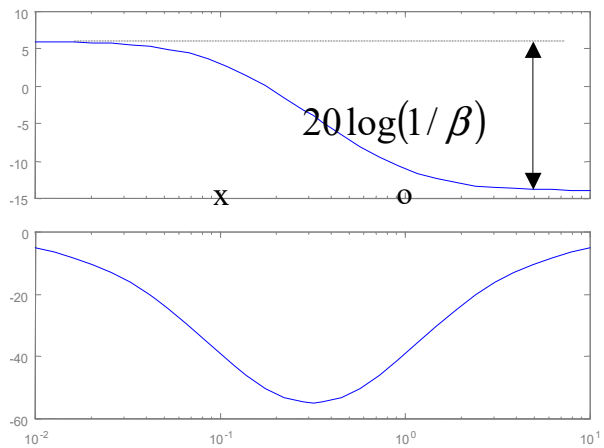


Figura 16.3. Respuesta en frecuencia de una red de retraso de fase

El segundo efecto es el que se emplea para la acción correctora del regulador: la atenuación del módulo a las frecuencias medias y altas. La idea consiste en disminuir la ganancia de la cadena abierta haciendo menor la frecuencia de cruce y aumentando el margen de fase. Nótese que si se ubica el polo-cero de la red a la baja frecuencia, como ya se ha indicado, respecto a la frecuencia de cruce, el incremento de atenuación será prácticamente la inversa de β y el argumento introducido por la red será próximo a cero:

$$|\Delta G_c(j\omega'_g)| \cong \frac{1}{\beta} \quad \arg(G_c(j\omega'_g)) \cong 0^\circ \quad (16.10)$$

En este método de compensación se hará disminuir la frecuencia de cruce, consiguiendo que el sistema realimentado sea más lento. Sin duda, salta a la vista la pregunta de por qué utilizar este tipo de compensación, si la red de adelanto produce el mismo efecto estabilizador y además convierte al conjunto en una respuesta más rápida. La

contestación está en el tipo de implementación de ambos compensadores. En el caso de la red de adelanto de fase, en la mayoría de las veces, exige de una amplificación de la señal de error, a la que está procesando, que desde el punto de vista tecnológico requiere de dispositivos activos o de amplificación. Por el contrario, las redes de retraso al actuar en la atenuación no exigen de estos dispositivos, pudiéndose ser implementados por elementos pasivos. Véase, por ejemplo, la compensación realizada en los seguidores de tensión, representada en la figura 16.4, a través de una red de retraso de fase; sólo se emplean componentes pasivos.

El procedimiento para la determinación de la FDT de este compensador volverá a ser también iterativo y los primeros pasos son similares a los ya comentado en la red de adelanto de fase. Los pasos a dar son:

1. Determinar la ganancia estática del regulador, $G_c(0) = k_c \beta$, a partir de las especificaciones de precisión.
2. Trazar la respuesta en frecuencia de la cadena abierta, $k_c \beta G_p(j\omega)$, en diagrama de Bode y calcular cuanto vale la frecuencia de cruce y el margen de fase, ω_g y γ . Si estos valores son satisfactorios no será necesario emplear una red de retraso de fase, sólo bastará con añadir una ganancia estática igual a $k_c \beta$, esto es, implementar un regulador tipo P. En caso contrario habrá de continuar con el procedimiento. Recuérdese que al elegir la opción de retraso de fase, el conjunto se volverá más lento que si se emplea una red de adelanto de fase.
3. A partir de la especificación del nuevo margen de fase deseado, γ' , se determinará la nueva frecuencia de cruce, ω'_g . Se empleará la expresión del argumento de la cadena abierta, $k_c \beta G_p(j\omega)$. La nueva frecuencia será aquella que introduzca un desfase tal que cumpla el requisito de γ' más un incremento de grados debido a la proximidad del compensador. En (16. 10) se observó que el argumento se aproxima a cero, siendo esto más verdad cuanto más lejos se encuentre la FDT de la red respecto a la nueva frecuencia de cruce. Sin embargo, a medida de que se aleje la red de esta frecuencia, las constantes del polo-cero aumentarán, conllevando sus problemáticas de realización física. El incremento en grados dependerá de la posición de la red, justamente la que se pretende calcular. Se propone un margen de seguridad entre 5° a 12° a condición de que al menos el cero esté a una octava de la nueva frecuencia de cruce. Por este motivo, el procedimiento es iterativo. La expresión del argumento quedará como:

$$\arg(k_c \beta G_p(j\omega'_g)) = \gamma' - 180 - \arg\left(\frac{1 + j\omega'_g T}{1 + j\omega'_g \beta T}\right) \quad (\text{'Margen de seguridad'}) \quad (16. 11)$$

Al determinar ω'_g puede suceder que sea un valor muy bajo y que el sistema se vuelva demasiado lento. Si así ocurriese, esta técnica de compensación no sería válida y habría de buscar una red más compleja.

4. Seleccionar la frecuencia del cero a una octava o una década anterior a la frecuencia de cruce calculada en el anterior punto. Recuérdese que pueden ser constantes elevadas en el cero y por mayor motivo en el polo.

$$\omega'_g T'_g = 1 \rightarrow T = 8T'_g \text{ ó } 10T'_g = \frac{8}{\omega'_g} \text{ ó } \frac{10}{\omega'_g} \quad (16.12)$$

5. La nueva frecuencia de cruce será válida en el momento que el módulo en cadena abierta del conjunto regulador-planta sea unitario. De la figura 16.3 y de la ecuación (16.10) se observa que la atenuación de la red es prácticamente la inversa de β ; mientras el módulo de $k_c \beta G_p(j\omega'_g)$ es mayor a la unidad, por ser $\omega_g > \omega'_g$. Por lo tanto, el compensador debe de atenuar toda la ganancia que pone la planta a la nueva frecuencia, haciendo que:

$$\beta = |k_c \beta G_p(j\omega'_g)| \quad (16.13)$$

6. Habiendo conseguido la ganancia estática del compensador, la constante del cero y β resulta inmediato determinar la constante del polo y la ganancia del regulador.
7. Calculada la FDT de la red de retraso de fase se procedería a su simulación. Los resultados obtenidos servirán de comparación entre los valores deseados y los conseguidos, pudiendo optar por tres soluciones: a) La dinámica es satisfactoria y el diseño está acabado, b) El margen de fase obtenido es menor al deseado, entonces se saltará al punto 3 y se añadirá más grados al margen de seguridad y c) El margen de fase es adecuado pero la frecuencia de cruce es baja, en tal caso el compensador debe de ser más complejo.

Esta técnica es muy utilizada en Electrónica. Por ejemplo, los seguidores de tensión con amplificadores operaciones suelen ser bastantes críticos, ya que los márgenes de fases son menores a los 45° . Por eso se utiliza una técnica de compensación externa basada en una red de retraso de fase. En la figura 16.4 se contemplan los dos esquemas, uno sin compensación y el otro con una red de retraso de fase. La ganancia diferencial de tensión de los operacionales, A_{do} , se caracteriza por tener un polo a baja frecuencia, alrededor de los 10 Hz, y otro a la alta frecuencia ($\approx 100\text{kHz}$), acompañado con una alta ganancia estática:

$$A_{do}(\omega) = \frac{A_{do}(0)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

En el primer circuito, la realimentación es unitaria y en el segundo se introduce una red de retraso de fase, mediante la red pasiva $R_1 R_2 C_1$. Los resultados son concluyentes, el primero no es estable electrónicamente y el segundo sí.

A continuación se emplea un ejemplo sencillo que servirá para poner de manifiesto el procedimiento expuesto para la determinación de las FDTs de las redes de retardo de fase.

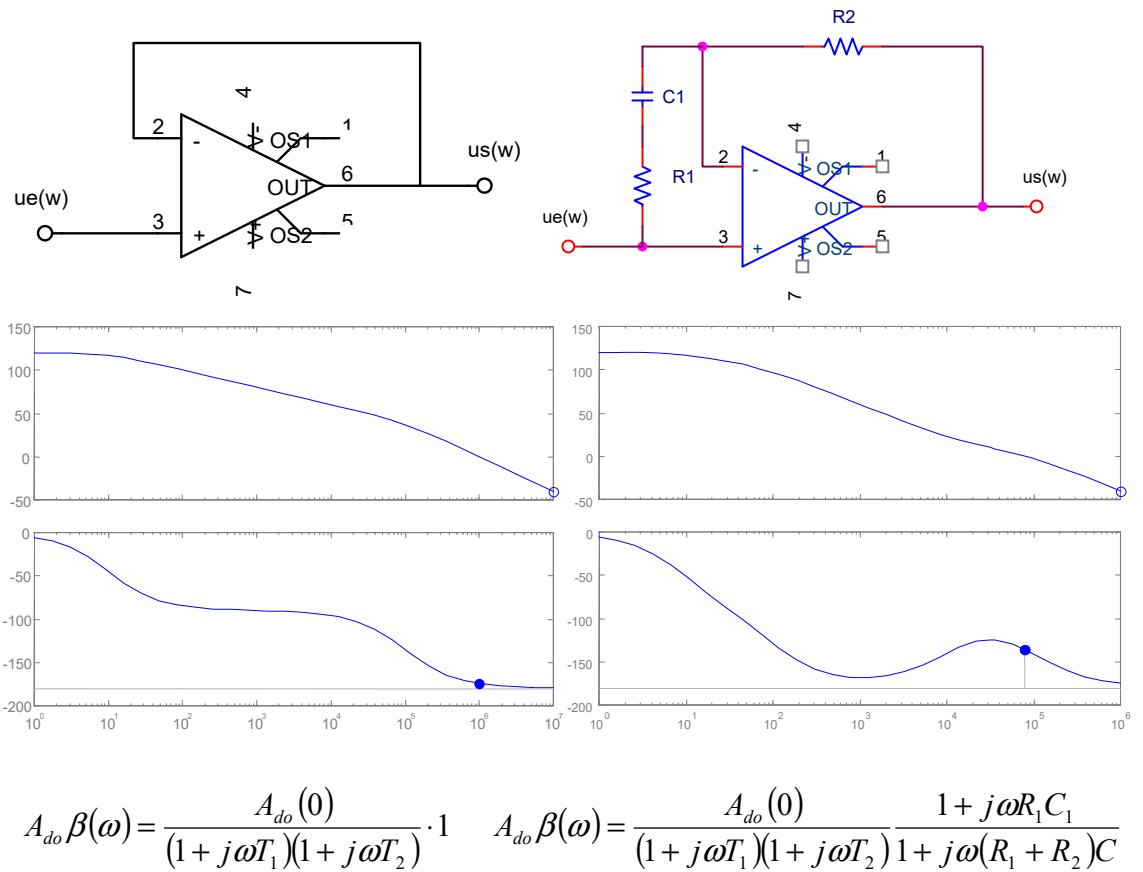


Figura 16. 4. Seguidor de tensión a) sin compensación externa, b) estabilización con una red de retardo de fase

Ejemplo 16.2

Calcular una red de retraso de fase para la planta $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$, de forma que la constante de error a la rampa sea de $5s^{-1}$ y que el margen de fase sea mayor de 40° .

Con los datos de precisión se calculará el producto de la ganancia estática del regulador con la relación de constantes de tiempo entre el polo y el cero del compensador, β :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s) = k_c \beta G_p(0) = 5$$

Seguidamente se presentará el diagrama de Bode de $k_c \beta G_p(\omega)$, previamente se habrá dado el paso de $s = j\omega$ en la FDT de la planta:

$$k_c \beta G_p(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+0.5j\omega)}$$

Procediendo a representar esta FDT en el diagrama de Bode y a localizar en el trazado la frecuencia de cruce:

$$|k_c \beta G_p(j\omega)| = 1 \rightarrow \omega^6 + 5\omega^4 + 4\omega^2 = 100$$

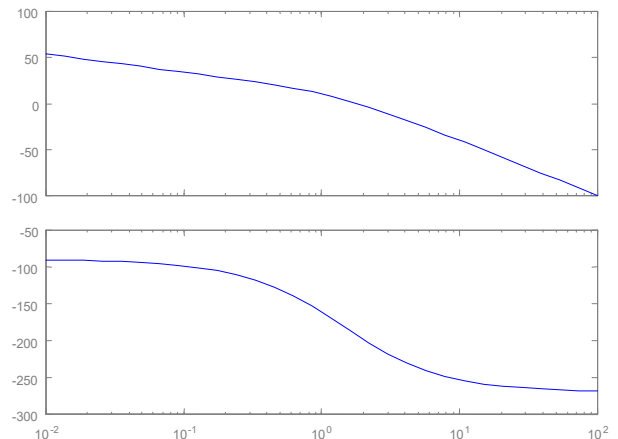
Haciendo el cambio de variable $x = \omega^2$ y teniendo como resultante una ecuación de tercer grado, se le aplica el método numérico de la telaraña. Al observar el trazado asintótico del diagrama de Bode se aprecia que una buena semilla para el algoritmo sería de 2 rad/s:

$$x_{k+1} = \frac{100}{(x_k^2 + 5x_k + 4)} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 4 & 3.25 & 3.247 & 3.248 \\ 2.5 & 3.245 & 3.248 & 3.248 \end{array} \Rightarrow \omega_g = \sqrt{3.248} = 1.8 [\text{rad/s}]$$

El margen de fase será:

$$\gamma = 180 - (90 + \arctg(\omega_g \cdot 1) + \arctg(\omega_g \cdot 0.5)) = -12.93^\circ$$

Habrà de introducir con la red una atenuación tal que reduzca la frecuencia de cruce y aumente el margen de fase. De la traza de Bode se observa que para tener un desfase de 140° , esto es, un margen de fase de 40° , supone que la nueva frecuencia de cruce estaría alrededor de los 0.6 rad/s. De este valor se desprende que las constantes de tiempo del polo y del cero van a ser de órdenes de varios segundos, llevando implícito los problemas de realización física mediante circuitos electrónicos. Las redes pasivas estarían constituidas por grandes valores de megaohmios y de microfaradios.



Por estas razones se diseña de forma que sólo estuviera alejado el cero en una octava respecto a la nueva frecuencia de cruce. Esta proximidad supone que los efectos de regulador sobre el argumento no son despreciables. Por tanto, se hace una estimación de unos 12° añadidos. La nueva frecuencia de cruce será aquella que cumpla un desfase de:

$$\arg(k_c \beta G_p(j\omega'_g)) = \gamma' - 180 + \left(-\arg\left(\frac{1 + jT\omega'}{1 + j\beta T\omega'}\right) \text{'Margen de seguridad'} \right) = -128^\circ$$

$$-128 = -(90 + \arctg(\omega'_g 1) + \arctg(\omega'_g 0.5))$$

$$\frac{\omega'_g + 0.5\omega'_g}{1 - 0.5\omega'^2_g} = \text{tg}(38^\circ) \rightarrow \omega'_g = 0.464[\text{rad} / \text{s}] \quad (2)$$

La frecuencia del cero se encontrará como máximo a una octava de la nueva frecuencia de cruce:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega'_g}{8} \rightarrow T_{Z(RRF)} = T = 16s$$

En nivel de ganancia de la cadena cerrada que habrá de atenuar será:

$$|k_c \beta G_p(j\omega'_g)| = \frac{10}{\sqrt{\omega'^6_g + 5\omega'^4_g + 4\omega'^2_g}} = 7.69$$

Como el nivel de atenuación está en la relación inversa de las constantes de tiempo, β , entonces:

$$\beta = 7.69 \rightarrow T_{P(RRF)} = \beta T = 123s$$

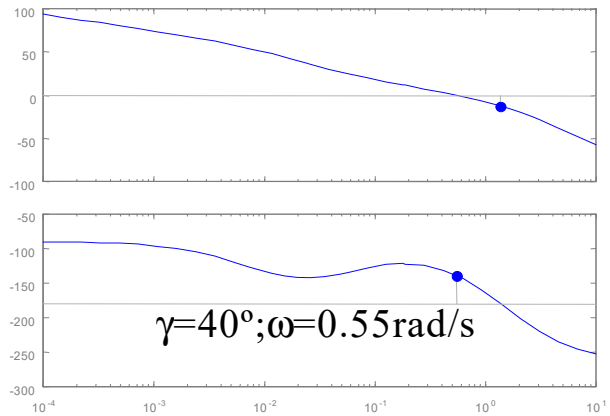
Teniendo la ganancia estática del regulador y β es inmediato calcular la ganancia del compensador y obtener definitivamente la FDT de la red:

$$G_c(s) = 0.65 \frac{s + \frac{1}{16}}{s + \frac{1}{123}}$$

Posteriormente se procedió a su simulación. El margen de fase es de 40° y la frecuencia de cruce es de 0.55 rad/s. Sería posible realizar una nueva iteración, haciendo

$$^2 \text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}(A) + \text{tg}(B)}{1 - \text{tg}(A)\text{tg}(B)}$$

que sea un poco mayor el margen de fase para poder mejorar la estabilidad relativa, ya que resulta demasiado bajo. Aunque llevaría a una menor frecuencia de cruce.



RESOLUCIÓN EN MATLAB

```
%Definición de la planta, Gp(s)
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(2,poly([0 -1 -2]))
%Determinación de la frecuencia de cruce y el margen de fase con la
ganancia estática necesaria
bode(series(gp,5));
disp('Notar que wg=1.8 rad/s y MF=-12.93°');
pause
%Respuesta del efecto del compensador RRF
disp('FDT de la RRF_RAF:');
gc=tf(.65*[1 1/16],[1 1/123]);
disp('Bode de la cadena abierta con la planta y con el conjunto
compensador-planta');
disp('Rojo sin compensar, azul con compensador');
gc_gp=series(gc,gp);
bode(gp,'r',gc_gp,'b')
pause
disp('Respuesta temporal sin y con compensador ante una entrada en rampa
unitaria');
t=0:.1:10;
u=t;
lsim(feedback(gp,1),'r',feedback(gc_gp,1),'b',u,t)
pause
disp('Respuesta temporal sin y con compensador ante una entrada en
escalón unitaria');
step(feedback(gp,1),'r',feedback(gc_gp,1),'b')
pause
```

3.3 Redes de adelanto-retraso de fase

Esta red es empleada cuando las especificaciones de diseño no pueden ser cumplidas por una compensación en adelanto o de retraso de fase. Se caracteriza por la combinación de ambas redes. Trabaja tanto en el incremento de argumento a la cadena abierta a la nueva frecuencia de cruce (efecto adelanto de fase), como en la atenuación del módulo a esta frecuencia (efecto retraso de fase). La FDT de esta red será la concatenación de estos dos efectos:

$$G_C(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_1\alpha}} \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{T_2\beta}} \quad 0.07 < \alpha < 1 \quad \beta > 1 \quad (16.14)$$

donde T_1 será la constante de tiempo del cero de la red de adelanto de fase y T_2 la correspondiente al cero de la red de retraso de fase. Recuérdese la necesidad de que α tiene que ser menor a uno para que la subred sea de adelanto y que β tiene que ser mayor que uno, para configurarse como subred de retraso de fase. Un estudio de las consecuencias que produce esta combinación puede ser realizado a través de su respuesta en frecuencia. A partir de (16.14) se hace el cambio de $s=j\omega$ y reordenado la expresión en términos invariantes en frecuencia y de primer orden queda:

$$G_C(j\omega) = k_c \alpha \beta \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega \alpha T_1} \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega \beta T_2}$$

La figura 16.5 muestra, por ejemplo, la respuesta en frecuencia del compensador adelanto-retraso que se obtendrá en el ejemplo 16.3. Yendo de la baja a la alta frecuencia se aprecia en primer lugar los efectos de la red de atraso de fase. Un aumento de la ganancia a la baja frecuencia con el propósito de mejorar la precisión del sistema y una atenuación de $1/\beta$ en el espectro de la frecuencia de cruce, conllevando un aumento de la margen de fase. La ubicación de la subred de adelanto hace que el máximo desfase introducido, ϕ_m , prácticamente coincida con la frecuencia de cruce.

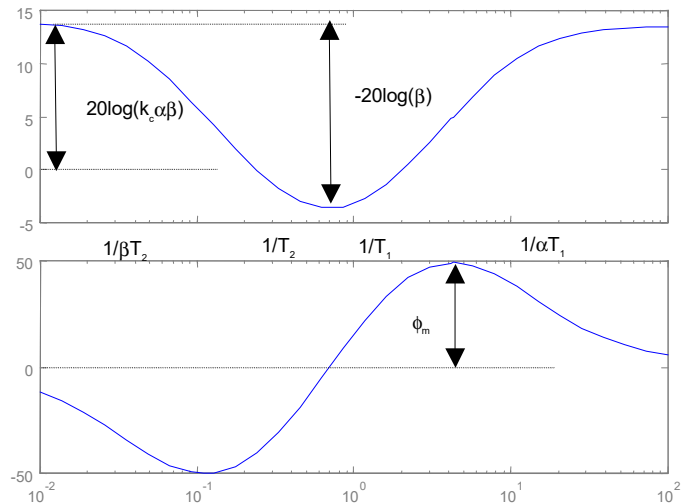


Figura 16. 5. Respuesta en frecuencia de una red de adelanto-retraso de fase

La definición de la FDT de esta red utiliza una combinación de los dos procedimientos anteriores, por tanto, no presenta una definición determinista sino unos métodos por aproximaciones sucesivas a través del ensayo y el error. Ciertamente, se cita unos ‘métodos’ por que no hay tampoco un solo procedimiento sino varios. Por ejemplo, se

puede considerar que α es la inversa de β o hacer que α sea de valor mínimo. En todo caso, la heurística de la ubicación se encuentra en el reparto de grados que se asigna a las dos subredes.

Como en los dos métodos anteriores, el primer paso es definir la ganancia estática del regulador, $k_c\alpha\beta$, a partir de las especificaciones de las constantes de error. La representación en diagrama de Bode de la cadena abierta, $k_c\alpha\beta G_p(\omega)$, permitirá conocer ω_g y γ . El valor del margen de fase y la frecuencia de cruce servirá para definir qué tipo de estructura de compensación se requiere emplear: regulador P, PD, PI o PID. El compromiso entre las especificaciones de frecuencia de cruce y margen de fase puede conducir a emplear una red de adelanto-retraso de fase. Esta decisión va a venir definida sobre todo por que el margen de fase especificado no pueda darse con la red de adelanto de fase de forma exclusiva y por que si se aplicase una red de retraso de fase podría producirse el doble inconveniente de una muy baja frecuencia de cruce y unas altas constantes de tiempo para el polo-cero de este compensador.

Definido el compensador adelanto-retraso de fase se tratará de definir cuál va a ser la nueva frecuencia de cruce, ω'_g . Aquí los procedimientos varían ya que entra en el reparto de cuántos grados aporta la subred de adelanto y cuántos la subred de desfase a través de la atenuación de la cadena abierta. Por ejemplo, si se propone maximizar la nueva frecuencia de cruce, esto es, que el sistema sea lo más rápido posible, habrá de potenciar al máximo la aportación de grados por parte de la subred de adelanto. Para conseguirlo se requiere que α sea lo más pequeño posible. Definida esta aportación el resto tendrá que hacerse con la atenuación de la subred. Hay que darse cuenta que maximizar la frecuencia de cruce, como se plantea, significa hacer más rápido el sistema, pero también en convertirse más sensible a las perturbaciones. En todo caso, cualquier otro procedimiento de reparto puede hacerse. Sea como fuese, si se determina la nueva frecuencia de cruce, ω'_g , el reparto de grados se habrá definido o viceversa, dado el reparto de grados entre la subred de adelanto y de retraso la ω'_g está determinada.

A partir del anterior punto, donde la experiencia del ingeniero resulta decisiva para una optima solución, el resto es bastante lineal y mecánico. A partir de la nueva frecuencia de cruce y del reparto de grados, α resultará inmediato de calcular. De este último valor se determinará la ganancia introducida en la cadena abierta por la subred de adelanto y por la propia planta a la nueva frecuencia de cruce. Esta ganancia deberá ser atenuada por la subred de retraso, localizando el valor de β . Conocidas ω'_g , α y β , y con las mismas reglas vistas en el diseño de redes de adelanto y retraso de fase se procederá a colocarlas en el dominio complejo, acabando con la definición de la ganancia del regulador. A modo de esquema el procedimiento seguiría los siguientes pasos:

Procedimiento:

1. A partir de las especificaciones de precisión se calculará la ganancia estática del compensador, $G_c(0) = k_c\alpha\beta$. De forma muy similar a como se ha hecho con las anteriores redes.
2. Se representa en diagrama de Bode la respuesta en frecuencia de la cadena abierta de la planta más la ganancia estática del compensador, $k_c\alpha\beta G_p(\omega)$. De la gráfica se obtendrá la frecuencia de cruce y el margen de fase, ω_g y γ .

3. Si el argumento a incrementar para cumplir las especificaciones es menor a 50° será posible resolverlo con una red de adelanto de fase. Si es superior habrá de recurrir a una red adelanto-retraso. Llegado a este punto son varias las técnicas que se pueden emplear para el reparto de grados que debe de contribuir cada una de las partes del compensador. De entre ellas, se destaca aquella que maximiza la frecuencia de cruce y que por lo tanto le hace más rápido. Consiste en asignar a α el valor de 0.1, permitiendo un aporte de 50° más 5° de seguridad. El resto de los grados serán conseguidos a través de la atenuación dada por la parte del retraso del compensador, pudiendo determinar mediante la ecuación del argumento la nueva frecuencia de cruce:

$$\arg(k_c \alpha \beta G_p(\omega'_g)) = \gamma' - 180 - \phi_m \quad (16. 15)$$

donde γ' es el margen de fase deseado. Hay otras formas distintas de repartir los grados entre la red de adelanto y de retraso. Nótese el grado de libertad de la ecuación, pues se tiene como incógnitas ω'_g y ϕ_m . En cualquier caso, en esta etapa se definirá, con el reparto de los grados, los valores de ϕ_m fijando el valor de α , y mediante la aplicación de la ec.(16. 15) el valor de la ω'_g .

4. Definido el valor de α se conoce el aporte de ganancia de la subred de adelanto de fase a ω'_g . Además, también se conoce el módulo de la cadena abierta a esta frecuencia, $|k_c \alpha \beta G_p(\omega'_g)|$. Ambas ganancias deben ser contrarrestadas por el efecto de atenuación de la subred de retraso de fase, para que se convierta ciertamente ω'_g . Con la nueva frecuencia de cruce será posible determinar el valor de β :

$$\beta = |k_c \alpha \beta G_p(\omega'_g)| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (16. 16)$$

5. Situando el cero de la red de retraso al menos a una octava anterior de la nueva frecuencia de cruce,

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega'_g}{8} \text{ ó } \frac{\omega'_g}{10} \quad (16. 17)$$

y con el dato de β quedará fijada la FDT de la subred de retraso de fase.

6. La ubicación de la red de adelanto de fase también es factible al conocer α y al hacer coincidir ω_m con ω'_g :

$$\frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}} = \omega_m = \omega'_g \quad (16. 18)$$

Determinando la constante del cero y con α se calcula la constante del polo.

7. El último parámetro a calcular es la ganancia del regulador que resulta inmediato al conocer la ganancia estática y las relaciones entre las constantes de tiempo de las subredes de adelanto y retraso de fase, α y β .
8. Una vez obtenida la FDT del compensador, se simulará la respuesta del conjunto regulador planta, analizando si cumple con los requisitos. En caso de no cumplir, se volverá al tercer punto, modificando la estrategia de reparto en grados de la red de adelanto y la atenuación de la red de retraso.

Ejemplo 16.3

El modelo de un sistema de control de un vehículo en vacío es $G_p(s) = \frac{100}{s(s+2)(s+10)}$ y tiene realimentación unitaria. Se pide que la constante de error ante una entrada en rampa sea de 25 s^{-1} , el margen de fase tenga un valor de 60° y el margen de ganancia sea superior a los 10dB.

Para cumplir los requisitos de precisión habrá de variar la ganancia estática del conjunto compensador-planta:

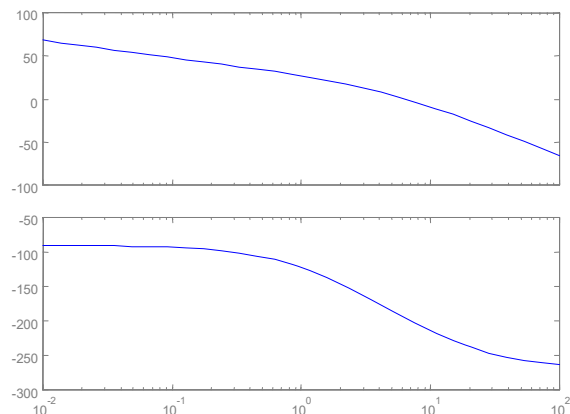
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} k_c \alpha \beta G_p(s) = 25 \rightarrow k_c \alpha \beta = 5$$

Añadiendo la ganancia estática del regulador se procederá a representar la respuesta en frecuencia de la cadena abierta, $k_c \alpha \beta G_p(\omega)$; determinándose la frecuencia de cruce y el margen de fase:

$$\left| \frac{25}{j\omega(1+j\omega 0.5)(1+j\omega 0.1)} \right| = 1$$

$$625 = \omega_g^2 + 0.26\omega_g^4 + 0.0025\omega_g^6$$

$$\omega_g = 6.34 \text{ rad/s} \quad \gamma = -14.9^\circ$$



El incremento de argumento para satisfacer las especificaciones de diseño está por encima de los 75° , por lo que no es posible utilizar una red de adelanto de fase. En el caso de emplear de manera exclusiva una red de retraso de fase el sistema sería muy lento. Concluyendo que habrá de emplear una combinación de red de adelanto y retraso de fase. Una de las técnicas adecuadas que maximiza el valor de la nueva frecuencia de cruce, es tomar el máximo de desfase positivo que puede dar la red de adelanto de fase, alrededor de unos 55° incluidos los grados de seguridad que es un valor de α de 0.1, y dejar el resto para la red de retraso de fase. De esta forma quedarían las contribuciones:

RAF: $50^\circ + 5^\circ$ (margen de seguridad) (mediante argumento)

RRF: $60 + 14.9 - 50 \approx 25^\circ$ (a través de la atenuación).

La nueva frecuencia de cruce estará cuando el argumento de $k_c \alpha \beta G_p(\omega)$ sea igual a:

$$\arg(k_c \alpha \beta G_p(\omega'_g)) = -180 + (\gamma' - \phi_m) = -170^\circ$$

$$-90 - \arctg(\omega'_g 0.1) - \arctg(\omega'_g 0.5) = -170^\circ \rightarrow \omega'_g = 3.5 \text{ rad/s}$$

Para calcular β se requiere saber cuanto debe ser atenuado la ganancia de la planta y de la aportada por la subred de adelanto de fase a la nueva frecuencia de cruce:

$$\beta = \left| k_c \alpha \beta G_p(\omega'_g) \right| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 10.56$$

Se colocará el cero de la subred de retraso a una octava más adelantada de la frecuencia de cruce y con el valor de β quedará definida la constante de tiempo del polo de la subred de retraso:

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega'_g}{8} \rightarrow T_{Z(RRF)} = 2.29s \rightarrow T_{P(RRF)} = 24.19s$$

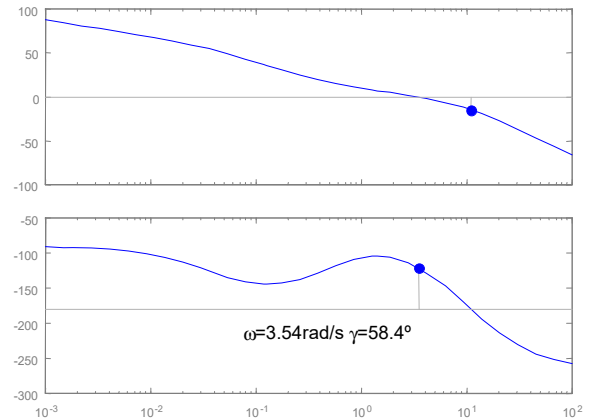
La ubicación del cero-polo de la subred de adelanto también es fácil de calcular:

$$\frac{1}{T_1\sqrt{\alpha}} = \omega'_g \rightarrow T_{Z(RAF)} = 0.9s \rightarrow T_{P(RAF)} = 0.09s$$

Por último, la ganancia estática del regulador será de 4.73. La FDT de la red de adelanto-retraso de fase quedará como:

$$G_C = 4.73 \frac{s+0.44}{s+0.041} \frac{s+1.1}{s+11}$$

La simulación muestra que el compensador diseñado cumple con las especificaciones marcadas. Quizá, para aumentar unos grados más el margen de fase, se podría recurrir hacer α un poco más pequeño. En todo caso, las simulaciones ante la entrada en rampa y al escalón son ampliamente satisfactorias.



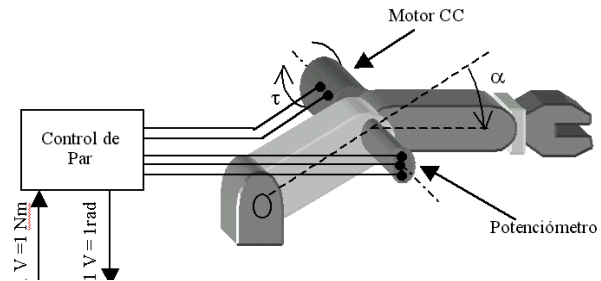
RESOLUCIÓN EN MATLAB

```
%Definición de la planta, Gp(s)
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(100,poly([0 -2 -10]))
%Determinación de la frecuencia de cruce y el margen de fase con la
ganancia estática necesaria
bode(series(gp,5));
disp('Notar que wg=6.34 rad/s y MF=-14.9°');
pause
%Respuesta del efecto del compensador RRF
disp('FDT de la RRF_RAF:');
gc1=tf([1 1/2.29],[1 1/24.19]);
gc2=tf(4.73*[1 1/0.9],[1 1/0.09]);
gc=series(gc1,gc2)
disp('Bode de la cadena abierta con la planta y con el conjunto
compensador-planta');
disp('Rojo sin compensar, azul con compensador');
gc_gp=series(gc,gp);
bode(gp,'r',gc_gp,'b')
pause
disp('Respuesta temporal sin y con compensador ante una entrada en rampa
unitaria');
t=0:.1:10;
u=t;
lsim(feedback(gp,1),'r',feedback(gc_gp,1),'b',u,t)
pause
disp('Respuesta temporal sin y con compensador ante una entrada en escalón
unitaria');
step(feedback(gp,1),'r',feedback(gc_gp,1),'b')
pause
```

3.4 Problemas

3.4.1 Problema 16.1

Se desea realizar un control de posición de la segunda articulación del manipulador de la figura. Para ello se dispone de un motor de corriente continua y de un potenciómetro acoplado a la articulación que permite medir su posición angular.

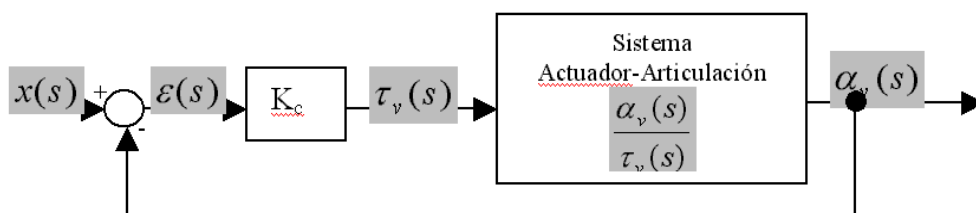


Experimentalmente se ha realizado un modelo simplificado de la articulación que incluye el efecto inercial del brazo, cuantificado por su momento de inercia M , y el efecto del rozamiento dinámico mediante un par que se opone al movimiento proporcional a la velocidad angular y de constante B . La ecuación que relaciona el par ejercido por el motor $\tau(t)$, con la posición angular de la articulación $\alpha(t)$, es la siguiente:

$$\tau(t) = M \cdot \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad M = 0,25 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad B = 0,5 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$$

El motor posee un control propio de par, de tal forma que si se le suministra una señal de 1 Voltio, ejercerá un par de 1 Nm, $K_{\text{par}} = 1 \text{ Nm/V}$. La medida de la posición angular es lineal y regida por una constante $K_{\text{pot}} = 1 \text{ voltio/rad}$, de forma que un movimiento angular de 1 radian, provocará una variación de tensión de un voltio.

Inicialmente se desarrolla sobre el conjunto un control proporcional al error respecto de una señal de referencia que indica la posición angular que se desea alcanzar. Si $\tau_v(t)$ es la señal en voltios que entra al control de par y $\alpha_v(t)$ es la señal en voltios de la posición angular, el sistema de control quedaría como sigue:



1. Obtener la función de transferencia $G_p(s) = \frac{\alpha_v(s)}{\tau_v(s)}$ del conjunto actuador-articulación.
2. Calcular el valor que debe tomar la acción proporcional K_c para asegurar que para una entrada en rampa de pendiente 1 V/s, equivalente a 1 rad/s, el error de posición es de 0,05 voltios, que equivale a 0,05 radianes. Es decir $e_v = 0,05 \text{ s}$.

3. Dibujar el diagrama de Bode asintótico (fase y amplitud) del sistema regulado.
4. Calcular el margen de fase γ y la frecuencia de cruce de ganancia ω_g .
5. Se desea mejorar el comportamiento dinámico del sistema mediante una red de adelanto de fase que sustituya al regulador proporcional. Dicha red deberá conseguir las mismas especificaciones estáticas logradas con la regulación proporcional. Además se quiere pasar del γ calculado a un nuevo margen de fase de 50° , lo que consigue un sistema más rápido (t_s pasa de $2,5$ segundos a $0,5$ segundos) y menos oscilatorio (M_p pasa del 60% al 22%). Calcular la función de transferencia de dicha red de adelanto tomando un margen de seguridad de 5° .

Resolución

1.

$$\tau(t) = M \cdot \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}; \tau(s) = Ms^2\alpha(s) + Bs\alpha(s);$$

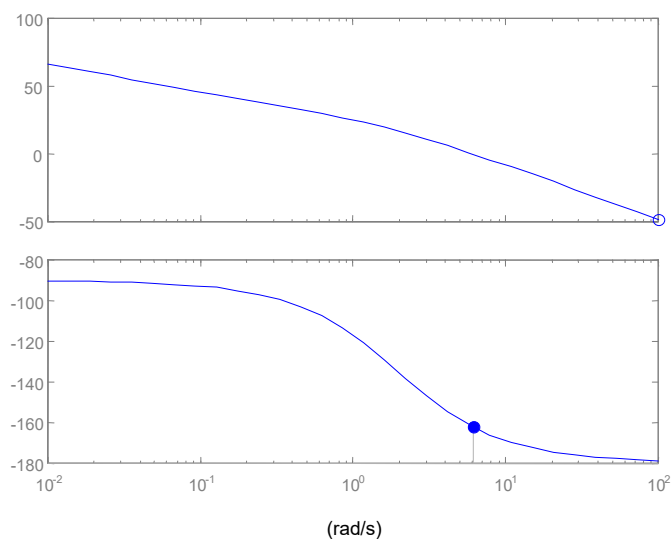
$$\frac{\alpha(s)}{\tau(s)} = G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s\left(s + \frac{B}{M}\right)} = \frac{4}{s(s+2)}$$

2.

$$e_v = 0.05s \Rightarrow k_v = \frac{1}{e_v} = 20s^{-1}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4K_c}{s(s+2)} = 2K_c \Rightarrow K_c = 10$$

3.



4. Para el cálculo de ω_g se empleará la ecuación del módulo igualando a 1:

$$|G'(j\omega_g)|=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{40^2}}{|-\omega_g^2 + 2\omega_g j|} = 1 \Rightarrow \omega_g = 6.16 \frac{rad}{s}$$

para determinar γ se empleará la ecuación del argumento:

$$\gamma = \angle G'(\omega_g) + 180^\circ = -\arctg \frac{2\omega_g}{-\omega_g^2} \Rightarrow \gamma = 17^\circ$$

5. La forma general de una red de adelanto de fase es: $G_c(s) = k_c \cdot \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$ en donde $k_c \cdot \alpha$ coincide con el valor del regulador proporcional anteriormente calculado. Se determina en primer lugar la cantidad de fase que hay que aportar para lograr el margen de fase deseado, utilizando un margen de seguridad de 5° , y para el sistema con la acción proporcional anterior (pues es la misma).

$$\Phi_m = \gamma_{deseado} - \gamma_{actual} + \gamma_{seguridad} = 50^\circ - 17^\circ + 5^\circ = 38^\circ$$

Se calcula el valor de α que genera este aporte de fase:

$$\text{sen} \Phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \alpha = 0.24$$

Determinado ahora cual será la nueva frecuencia de cruce de ganancia, debido al aporte de la red cuando la fase de la misma es máxima:

$$10 \log \alpha = -6.2 \text{ dB} = 20 \log |G'(j\omega'_g)| \Rightarrow \sqrt{\alpha} = |G'(j\omega'_g)| = 0.49$$

$$\frac{\sqrt{40^2}}{|-\omega'^2_g + 2\omega'_g j|} = 0.49 \Rightarrow \omega'_g = 9 \frac{rad}{s}$$

Centrando el aporte máximo de la red en ese punto:

$$\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \omega'_g \Rightarrow T = 0.226$$

Sustituyendo valores en la expresión de la red:

$$G_c(s) = k_c \cdot \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = 10 \frac{0.226s + 1}{0.054s + 1} = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4}$$

3.4.2 Problema 16.2

Las fuentes conmutadas son equipos de la Electrónica de Potencia que se alimentan de corriente continua a un determinado nivel de tensión y entregan a la carga también corriente continua con otro nivel de tensión (cc/cc). El esquema que se presenta en la figura muestra un reductor, por que la tensión de entrada, V1, es mayor que la salida. En este caso la entrada es a 20V y la salida es a 5V. El control sobre este sistema depende del ciclo de trabajo del interruptor, al que se le denomina *d* (*duty cycle*). Este valor es la relación entre el tiempo de encendido del interruptor y el periodo de trabajo de la fuente conmutada. La regulación del sistema se hace a través de la modulación por ancho del pulso (*Pulse Width Modulation*, PWM), que ataca al interruptor, garantizando que la tensión en la carga sea siempre constante. Aunque el sistema es altamente no lineal, se ha linealizado y se ha determinado su FDT a partir de la potencia nominal que se entrega a la carga, en este caso 50W:

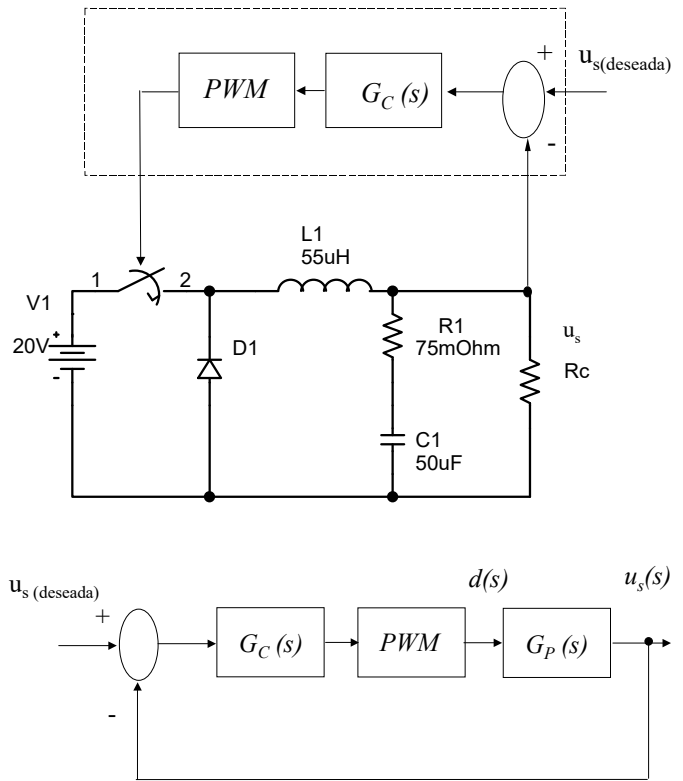


Figura a) Esquema de un reductor , b) diagrama a bloques del control sobre la fuente

Obtener la ganancia estática del regulador, $G_c(0)$, de manera que se cumpla la especificación del $5V \pm 1\%$ de variación en la tensión de salida.

$$G_p(s) = \frac{u_s(s)}{d(s)} = V1 \frac{(1 + R1 \cdot C1 \cdot s)}{\left(1 + \left(R1 \cdot C1 + \frac{L1}{R_c}\right)s + \left(1 + \frac{R1}{R_c}\right)L1 \cdot C1 \cdot s^2\right)}$$

1. Obtener la ganancia estática del regulador, $G_c(0)$, de manera que se cumpla la especificación del $5V \pm 1\%$ de variación en la tensión de salida.
2. Representar el diagrama de Bode de la cadena abierta con la ganancia estática del compensador, $G_c(0)G_p(j\omega)$.
3. Calcular la frecuencia de cruce y el margen de fase.
4. La frecuencia de trabajo del PWM y por tanto de la fuente conmutada es de 120kHz, lo que supone una discretización de la salida del compensador. Para hacer cumplir el teorema del muestreo se desea conseguir que la nueva frecuencia de cruce del sistema sea una 1/20 parte de la frecuencia de trabajo de la fuente conmutada. Determinar cuánto vale la fase y la ganancia de $G_c(0)G_p(j\omega'_g)$ a esta nueva frecuencia.

5. Si se le exige un margen de fase de alrededor de 60° a 6kHz, ubicar el compensador que haga cumplir esta especificación.

Resolución

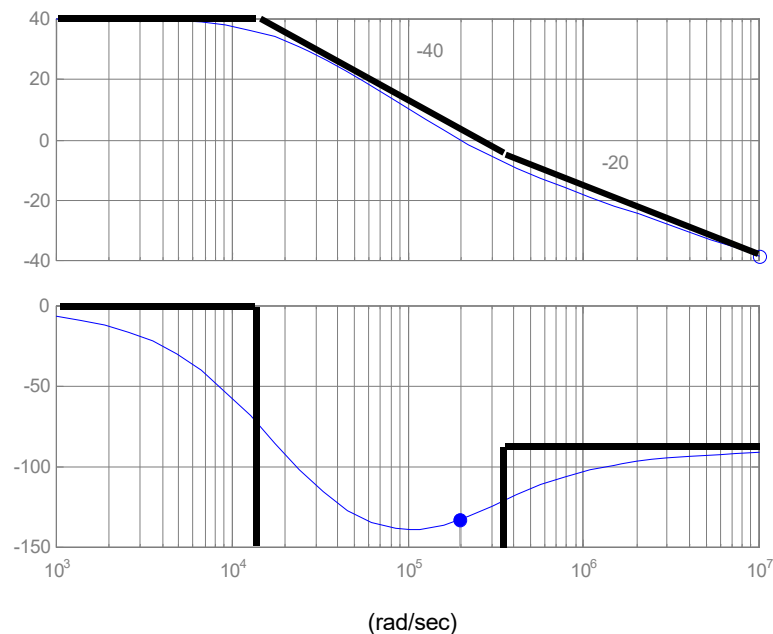
1. Una variación del 1% en la salida del valor nominal de la fuente corresponde con el error al escalón definido en la asignatura. De esta especificación se obtendrá la ganancia estática del regulador:

$$e_p = \frac{1}{1+k_p} = 0.01 \rightarrow k_p \cong 100 \quad k_p = \lim_{s \rightarrow 0} (G_C(s) \cdot G_P(s)) = G_C(0) \cdot V1 \rightarrow G_C(0) \cong 5$$

Obsérvese de la FDT de la fuente que la ganancia estática depende sólo del nivel de tensión de la entrada, V1.

2. La FDT de la fuente está constituida por un cero a la frecuencia de 266.666 [rad/s] y por un polo de segundo orden, cuya frecuencia natural, $\omega_{n,p}$, es de 17.789 [rad/s] y un coeficiente de amortiguamiento, ζ_p , de 1. De otro lado, la ganancia estática, teniendo en cuenta también la del compensador, será de 100.

De estos valores se observa que el polo domina sobre el cero, la asíntota a baja frecuencia empieza a 40dB hasta la frecuencia natural del polo, 17.789[rad/s], luego bajará con una pendiente de -40 [dB/década] hasta alcanzar los 266.666 [rad/s], pasando a una pendiente de -20 [dB/década].



3. Para determinar la frecuencia de cruce de ganancia habrá de igualar el módulo de $G_C(0)G_P(j\omega_g)$ a la unidad:

$$1 = \frac{5 \cdot 20 \sqrt{1 + (3.75 \cdot 10^{-6} \omega_g)^2}}{\sqrt{(1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega_g^2)^2 + (113.8 \cdot 10^{-6} \omega_g)^2}} \rightarrow 9.985 \cdot 10^{-18} \omega_g^4 - 1.4695 \cdot 10^{-7} \omega_g^2 - 9999 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de cuarto grado mediante un cambio de variables, la frecuencia de cruce es de 199.620[rad/s]. En cuanto al margen de fase corresponderá a:

$$\gamma = 180 + \arg(G_C(0)G_P(j\omega_g)) = 180 + \arctg(3.75 \cdot 10^{-6} \omega_g) - \arctg\left(\frac{113.8 \cdot 10^{-6} \omega_g}{1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega_g^2}\right) = 47.12^\circ$$

4. La nueva frecuencia de cruce será:

$$\omega'_g = \frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^3}{20} = 37699[\text{rad} / \text{s}]$$

El módulo y argumento a esta nueva frecuencia valdrá:

$$|G_C(0)G_P(j\omega'_g)| = \frac{5 \cdot 20 \sqrt{1 + (3.75 \cdot 10^{-6} \omega'_g)^2}}{\sqrt{(1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega'^2_g)^2 + (113.8 \cdot 10^{-6} \omega'_g)^2}} = 18.26$$

$$\arg(G_C(0)G_P(j\omega'_g)) = \arctg(3.75 \cdot 10^{-6} \omega'_g) - \arctg\left(\frac{113.8 \cdot 10^{-6} \omega'_g}{1 - 3.16 \cdot 10^{-9} \omega'^2_g}\right) = -121.13^\circ$$

5. Al desear un margen de fase de alrededor de 60° a la frecuencia de 37699 [rad/s], se calculará cuánto vale a partir de los datos extraídos del apartado anterior:

$$\gamma' = 180 + \arg(G_C(0)G_P(j\omega'_g)) = 180 - 121.13 = 58.87^\circ$$

De este resultado se concluye que una primera solución se encuentra en la red de retraso de fase, pues ya se tiene conseguido, de forma aproximada, el margen de fase deseado, sólo falta cumplir que la nueva frecuencia de cruce seleccionada se convierta en ella, para eso necesitará una atenuación de 1/18.26. Seleccionando el parámetro β de la red de retraso de fase con 18.26 y ubicando el cero a una década anterior a la nueva frecuencia de cruce, el compensador quedará definido:

$$G_{C,1}(s) = \frac{G_C(0)}{\beta} \frac{s + \frac{\omega'_g}{10}}{s + \frac{\omega'_g}{10} \cdot \frac{1}{\beta}} = 0.274 \frac{s + 3770}{s + 206.5}$$

También es posible emplear una red de adelanto retraso de fase que garantice el margen de fase especificado. La forma de actuar es emplear la subred de adelanto para aumentar el margen de fase y la subred de retraso para provocar la atenuación necesaria, con el objetivo de convertir a los 37699 [rad/s] en la nueva frecuencia de cruce. Por consiguiente, se empezará con el diseño de la compensación de adelanto. Obsérvese que

sólo es necesario aportar un poco más de 1° , ya que el argumento que se tiene es de -121.13° . Sin embargo, al considerar el margen de seguridad se puede cubrir las descompensaciones que van a efectuarse al introducirse el compensador; concluyendo:

$$\phi_{\max} = \gamma_{\text{deseado}} - \gamma' + (\text{margen de seguridad}) = 10^\circ \rightarrow \alpha = 0.7$$

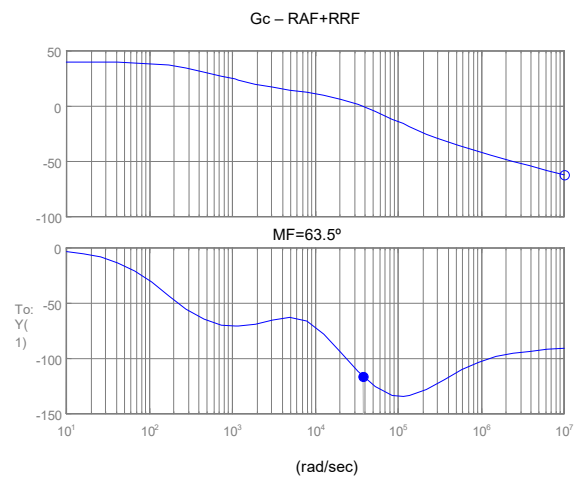
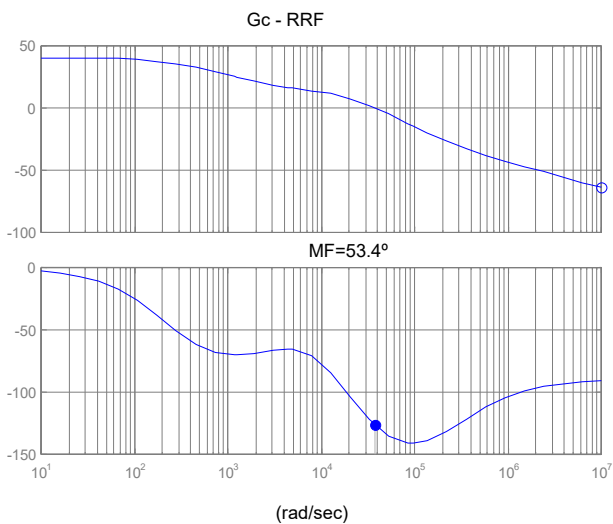
Mientras que la atenuación a realizar será:

$$\beta' = |G_C(0)G_P(j\omega'_g)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 21.82$$

Ubicando el cero de la subred de retraso a una década anterior a la nueva frecuencia de cruce, el compensador quedará definido:

$$G_{C,2}(s) = \frac{G_C(0)}{\beta'\alpha} \frac{s + \omega'_g \sqrt{\alpha}}{s + \frac{\omega'_g}{\sqrt{\alpha}}} \frac{s + \frac{\omega'_g}{10}}{s + \frac{\omega'_g}{10} \cdot \frac{1}{\beta'}} = 0.3274 \frac{s + 31541}{s + 45059} \frac{s + 3770}{s + 172.77}$$

Los resultados de la simulación muestran un mayor margen de fase en el compensador de adelanto-retraso de fase, pero quizás, la propia implementación recomendaría emplear la red de retraso de fase.



4 Sistemas discretos de control

El control de sistemas mediante computadoras digitales es una realidad cotidiana. Desde los robots industriales a los microondas, del control de combustible sobre los automóviles al bisturí del cirujano, son algunos de los millones de aplicaciones que se podrían mencionar. Y aunque hoy en día esta realidad envuelva a las sociedades contemporáneas, ésta ha sido sólo fruto de los últimos 50 años. El uso de computadoras para el control se inició dentro del mundo militar para la dirección de los misiles. Sin embargo, el auge de esta tecnología no nació en el ámbito de la Guerra Fría sino en las aplicaciones industriales. El primer éxito se dio en el control de la polimerización de una refinería en Texas, allá por los finales de los 50. Fueron las grandes compañías y las universidades norteamericanas, soviéticas y británicas las que dieron la base teórica y su puesta en práctica. En general, las computadoras, al principio, se empleaban para la generación de las señales de consigna y no para el control de cada magnitud física, esto es, se encargaban de la optimización de las plantas, dejando a los reguladores analógicos las tareas de control de bajo nivel. La tendencia cambió en la década de los 70 con la aparición de los microprocesadores, convirtiendo a estas máquinas más rápidas, más fiables y más baratas. Según Åström se pasó de 5000 computadoras al control de procesos en 1970 a 50.000 en sólo cinco años. Aún así los primeros microprocesadores eran demasiado lentos para implementar en tiempo real la mayoría de los sistemas de control digital. A mediados de los ochenta la tecnología de los circuitos integrados había avanzado hasta el nivel de permitir la integración no sólo del procesador sino también de los elementos de adquisición de las señales analógicas y de los convertidores digitales analógicos, reduciendo el espacio, el tiempo de computación, y el precio. Hoy en día esta arquitectura resulta ser tan fiable y económica que se emplea para la realización física de cualquier controlador de bajo nivel. Por lo tanto, se exige conocer y comprender bien las arquitecturas de control basadas en computadoras digitales.

4.1 El computador como elemento de control

El conjunto de conocimientos necesarios para un correcto diseño de un sistema de control con computador, se podría desglosar en dos campos complementarios: uno referente a la implantación física de los bloques asociados al control digital y otro relacionado con las técnicas de análisis y de diseño de las respuestas dinámicas de la fusión entre el computador digital y la planta a controlar. La primera área están en consonancia con la Instrumentación Electrónica, la Electrónica Digital, la Informática Industrial y la Electrónica de Potencia, junto con las tecnologías propias de las plantas a automatizar (química, mecánica, etc.). En cambio, a la parte de la Ciencia que se encarga de la segunda área se le conoce como Teoría de los Sistemas Discretos.

Los reguladores convencionales vistos hasta ahora (P, PD, PI y PID) son a veces insuficientes para cumplir las especificaciones de control. Además, no hay que olvidar que los compensadores continuos trabajan con la señal de error y éstos emprenden operaciones de cálculo sobre ésta. La posibilidad de abordar estas dificultades requiere de estructuras más complejas de cálculo, con este propósito se puede pensar en un dispositivo, en el computador digital, capaz de ejecutar algoritmos que procese las señales de los transductores y ponga en su salida una o varias señales de compensación. Pero además el computador hace tareas complementarias, como puede ser la visualización mediante gráficos del comportamiento del proceso, o que el usuario puede interactuar con la planta a través de los cuadros de diálogos, o la generación de series temporales sobre la planta a controlar. Éstos son algunos de los ejemplos que se pueden enunciar. El computador no sólo ha revolucionado la teoría clásica de control sino que ha permitido tener un acceso más fácil de la información de los sistemas. Así se puede configurar arquitecturas de automatización de forma jerárquica con otros equipos o configurarse como un objeto distribuido en la red que da servicios, comportándose de forma autónoma. En definitiva, el computador no sólo sirve para sustituir los reguladores continuos sino que hacen otras muchas cosas más. No obstante, este módulo temático se va a centrar en exclusiva sobre la sustitución de los reguladores analógicos de los lazos de control por estructuras basadas en computadoras digitales.

4.1.1 El bucle elemental de control con computador

Es importante destacar la diferencia clave entre la tecnología de los computadores y la naturaleza de las plantas a controlar. Mientras que en general las entradas y las salidas de los procesos a manipular se caracterizan por señales que toman valores en todo instante de tiempo; las computadoras aceptan y generan salidas en determinados tiempos. A estos últimos sistemas se les denomina discretos. A ello habrá de añadir el carácter digital de las computadoras, lo que implica la transformación de las señales continuas en el tiempo en valores numéricos finitos y binarios, y su viceversa. Los sistemas de control basados en computadoras tienen dos tipos de bloques: los discretos y los continuos. En los primeros las señales son secuencias de números finitos mientras lo segundos son funciones continuas del tiempo. Para formar un conjunto coherente con estos dos tipos de bloques es necesario incluir dos elementos más, capaces de transformar las secuencias en señales continuas y viceversa. A estos elementos se les denominan muestreadores y bloqueadores. En la figura 17.1 se muestra el esquema elemental de control con un computador digital.

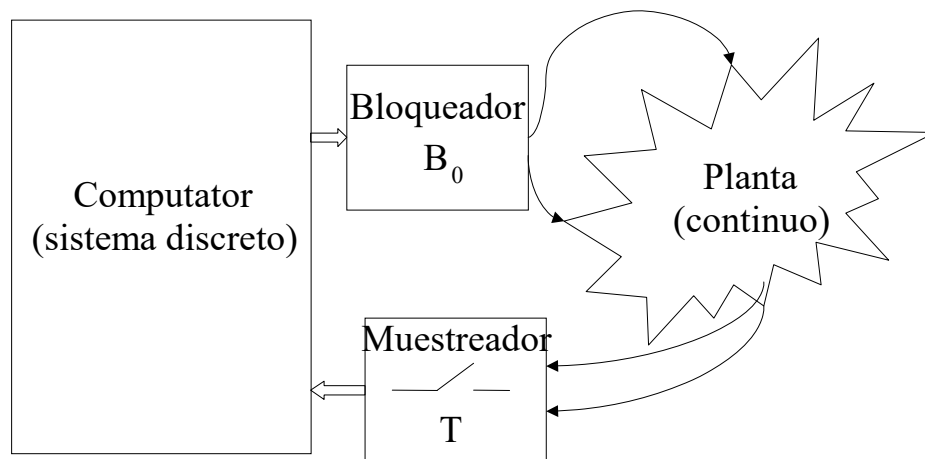


Figura 17. 1. Esquema básico de control mediante computadoras

A los muestreadores se les caracteriza por un bloque con un interruptor y una T mayúscula, haciendo esta letra referencia al periodo de muestreo. En cambio, el proceso de reconstrucción, realizado por los bloqueadores, se presenta como un bloque con una B mayúscula y un subíndice que indica el orden del bloqueador. En la figura 17.1, por ejemplo, aparece un bloqueador de orden cero.

La introducción de estos elementos exige el estudio de tres problemas relativos a la transformación que las señales sufren al pasar por ellos: muestreo, reconstrucción y cuantificación. El muestreo es el proceso de toma de muestras de una señal analógica para su tratamiento con el computador. El problema inverso al muestreo es la reconstrucción, el cual tiene como objetivo dada una secuencia de valores, construir una señal continua en el tiempo. El tercer problema es la cuantificación que tiene su origen en que el computador maneja números con un número limitado de cifras. Cuando una operación tiene que ser operada por estos elementos tendrán que ser truncada o redondeada. Estos aspectos serán abordados en el siguiente capítulo.

4.1.2 Ventajas e inconvenientes del control digital

Son muchas las ventajas que pueden destacarse respecto al control digital en comparación con los reguladores analógicos, las más importantes podrían enumerarse cómo:

1. El computador es capaz de realizar funciones de control sin apenas limitaciones.
2. Se puede modificar la estrategia de control con sólo con modificar el programa.

3. En cuanto a la precisión de cálculo, las operaciones de un computador digital son más exactas que las efectuadas con dispositivos analógicos.
4. Los sistemas digitales son más inmunes al ruido electromagnético que los equipos analógicos.
5. Podrán realizarse otras funciones complementarias como almacenamiento de datos, inspección de valores, análisis estadísticos,...

En el apartado de inconvenientes cabe citar el precio. Éste puede ser solventado utilizando el computador para automatizar varios lazos de control. Incluso el uso de las microcomputadoras ha reducido considerablemente el precio, tanto como para ser factible el emplearlo para un solo bucle de control. Otro problema son los derivados del mantenimiento; una avería no representa sólo una operación de quitar y de poner una nueva tarjeta, sino que hay que programarla. Además, el fallo de una computadora puede suponer la paralización de varios bucles de control y la necesidad de detener el proceso de fabricación. Un aumento de la fiabilidad del sistema exigirá el uso de estructuras recurrentes de control.

4.1.3 Funciones de las computadoras en el control de procesos

Los computadores de procesos en la industria no sólo hacen tareas de control sino también otras operaciones. Éstas pueden ser agrupadas en tres niveles: tratamiento de los datos, supervisión y control.

En el tratamiento de los datos (*data logging*) es la operación cuyo objetivo es recabar la máxima información del proceso; caracterizándose por la recogida de la información, mediciones periódicas de los parámetros, etc., con el fin de realizar ciertos cálculos o análisis estadísticos. El grupo de operaciones designadas de supervisión ejecuta dos tipos de actividades: alarmas y asistencias. En el tratamiento de los datos, los computadores son meramente dispositivos de recogida y presentación de los datos, la información es unidireccional. En operaciones de supervisión el computador interpreta la información que le llega del proceso y sobre la base de los resultados emite mensajes. El tercer grado es el control mismo. Éste tiene como objetivo hacer que el proceso se comporte de una determinada manera. La transmisión de la información es bidireccional.

4.1.4 Esquemas de control con computador

Centrados sobre el control, se puede hablar de cuatro esquemas de control: el secuencial o lógico, el control digital directo, el control analógico-digital y el control descentralizado. El orden de exposición implica una complejidad creciente.

4.1.4.1 Control secuencial

Esta caracterizado por que las señales intercambiadas entre el proceso y el computador son discretas. Estas señales hacen que los accionadores y los captadores sean de tecnología digital. El computador sustituye al circuito combinacional o secuencial mediante un programa. A este tipo de control se le conoce también como control todo-nada. Son muchos los ejemplos de este tipo de funcionamiento: control sobre válvulas todo-nada, manejo de semáforos, control de ascensores, etc. Las técnicas de análisis y diseño se basan en la teoría de las máquinas de estados finitos.

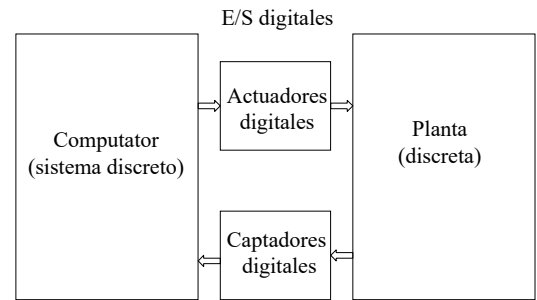


Figura 17. 2. Control secuencial

4.1.4.2 Control digital directo

La planta a controlar está constituida por variables, tanto de entrada como de salida, que son funciones continuas del tiempo. Estas magnitudes físicas requieren que sean convertidas en señales eléctricas. De un lado, las señales emitidas por la planta y que son adquiridas por el computador (por ejemplo, la presión, la temperatura, la tensión mecánica, etc.) son transformadas en señales eléctricas mediante los transductores. En general, los transductores suelen dar unas señales eléctricas analógicas proporcionales a las variable físicas. Por este motivo se necesita el uso de convertidores analógicos-digitales, CAD. Muchas veces se emplea un multiplexor analógico, cuyo objetivo es alternar la toma de muestra al CAD entre las distintas señales de los transductores, permitiendo que un sólo convertidor muestre las distintas señales. Su inclusión está por razones económicas. La Instrumentación Electrónica es la disciplina encargada para la adecuación de las magnitudes físicas en secuencias discretas dentro del computador.

El computador recibirá las señales de los transductores y de las consignas, generando los algoritmos de control y obteniendo unas secuencias discretas de salidas. Sin embargo, la planta será regulada por accionadores continuos en el tiempo (por ejemplo, calefactores, válvulas, bombas, mezcladoras, pistones, etc.). Y éstos a su vez tienen controladores de potencia (*drivers*) que, en general, siguen consignas analógicas. Llevando a la conclusión de incluir unos convertidores digitales-analógicos, CDA, entre cada secuencia de salida del computador y su correspondiente etapa de potencia. El bajo precio de los

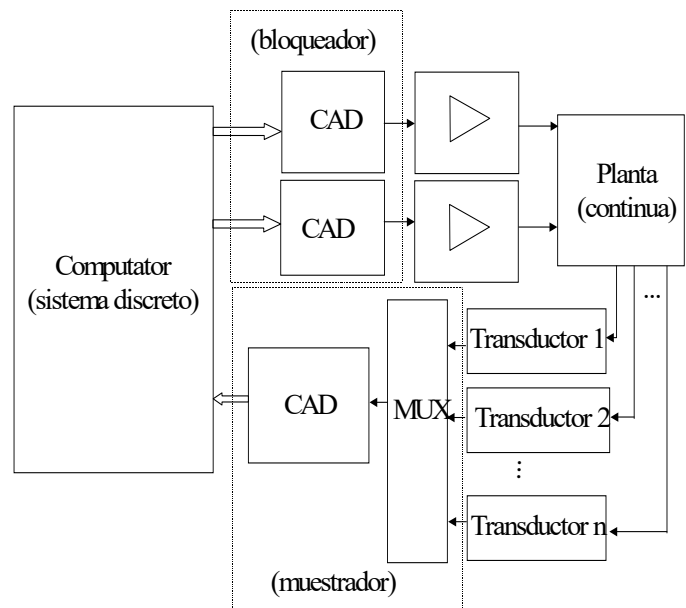


Figura 17. 3. Esquema de control digital directo

CDA hace innecesario la compartición de este recurso. La Electrónica de Potencia es empleada para el diseño de los *drivers*. El esquema del control digital directo queda indicado en la figura 17.3.

Carece de inconvenientes, quizás la remota avería del computador, ya sea bien por hardware o por software, asegurará la parada del proceso. Una solución consistiría en la duplicación de la estructura, no obstante, se estaría entrando en la teoría de la tolerancia a fallos, algo que se sale de las intenciones de este capítulo.

4.1.4.3 Control analógico-digital

Es un sistema híbrido ya que tiene parte analógica y parte digital de control. El computador genera la señal de referencia de un sistema de control convencional y realiza tareas, por lo tanto, de optimización del proceso. Ello hace que cuando el dispositivo de cálculo falle, los bucles de control sigan funcionando con los reguladores analógicos. No obstante, la lectura de las variables de proceso hace que el computador haga también algoritmos de compensación. Esta redundancia hace que

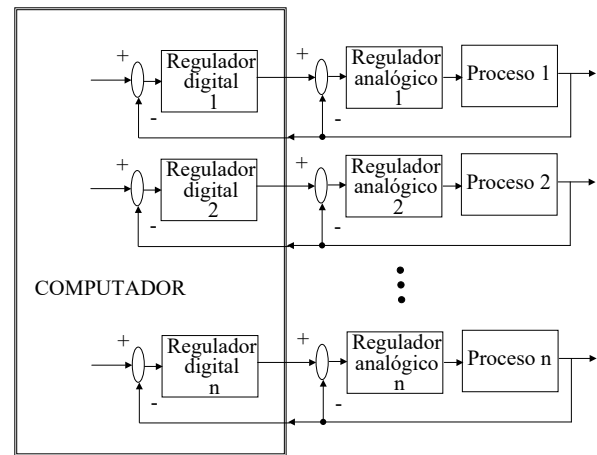


Figura 17. 4. Control analógico-digital

el sistema sea más tolerante a fallos.

4.1.4.4 Control descentralizado

Consiste en cambiar los reguladores analógicos por control digital. Esto es posible con los microcomputadores. Se llega así a una estructura de control en la que determinadas funciones se han descentralizado del computador central realizándose en unos terminales inteligentes. La idea del control descentralizado puede ser generalizada con descentralización a varios niveles llegándose a una

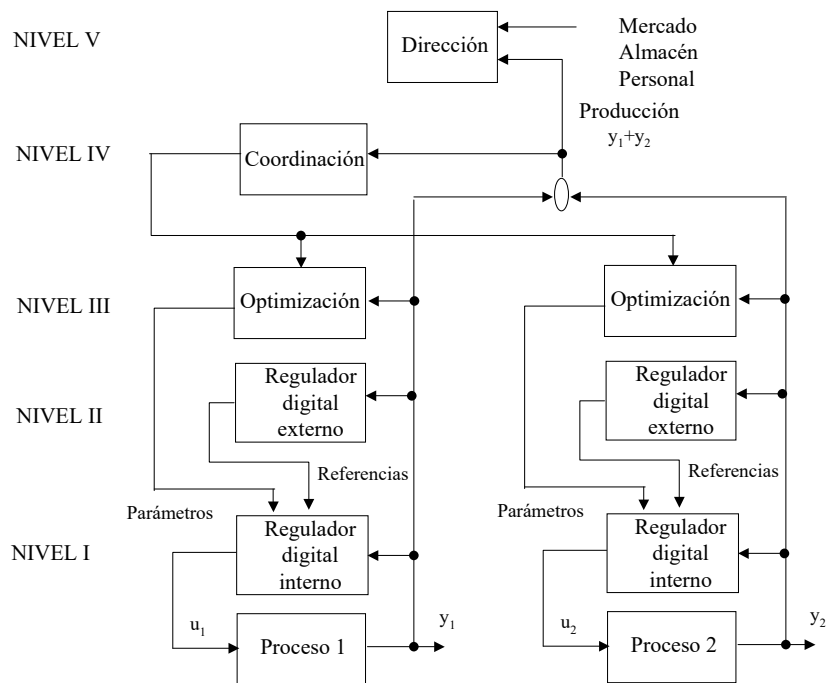


Figura 17. 5. Arquitectura piramidal de la automatización de la producción

estructura piramidal.

4.2 Secuencias y sistemas discretos

Las señales en tiempo discreto surgen si el sistema involucra la operación de muestreo de señales en tiempo continuo. La señal muestreada es x_0, x_T, x_{2T}, \dots , donde T es el periodo de muestreo. Dicha secuencia de valores que aparecen de la operación de muestreo normalmente se escribe como x_k . Si el sistema incluye un proceso iterativo realizado por una computadora digital, la señal involucrada es una secuencia de números x_0, x_1, x_2, \dots de cuantificación finita. La secuencia de números normalmente se escribe como $\{x_k\}$ en donde k , entero asociado al elemento, es el índice del mismo. Este índice podrá ser positivo o negativo.

$$\{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \Leftrightarrow \{x_k\} \quad (17.1)$$

El índice 0 es el origen de la secuencia. Aunque $\{x_k\}$ es una secuencia de números, ésta se puede considerar como una señal muestreada de $x(t)$ cuando el periodo de muestreo T es de 1 segundo.

Ejemplo 17.1

Obtener la secuencia discreta de un armónico de 100 Hz, de amplitud 0.5 V que ha sido muestreado con una frecuencia de 1kHz, sabiendo que el desfase en la adquisición fue de 30° de adelanto y el tiempo total de muestreo ha sido de 20 ms. No considere los efectos de cuantificación de la señal.

Una senoide de tiempo continuo viene dada por la fórmula matemática siguiente:

$$u_e(t) = U_{\max} \text{sen}(2\pi ft + \varphi) \quad (17.2)$$

Si se obtiene una señal de tiempo discreto tomando regularmente muestras $\{x_k\}$ a la frecuencia de muestreo $f_s=1/T$, se obtendrá:

$$u_k = U_{\max} \text{sen}(2\pi f(kT) + \varphi) = U_{\max} \text{sen}\left(2\pi \frac{f}{f_s} k + \varphi\right) \quad (17.3)$$

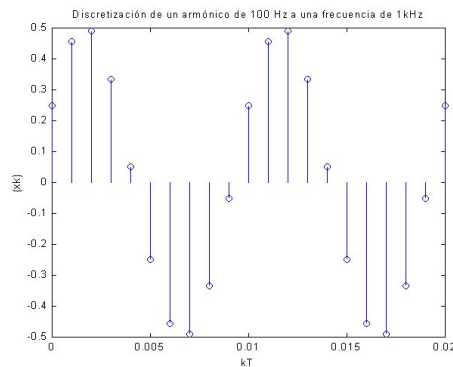
Para los valores indicados del ejercicio, la secuencia muestreada tendrá como resultado:

$$\{u_k\} = \{.25 \ .45 \ .48 \ .33 \ .05 \ -.25 \ -.45 \ -.48 \ -.33 \ -.05 \ .25 \ .45 \ .48 \ .33 \ .05 \ -.25 \ -.45 \ -.48 \ -.33 \ -.05 \}$$

A continuación se presenta la resolución mediante MATLAB.

Resolución del ejercicio en MATLAB

```
>> k = 0:20; T = 1/1000;
>> uk = 0.5 * sin ( (2*pi*100*( k*T)) + pi/6 );
>> stem ( kT, uk );
```



Habiendo definido el concepto de secuencia, al que se ha asociado con el resultado del muestreo, el término de sistema discreto puede ser entendido. Un sistema discreto es un algoritmo que permite transformar una secuencia en otra.

$$\{y_k\} = f\{x_k\} \quad (17.4)$$

Como ejemplo de sistema discreto se podría considerar cualquier programa de computador que transforme una tabla de valores en otra, por ejemplo, la obtención de cuadrados, la suma de los k primeros números, la media de una serie de muestras, etc. Los sistemas discretos pueden clasificarse en estáticos o dinámicos. Un sistema discreto es estático cuando el elemento de la secuencia de salida de un cierto índice depende únicamente del elemento de la secuencia de entrada del mismo índice. Por ejemplo, el sistema que genera una secuencia cuyos elementos son los cuadrados de los correspondientes elementos de una secuencia de entrada. En caso contrario, el sistema se denomina dinámico, esto es, la secuencia de salida de un cierto índice depende de las secuencias de entrada y de salida de órdenes distintos al suyo. En la figura 17.6 el sistema discreto es dinámico, ya que ante una entrada en escalón unitario la secuencia de salida no sólo depende del índice de la secuencia de entrada sino también de los estados anteriores.

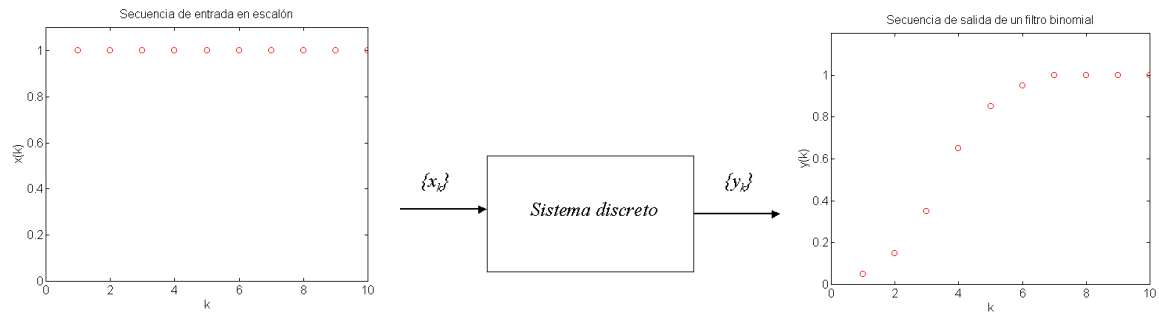


Figura 17. 6 Sistema discreto dinámico

Un sistema discreto es causal si el valor de un elemento de la secuencia de salida depende únicamente de la secuencia de entrada y de salida de menor o igual índice.

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots) \quad (17. 5)$$

Los sistemas discretos que no verifiquen esta propiedad se denominan no causales. Si la función que relaciona cada elemento de la secuencia de salida es lineal, el sistema se denomina asimismo lineal. Centrados en los sistemas dinámicos causales, un sistema será lineal, si la función expresada en (17. 5) es lineal, es decir, de la forma:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (17. 6)$$

Cuando a_i y b_i son constantes se dice que el sistema lineal es invariante en el tiempo. A éstos se les conoce por el acrónimo de LTI (*Linear Time Invariant*). Un sistema lineal invariante verifica el principio de linealidad, es decir, que, en idénticas condiciones iniciales, a entradas suma de entradas o producto por una constante, le corresponden salidas sumas o productos de la misma constante. La figura 17.7 ilustra este principio.

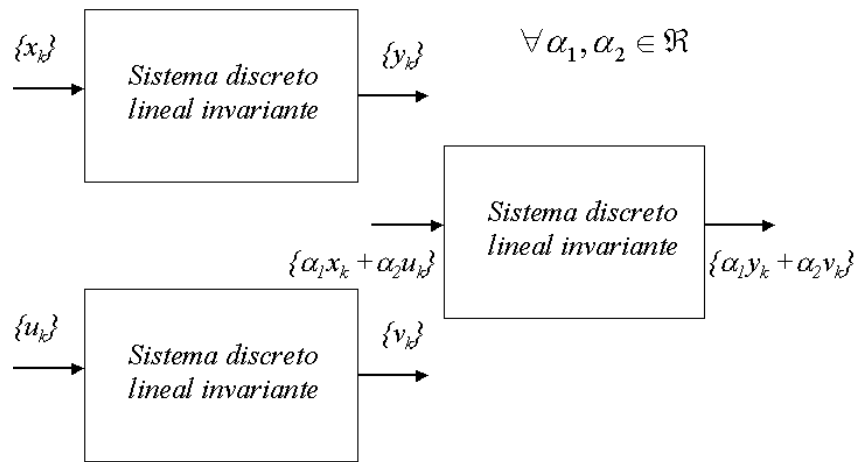


Figura 17. 7 Linealidad de los sistemas discretos dinámicos lineales e invariantes

En el presente tema y siguientes sólo van a ser considerados los sistemas discretos que sean dinámicos lineales e invariantes por lo que normalmente se omitirán los adjetivos para su definición. Las ecuaciones usadas para definir a estos sistemas se les denominan “ecuaciones en diferencias” y juegan un papel similar al de las ecuaciones diferenciales lineales en los sistemas continuos.

4.2.1 Secuencia de ponderación

Se denomina secuencia de ponderación a la que se obtiene en la salida del sistema cuando se aplica a la entrada una secuencia tipo impulso.

$$\{g_k\} = \{\dots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \dots\} \tag{17. 7}$$

Si el sistema es causal g_k es igual a cero para $k < 0$.

Para obtener la secuencia de salida sobre un sistema lineal ante una secuencia de entrada dada habrá de aplicar el operador convolución discreta; este operador se define como:

$$\{y_k\} = \{g_k\} * \{x_k\} = \{x_k\} * \{g_k\} \tag{17. 8}$$

donde $\{g_k\}$ representa la secuencia de ponderación. En ellas cada elemento de la secuencia de salida es calculada por la expresión:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{k-n} x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{k-n} g_n \quad (17.9)$$

Ejemplo 17.2

Dada la ecuación en diferencia:

$$y_k = \frac{3}{4}y_{k-1} - \frac{1}{8}y_{k-2} + x_k - \frac{1}{2}x_{k-1} \quad (17.10)$$

obtener la secuencia de ponderación y determinar la salida ante una entrada en escalón.

Para obtener la secuencia de ponderación habrá de aplicarle una entrada impulsional, de forma que la entrada será del tipo $\{x_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$. La evolución de la salida puede ser realizada a través de una tabla, en las que se van obteniendo los resultados temporales al aplicar la ecuación en diferencias:

k	x_k	x_{k-1}	y_{k-1}	y_{k-2}	y_k
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0.25
2	0	0	0.25	1	0.0625
3	0	0	0.0625	0.25	0.0156
4	0	0	0.0156	0.0625	0.0039
5	0	0	0.0039	0.0156	0.0010
6	0	0	0.0010	0.0039	0.0002
7	0	0	0.0002	0.0010	0.0001
8	0	0	0.0001	0.0002	0.0000

Luego la secuencia de ponderación del sistema LTI es:

$$\{g_k\} = \{1 \quad 0.25 \quad 0.0625 \quad 0.0156 \quad 0.0039 \quad 0.0010 \quad 0.0002 \quad 0.0001\}$$

Para calcular la respuesta en escalón se aplicará el operador convolución discreta, ec.(17.9), donde la señal de entrada será $\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$:

$$y_0 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1 + 0.25 = 1.25$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^7 g_{k-n} x_n = 1 + 0.25 + 0.0625 = 1.3125$$

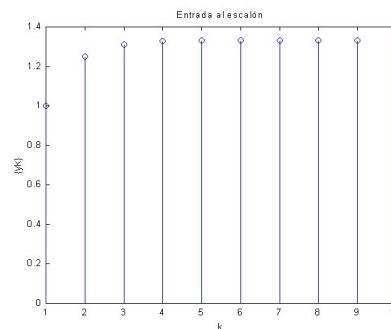
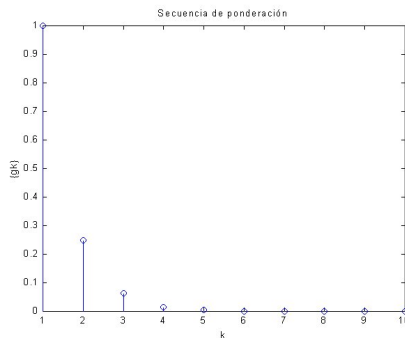
...

También se podría haber calculado a través de la ecuación en diferencias, de manera similar a lo planteado con la entrada impulsional:

k	x_k	x_{k-1}	y_{k-1}	y_{k-2}	y_k
0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1.25
2	1	1	1.25	1	1.3125

Resolución en MATLAB

```
>> x = zeros (10,1); x(1) = 0;
>> y = filter( [1;-0.5],[1;-0.75;0.125],x);
>> stem (1:10, y);
>> x = ones(10,1);
>> y = filter( [1;-0.5],[1;-0.75;0.125],x);
>> stem (1:10, y);
```



4.2.2 Estabilidad de un sistema discreto

Se dice que un sistema discreto es estable si, ante cualquier secuencia de entrada acotada la secuencia de salida es también acotada.

Para sistemas lineales, la condición de suficiencia de estabilidad debe cumplir que la secuencia de ponderación sea absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty \tag{17.11}$$

4.3 Respuesta en frecuencia de un sistema discreto

Tal como se estudió en el capítulo sobre la respuesta en frecuencia de los sistemas continuos, al excitarles con unas señales sinusoidales, este experimento permitía

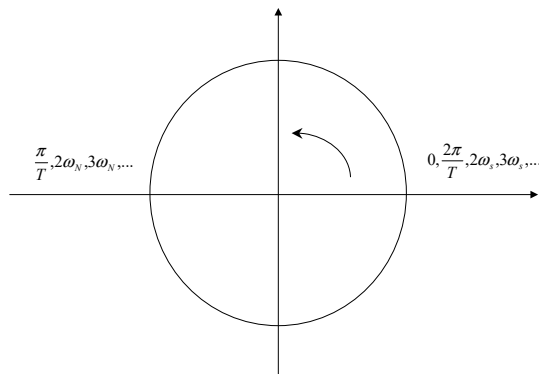
desarrollar el análisis en el dominio de la frecuencia para dichos sistemas. De manera paralela, en los sistemas discretos se va a ver cómo se puede obtener una representación frecuencial de los mismos que sirvan para caracterizarlos.

Antes de entrar en la obtención de la respuesta en frecuencias se requiere analizar las propiedades de las señales exponenciales discretas. Tras su estudio se estará en condiciones de comprender mejor los mecanismos inherentes a la respuesta en frecuencia de los sistemas discretos.

4.3.1 Propiedades de periodicidad de las señales exponenciales discretas

Así como existen muchas similitudes entre las señales continuas y las discretas, también hay importantes diferencias. Una de éstas concierne a la señal exponencial discreta $e^{j\omega kT}$. En señales continuas, $e^{j\omega t}$, mientras más elevada sea la magnitud de ω , mayor será la velocidad de oscilación de la señal, en cambio, las señales discretas $e^{j\omega kT}$ van a ser periódicas cada $2\pi/T$, esto es, son cíclicas con la frecuencia angular de muestreo. La representación de $e^{j\omega kT}$ en el dominio complejo es un círculo de radio unidad y con el centro en el origen de coordenadas. Al aumentar la frecuencia desde cero hasta infinito recorre la circunferencia en sentido antihorario. Cuando la frecuencia sea mitad de la de muestreo, π/T , la exponencial discreta valdrá -1 , al seguir aumentado la frecuencia hasta alcanzar la frecuencia de muestreo, $2\pi/T$, el resultado será idéntico a cuando la frecuencia era nula. En conclusión, esta señal es periódica con la frecuencia de muestreo:

(17. 12)



$$e^{j(\omega T + 2\pi)k} = e^{j2\pi k} e^{j\omega T k} = e^{j\omega k T}$$

De la ecuación (17. 12) se observa que la exponencial de frecuencia $\omega T + 2\pi$ es la misma que aquella con ωT . Por tanto, al considerar las exponenciales complejas, se tomará en cuenta un intervalo de

frecuencia $2\pi/T$. Aunque de acuerdo con la anterior expresión, cualquier rango de longitud $2\pi/T$ sería adecuado, en la mayoría de las ocasiones se suele usar el intervalo

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Debido a la periodicidad que implica la ecuación (17. 12), la señal no tiene un incremento continuo en la velocidad de oscilación. Por el contrario, conforme se incrementa ω a partir de 0, se obtiene que la señal oscila más rápido hasta que se alcanza π/T (frecuencia de Nyquist). Conforme aumente la frecuencia a partir de este punto disminuirá la velocidad de oscilación hasta llegar a $2\pi/T$, la cual produce la misma secuencia constante que $\omega = 0$.

4.3.2 Respuesta de un sistema discreto ante una exponencial periódica

Para facilitar el estudio, de momento, se considerará que el periodo de muestreo es un segundo, $T = 1s$. Sólo se considerará el carácter de la secuencia, independizándolo de T . Sea un sistema de secuencia de ponderación $\{g_k\}$ y considérese que su entrada es excitada por una secuencia exponencial periódica:

$$\{x_k\} = \{e^{jk\omega}\} \quad (17. 13)$$

Cuyos elementos son función de un parámetro de ω . La secuencia de salida según la aplicación de la convolución discreta, ec.(17. 9), será:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \quad (17. 14)$$

El índice de la secuencia es k , con lo que el sumatorio es un factor independiente de este índice, por tanto:

$$\{y_k\} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \right) \{e^{j\omega k}\} \quad (17. 15)$$

Si se define la función

$$G(\omega) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \right) \quad (17. 16)$$

La expresión queda:

$$\{y_k\} = G(\omega) \{e^{j\omega k}\} \quad (17. 17)$$

Esta expresión permite ver como, cuando el sistema es excitado ante la secuencia de una exponencial discreta de frecuencia angular ω , ec.(17. 13), los elementos de la secuencia de salida son calculados multiplicando el valor de la entrada por el operador $G(\omega)$.

Este operador $G(\omega)$, definido por (17. 16), se denomina respuesta en frecuencia del sistema discreto considerado. Es una función del parámetro real ω y periódica respecto a él, como puede apreciarse observando (17. 16). Su periodo es 2π . La respuesta en frecuencia es así mismo una función compleja, la cual requiere cualquier representación gráfica de la misma en dos curvas, por ejemplo, haciendo uso del diagrama de Bode.

Ejemplo 17.3

Determinar la respuesta frecuencia de un sistema discreto cuya secuencia de ponderación es $\{1/4, 1/2, 1/4\}$.

Al aplicar (17. 16) sobre la secuencia de ponderación dada:

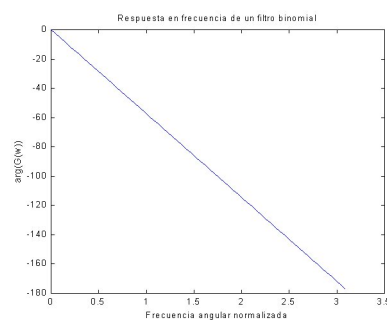
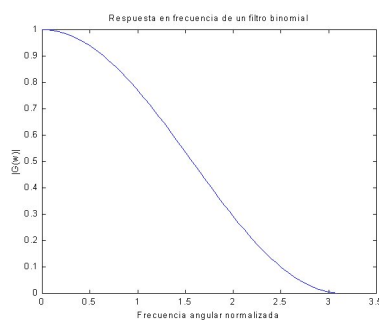
$$G(\omega) = \sum_0^2 g_k e^{-j\omega k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

dando valores de 0 hasta π se conseguirá la respuesta. Aunque $G(\omega)$ es una función continua, con el propósito de representarla en el diagrama de Bode se hacen, por ejemplo, 64 intervalos entre 0 y π , confeccionándose la tabla siguiente:

ω	$G(\omega)$	$ G(\omega) $	$\arg(G(\omega))$
0	1	1	0
$\pi/64$	0.99-j0.049	0.999	-2.81°
$2\pi/64$	0.99-j0.097	0.997	-5.62°
...
$63\pi/64$	-0.0006-j0.00003	0.0006	-178°

Resolución en MATLAB

```
>> [G,W] = freqz ([1/4,1/2,1/4], 1,64);
>> plot(W,abs(G));
>> plot(W,angle(G).*(180/pi));
```



Imponiendo las condiciones adecuadas a la función periódica de $G(\omega)$, continuidad a trazos con derivadas de variación acotada en los intervalos de continuidad, entonces la expresión (17. 16) es el desarrollo en serie de Fourier de $G(\omega)$, siendo los elementos de la secuencia de ponderación, $\{g_k\}$, los coeficientes de dicho desarrollo. Este hecho permite utilizar la expresión del cálculo de los coeficientes del desarrollo para obtener el valor de la secuencia de ponderación a partir de la respuesta frecuencial. Se tiene así que:

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (17.18)$$

Esta expresión (17.18) permite realizar la operación inversa a la efectuada en (17.16). Antes, de la secuencia de ponderación, $\{g_k\}$, se obtenía la respuesta en frecuencia $G(\omega)$, mientras que ahora, con (17.18), de esta función $G(\omega)$ se obtiene la secuencia de ponderación.

Ejemplo 17.4

En la figura 17.4 se representa la respuesta en frecuencia de un sistema discreto normalizado, cuya frecuencia de corte es ω_c con valor de 2 [rad/s]. Determinar la secuencia de ponderación del filtro.

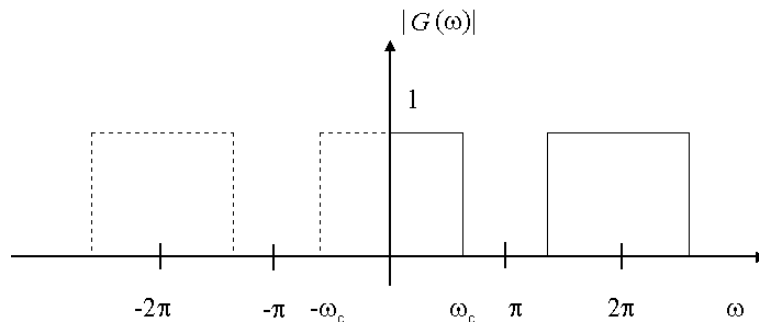


Figura 17.8 Respuesta frecuencia de un filtro paso bajo discreto

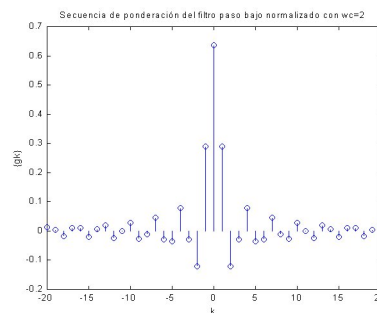
Usando la expresión (17.18) y extendiéndola entre $\pm \omega_c$ quedará con:

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 e^{j\omega k} d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c k)}{\pi k}$$

cuyos valores serán: $\{g_k\} = \{\dots -0.03 \quad -0.12 \quad 0.29 \quad 0.63 \quad 0.29 \quad -0.12 \quad -0.03 \dots\}$.
 Nótese que el sistema discreto es no causal.

Resolución en MATLAB

```
>> k=-20:20; wc = 2;
>> gk=sin(wc*k)./(pi*k); g(21) = wc/pi;
>> stem(k,gk);
```



4.4 Transformada de Fourier de una secuencia

La forma de asociar la secuencia de ponderación $\{g_k\}$ a la función $G(\omega)$, puede ser extendida a cualquier secuencia que cumpla determinadas propiedades. Así se construye lo que se denomina la transformada discreta de Fourier de una secuencia, a ésta se la conoce por las siglas DFT (*Discrete Fourier Transform*). De este modo, dada una secuencia, $\{x_k\}$, se define su transformada de Fourier como la función:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k} \quad (17.19)$$

Ésta es igualmente periódica, de ciclo 2π , y en las condiciones antes indicadas es un desarrollo en serie de Fourier, lo que permite definir la transformada inversa:

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (17.20)$$

La transformada de Fourier de una secuencia es una función compleja, siendo usualmente representada gráficamente por sus curvas de módulo y de argumento. Al igual que ya se vio en los sistemas continuos, la utilidad más importante que se va a hacer de la transformación de Fourier es la que se deriva de la relación existente entre las

transformadas de Fourier de las secuencias de entrada y de salida de un sistema LTI y su respuesta en frecuencia, de manera que:

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \tag{17. 21}$$

Esta relación permite tratar a los sistemas discretos de una manera similar con lo que se procedía con los continuos; dando un procedimiento para determinar la secuencia de salida a partir de la respuesta en frecuencia, ver figura 17.5. Conocida la respuesta en frecuencia del sistema y la transformada discreta de la secuencia de entrada, se determinará la transformada de la secuencia de salida según (17. 21), y posteriormente se aplicará la transformada inversa, obteniendo la secuencia de la salida.

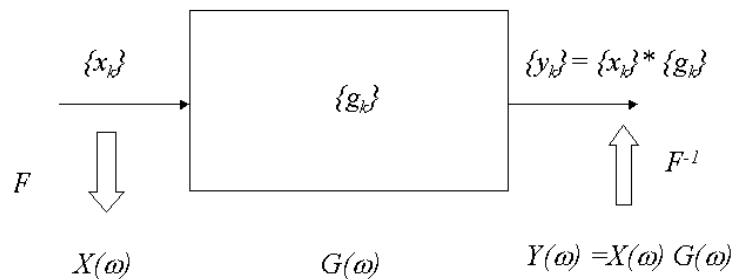


Figura 17. 9 Relación fundamental de los sistemas discretos

Ejemplo 17.5

Dado la respuesta en frecuencia de un sistema discreto de orden 2 (ver ejemplo 17.3):

$$G(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

y siendo $\{x_k\} = \{1,1,0,0,0,\dots\}$ la excitación al sistema, calcular la secuencia de salida.

En primer lugar se procederá a calcular la DFT de la secuencia de entrada:

$$X(\omega) = \sum_0^1 x_k e^{-j\omega k} = 1 + e^{-j\omega}$$

Aplicando la relación fundamental visto en (17. 21) se tendrá que:

$$Y(\omega) = (1 + e^{-j\omega}) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega} \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{3}{4} e^{-j2\omega} + \frac{1}{4} e^{-j3\omega}$$

Por tanto, la secuencia de salida valdrá:

$$\{y_k\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

Resolución en MATLAB

```
>> Xw = fft( [1;1], 64);
>> Gw = fft( [1;2;1]/4, 64);
>> Yw = Xw .* Gw;
>> yk = ifft( Yw )
    0.25
    0.75
    0.75
    0.25
    0
    ...
```

4.5 Transformada z

La variable compleja z es una transformación no lineal de la variable ω de Fourier. El objetivo de este cambio está que con el nuevo dominio en z , la función de transferencia del sistema discreto obtenida sea racional. Así, dada una secuencia real $\{x_k\}$ se define su transformada en z como una función compleja:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad z \in C \quad (17.22)$$

Es fácil ver que la definición de transformada de Fourier a z se consigue haciendo:

$$z = e^{j\omega} \quad (17.23)$$

En este dominio se observará las ventajas de, por una parte, no ser funciones periódicas, y por otra, de ser racionales. Sea por ejemplo, la transformada en z de una secuencia impulso:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, \dots\} \Rightarrow \Delta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1 \quad (17.24)$$

O la transformada de la secuencia en escalón resultará:

$$\{X_k\} = \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (17.25)$$

De estos ejemplos se muestra cómo con esta transformación se ha anulado el carácter periódico inherentes de los sistemas discretos de las transformadas de Laplace y de Fourier.

4.5.1 Propiedades de las transformadas z

Un buen uso de las transformadas en z requiere del conocimiento de sus propiedades. En primer lugar, esta transformada tiene propiedades de linealidad:

$$\alpha Z(x_k) + \beta Z(y_k) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} + \beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) z^{-k} = Z(\alpha x_k + \beta y_k) \quad (12.26)$$

Otra de sus peculiaridades es el teorema del desplazamiento, en referencia a la transformada de una secuencia desplazada un n número de muestras:

$$Z(x_{k-n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-n} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-n} z^{-(k-n)} z^{-n} = z^{-n} X(z) \quad (12.27)$$

esta propiedad será muy utilizada para obtener las FDT de los sistemas discretos LTI.

Las FDT de los algoritmos de computación suelen tener polos y ceros de primer orden en sus transformadas en Z (más abajo, se demostrará que las ecuaciones en diferencias pueden ser escritas en el dominio en z de forma de un polinomio en el numerador y otro en el denominador). Pues bien, esos polos y ceros de primer orden corresponden en el dominio temporal a secuencias de salidas que son series exponenciales. Las transformadas de estas secuencias son del tipo:

$$Z(a^k x_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k x_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (a^{-1} z)^{-k} = X(a^{-1} z) \quad (12.28)$$

Sea el ejemplo de determinar la transformada de una secuencia exponencial del tipo $\{x_k\} = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$, entonces:

$$\{x_k\} = \{1, a, a^2, a^3, \dots\} \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k \quad (17.29)$$

que, por ser una serie geométrica, será convergente para $|az^{-1}| < 1$, es decir $|z| > |a|$, y su suma valdrá:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (12.30)$$

Nótese que en dominio z , la secuencia exponencial corresponde a un polo de primer orden.

Dos propiedades más que van a emplearse en este temario hacen referencia a los valores iniciales y finales de una secuencia, los cuales pueden ser determinados a partir de la definición de la secuencia en el dominio en z . Con este propósito se aplicarán los teoremas del valor inicial y del valor final. Dado la transformada en z de una secuencia causal, el teorema del valor inicial dice que la secuencia de índice cero es igual a su transformada cuando se hace tender z a infinito:

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = x_0 \quad (12.31)$$

Por el contrario, el teorema del valor final demuestra que para secuencias causales y con transformada $X(z)$ de forma que todos los polos se encuentren dentro del radio unidad, con la posible excepción de poseer un sólo polo sobre el círculo unidad, puede determinarse el valor final con:

$$x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] \quad (12.32)$$

4.5.2 Función de transferencia en z

Dado un sistema discreto definido por su secuencia de ponderación $\{g_k\}$, cabe considerar, si existe, su transformación z , $G(z)$. Teniendo en cuenta la relación de la convolución entre entrada, ponderación y salida y la relación entre la convolución de dos secuencias y sus transformadas, un sistema como el de la figura 17.10, verifica que:

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

$$(17.33)$$

El operador $G(z)$, transformada z de la secuencia de ponderación del sistema, se denomina función de transferencia en z del sistema considerado.

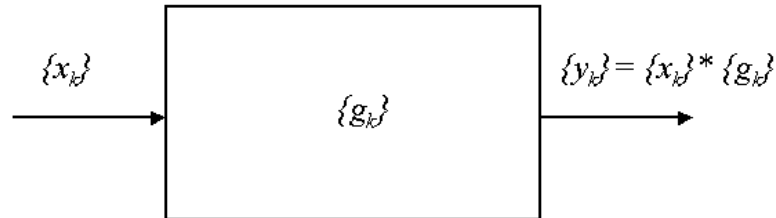


Figura 17.10 Condición de relación de transformadas

Esta función de transferencia del sistema puede ser calculada también a partir de la ecuación en diferencias que lo determina. Partiendo de la ecuación en diferencias que define el comportamiento de un sistema discreto dinámico lineal:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (17.34)$$

Y calculando ahora la transformada z de las dos partes de la igualdad y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento, se obtiene:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) \quad (17.35)$$

Entonces la relación entrada/salida del sistema será:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} X(z) \quad (17.36)$$

Y por tanto la función de transferencia del sistema será:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (17.37)$$

4.5.2.1 Transformada inversa

Ahora se plantea el problema inverso, obtener la secuencia $\{x_k\}$ a partir de su transformada en z , $X(z)$. Al menos hay tres formas de realizar la transformada inversa: el método de los residuos, la división larga y por la descomposición de fracciones simples. En general se empleará el primer método enunciado.

Método de los residuos

Para el caso de tener $X(z)$ en forma de función racional, se puede calcular de forma sencilla a partir del teorema de los residuos, estableciendo que:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \\ &= \sum [\text{residuos de } X(z) z^{k-1} \text{ para polos interiores de } C] \end{aligned} \quad (17.38)$$

siendo C un círculo con centro en el origen del plano z tal que todos los polos de $X(z) z^{k-1}$ están dentro del él. Cada valor de la secuencia es la suma de sus residuos:

$$x_k = K_1 + K_2 + \dots + K_n \quad (17.39)$$

donde K_1, K_2, \dots, K_n denotan los residuos de $X(z) z^{k-1}$ en los polos z_1, z_2, \dots, z_n respectivamente. Al evaluar los residuos, habrá de observar si las raíces del denominador de $X(z) z^{k-1}$ son polos simples o múltiples. En el caso de tener polos simples, el valor de cada residuo se calcula a razón de:

$$K_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i) X(z) z^{k-1}] \quad (17.40)$$

Si $X(z) z^{k-1}$ contiene un polo múltiple z_j de orden q , entonces el residuo de K_j está dado por:

$$K_j = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z - z_j)^q X(z) z^{k-1}] \quad (17.41)$$

Ejemplo 17.6

Dado el sistema discreto definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_k = y_{k-1} - 0.16y_{k-2} + u_{k-2}$$

1. Calcular su función de transferencia
2. Calcular el valor inicial y final de su respuesta ante un escalón:
 - a. Aplicando las propiedades de la transformada en z .
 - b. Calculando la antitransformada.

1. Aplicando el operador transformada z con sus propiedades de linealidad y desplazamiento, la FDT del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.16z^{-2}} = \frac{1}{z^2 - z + 0.16}$$

2.a. Conocida la transformada en z de una entrada en escalón y la FDT del sistema, sólo faltará emplear el teorema del valor inicial y del valor final para calcular los valores inicial y final de la secuencia de salida:

$$y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)G(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z-1)} \frac{1}{(z^2 - z + 0.16)} = 0$$

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})} \frac{1}{(z^2 - z + 0.16)} = 6.25$$

2.b. Mediante el cálculo de los residuos se obtendrá los valores de la secuencia inicial y final. Para el caso del valor inicial se observa que los residuos corresponden a polos simples y con valores iguales a 0.8, 0.2 y 1:

$$y_0 = \sum \text{residuos}(Y(z)z^{0-1}) = \sum \text{residuos}\left(\frac{1}{(z^2 - z + 0.16)(z-1)}\right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0.8} \frac{1}{(z-0.2)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow 0.2} \frac{1}{(z-0.8)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-0.8)(z-0.2)} = 0$$

mientras el valor final también tiene polos simples y corresponderá al cálculo de residuos de:

$$y_\infty = \sum \text{residuos}(Y(z)z^{k-1}) = \sum \text{residuos}\left(\frac{z^k}{(z^2 - z + 0.16)(z-1)}\right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0.8} \frac{z^k}{(z-0.2)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow 0.2} \frac{z^k}{(z-0.8)(z-1)} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k}{(z-0.8)(z-0.2)} = 6.25$$

RESOLUCIÓN EN MATLAB

```
%FDT del sistema discreto
g1=tf(1,[1 -1 .16],1)
%Respuesta ante una secuencia escalón
[y,t]=step(g1);
disp('Valor en el instante inicial')
y(1)
disp('Valor en el régimen permanente')
y(size(t,1))
```

Método de la división larga

En el caso de secuencias con términos únicamente de índice positivo, o únicamente negativo, se puede utilizar el cálculo de los coeficientes mediante el método de la división larga. Este método se basa en la expansión de $X(z)$ en una serie infinita de potencias de z^{-1} . Al ser $X(z)$ en forma de expresión racional, apareciendo un el polinomio en el numerador y otro en el denominador, sólo bastará con hacer la división algebraica entre numerador y denominador y aplicar, posteriormente, el teorema del desplazamiento.

Nótese la poca eficiencia de este método, ya que no da una expresión analítica que relacione la secuencia de salida para cualquier valor de k . Bajo este procedimiento hay que calcular todos los valores hasta alcanzar el instante de tiempo deseado. Imagínese, por ejemplo, el cálculo que habrá de hacer para determinar el valor de la secuencia en el régimen permanente y que éste no converja. Esta situación no se da en los otros dos métodos.

Ejemplo 17.7

Determinar la secuencia de salida de un sistema cuya FDT es $G(z) = \frac{1}{z-1}$ ante una excitación de entrada en escalón unitario (utilícese el método de la división larga).

La transformada de la secuencia de salida será:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)} \frac{1}{(z-1)} = \frac{z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Aplicando el método de la división larga

$$\begin{array}{r} z^{-1} \\ -z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \\ \hline +2z^{-2} - z^{-3} \\ -2z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-4} \\ \hline +3z^{-3} - 2z^{-4} \\ -3z^{-3} + 6z^{-4} - 3z^{-5} \\ \hline +4z^{-4} - 3z^{-5} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \\ \hline z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots \end{array} \right.$$

De este modo,

$$\{x_k\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Una posibilidad más de cálculo de la transformada inversa es por descomposición

RESOLUCIÓN MATLAB

```
%FDT del sistema discreto
g1=tf(1, [1 -1], 1)
%Respuesta ante una secuencia escalón
[y,t]=step(g1);
disp('Valores de la secuencia de salida')
y'
```

en fracciones simples. Este método es similar al presentado en las transformadas de Laplace continuas. Si $X(z)$ es racional, con todos sus polos simples y el grado del numerador es inferior al del denominador, entonces:

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad (17.42)$$

y la transformada inversa será la suma de las transformaciones inversas, que, en el caso de secuencias de índice positivo, será transformada en una suma de secuencias exponenciales y por tanto en este caso:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^n A_i a_i^k & \text{para } k \geq 0 \\ x_k &= 0 & \text{para } k < 0 \end{aligned} \quad (17.43)$$

Ejemplo 17.8

Un sistema discreto está definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_k = 3x_k - \frac{5}{6}x_{k-1} + \frac{7}{12}y_{k-1} - \frac{1}{12}y_{k-2}$$

calcular la FDT en transformadas en z y calcular la respuesta del sistema ante una entrada en escalón. Utilícese el método de fracciones simples.

Al aplicar las transformadas en z sobre la ecuación en diferencias quedará:

$$G(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}$$

Para calcular la secuencia de salida se aplicará (17. 33):

$$Y(z) = X(z)G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}$$

Es fácil de obtener los dos polos de $G(z)$, uno en $z = 1/3$ y otro en $z = 1/4$. La descomposición en fracciones simples de $Y(z)$ resultará a :

$$Y(z) = -\frac{1/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{13/3}{1 - z^{-1}}$$

La antitransformada será inmediata (ver (17. 42) y (17. 43)):

$$y_k = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{13}{3}$$

y los valores de la secuencia serán:

$$y_k = \{3 \quad 3.91 \quad 4.2 \quad 4.29 \quad 4.31 \quad 4.32 \quad 4.33\}$$

RESOLUCIÓN MATLAB

```
k=0:10;
yk=filter([3, -5/6], [1, -7/12, 1/12], ones(1, 11));
stem(k, yk);
title('Secuencia de salida de la antitransformada de X(z)G(z)');
xlabel('k');
ylabel('\{y_k\}');
```


5 Muestreo y reconstrucción

Un sistema se dice que es muestreado cuando alguna de las señales a él asociadas sufre un proceso de muestreo. Uno de los elementos que más frecuentemente exige un muestreo de señales en los sistemas de control convencionales es el captador. Por ejemplo, la medida de la temperatura en la célula Peltier es registrada a través del transductor LM35; este componente presenta variaciones cuasilineales de tensión frente a la temperatura. Ahora bien para que esta señal eléctrica sea interpretada por la computadora necesitará de un muestreador, convirtiendo la señal eléctrica analógica en una secuencia digital.

De la misma manera, cuando el computador tenga las señales de consignas y las muestras de los transductores y, tras ejecutar el algoritmo de control obtenga las secuencias de salida, la arquitectura del computador estará obligada a convertir los resultados en unas señales eléctricas continuas con el tiempo. Al proceso de conversión de las secuencias de salida del computador en señales continuas con el tiempo se le llama reconstrucción.

Además, en este capítulo se analizarán los problemas de modelado en las estructuras de control digital. Al ser la unión de los sistemas discretos con otros continuos, habrá de utilizar las técnicas de modelado de uno o de otro lado.

Los tres aspectos teóricos referidos al muestreo, reconstrucción y modelado de los sistemas de control digital son tratados en este capítulo. En primer lugar, se analizará las consecuencias de la frecuencia de muestreo sobre el conjunto de control. Seguidamente, la implementación física del proceso de reconstrucción será estudiada. Por último, una vez aclarados los dos aspectos teóricos de muestreo y reconstrucción, se podrá proceder al modelado de los sistemas de control digital.

5.1 Muestreo de señales

La idea de muestras referidas a un sistema basado en un computador digital, se concreta en la toma de valores de una señal continua en sucesivos instantes de tiempo. El muestreo de señales consiste en la construcción de secuencias a partir de señales continuas. Un problema que salta a la vista es la pérdida de información. En este punto se analizará fundamentalmente este problema, dándose las condiciones en las que el proceso de muestreo/reconstrucción, simplificando CAD / CDA, no signifique pérdida de la información.

El caso más interesante de muestreo es el periódico, que se caracteriza por que los instantes de toma de las muestras están regularmente espaciados en el tiempo y a éste se le llama periodo de muestreo, T , y a su inversa, frecuencia de muestreo, f_s . El elemento que realiza este proceso se denomina “muestreador”, siendo la forma usual de representarlo en los diagramas de bloques la indicada en la figura 18.1. La realización de este bloque no sólo supone la colocación de un convertidor analógico-digital, sino de todo un conjunto de subsistemas, tales como multiplexor analógico, filtros *antialiasing*, equipos de muestreo & retención, etc. La funcionalidad de cada uno de estos elementos queda fuera de este temario. Por eso, las problemáticas de adecuación del margen dinámico, la cuantificación y codificación de la señal analógica a digital son abstraídas, de forma que sólo se contempla el aspecto de conversión de la señal continua en el tiempo a secuencia discreta.

En este bloque ideal la salida está relacionada con la entrada por la expresión:

$$x_k = x(kT) \quad (18.1)$$

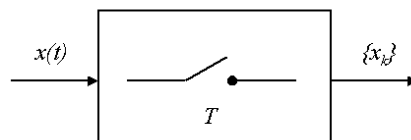


Figura 18.1 Símbolo del muestreador

Intuitivamente se puede apreciar que el periodo de muestreo va a jugar un papel fundamental en este proceso. La elección de la frecuencia de muestreo es un problema fundamental en el sistema de datos muestreados. Conviene muestrear los datos con la menor frecuencia posible, pero que sea lo suficientemente grande como para poder evitar la pérdida de información y que sea posible reconstruir la señal continua a través de las muestras. Justamente, el teorema del muestreo es el que puede ayudar a determinar la frecuencia óptima del convertidor analógico/digital, CAD.

Para poder establecer las conclusiones del teorema del muestreo, se va a recurrir al estudio frecuencial. Si una señal continua, $x(t)$, con transformada de Fourier continua, $X_c(\omega)$, entonces las relaciones señal/transformada serán del tipo:

$$X_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (18.2)$$

La relación existente entre la señal continua y la secuencia procedente del muestreo estará dada por (18. 1), por lo tanto, el ligazón entre la transformada de Fourier continua y la secuencia será del tipo:

$$x_k = x(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\omega)e^{j\omega kT} d\omega \quad (18.3)$$

Si la secuencia $\{x_k\}$ tiene asimismo transformada discreta de Fourier $X_d(\omega)$, entonces estará relacionada con su transformada por medio de:

$$X_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT}$$

$$x_k = \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_d(\omega)e^{j\omega kT} d\omega \quad (18.4)$$

El problema es estudiar si existe alguna relación entre estas dos transformadas, la de la señal continua $X_c(\omega)$ y la de la secuencia $X_d(\omega)$. Se puede demostrar que la relación existente es:

$$X_d(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right) \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (18.5)$$

Por tanto, si la señal continua tiene una transformada de Fourier, cuya curva de módulos, por ejemplo, se representa en la figura 18.2.

Entonces la curva de módulos de la transformada de la secuencia obtenida por muestreo, será periódica $2\pi/T$ tal como queda reflejado en la figura 18.3.

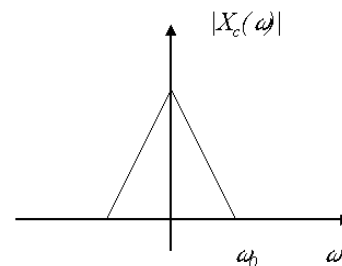


Figura 18. 2 Transformada de Fourier de una señal

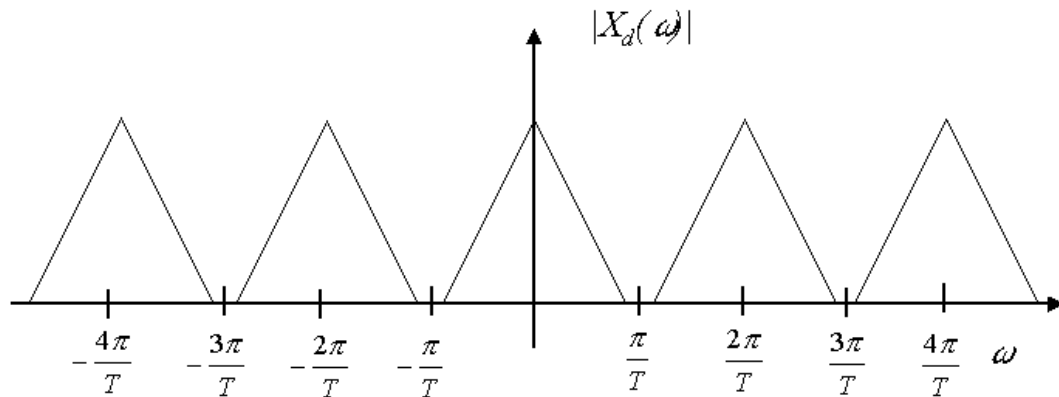


Figura 18. 3 Transformada discreta de Fourier de la señal continua con un muestreador de periodo T

Llegando así a las condiciones que se deben de cumplir en el proceso de muestreo para que se pueda realizar sin pérdida de información.

Teorema del muestreo

Suponiendo que la señal continua $x(t)$ con transformada de Fourier $X_c(\omega)$ sea nula a partir de una determinada frecuencia ω_0 .

$$X_c(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_0 \tag{18. 6}$$

Las señales que cumplen esta condición se denominan de banda limitada. Si una señal de este tipo se muestrea con un periodo que verifique:

$$\frac{\pi}{T} > \omega_0 \tag{18. 7}$$

Es decir:

$$T < \frac{\pi}{\omega_0} \quad (18.8)$$

La transformada de Fourier será, siguiendo el ejemplo, de la forma indicada en la figura 18.9. A π/T se le llama frecuencia angular de Nyquist.

Si por el contrario, el periodo de muestreo es superior a este valor, $T > \pi/\omega_0$, la transformada de la secuencia del ejemplo será de la forma indicada en la figura 18.4, donde se puede apreciar que $X_c(\omega)$ y $X_d(\omega)$ no coinciden, y por lo tanto el conocimiento de la transformada de la secuencia no permite obtener la transformada de la señal continua. A este fenómeno se llama solapamiento en frecuencias o *aliasing*.

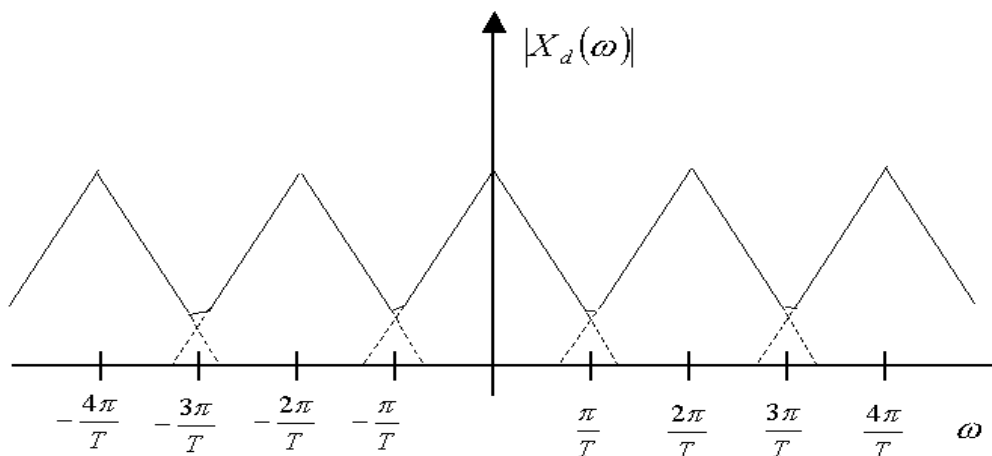


Figura 18.4 Efecto de solapamiento en frecuencia o *aliasing*

Por acabar con este resumen, hay que citar que además del problema del muestreo, habría de estudiar el efecto de la cuantificación de la señal. Este efecto analiza cómo trata el convertidor A/D en la transformación de una señal analógica de infinitos valores a otra de valores finitos. La señal analógica, aparte de ser continua en el tiempo, tiene una cuantificación de infinitos valores dentro de su rango dinámico, en cambio la conversión de analógica a digital se cuantifica con un número de bits determinado, fijado por la tarjeta de adquisición. Éstas suelen codificar a 4, 8, 10, 12 ó 16 bits. A medida de que se tiene una longitud de palabra mayor, menor será el nivel de incertidumbre en la conversión. De momento, estas causas no serán consideradas en el análisis y diseño de los sistemas discretos. No obstante, una puesta en práctica de la teoría necesita considerar los problemas de cuantificación de la señal analógica.

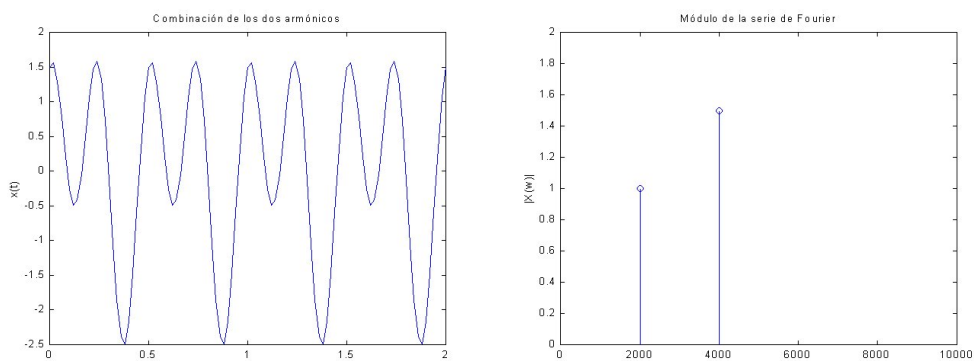
Ejemplo 18.1

Una señal continua está constituida por la siguiente expresión:

$$x(t) = \text{sen}(4000\pi t) + 1.5 \cos(8000\pi t)$$

Determinar la serie de Fourier de la señal. Esta señal posteriormente es muestreada a 10 kHz y a 5 kHz durante 2 ms con desfase nulo, obtener las DFT de las secuencias obtenidas.

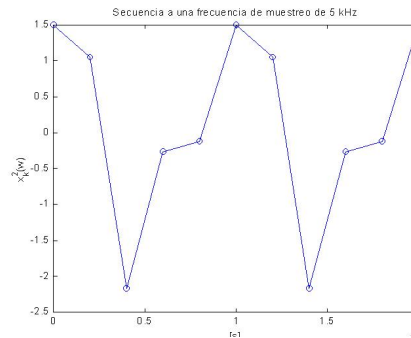
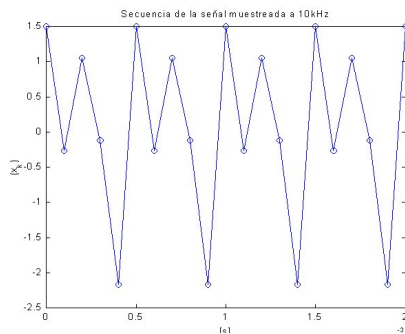
Al ser dos armónicos puros la serie de Fourier continua estará constituida por dos componentes, una a 2 kHz y la otra a 4 kHz, con amplitudes de 1 y 1.5 respectivamente. En la figura adjunta se representa la señal continua durante 2 ms y el módulo de su serie de Fourier.



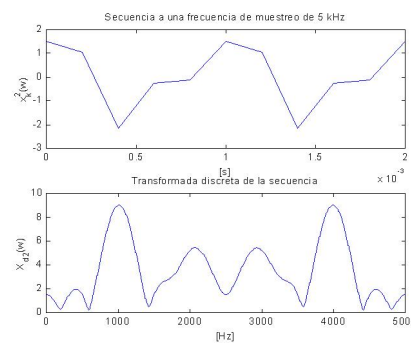
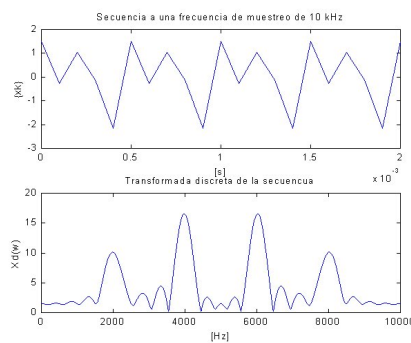
Las muestras obtenidas dependerán de la frecuencia de muestro y sus valores estarán relacionados con las siguientes expresiones:

$$x_k^1 = \text{sen}\left(\frac{4000}{10000} \pi k\right) + 1.5 \cos\left(\frac{8000}{10000} \pi k\right) \quad x_k^2 = \text{sen}\left(\frac{4000}{5000} \pi k\right) + 1.5 \cos\left(\frac{8000}{5000} \pi k\right) \quad k = 0,1,2$$

Los valores de las secuencias \$x_k^1\$ corresponden a una frecuencia de 10kHz y \$x_k^2\$ de 5kHz. Ambas son representadas en la figura de abajo.



Resalta a la vista la pérdida de información en el segundo muestreo, compare estas gráficas con la forma de la señal continua. Aplicando a estas secuencias la transformada de Fourier, el resultado es el esperado. En el primer caso no hay solapamiento en frecuencias, mientras en el segundo el espectro de la secuencia ha perdido la información de la señal continua.



Resolución en MATLAB

```
>>fs1=10000;fs2=5000;
>>i=0:1/fs:2e-3;
>>j=0:1/fs2:2e-3;
>>xk1=sin(2*pi*2000*i)+1.5*cos(2*pi*4000*i);
>>xk2=sin(2*pi*2000*j)+1.5*cos(2*pi*4000*j);
>>figure(1);subplot(2,1,1);
>>plot(0:1/fs:2e-3,xk);
>>subplot(2,1,2);
>>Xw1=fft(xk,2048);
>>plot(1/fs:fs/2048:fs,abs(Xw1));
>>figure(2);subplot(2,1,1);
>>plot(0:1/fs2:2e-3,xk(1:13));
>>subplot(2,1,2);
>>Xw2=fft(xk2,2048);
>>plot(1/fs2:fs2/2048:fs2,abs(Xw));
```

Para ejercitarse y experimentar con el teorema del muestreo se propone variar la frecuencia de muestreo de ficheros WAV. Estos registros se caracterizan por ser un formato digital de sonidos. El proyecto que se propone es abrir un fichero de audio y tomar sólo una muestra de cada n valores leídos. Posteriormente, el fichero será reproducido. Este experimento no sólo mostrará a través de su audición la pérdida de calidad sino también el espectro de la señal con el formato original y el submuestreado.

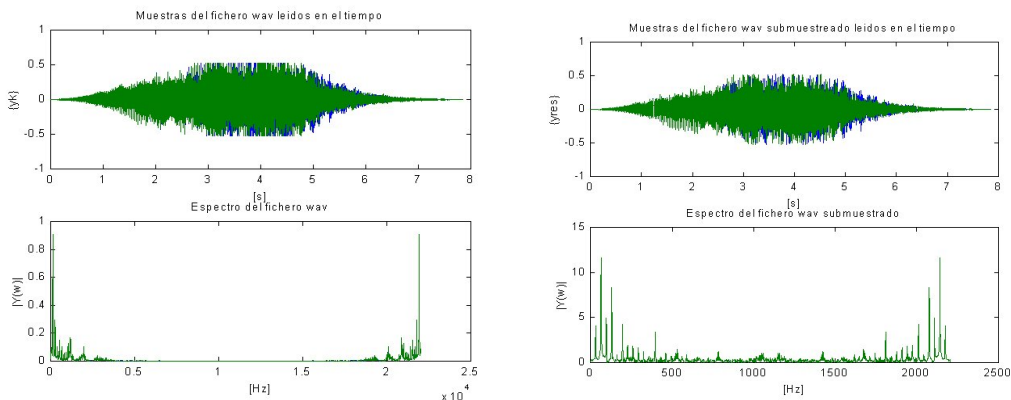
Proyecto 18.1

Hacer una aplicación que permita abrir ficheros tipo WAV y que elija una única muestra de cada n . Reproducir ambos sonidos, la del fichero original y la del fichero creado. Igualmente mostrar la evolución temporal de las secuencias y sus espectros.

Este proyecto se ha resuelto con MATLAB v5.3 y con el toolbox de *Signal Processing*. Se ha creado una función que tiene como argumentos el camino del fichero WAV y el valor de n . La función devuelve el *path* al fichero de salida creado, el cuál se ha generado del submuestreo del fichero fuente.

Resolución en MATLAB

```
>>FichEntr ='c:\tmp\The Microsoft Sound.wav';
>>n=10;
>>FichSal = proy_20_1(FichEntr,n);
```



5.1.1 Reglas prácticas

Existen algunas reglas experimentales que permiten determinar el periodo de muestreo proveniente de un lazo de control. Si el conjunto realimentado puede aproximarse a un sistema de primer orden, se puede considerar que el periodo de muestreo, T , debe ser una décima parte de la constante de tiempo equivalente, τ :

$$T = \frac{\tau}{10}$$

Esta expresión indica que al menos habrá más de 30 muestras antes de alcanzar la respuesta del régimen permanente ante una entrada en escalón.

En el caso de equivalentes de segundo orden subamortiguados, la relación no es tan inmediata. Desde la perspectiva de tener al menos 30 muestras antes de llegar al régimen permanente, supone que el periodo de muestreo estará en función de la constante de amortiguamiento, σ , del equivalente:

$$t_s \cong \frac{\pi}{\sigma} = 30T \rightarrow T \cong \frac{1}{10\sigma}$$

Sin embargo, para sistemas muy oscilatorios podría suponer la pérdida de la información, pues la frecuencia de amortiguamiento, ω_d , es relativamente alta respecto a la frecuencia de muestreo y no hace cumplir el teorema del muestreo. Definiendo 10 muestras por cada oscilación resultará:

$$\frac{2\pi}{\omega_d} \cong 10T \rightarrow T \cong \frac{2\pi}{10\omega_d}$$

Uniando los dos criterios para los sistemas subamortiguados, el periodo de muestreo será el menor de los dos:

$$T \cong \min\left(\frac{1}{10\sigma}, \frac{2\pi}{10\omega_d}\right) \quad (18.1)$$

En el caso de tener la información frecuencial de sistema, para equivalentes de primer orden, la frecuencia de muestreo, f_s , es una década posterior a la frecuencia del polo de primer orden, f_p :

$$f_s = 10f_p$$

Esta regla está fundamentada en las 30 muestras antes de alcanzar el régimen permanente ante una entrada en escalón. Si el sistema es subamortiguado y basándose en

aproximaciones entre la respuesta temporal y frecuencial junto con la conclusión de la ec. (18. 1), se puede decir la frecuencia de muestreo debe ser una década posterior a la frecuencia de cruce de ganancia, f_g :

$$f_s = 10f_g$$

En cuanto a la experiencia obtenida en los casos prácticos de la industria, se ha encontrado que, en general, los intervalos de muestreo de alrededor de 1 s. son adecuados para procesos de flujo, presión, nivel y temperatura; en cambio, los sistemas electromecánicos requieren de sistemas de control con tiempos de muestreo en el orden de los milisegundos.

Ejemplo 18.2

El sistema de control de temperatura sobre una célula Peltier es sometido a un control digital directo en cadena abierta. En una primer aproximación se puede modelar la planta física, $G_p(s)$, como un sistema de primer orden que alcanza el régimen permanente al cabo de 60 s y su ganancia estática es unitaria. Determinar su FDT y cual podría ser el periodo de muestro.

Como la ganancia estática es unitaria y es de primer orden, el equivalente de la expresión de su FDT será del tipo:

$$G_p(s) \cong \frac{1}{1 + s\tau}$$

Considerando el tiempo de establecimiento como el 95% de su salida del régimen permanente, la constante de tiempo del polo dominante será: $\tau = \frac{t_s}{3} = 20s$. Y el periodo de muestreo según la regla enunciada:

$$T = \frac{\tau}{10} = 2s$$

5.2 Reconstrucción

La conversión de una secuencia a una señal continua con el tiempo es realizada mediante el bloque llamado bloqueador. Al igual que el muestreador, éste no sólo está constituido por el convertidor digital-analógico, aunque representa el bloque más importante. En cuanto a la arquitectura de reconstrucción, el bajo costo de los convertidores digitales-analógicos desaconseja su compartición entre varias señales, como sí pasa en la estructura de adquisición.

El ideal del proceso del conjunto de muestreo y de reconstrucción es que tras sufrir una señal estas dos transformaciones el resultado fuese que la salida es idéntica a la entrada. Si la señal de un transductor hubiese sido muestreada según el teorema de muestreo, el computador tendrá toda la información necesaria de la magnitud física. Supóngase ahora que la secuencia obtenida es transformada, en tiempo real, a una señal de salida continua mediante un bloqueador. El objetivo sería que la señal de entrada y la de salida fuesen iguales:

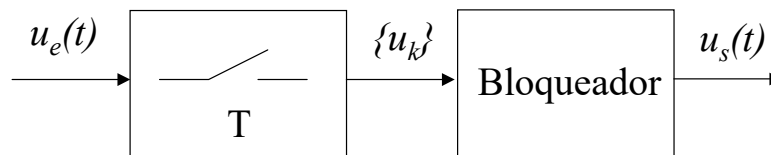


Figura 18. 5. Muestreo y reconstrucción ideal

$$u_e(t) = u_s(t) \quad (18. 9)$$

Esta definición de intenciones se da de forma exclusiva en sus aspectos ideales. No resulta físicamente realizable el cumplimiento de la ec. (18. 9) atendiendo al esquema de la figura 18.5. Considerando que se ha hecho en las condiciones ideales de muestreo, la reconstrucción consistirá en extraer el primer espectro de la secuencia a convertir, $X_d(\omega)$, el comprendido entre \pm la frecuencia de Nyquist, anulando la periodicidad de $X_d(\omega)$. Desde el punto de vista frecuencial, el bloqueador ideal se comporta como un filtro paso bajo, con frecuencia de corte $\pm\pi/T$ y con una amplitud en la banda pasante de T.

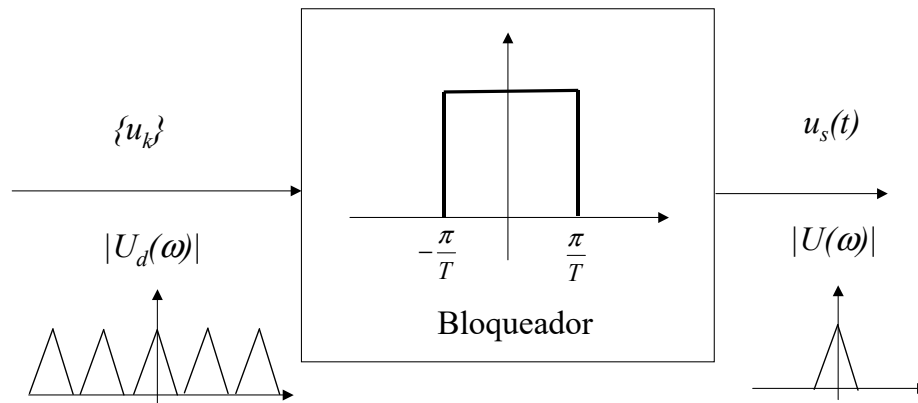


Figura 18. 6. Relación de transferencia de un bloqueador ideal

El bloqueador que realice esta operación tendrá la siguiente FDT:

$$H(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

La respuesta impulsional del bloque estará definida por la antitransformada:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T \operatorname{senc}\left(\frac{\pi}{T} t\right)}{\pi t} = \operatorname{senc}\left(\frac{\pi}{T} t\right)$$

La señal de salida del bloqueador será la convolución entre la secuencia a transformar con su respuesta impulsional:

$$y(t) = \{x_k\} * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h(t - kT)$$

La señal reconstruida por este bloqueador vendrá dado de acuerdo con el algoritmo de la convolución discreta, por:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{senc}\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)$$

Como puede observarse el valor de la señal para un instante de t requiere del conocimiento de toda la secuencia, luego este bloqueador es no causal. Más aún, en el

control digital, donde el sistema trabaja a tiempo real, se puede saber los valores de las secuencias pasadas, pero no las venideras, por lo que no se pueden emplear.

En los sistemas discretos son suficientes que la reconstrucción en un instante de t se realice con los valores de la secuencia correspondientes a índices de k tales que kT sea menor a t , es decir, en cada instante hay que generar una señal de salida reconstruida a partir de la información disponible en ese momento. Debido a la no causalidad del método de reconstrucción ideal, este proceso realmente será aproximativo. El problema de la reconstrucción se puede plantear como el cálculo aproximado del valor de una función a partir de las muestras anteriores, esto es, como un ejercicio de extrapolación. Por lo tanto, se redefine el proceso de reconstrucción como conocido el valor de la secuencia en kT , obtener la señal de salida para el instante $[kT, (k+1)T]$ para el polinomio de grado m que pasa por los m puntos pasados de la secuencia.

El bloqueador causal más simple sería el que reconstruyese la señal de salida tomando únicamente un sólo valor de la secuencia a convertir. A este bloqueador se le llama de orden cero. Funcionará manteniendo el valor convertido durante todo el intervalo de $[kT, (k+1)T]$. Para este tiempo la señal de salida será:

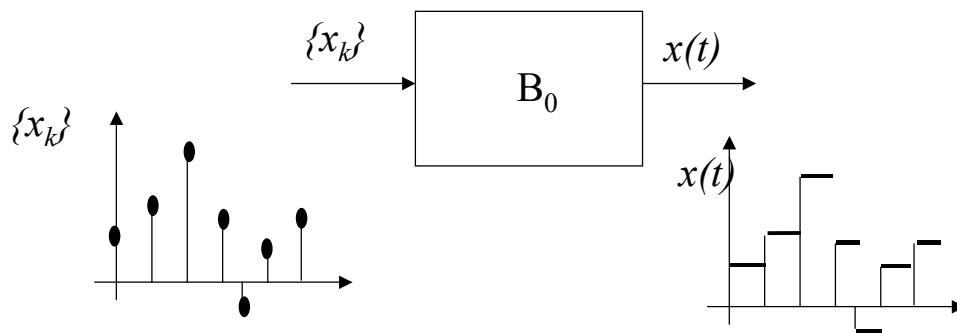


Figura 18. 7. Conversión de un bloqueador de orden cero

$$y(t) = x(t_k) = x(kT) = x_k \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (18. 10)$$

La FDT de este bloqueador de orden cero se averiguará a través de su respuesta impulsional, que quedará modelada como:

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (18. 11)$$

Y su respuesta frecuencial será:

$$H_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \tag{12.12}$$

La figura 18.8 muestra el módulo de la respuesta en frecuencias del bloqueador de orden cero. Nótese la diferencia entre la respuesta del ideal y la propia del bloqueador de orden cero. El siguiente bloqueador será aquél que emplee un polinomio de orden uno para la extrapolación; la secuencia de salida será:

$$y(t) = x_k + \frac{x_k - x_{k-1}}{T} (t - kT)$$

La señal reconstruida en el intervalo $[k, (k+1)T]$ viene dada por la recta que pasa por los puntos $(k-1)T$ y kT :

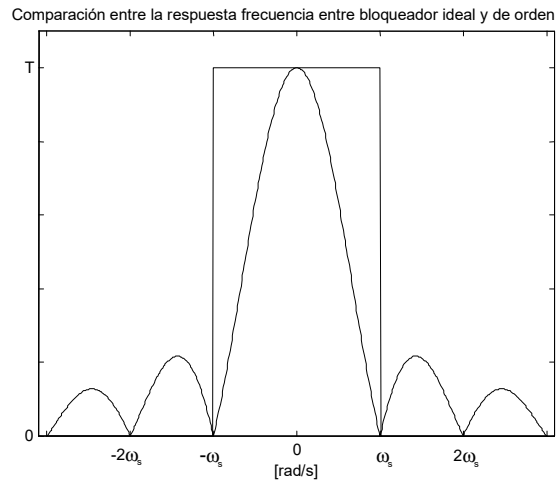


Figura 18. 8. Respuestas frecuenciales entre un bloqueador ideal y otro de orden cero en módulo

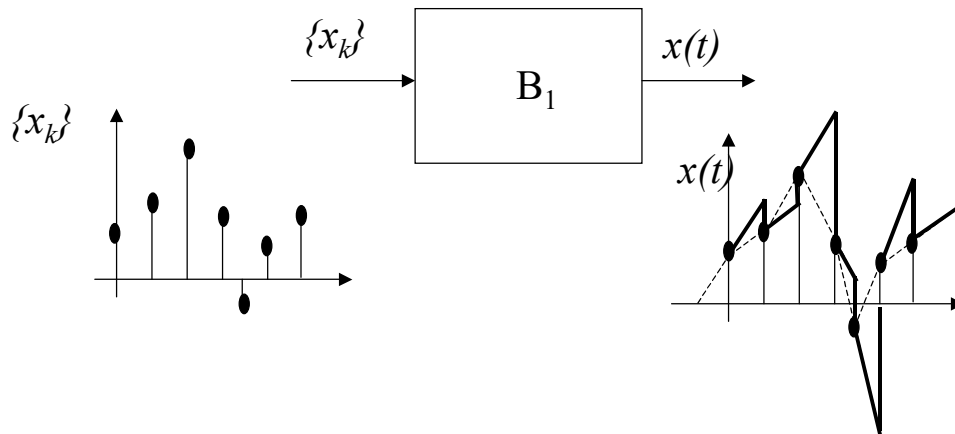


Figura 18. 9. Entrada y salida de un bloqueador de orden uno

El modelo de este bloqueador quedará definido por su respuesta impulsional:

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{T} + 1 & 0 \leq t < T \\ -\frac{t}{T} + 1 & T \leq t < 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

Por tanto, la respuesta frecuencial de este bloqueador se puede demostrar que es:

$$H_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1 + j\omega T}{T} \left(\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \right)^2$$

Su respuesta en frecuencia se parece más a un filtro paso bajo ideal que el del bloqueador de orden cero. Los resultados obtenidos indican que a mayor orden del bloqueador mejora el proceso de la reconstrucción, pero por otra parte son más difíciles de realizar físicamente y necesitan de más tiempo para la conversión. En la práctica se emplean los bloqueadores de orden cero que son implementados a través de los convertidores digitales-analógicos.

5.3 Representación discreta de un sistema continuo

Ya sea para el análisis o para el diseño de un sistema de control digital se requiere, de momento, de un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico del sistema. Bien se podría trabajar en el paso de la conversión de un sistema discreto a otro continuo equivalente (ver figura 18.10):

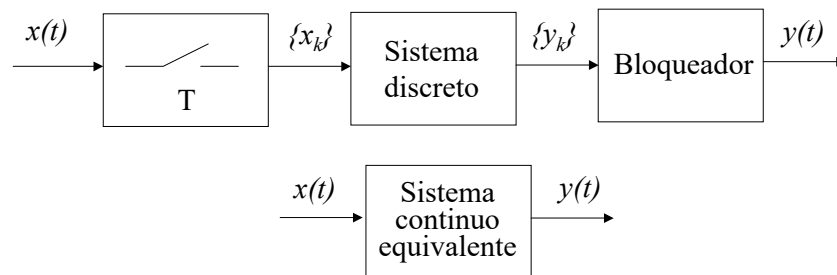


Figura 18.10. Transformación de sistema discreto a equivalente continuo

O por el contrario, se pasa el proceso continuo a discreto (figura 18.11). Esta última es la transformación elegida al ser de carácter exacto, ya que, la anterior, de discreto a continuo equivalente, es sólo aproximada por el carácter inexacto del proceso de reconstrucción.

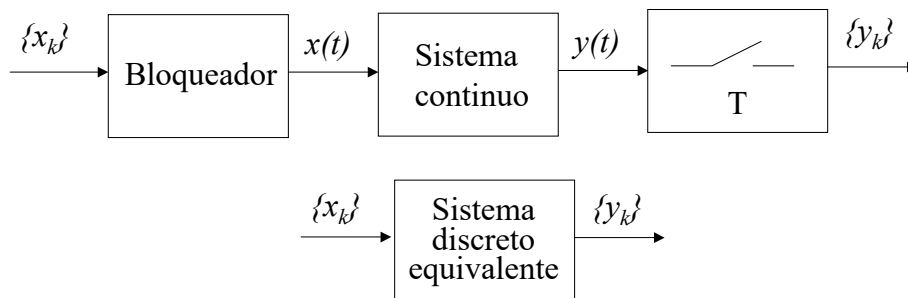


Figura 18.11. Transformación de sistema continuo a discreto equivalente

Para configuraciones como la indicada en la figura 18.11, se puede demostrar que la transformación queda definida por:

$$Z[G(s)] = G(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{G(s)}{1 - e^{sT} z^{-1}} \text{ en un polo de } G(s) \right] \quad (18.13)$$

Ejemplo 18.3

Obtener el sistema equivalente discreto de $G_1(s) = \frac{b}{s+a}$ y de $G_2(s) = \frac{c}{(s+a)(s+b)}$, siendo T el periodo de muestreo.

La transformación para la primera FDT se hará para el cálculo de un único residuo correspondiente al polo $-a$:

$$Z[G_1(s)] = G_1(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{b}{(s+a)(1 - e^{sT} z^{-1})} \text{ para el polo } -a \right] = \frac{b}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

En el segundo caso corresponderá a:

$$Z[G_2(s)] = G_2(z) = \sum \left[\text{residuo de } \frac{c}{(s+a)(s+b)(1 - e^{sT} z^{-1})} \text{ para los polos de } -a \text{ y } -b \right]$$

$$G_2(z) = \frac{c}{(b-a)} \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} + \frac{c}{(a-b)} \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} = \frac{c}{(b-a)} \left[\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right]$$

Una forma de facilitar el cálculo de transformación de $G(s)$ a $G(z)$ es a través de la tabla 18.1. En ella se representa la relación entre la transformada de Laplace continua y su equivalente discreta en Z, así como las propias funciones continuas en el tiempo y las secuencias correspondientes:

$X(s)$	$x(t)$	x_k	$X(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	1_k	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}+aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\text{sen } \omega t$	$\text{sen } \omega kT$	$\frac{z^{-1}\text{sen } \omega T}{1-2z^{-1}\cos \omega T+z^{-2}}$

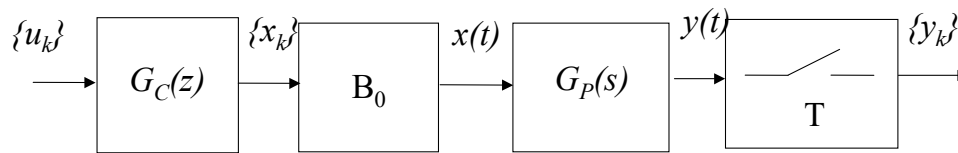
Tabla 18. 1. Tabla de transformadas Z

En el caso de emplear en el proceso de reconstrucción bloqueadores de orden cero e intentando obtener la FDT equivalente descrita, la ec.(18. 13) puede ser simplificada mediante las propiedades de las transformadas en Z de linealidad y desplazamiento:

$$Z(B_0G(s)) = B_0G(z) = Z\left(\frac{1-e^{sT}}{s}G(s)\right) = Z\left(\frac{G(s)}{s}\right) - Z\left(e^{sT}\frac{G(s)}{s}\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{G(s)}{s}\right) \quad (18. 14)$$

Ejemplo 18.4

Modelar el conjunto del algoritmo de computador y la planta a la que ataca, cuyo diagrama a bloques queda indicado en la figura. Se sabe que la FDT del proceso a controlar es $G_p(s) = \frac{5}{(s+2)}$ y que el programa ejecuta el siguiente algoritmo: la secuencia de salida es igual a la secuencia de entrada en ese instante más la secuencia de salida anterior multiplicada por 0.5.



Para conocer el equivalente discreto de la planta será necesario en primer lugar determinar cuanto vale el periodo de muestreo. Aplicando la regla experimental de la ec del muestreo:

$$\tau = \frac{1}{2} \rightarrow T = \frac{1/2}{10} = \frac{1}{20} = 0.05s$$

El equivalente discreto de bloqueador de orden cero junto con el proceso a un periodo de 0.05s. empleando la ec.(18. 14) es:

$$Z(B_0 G_P(s)) = B_0 G_P(z) = (1 - z^{-1}) Z\left(\frac{5}{s(s+2)}\right)$$

La resolución puede ser hecha bien a través del cálculo de los residuos bien mediante la tabla 18.1:

$$B_0 G_P(z) = \frac{5}{2} \left(\frac{z^{-1}(1 - e^{-2T})}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \right) = \frac{0.238}{z - 0.905}$$

En cuanto al algoritmo de computador, la descripción de éste lleva a poderlo expresar en término de ecuación en diferencias:

$$x_k = u_k + 0.5x_{k-1}$$

Al aplicar las transformadas en Z en ambos lados de la igualdad y al agrupar buscando la FDT del algoritmo quedará:

$$G_c(z) = \frac{z}{z - 0.5}$$

La respuesta a la pregunta planteada será que el modelo corresponde a:

$$G_z(z) B_0 G_P(z) = \frac{z}{z - 0.5} \frac{0.238}{z - 0.905}$$

RESOLUCIÓN EN MATLAB

```

%Definición de la planta, Gp(s)
disp('FDT de la planta:');
gp=tf(5,[1 2])
%Conversion a equivalente discreto con un bloqueador de orden
cero
disp('FDT del equivalente discreto:BoGp');
b0_gp=c2d(gp,.05,'zoh')
%FDT del algoritmo de computador
disp('FDT del algoritmo de computado:Gc');
gc=tf([1 0],[1 -.5],.05)
%FDT del conjunto
disp('FDT del conjunto');
gc_b0_gp=series(gc,b0_gp)

```

5.3.1 Sistemas realimentados

Cuando se tiene un regulador discreto clásico, el diagrama de bloques corresponde al de la figura 18.12. Como se ha comentado, la transformación de buscar el equivalente discreto de la planta nace para su análisis o para mejorar su dinámica mediante las técnicas de compensación. Centrado sobre el análisis se requiere de un conocimiento previo, la determinación de su FDT mediante las transformadas en Z.

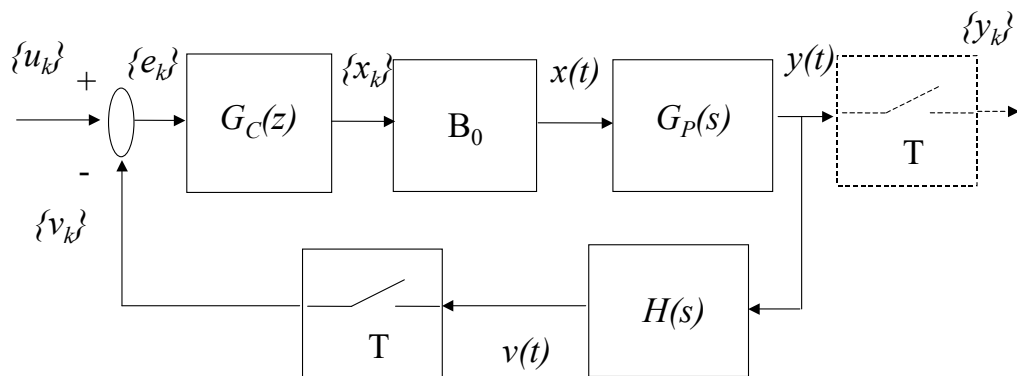


Figura 18. 12. Diagrama de bloques de un sistema de control digital clásico monovariante

El primer paso será calcular el sistema equivalente discreto del conjunto bloqueador-planta y del grupo bloqueador-planta-transductor. El primero de ellos no corresponde a las condiciones marcadas en la ecuación (18. 14) y la figura 18.11, al ser la salida de la planta continua con el tiempo; su resolución está en añadir un muestreador ficticio encadenado a la planta (en la figura 18.12 aparece punteado). La relación entre la secuencia de salida ficticia y la del algoritmo del computador se hace posible a través del equivalente discreto:

$$Y(z) = B_0 G_p(z) X(z)$$

La FDT equivalente discreta entre la salida del programa hasta la adquisición de los datos del transductor también es posible, al cumplir el esquema de la figura 18.11:

$$V(z) = B_0 G_P H(z) X(z)$$

Dentro del computador se generará la secuencia de error, obtenida entre la diferencia de la secuencia de consigna y la secuencia muestreada del captador (en general, la secuencia de consigna es dada por el usuario a través de un cuadro de diálogo):

$$E(z) = U(z) - V(z)$$

Por las propiedades de linealidad y convolución de las transformadas en Z es posible aplicar el álgebra de bloques, de forma similar que con las transformas de Laplace continuas. La FDT de la estructura de control digital es igual a:

$$M(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_C(z) B_0 G_P(z)}{1 + G_C(z) B_0 G_P H(z)} \tag{18.15}$$

Ejemplo 18.5

El servosistema de posición de la figura está controlado mediante un computador que genera el siguiente algoritmo de control con periodo $T = 0.1$ s:

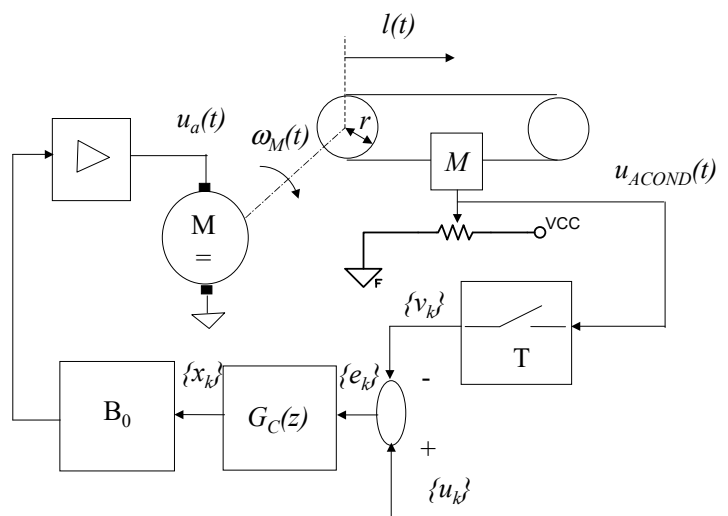
$$e_k = u_k - v_k$$

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 2.5e_k$$

La salida del convertidor digital analógico ataca a un *driver* de motor de corriente con control a excitación constante y ganancia unitaria. Las ecuaciones de comportamiento del motor son:

$$u_a(t) - k_B \omega_M(t) = R_i i(t)$$

$$k_P i(t) = B_M \omega_M(t) + (J_c + J_M) \frac{d\omega_M(t)}{dt}$$



con B_M el coeficiente de rozamiento viscoso de motor, J_C y J_M son los momentos de inercia de la carga y del propio motor respectivamente, ω_M es la velocidad angular del rotor del motor, i_i es la corriente del inducido y R_i es la resistencia del inducido; k_B es la constante de fuerza contraelectromotriz y k_P es la constante del par motor. La posición de la masa M se mide mediante un potenciómetro. La tensión de salida de la tarjeta de acondicionamiento de la señal es proporcional a la distancia recorrida por la cinta transportadora, l , según la expresión:

$$u_{ACOND}(t) = 50l(t)$$

Datos:

$$M = 3\text{kg} \quad k_B = 0.09\text{V} \cdot \text{s} / \text{rad} \quad R_i = 5\Omega$$

$$r = 1\text{cm} \quad k_P = 0.1\text{Nm} / \text{A} \quad B_M = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} / \text{rad} \quad J_M = 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Se pide:

1. Diagrama a bloques del conjunto
2. Determinar la FDT del conjunto discreto equivalente
3. Seudocódigo en C del algoritmo de control.

Resolución

1. El algoritmo del computador habrá de convertirlo en FDT de las transformadas en Z, quedando al aplicar el operador:

$$E(z) = U(z) - V(z)$$

$$G_c(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{2.5}{z - 0.5}$$

La planta está caracterizada por el diagrama a bloques clásico del control de motor de corriente continua, el cual está controlado por una etapa de potencia de ganancia unitaria:

$$i_i(s) = \frac{1}{R_i}(u_a(s) - k_B \omega_M(s))$$

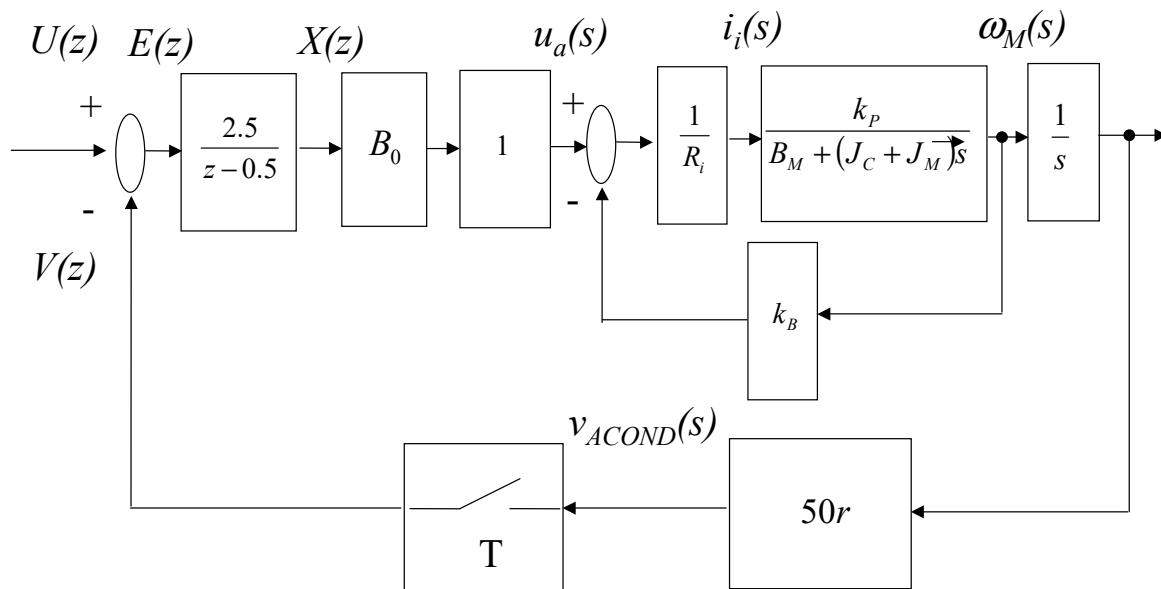
$$\omega_M(s) = \frac{k_P}{(B_M + (J_C + J_M)s)} i_i(s)$$

$$\vartheta(s) = s \omega_M(s)$$

La rotación del motor es convertida por las poleas en desplazamiento lineal y éste es capturado por un potenciómetro, cuyo valor será muestreado:

$$u_{ACOND}(s) = 50r\vartheta(s)$$

El diagrama a bloques ha quedado configurado y queda representado en la figura de abajo:



2. La determinación de la FDT del conjunto será dada por la ec.(18. 15), luego habrá de determinar el equivalente discreto con bloqueador de orden cero de la planta y de la planta y el transductor, aunque este segundo será igual que el primero pero con una ganancia estática distinta. Por eso se calcula sólo el equivalente discreto de la planta. El primer paso será calcular la FDT de la planta en transformadas de Laplace:

$$G_P(s) = \frac{\vartheta(s)}{X(s)} = 1 \cdot \frac{\frac{k_P}{R_i(B_M + (J_C + J_M)s)}}{1 + \frac{k_P k_B}{R_i(B_M + (J_C + J_M)s)}} \cdot \frac{1}{s} = 1 \cdot \frac{0.1}{0.01 + 1.25 \cdot 10^{-3} s} \cdot \frac{1}{s}$$

El cálculo del equivalente discreto necesita que la FDT de la planta esté expresada en polos y cero:

$$G_p(s) = \frac{\vartheta(s)}{X(s)} = \frac{80}{(s+8)} \cdot \frac{1}{s}$$

Al aplicar la ec. (18. 14) para convertir la planta en un equivalente discreto y localizando en la tabla 21.1 la FDT continua se procederá a la conversión:

$$Z(B_0 G_p(s)) = B_0 G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z\left(\frac{80}{s^2(s+8)}\right) = \frac{80}{64} \frac{(0.249 + 0.191z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.449z^{-1})}$$

La inclusión de la FDT del transductor no significará más que una ganancia estática en el proceso de conversión:

$$Z(B_0 G_p H(s)) = B_0 G_p H(z) = 0.5 \frac{80}{64} \frac{(0.249 + 0.191z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.449z^{-1})}$$

La FDT del conjunto equivalente discreto según la ec.(18. 15) es por tanto:

$$M(z) = \frac{\vartheta(z)}{U(z)} = \frac{\frac{2.5}{(z-0.5)} \frac{0.311(z+0.766)}{(z-1)(z-0.449)}}{1 + \frac{2.5}{(z-0.5)} \frac{0.155(z+0.766)}{(z-1)(z-0.449)}}$$

3. El pseudocódigo en C del algoritmo de computador será:

```

1. #define CANAL_0
2.
3. long LeerCAD ( unsigned canal );
4. long EscribirCDA ( long valor );
5.
6. long AlgoritmoControlDigital ( unsigned uk )
7. {
8.     long vk, ek, xk;
9.     static long xk_1 = 0;
10.
11.
12.     vk = leerCAD ( CANAL_0);
13.     ek = uk - vk;
14.     //Algoritmo de compensación
15.     xk = 0.5*xk_1 + (2.5*ek);
16.     EscribirCDA ( xk );
17.     xk_1 = xk;
18.
19. }
```

RESOLUCIÓN EN MATLAB

```

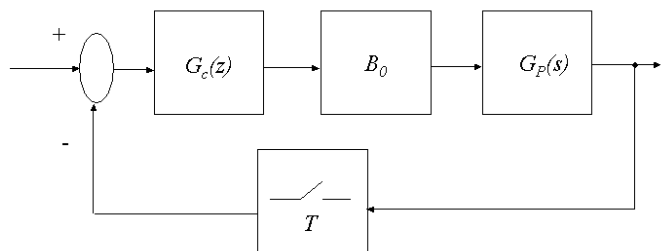
%Datos
disp('Los datos de la planta son:')
Kp=.1,Kb=.09,Ri=5,Bm=.2e-3,Jm=1e-4,Jc=1.5e-4
%Definición de la planta, Gp(s)
disp('FDT de la planta:');
gp=series(feedback(series(tf(1,Ri),tf(Kp,[(Jc+Jm)
Bm])),Kb),tf(1,[1 0])))
zpk(gp)
%Conversion a equivalente discreto con un bloqueador de orden cero
disp('FDT del equivalente discreto:BoGp');
b0_gp=c2d(gp,.1,'zoh');
zpk(b0_gp)
disp('FDT del equivalente discreto:BoGpH');
gp_h=series(gp,.5);
b0_gp_h=c2d(gp_h,.1,'zoh');
zpk(b0_gp_h)
%FDT del algoritmo de computador
disp('FDT del algoritmo de computado:Gc');
gc=tf(2.5,[1 -.5],.1)
%FDT del conjunto
disp('FDT del conjunto');
gc_b0_gp=series(gc,b0_gp);
gc_b0_gp_h=series(gc,b0_gp_h);
M=gc_b0_gp/(1+gc_b0_gp_h);
zpk(M)

```

5.4 Ejemplos

5.4.1 Primer ejercicio

El sistema de control de temperatura sobre una célula Peltier es sometido a un control digital directo. En una primer aproximación se puede modelar la planta física, $G_p(s)$, como un sistema de primer orden que alcanza el régimen permanente al cabo de 60 s y su ganancia estática es unitaria. En el diseño del regulador discreto se han puesto como condiciones un tiempo de establecimiento de 10 segundos y un valor de pico del 15% para el conjunto.



1. Determinar cual podría ser el periodo de muestro y su fundamento.
2. Determinar de FDT discreta equivalente del bloqueador planta.

Al ser los polos dominantes de segundo orden, se determinará la constante de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación de las condiciones de diseño:

$$\sigma = \frac{\pi}{t_s} = 0.3 \quad M_p = 0.15 = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} \rightarrow \omega_d = 0.5 \text{ rad/s}$$

Y seguidamente se obtendrá el periodo de muestreo a partir de la regla experimental:

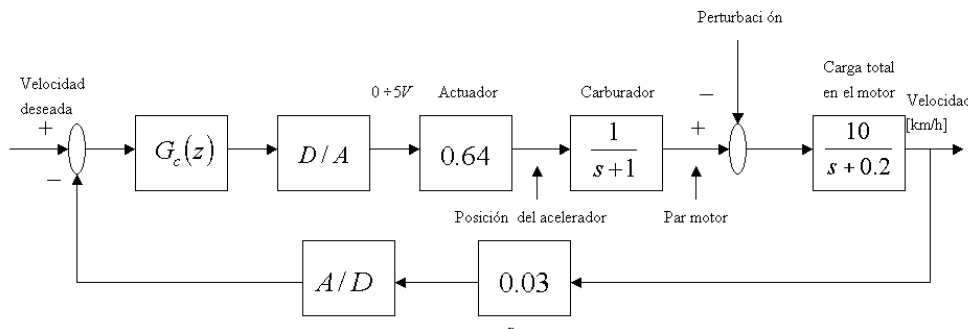
$$T \cong \min\left(\frac{1}{10\sigma}, \frac{2\pi}{10\omega_d}\right) = 0.3s$$

Con el periodo de muestreo y definiendo la planta a razón de la ganancia estática, que es unitaria, y el polo de primer orden está a $-1/20s$ quedara:

$$B_0 G_p(z) = (1 - z^{-1}) \sum \text{residuos} \left(\frac{0.05}{s(s + 0.05)} \frac{1}{1 - e^{sT} z^{-1}} \right) = \frac{0.015}{z - 0.985}$$

5.4.2 Segundo ejercicio

La figura adjunta muestra un esquema funcional de un sistema de control de marcha para un automóvil. El actuador controla la posición del acelerador. El carburador y la carga total en el motor se modelan como sistemas de primer orden. Suponiendo que el par perturbador es cero, determinar:



1. El periodo de muestreo si el regulador conseguirá tener un polo dominante real a una distancia de -0.5 en el dominio complejo.
2. Determinar la FDT discreta equivalente del bloqueador planta.

El sistema tendrá un polo dominante con una constante de tiempo de 2 segundos, por tanto $T = \frac{\tau}{10} = 0.2s$.

En cuanto al equivalente discreto estará definido por la reconstrucción de un bloqueador de orden cero:

$$B_0 G_p(z) = \sum \text{residuos} \frac{6.4}{s(s+1)(s+0.2)} \frac{1}{1 - e^{sT} z^{-1}} = \frac{0.18z + 0.17}{z^2 - 1.78z + 0.79}$$

6 Análisis dinámico de sistemas discretos.

En el capítulo 4 se han establecido las bases para la representación de sistemas que llevan componentes discretos. De la misma forma como ocurría con los sistemas continuos, la representación de un sistema mediante una función de transferencia, permite no sólo obtener una herramienta de cálculo interesante para predecir el comportamiento del sistema, sino que además de forma intrínseca, quedan representadas las principales características del sistema.

En este capítulo, analizaremos en detalle, los efectos que tienen los distintos términos de la función de transferencia de un sistema discreto en la respuesta temporal del mismo. A diferencia de lo que ocurría en los sistemas continuos, existe un parámetro extrínseco al sistema, que afecta profundamente a su comportamiento. Este es el periodo de muestreo, presente siempre que se hable de la discretización de un elemento. A la hora de realizar el análisis dinámico de estos sistemas, será uno de los elementos que se tendrán en cuenta, para ver como afecta al comportamiento del sistema.

6.1 Correspondencia entre el plano S y el plano Z

Cuando se realizó el estudio de los sistemas continuos, quedó demostrado cómo tanto la estabilidad absoluta como la relativa de un sistema de control en lazo abierto o cerrado de un sistema lineal e invariante con el tiempo quedaban determinados por la posición de los polos en lazo abierto o cerrado respectivamente en el plano S . Se observó

como la respuesta temporal de estos sistemas, quedaba reflejada en posiciones específicas de los polos dominantes en este mismo plano, de forma que se puede incluso modificar la posición de dichos polos para que el sistema se comportase de una forma preestablecida.

En el anterior capítulo se vio como la forma más conveniente de realizar la representación de un sistema discreto era a través de la transformada Z . Esto se debe fundamentalmente a que dichos sistemas pasan a tener una representación racional en forma de cociente de polinomios para los sistemas más habituales. Si hubiéramos procedido a transformar directamente la secuencia ponderatriz mediante la transformada de Fourier, obtendríamos una serie de exponenciales que dificultan el trabajo con estas expresiones. Dada la estrecha relación existente entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace, el mismo inconveniente aparecerá con esta última. Sin embargo, al estar el análisis de los sistemas profundamente estudiado sobre el plano S , si se establece la relación entre las distintas transformadas, es posible definir el comportamiento de un sistema representado por una función de transferencia discreta gracias a estas equivalencias. De esta forma, si se ha definido la transformada en Z como:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad z \in C \quad (6.1)$$

Se vio como la relación entre la transformada de Fourier y la transformada en Z se consigue haciendo:

$$z = e^{j\omega} \quad (6.2)$$

Del mismo modo, dada la expresión de la transformada de Laplace de una secuencia:

$$X(s) = L\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot e^{-sk} \quad s \in C \quad (6.3)$$

Sin embargo, la transformación en Z es una operación matemática carente de significado temporal. Tan sólo establece una relación de orden entre los distintos elementos que componen una secuencia generando como consecuencia una función continua en el plano complejo que permite su representación. Para establecer la relación indicada en (6.2), ha sido necesario establecer que cada uno de los elementos de la secuencia original, eran el resultado de realizar el muestreo de una función continua con un periodo de un segundo.

Una relación válida para cualquier periodo de muestreo entre las distintas transformaciones, viene dada por una expresión más genérica fácilmente obtenible a partir de las expresiones de las transformadas ya vistas, siendo la expresión de esta relación la siguiente:

$$z = e^{j\omega T} = e^{sT} \quad (6.4)$$

En donde T es el periodo de muestreo por el que se ha obtenido la secuencia al muestrear la señal una señal continua. Establecida esta relación es posible aplicar las mismas conclusiones del análisis dinámico realizado sobre los sistemas continuos sobre los sistemas discretos. Al realizar el análisis de estabilidad de los sistemas continuos, se procedía a la representación de los distintos polos y ceros de la función de transferencia en el plano S . En función de la posición de estos, podíamos predecir el comportamiento del sistema ante las distintas entradas a la que lo podemos excitar. De esta forma, si establecemos las zonas del espacio Z que corresponden según la transformación dada por la ecuación (6.4) con las zonas características del plano S que permitían deducir el comportamiento del sistema, podremos aplicar las mismas consecuencias a las funciones de transferencia discretas.

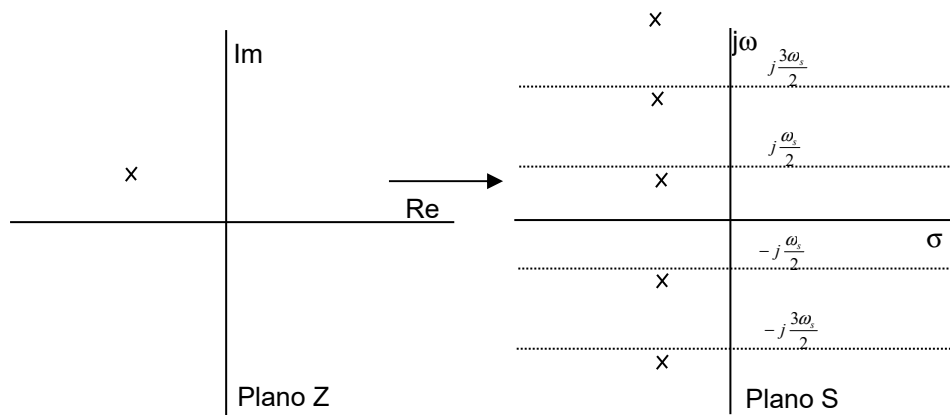
Sin embargo, antes de proceder a realizar estas equivalencias entre ambos espacios de representación, es interesante destacar dos aspectos importantes de la transformación entre ambos:

- En primer lugar, la transformación del plano S al Z viene afectada directamente por el periodo de muestreo del sistema discreto, y por tanto la posición de un polo en s , tendrá una posición equivalente en Z en función del valor de dicho periodo. Por tanto, un polo en Z , supondrá una caracterización de la respuesta temporal del sistema en función de dicho periodo de muestreo.
- En segundo lugar, al ser s variable compleja, la función exponencial es periódica de periodo $j2\pi$ como se muestra en las expresiones (6.5). Esto significa, que dado un punto en el plano s , sólo tendrá un valor que le corresponderá en el plano Z , mientras que a cada punto del plano Z le corresponderán infinitos puntos del plano S , distribuidos en el sentido del eje imaginario a distancias de $j2\pi$.

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi K)} \quad K = 0, 1, \dots, \infty \quad (6.5)$$

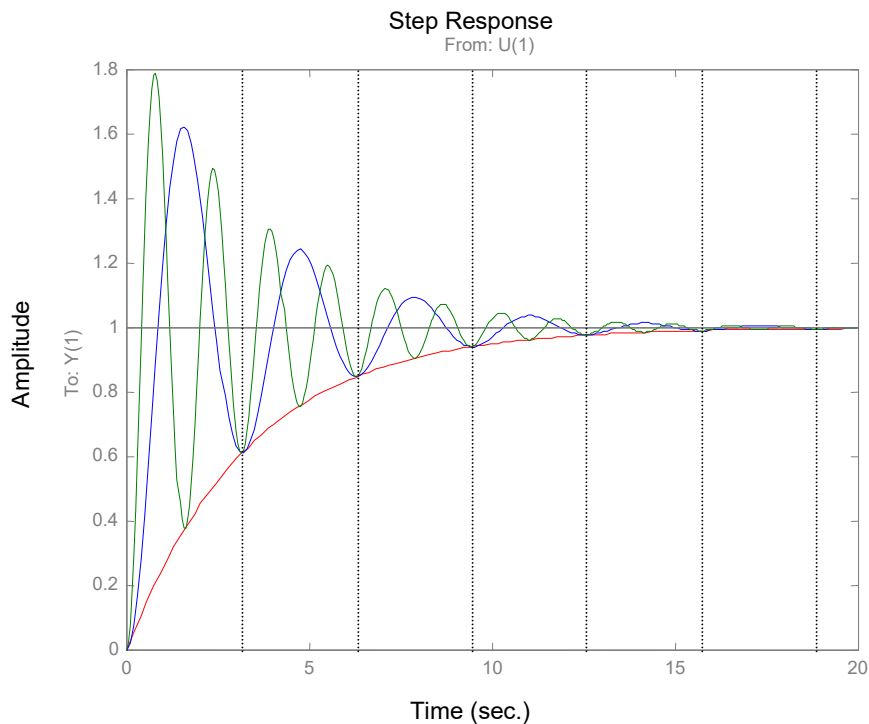
Por tanto, es fácil observar como bandas a lo largo de todo el eje real, de altura igual a $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ tienen por equivalencia a todo el plano Z , y consecuentemente, un punto en el plano Z , tendrá un punto equivalente en cada una de estas infinitas bandas del plano S , tal y como se muestra en la siguiente figura:



Este efecto refleja un aspecto inherente al muestreo de señales tal y como se vio en el capítulo de muestreo y reconstrucción: una secuencia puede resultar de muestrear dos señales continuas distintas. Podemos observarlo mediante MatLab, generando la respuesta temporal correspondiente a dos sistemas cuyos polos aparecen desplazados en el eje imaginario un valor constante:

```
%Comandos de matlab para mostrar la periodicidad de la relación entre
%el plano s y el z.

%Definición de las FDT
disp('FDT continua basica:');
g1=tf(0.3,[1 0.3])
disp('FDT continua desplazada 2j');
g2=tf(4.09,poly([-0.3+2j -0.3-2j]))
disp('FDT continua desplazada 4j')
g3=tf(16.09,poly([-0.3+4j -0.3-4j]))
disp('Respuesta al escalon de las tres')
step(g1,g2,g3,'r','b','g')
pause
```



Observamos como para el periodo de muestreo de π segundos consecuente al desplazamiento de $2j$ seleccionado a lo largo del eje imaginario, las tres respuestas coinciden. Por tanto, si muestreamos dichas señales con un periodo de 3.14 s. obtendremos la misma secuencia resultante, aún siendo tan distintos los sistemas entre sí.

Seguidamente procederemos a ver la relación entre los puntos de ambos planos, mediante el estudio de dicha correspondencia entre las zonas de ambos espacios que poseen significado desde el punto de vista del análisis dinámico y de estabilidad de los sistemas continuos.

6.1.1 Correspondencia del semiplano negativo en S.

Para el estudio de la estabilidad de un sistema continuo, la condición final resultante de este análisis, arroja que un sistema continuo será estable si todos sus polos están situados en el semiplano real negativo. Consecuentemente, si obtenemos la zona del plano Z equivalente a dicho semiplano, podremos establecer una regla similar para la estabilidad en los sistemas discretos.

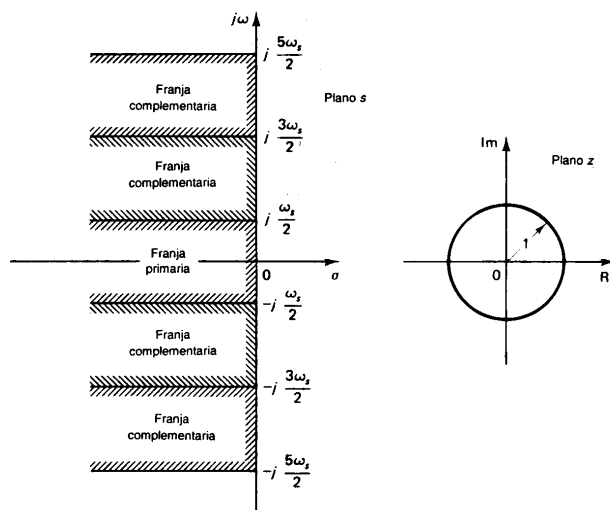
La ecuación que me define este subespacio es $\sigma < 0$, estando cualquier punto del plano S expresado de la forma $s = \sigma + j\omega$. Aplicando la transformación (6.4), obtenemos:

$$\sigma < 0 \Rightarrow |e^{T\sigma}| < 1 \Rightarrow |z| < 1 \tag{6.6}$$

De hecho, para el lugar geométrico del eje real, tendrá como transformada la circunferencia unidad:

$$s = 0 + j\omega \Rightarrow z = e^{j\omega T} \tag{6.7}$$

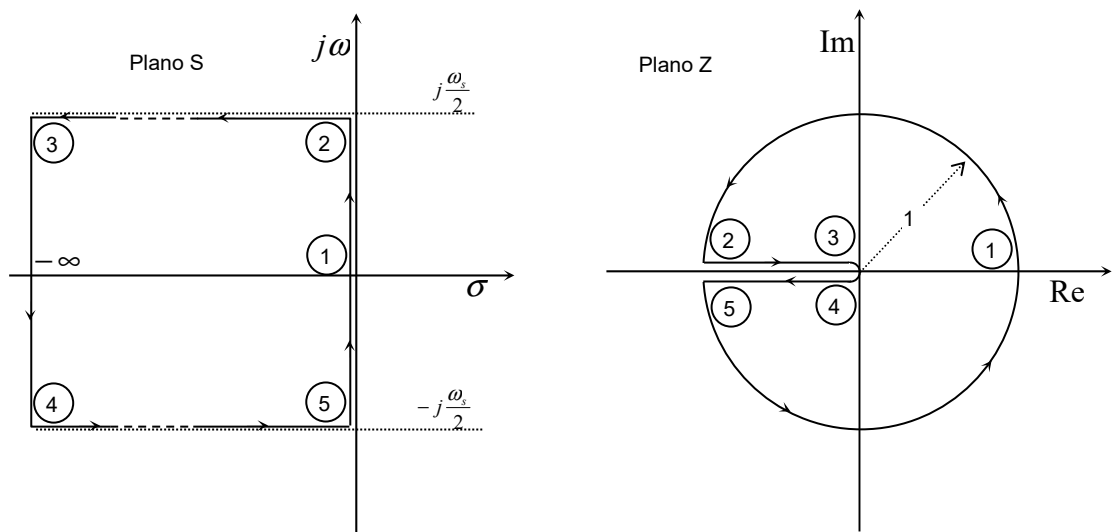
En la figura siguiente, se muestran las franjas periódicas del semiplano real



negativo del espacio s , y el círculo unitario correspondiente en el plano Z .

Para que el lector pueda hacerse una idea de la correspondencia entre los puntos dentro de la franja, se va a realizar un recorrido a lo largo de la frontera de una franja, de forma que puedan verse el sentido en el que se recorre el círculo unitario en el plano Z . Debido a la periodicidad de la función de relación, este mismo recorrido puede establecerse trasladándolo a las franjas complementarias.

En la siguiente figura se muestra el resultado de moverse en el sentido de los puntos 1-2-3-4-5.



Puesto que la totalidad del semiplano izquierdo del plano S corresponde con el interior del círculo unitario del plano Z , la totalidad del semiplano derecho del plano S corresponderá con el exterior del círculo unitario en el plano Z .

Una conclusión inmediata de esta relación, será que la condición de estabilidad impuesta para los sistemas continuos, derivará en los sistemas discretos y su representación en el espacio Z , en que la existencia de polos del sistema en el exterior del círculo unitario harán al mismo inestable. Este aspecto lo estudiaremos con más detalle en otro epígrafe de este capítulo.

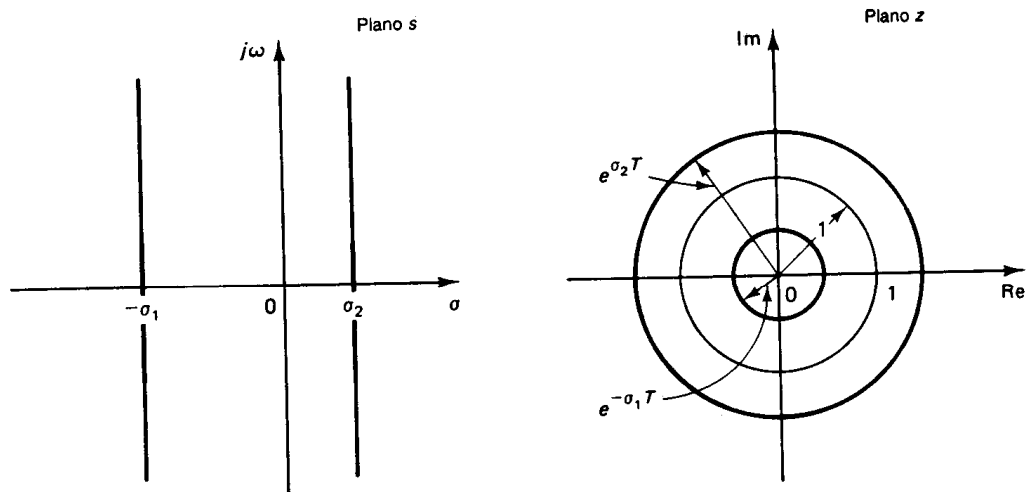
6.1.2 Lugar geométrico para una constante de amortiguamiento fija .

En los sistemas continuos, el tiempo de establecimiento quedaba generalmente determinado por el valor de la atenuación σ de los polos dominantes siempre que el sistema no fuera excesivamente oscilatorio. Si se es capaz de dibujar los lugares geométricos para valores de amortiguamiento constantes, se podrá establecer un criterio para discernir sistemas más rápidos que otros.

Una línea de atenuación constante (es decir $\sigma = cte$) en el plano S corresponderá a un círculo de radio $e^{T\sigma}$ con centro en el origen del plano Z , tal y como se muestra en la

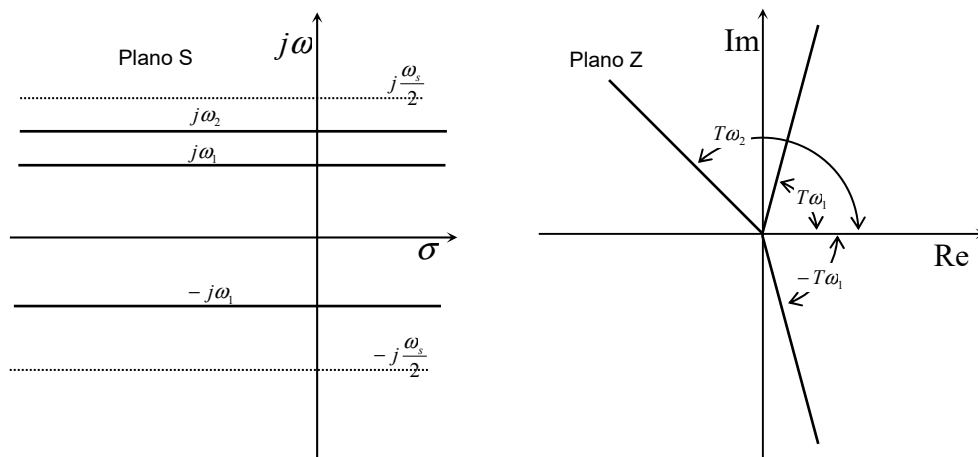
siguiente figura. Sistemas con valores de constante de amortiguamiento más altas (polos negativos más alejados del origen) tendrán en Z una representación más cercana al origen para un mismo periodo de muestreo.

Por último, valores de σ positivos, generarán círculos de radio superior a la unidad como era de esperar (puesto que son sistemas inestables), mientras que valores negativos de la componente real del polo, generarán círculos interiores al círculo unidad, puesto que corresponden a polos estables.



6.1.3 Lugar geométrico de frecuencia amortiguada constante

El lugar geométrico de frecuencia amortiguada constante, corresponderá en el plano S con una línea horizontal de componente imaginaria constante. Aplicando la transformación (6.4), observamos que el módulo del número complejo resultante no queda afectado por ninguna restricción, sin embargo lo que si es fijado es el ángulo que permanece constante. Por tanto dicho lugar geométrico de la línea $\omega = \omega_1$ corresponderá en el plano Z con una línea radial de ángulo en radianes constante e igual a $T\omega_1$.



Cómo quedó reflejado en el dibujo de la frontera de las bandas del plano S , para líneas de frecuencia constante y coincidente en $\omega = \pm \frac{1}{2} \omega_s = \omega_N$ en el semiplano izquierdo en el plano S , le corresponde el eje real negativo en el plano Z entre los valores 0 y -1 .

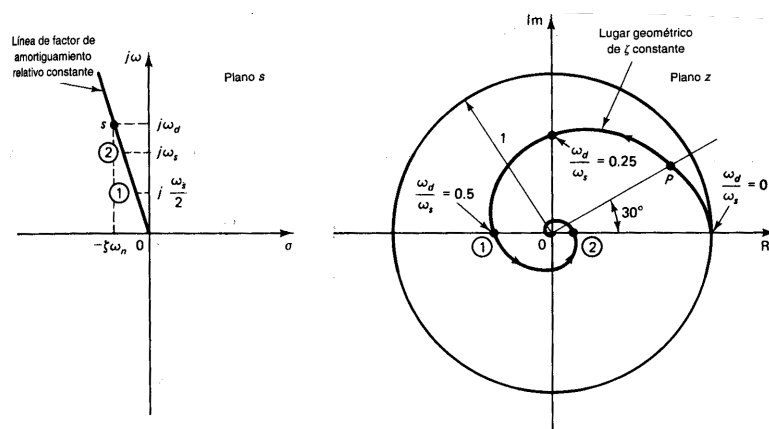
6.1.4 Lugar geométrico de factor de amortiguamiento constante

Para la determinación de la sobreoscilación en los sistemas continuos, se utilizaba especialmente el factor de amortiguamiento de los polos dominantes del sistema. Este valor ξ , nos permitía establecer una relación entre la frecuencia natural de oscilación del sistema ω_n y los valores de la constante de amortiguamiento σ y la frecuencia amortiguada ω_d , de tal forma que $\sigma = \xi \omega_n$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$. Por tanto, un valor fijo del factor de amortiguamiento establece una proporción fija entre la parte real e imaginaria del polo, y por tanto corresponde con una semirrecta en el plano S , que teniendo su origen en cero, forma un ángulo θ con el eje real negativo tal que $\xi = \cos \theta$. Esta línea radial en el plano S corresponderá con una espiral en el plano Z . En vez de utilizar el periodo de muestreo T , utilizaremos la frecuencia de muestreo, para poder de esta manera utilizar valores normalizados:

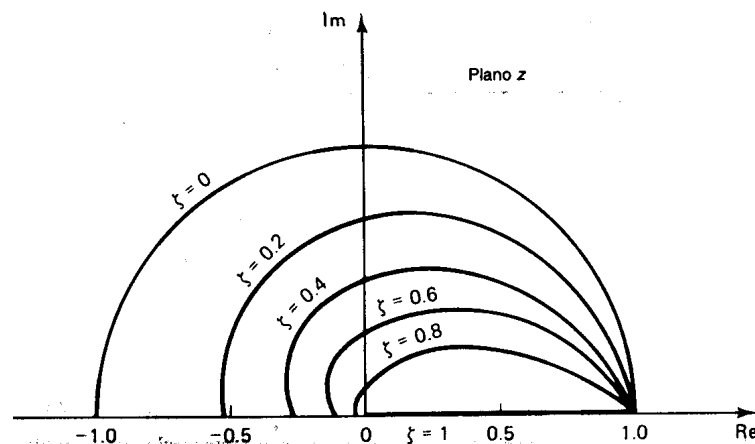
$$z = e^{Ts} = \exp(-\xi \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega_d}{\omega_s} + j 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}\right)$$

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \quad \angle z = 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Por tanto, mientras que el valor del módulo se reduce de forma exponencial, el ángulo crece de forma lineal respecto del cociente $\frac{\omega_d}{\omega_s}$. El cruce de una banda a otra en el plano S , quedará reflejado por un paso por el eje real negativo en el plano Z ($\angle z = \pi$).



Hay que destacar que tras esta normalización del parámetro de la curva, conseguimos que el módulo de z se convierta sólo en una función de ξ , y el ángulo de z en una constante. Esto nos permite graduar la espiral en función de dicha frecuencia normalizada, tal y como se muestra en la figura anterior para los pasos por cuadrante. De la misma forma, podremos reproducir un pequeño ábaco para los distintos factores de amortiguamiento, en el que ya consideramos que cumplimos el teorema de Shanon de forma que $0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$, y que por tanto muestreamos a una frecuencia lo suficientemente elevada como para evitar los efectos del aliasing. Hay que destacar, que en la medida en el que el factor de amortiguamiento se acerca a cero, la curva del lugar geométrico se acerca más a la circunferencia unidad (puesto que la recta es cada vez más cercana al eje imaginario en el plano S).



6.2 Análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado en el plano Z

Al igual que en el caso de los sistemas continuos, la estabilidad de un sistema quedará determinada por la posición de sus polos. En el caso de que se esté hablando de un sistema realimentado, los polos que habrá que considerar serán los del sistema en bloque y por tanto serán los polos en cadena cerrada.

Dado un sistema realimentado con la siguiente función de transferencia en lazo cerrado en Z:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (6.8)$$

la estabilidad de dicho sistema puede determinarse gracias a la localización de los polos resultantes en cadena cerrada, es decir las raíces de su ecuación característica:

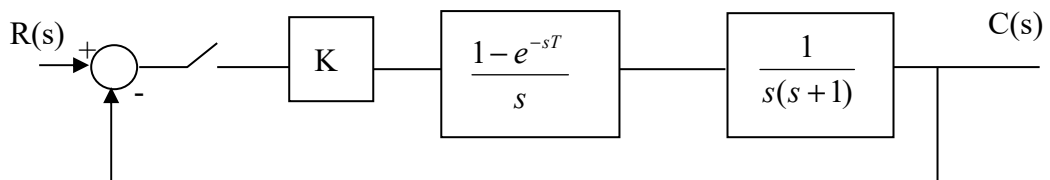
$$P(z) = 1 + G(z)H(z) = 0 \tag{6.9}$$

según los siguientes criterios:

1. Para que sea estable los polos en lazo cerrado del sistema deben presentarse en el interior del círculo unitario. Cualquier polo exterior al círculo unitario hace inestable el sistema.
2. Si un polo simple se presenta en $z = 1$, entonces el sistema se convierte en críticamente estable. También el sistema se convierte en críticamente estable si un solo par de polos complejos conjugados se presentan en el círculo unitario en el plano Z. Cualquier polo múltiple en lazo cerrado sobre el círculo unitario hace al sistema inestable.
3. Los ceros en lazo cerrado no afectan la estabilidad absoluta y por tanto pueden quedar localizados en cualquier parte del plano Z.

Ejemplo:

Dado el sistema de control en lazo cerrado indicado por la figura, determinar la estabilidad del sistema cuando el valor de $K=1$, y $T=1s$.



Discretizamos el sistema $G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s(s+1)}$ mediante la aplicación de la transformada Z para $T=1$:

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{0,3679z + 0,2642}{(z - 0,3679)(z - 1)}$$

Calculamos la función de transferencia del sistema realimentado, y a través de su ecuación característica obtenemos los polos del sistema:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \Rightarrow 1 + G(z) = 0 \Rightarrow z^2 - z + 0.6321 = 0$$

$$z_1 = 0,5 + j0,6181 \text{ y su conjugada } z_2 = 0,5 - j0,6181.$$

Comprobamos cómo el módulo de ambas raíces es inferior a la unidad, por lo que ambas se encuentran en el interior del círculo unitario. Por tanto el sistema es estable.

$$|z_1| = |z_2| = 0,7950 < 1$$

Sin embargo, es importante destacar, que el sistema puede llegar a hacerse inestable en función del valor de K. No parecería relevante si no se supiera que un sistema continuo de segundo orden es siempre estable o siempre inestable sin depender dicha propiedad del valor de la ganancia. Al aparecer el muestreador y el consiguiente bloqueador el sistema puede llegar a hacerse inestable para valores superiores de la ganancia. Para el ejemplo expuesto este valor crítico se sitúa en 2,3925.

6.2.1 Métodos para verificar la estabilidad absoluta

Al igual que ocurría en los sistemas continuos, es posible la utilización de una serie de herramientas matemáticas, que permitan deducir si una ecuación posee una serie de ceros (polos de la función de transferencia si se trata de una ecuación característica) en una determinada zona del espacio. En el caso del método de Routh, bastaba con determinar si las raíces de la ecuación eran todas negativas o no para concluir la estabilidad del sistema. Para el caso que nos ocupa, queremos saber si las raíces de una ecuación se encuentran dentro del círculo unitario de forma que se pueda afirmar si un sistema discreto definido por su función de transferencia en Z, es o no estable.

En estos métodos, es importante destacar la pérdida de significado físico, tratándose sencillamente de una herramienta matemática. Cómo tal, es de especial importancia prestar atención a las condiciones y el formato en que se definen, y aplicándolas de forma estricta. Si para cualquier otra finalidad quisiéramos conocer si un polinomio tiene sus raíces dentro del círculo unitario o en la parte negativa del eje real, se podrían aplicar estos mismos métodos.

El método más clásico de verificación de estabilidad de un sistema discreto a través del análisis de su ecuación característica, es la prueba de estabilidad de Jury.

Método de Jury

Sea el polinomio $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ en donde $a_0 > 0$ el criterio de Jury permite identificar si existen o no raíces de dicho polinomio (soluciones a la ecuación $P(z) = 0$) exteriores al círculo unitario. Para ello es necesaria la elaboración de una tabla basada en los coeficientes de $P(z)$:

Renglón	z^0	z^1	z^2	z^3	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	...	c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_4	...	c_{n-2}		
.				
.				
.				
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n-3$	q_2	q_1	q_0					

Las filas van emparejadas de dos en dos, de forma que los renglones pares resultan de copiar los renglones anteriores pero con el orden relativo de los elementos invertido. El cálculo de los elementos entre los renglones 3 en adelante se realizan de la forma siguiente:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

y así de forma sucesiva.

Para evitar complicaciones con los índices se recomienda proceder de la siguiente forma. Una vez situados los coeficientes de la primera y segunda fila, procedemos a calcular los valores de b pero en la fila cuarta, es decir vamos en orden creciente del índice de las b . De esta manera, se toma como columna fija del determinante la primera columna de las dos primeras filas, y como columna móvil la correspondiente a la siguiente a la del elemento que se quiere calcular. Una vez realizado el cálculo de todas las b , copiamos en orden invertido los resultados en el tercer renglón. Procedemos de esta misma forma para el cálculo de las parejas de filas siguientes, desplazando todo el procedimiento dos filas más abajo.

La tabla de Jury se termina cuando se llega a la fila que sólo tiene tres elementos. En los sistemas de segundo orden, la tabla de Jury estará compuesta sólo por un renglón, que es la de los coeficientes del polinomio característico.

Criterio de estabilidad mediante el método de Jury . Un sistema con la ecuación característica $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ en donde $a_0 > 0$, es estable si se satisfacen todas las condiciones siguientes:

1. $|a_n| < a_0$
2. $P(z)|_{z=1} > 0$
3. $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } n \text{ par} \\ < 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$
4. $\begin{cases} |b_{n-1}| > |b_0| \\ |c_{n-2}| > |c_0| \\ \vdots \\ |q_2| > |q_0| \end{cases}$

Ejemplo:

Examinar la estabilidad de un sistema discreto cuya ecuación característica tiene la siguiente expresión:

$$P(z) = z^4 - 1,2z^3 + 0,07z^2 + 0,3z - 0,08 = 0$$

Vamos comprobando las distintas condiciones indicadas por el criterio de Jury:

1. $1 > 0,08$
2. $P(-1) = 1 - 1,2 + 0,07 + 0,3 - 0,08 = 0,09 > 0$
3. $P(-1) = 1 + 1,2 + 0,07 - 0,3 - 0,08 = 1,89 > 0$ y n es par.
4. Se construye la tabla:

-0,08	0,3	0,07	-1,2	1
1	-1,2	0,07	0,3	-0,08
-0,9936	1,176	-0,0756	-0,204	
-0,204	-0,0756	1,176	-0,9936	
0,946	-1,184	0,315		
0,315	-1,184	0,946		

$$0,9936 > 0,204$$

$$0,946 > 0,315$$

Por lo que al cumplirse todas las condiciones, podemos afirmar que el sistema es estable puesto que todas las raíces de su polinomio característico se encuentran en el interior del círculo unitario.

Análisis de estabilidad mediante la transformación bilineal y el criterio de estabilidad de Routh.

Un método muy utilizado especialmente por aquellos que están más acostumbrados al manejo de sistemas continuos es el basado en el criterio de Routh mediante una transformación matemática. Si mediante una transformación de variables se pudiera conseguir que el círculo unitario en Z se convirtiera en todo el semiplano real positivo de un nuevo espacio de variable w , entonces se podría aplicar sobre esta variable el criterio de Routh.

Cómo se ha mencionado al comienzo del epígrafe, se utilizan estas herramientas como artilugios matemáticos en los que habitualmente no existe un sentido físico real. Sin embargo, la transformada bilineal responde a unos criterios que cómo se verá posteriormente responden a una razón física. En cualquier caso, para exponer el método siguiente procederemos a considerarla como una transformación de variable que convierte los valores de la variable z interiores al círculo unitario, en valores de la variable w que abarcan todo el semiplano real negativo.

La transformación bilineal queda definida por:

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (6.10)$$

siendo su función inversa

$$w = \frac{z+1}{z-1} \quad (6.11)$$

Luego para realizar el análisis, bastará con sustituir la variable z por la variable compleja w mediante la relación establecida por (6.10) y aplicar el criterio de Routh para sistemas continuos.

6.3 Respuesta temporal de los sistemas discretos

Para proceder al análisis de la respuesta de los sistemas discretos, se va a exponer el efecto que tienen ceros y polos de distinto tipo ante la secuencia impulso y la secuencia escalón. Esto permitirá establecer una serie de reglas genéricas sobre el comportamiento de un sistema con varios polos y ceros de distinto tipo.

6.3.1 Respuesta ante la secuencia impulso

Dado un sistema discreto definido por su función de transferencia expresada según la siguiente forma:

$$G(z) = K \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (6.12)$$

La respuesta del mismo ante la secuencia impulso, es la secuencia de ponderación, y por tanto vendrá dada por la antitransformada en Z de su función de transferencia por la misma definición de esta:

$$g_k = \sum_{i=1}^n \text{Residuos} \left[G(z) z^{k-1} \right]_{p_i} \quad (6.13)$$

Entonces, para valores del índice positivos, si consideramos de momento el caso en el que todos los polos son simples, la expresión (6.13) pasa a convertirse en :

$$g_k = \sum_{i=1}^n \text{Residuos} \left[K \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{p_i} p_i^{k-1} \quad (6.14)$$

Desarrollando esta expresión obtenemos finalmente que la respuesta impulsional de $G(z)$ adoptará una expresión del tipo:

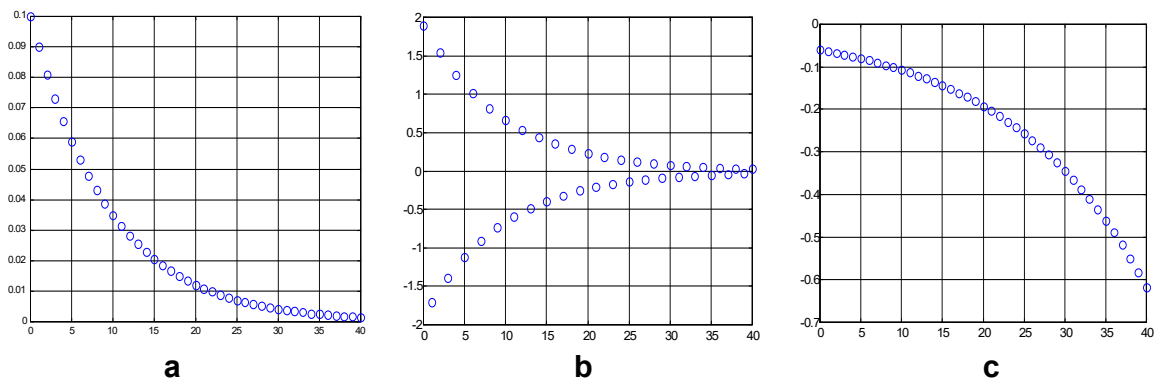
$$g_k = K \sum_{i=0}^n a_r p_r^{k-1} \quad \text{en donde } a_r = \frac{\prod_{j=1, j \neq r}^m (p_r - z_j)}{\prod_{i=1, i \neq r}^n (p_r - p_i)} \quad (6.15)$$

En donde p_r son los polos de $G(z)$ y a_r números complejos constantes resultantes del cálculo de los residuos. Por tanto, observamos que la sucesión resultante quedará esencialmente marcada por los polos de la función de transferencia cómo era de esperar.

Analizamos ahora el efecto que tienen los distintos tipos de polo en la respuesta del sistema ante la secuencia ponderatriz.

Influencia de los polos reales

Para una función de transferencia como la indicada en (6.12), donde los coeficientes de los polinomios de numerador y el denominador son reales, podemos analizar cuál es la contribución que realiza un polo p_r simple a la secuencia de respuesta mediante la extracción de su correspondiente sumando. Al ser real p_r , también lo será a_r , dadas las condiciones impuestas, y por tanto el término correspondiente a dicho polo será una progresión geométrica, de signo alternado en caso de ser un polo negativo (figura b), creciente para $|p_r| > 1$ (figura c) y decreciente para $|p_r| < 1$ (figura a).



Influencia de los polos complejos

Puesto que los polinomios de la función de transferencia del sistema, con significado físico, son polinomios de coeficientes reales, el hecho de tener una raíz compleja implica necesariamente la existencia de su raíz conjugada.

El coeficiente del polo conjugado será también un número complejo, que tendrá su conjugado en el coeficiente de la raíz conjugada correspondiente. Considerando estas propiedades, y mediante un desarrollo no excesivamente complejo, obtenemos la contribución de la pareja de polos complejos conjugados a la respuesta impulsional del sistema mediante la siguiente expresión:

$$2K|a_r||p_r|^{n-1} \cos((n-1)\theta_r + \varphi_r) \tag{ 6.16}$$

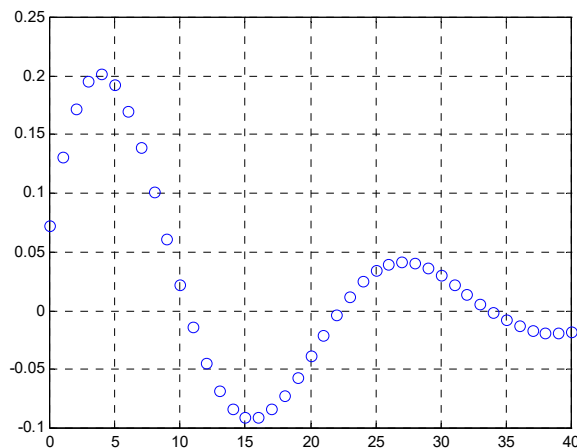
Esta es la expresión resultante de los dos sumandos correspondientes a la pareja de polos conjugados, en donde θ_r es el ángulo que forma el polo con el eje real, y φ_r es el ángulo del coeficiente a_r . Observamos que es el producto de una senoide por una exponencial, por lo que finalmente la contribución a la secuencia adoptará la siguiente forma:

```

%respuesta al impulso de un sistema de
%segundo orden con dos polos conjugados

den=poly([0.9+0.25j 0.9-0.25j]);
num=[polyval(den,1)];
r=zeros(1,41);
r(1)=1;
k=0:40;
c=filter(num,den,r);
plot(k,c,'o');
grid
pause

```



6.3.2 Respuesta ante una entrada escalón

Dado un sistema causal $G(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)}$, la respuesta ante un escalón de entrada

$u_k = \{1,1,\dots\}$ cuya transformada en Z es de la forma $U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ será la siguiente:

$$Y_n = \sum \text{Residuos} \left[K \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z}{z-1} z^{n-1} \right] \quad (6.17)$$

Al ser el sistema causal y considerando inicialmente todos los polos simples, obtenemos que la expresión (6.17) pasa a convertirse en:

$$Y_n = \sum \text{Residuos} \left[K \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z}{z-1} \right]_{z=p_r} p_r^{n-1} \quad (6.18)$$

El residuo correspondiente al polo $z = 1$ valdrá:

$$K \frac{P(1)}{Q(1)} \quad (6.19)$$

mientras que para las raíces p_r de $Q(z)$ los residuos adoptarán la expresión:

$$K \frac{P(p_r)}{Q'(p_r)} \frac{p_r}{(p_r - 1)} \quad (6.20)$$

De las expresiones (6.18)(6.19)(6.20), obtenemos finalmente la expresión de la secuencia resultado:

$$Y_n = K \frac{P(1)}{Q(1)} + K \sum_{r=1}^N a_r p_r^n \quad (6.21)$$

Secuencia que es estable siempre que $|p_r| < 1$. En este caso se observa que el valor final de la secuencia cuando el índice tiende al infinito es:

$$Y_\infty = K \frac{P(1)}{Q(1)} = G(1) \quad (6.22)$$

Resultado que lógicamente concuerda con el teorema del valor final definido para la transformada Z. Al valor de Y_∞ se le denomina ganancia estática.

Por ser $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios de coeficientes reales, la contribución de un polo real a la respuesta del sistema será:

$$K \frac{P(p_r)}{(p_r - 1)Q'(p_r)} \cdot p_r^n = K a_r p_r^n \quad (6.23)$$

mientras que si p_r es complejo y por tanto \bar{p}_r también es polo de $G(z)$ agrupando la aportación de ambos polos se obtiene que la contribución de la pareja es:

$$2K \left| \frac{P(p_r)}{(p_r - 1)Q'(p_r)} \right| |p_r|^n \cos(n\theta_r + \varphi_r) \quad (6.24)$$

Observamos por tanto el efecto análogo que tienen los polos reales y complejos con respecto a la respuesta impulsional.

Antes de entrar en detalle al análisis de la respuesta de los sistemas de primer y segundo orden, vamos a proceder, de igual manera a como se realiza en los sistemas

continuos, a ver los efectos de varios polos y ceros en una función de transferencia. El objetivo que buscamos, es la obtención de sistemas más simples y por tanto más fáciles de analizar.

6.4 Sistema reducido equivalente

Del análisis de las respuestas ante el escalón y el impulso puede deducirse lo siguiente:

1. Si un polo es comparativamente mucho más pequeño en módulo que los demás, su contribución a la respuesta total puede resultar despreciable.
2. Si existe un par polo-cero, entonces el coeficiente a_r correspondiente al polo se anula, o en caso de que se encuentren muy cerca se hace muy pequeño al ser raíz de $P(z)$. Por ello su contribución a la respuesta global del sistema puede también ser considerada despreciable.

Al igual que en los sistemas continuos esto permite la reducción del orden de un sistema para hacerlo más asequible desde el punto de vista del análisis, comportándose de forma análoga al sistema original.

Una de las características que debe cumplir un sistema reducido equivalente es que mantenga la ganancia estática original, de forma que el valor final sea el mismo. De esta forma, si el sistema que se desea reducir responde a la expresión:

$$G(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (6.25)$$

Para poder obtener un sistema reducido equivalente de la forma

$$\tilde{G}(z) = \tilde{K} \frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(z)} \quad (6.26)$$

Debe cumplirse que la ganancia estática sea la misma, es decir:

$$K \frac{P(1)}{Q(1)} = \tilde{K} \frac{\tilde{P}(1)}{\tilde{Q}(1)} \quad \text{y por tanto} \quad \tilde{K} = K \frac{P(1)}{Q(1)} \frac{\tilde{Q}(1)}{\tilde{P}(1)} \quad (6.27)$$

Sin embargo, para poder proceder a la eliminación de pares polo-cero o polos que parecen no ser dominantes, es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. La posible cancelación entre un cero y un polo depende especialmente de su posición respecto del punto $z=1$, puesto que el coeficiente de la exponencial que se consideró como despreciable viene afectado por la inversa de esta distancia:

$$a_r = \frac{P(p_r)}{(p_r - 1)Q'(p_r)} \quad (6.28)$$

2. Es necesario considerar la posición de del par polo-cero que se desea cancelar, respecto de los demás polos. Si el sistema inicial tiene la forma:

$$G(z) = K \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_m)}{(z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdot \dots \cdot (z - p_n)} \quad (6.29)$$

y se quiere eliminar el par z_l, p_j , obteniendo:

$$\tilde{G}(z) = K \frac{1 - z_l}{1 - p_j} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdot \dots \cdot (z - p_n)} \quad (6.30)$$

entonces, la contribución de un polo p_r a la respuesta total pasa de ser:

$$K \frac{1}{(p_r - 1)} \frac{\prod_{i=1}^m (p_r - z_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n (p_r - p_i)} p_r^n \quad (6.31)$$

a ser de la forma:

$$K \frac{1 - z_l}{1 - p_j} \cdot \frac{1}{(p_r - 1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p_r - z_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r, i \neq j}}^n (p_r - p_i)} p_r^n \quad (6.32)$$

es decir que si en (6.31) sustituimos :

$$\frac{p_r - z_l}{p_r - p_j} \quad (6.33)$$

por :

$$\frac{1 - z_l}{1 - p_j} \quad (6.34)$$

obtenemos (6.32). Por tanto, para poder decidir si la aproximación realizada al cancelar el par es válida, debemos comparar las expresiones (6.33) y (6.34). Por tanto, pares relativamente cercanos a $z=1$ ó pares cercanos a otro polo, pueden presentar problemas a la hora de considerarlos cancelables.

3. Por último para el caso de que se desee eliminar un polo comparativamente más pequeño en módulo que el resto, se observa procediendo de la misma forma que en el criterio anterior, que el coeficiente de un polo p_r , pasa de tener un factor de la forma:

$$\frac{1}{p_r - p_j} \quad (6.35)$$

a otro del tipo:

$$\frac{1}{1 - p_j} \quad (6.36)$$

y por tanto, en este caso habrá que comparar para cada polo restante el término (6.35) con el término (6.36) para ver el error cometido.

6.5 Caracterización de la respuesta temporal de sistemas de primer y segundo orden

Una vez introducidas las bases necesarias para el análisis de los sistemas discretos, vamos a realizar un pequeño estudio sobre los sistemas más característicos a los que la mayoría de los sistemas reales pueden ser reducidos. De la misma forma como se procedía con los sistemas continuos, mediante el estudio de los sistemas de primer y segundo orden, podemos establecer unas reglas que nos permitan predecir el comportamiento de la respuesta temporal de sistemas más complejos mediante el análisis de sus funciones de transferencia.

6.5.1 Sistemas de primer orden

El sistema discreto de primer orden más sencillo de considerar responde a la ecuación en diferencias:

$$y_n = ay_{n-1} + bx_n \tag{ 6.37}$$

cuya función de transferencia en Z, obtenemos a través de la transformada de dicha ecuación resultando:

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + bX(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{bz}{z-a} = \frac{b}{1-az^{-1}} \tag{ 6.38}$$

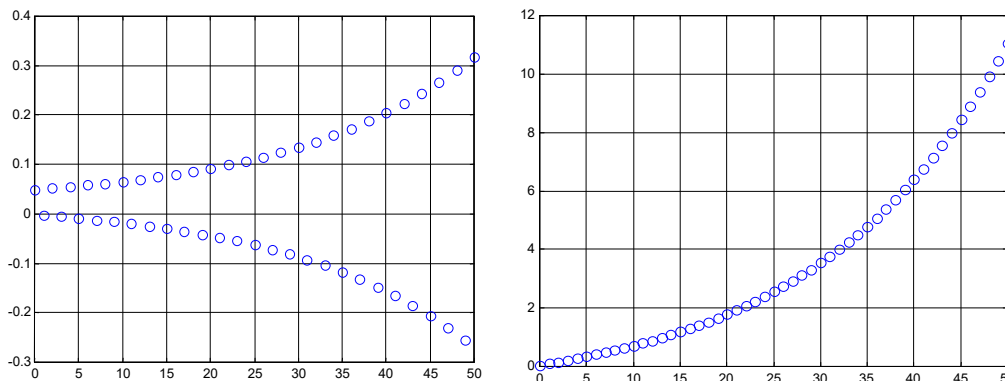
La respuesta de dicho sistema ante un escalón de entrada, vendrá dado según la expresión (6.21) por:

$$y_n = \frac{b}{1-a} + b \frac{P(a)}{(a-1)Q'(a)} a^n = \frac{b}{1-a} (1-a^{n+1}) \tag{ 6.39}$$

El valor inicial será el resultante de sustituir n por 0, siendo:

$$y_0 = b \tag{ 6.40}$$

El sistema se comportara de distinta forma en función de los valores que adopte a . Para valores de $a \in (-\infty, -1)$, el sistema resultará inestable y oscilante, como se muestra en la primera figura. Valores de $a \in (1, \infty)$ generarán una respuesta inestable consistente en una exponencial creciente, como se muestra en la segunda figura.



Sin embargo, el verdadero interés reside en los valores del polo que hacen estable al sistema. Como en las figuras siguientes se muestra, es importante destacar la diferencia existente entre el plano real positivo y el negativo. Así, para valores del polo inferiores en módulo a la unidad y de valor positivo, la respuesta resultante de aplicar una secuencia escalón unitario al sistema, recuerda a la respuesta que en sistemas continuos tienen las funciones de transferencia de primer orden.

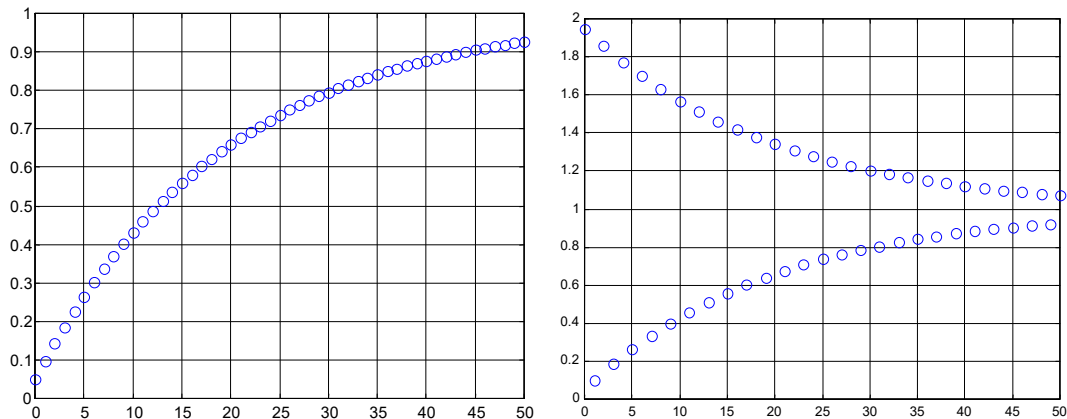
Si siguiendo esta analogía, la función continua que recorre los puntos de esta secuencia adoptaría la forma siguiente:

$$y(\tau) = \frac{b}{1-a} (1 - e^{(\tau+1)\log a}) \quad (6.41)$$

Sin embargo, para valores de a que siendo inferiores en módulo a la unidad, son negativos, la respuesta obtenida es oscilatoria aunque decreciente. Una función continua cuyo muestreo puede dar como resultado la secuencia de respuesta, adoptaría la siguiente forma:

$$y(\tau) = \frac{b}{1-a} (1 - e^{(\tau+1)\log(-a)} \cos(\pi(\tau+1))) \quad (6.42)$$

Ambas respuestas pueden observarse respectivamente en las siguientes dos figuras:



Al igual que en los sistemas continuos, los sistemas de primer orden, quedan prácticamente caracterizados por los valores de su tiempo de establecimiento (directamente relacionado con la constante de tiempo), y el valor final o ganancia estática del sistema. De forma análoga procedemos con los sistemas discretos, en los que hay que establecer además la característica de si el sistema es o no oscilatorio.

El índice de establecimiento – puesto que estamos hablando de secuencias- queda definido como el valor del índice de la secuencia a partir del cual la respuesta queda comprendida entre la banda de $\pm 5\%$ de su valor final.

De la expresión (6.39) obtenemos que esto es traducible a afirmar que:

$$a^{n+1} < 0,05 \quad \forall a - |a| < 1$$

por tanto:

$$n_s + 1 \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(a)} \Rightarrow n_s \geq \frac{3}{-\ln(a)} - 1 \quad (6.43)$$

Sin embargo, esto daría un valor del índice real, lo cual carece de sentido cuando se trata de secuencias. Por tanto de forma más matemática puede ser expresado de la siguiente forma:

$$n_s = \frac{3}{-\ln(a)} - 1 + q_s \quad \text{con} \begin{cases} n_s \in Z \\ 0 \leq q_s < 1 \end{cases} \quad (6.44)$$

Que es lo mismo que afirmar que el índice de establecimiento es $\frac{3}{-\ln(a)}$ redondeado al entero más pequeño.

Habría que destacar por tanto, que tanto para valores estables de a positivos o negativos, los sistemas serán más rápidos, es decir, se amortiguarán antes, cuanto menores sean los valores de a en módulo, lo que equivale en el plano S a que estén los polos situados más a la izquierda.

Los modelos utilizados para representar la respuesta de los cuatro tipos de sistemas de primer orden expuestos se han obtenido a través de las siguientes instrucciones en MatLab:

```
%respuesta al escalon de diversos sistemas de primer orden
r=ones(1,51);
k=0:50;
disp('inestable y oscilatorio')
den=[1 1.05];
num=[0.05];
c=filter(num,den,r);
plot(k,c,'o');grid;
pause
disp('inestable y no-oscilatorio')
den=[1 -1.05];
c=filter(num,den,r);
plot(k,c,'o');grid;
pause
disp('estable y no-oscilatorio')
den=[1 -0.95];
c=filter(num,den,r);
plot(k,c,'o');grid;
pause
disp('estable y oscilatorio')
den=[1 0.95];num(1)=1.95;
c=filter(num,den,r);
plot(k,c,'o');grid;
pause
```

6.5.2 Sistemas de segundo orden

El sistema de segundo orden más sencillo que podemos considerar responde a la siguiente ecuación en diferencias genérica:

$$y_n + ay_{n-1} + by_{n-2} = cx_n \quad (6.45)$$

cuya función de transferencia en Z, obtenemos a través de la transformada de dicha ecuación resultando:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} = \frac{cz^2}{z^2 + az + b} \quad (6.46)$$

Se pueden distinguir dos casos claramente diferenciables. En primer lugar se estudiará el caso de dos polos reales, y en segundo lugar el caso en que ambos polos sean complejos conjugados.

Dos polos reales simples α_1 y α_2

Es el caso más sencillo, y en la mayoría de las situaciones pasa a ser considerada como un sistema de primer orden, cuyo polo coincide con el polo dominante del sistema y de la misma ganancia estática. Un sistema de segundo orden con dos polos reales podrá ser expresado de la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{cz^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \quad (6.47)$$

Siendo su respuesta ante una entrada escalón unitario la siguiente:

$$y_n = \frac{c}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} + \frac{c\alpha_1^2}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \alpha_1^n + \frac{c\alpha_2^2}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \alpha_2^n \quad (6.48)$$

Observamos por tanto, que el valor inicial de respuesta ante la entrada escalón de dicho sistema es:

$$y_0 = c \quad (6.49)$$

El valor de la ganancia estática viene dado por $G(1)$ o bien por el límite de la secuencia y_n , y es el determinado por la expresión:

$$\frac{c}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \tag{6.50}$$

Dos polos complejos conjugados

Para el estudio de los sistemas de segundo orden con polos complejos, se va a suponer, de forma análoga a como se procede en el caso continuo, que la función de transferencia no tiene ceros, y que sus polos complejos conjugados vienen expresados por:

$$p_1 = e^{-\sigma} e^{j\vartheta} \text{ y } p_2 = e^{-\sigma} e^{-j\vartheta} \tag{6.51}$$

Esta notación establece paralelismos con la notación utilizada para el caso continuo respetando la transformación entre el plano S y el plano Z . A estos polos les corresponderá la siguiente función de transferencia en Z de segundo orden:

$$G(z) = \frac{K}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cdot \cos\theta \cdot z + e^{-2\sigma}} \tag{6.52}$$

La respuesta ante un escalón unitario de este sistema, según la expresión (6.21) y la (6.24) vendrá dada por:

$$y_n = K \frac{P(1)}{Q(1)} + 2K \left| \frac{P(p)}{(p-1)Q'(p)} \right| |p|^n \cos(n\vartheta + \varphi) \tag{6.53}$$

donde φ es la fase del coeficiente $\frac{P(p)}{(p-1)Q'(p)}$. Si el término $(p-1)$ lo expresamos según la notación compleja dada por

$$(p-1) = |p-1| e^{j\gamma} \tag{6.54}$$

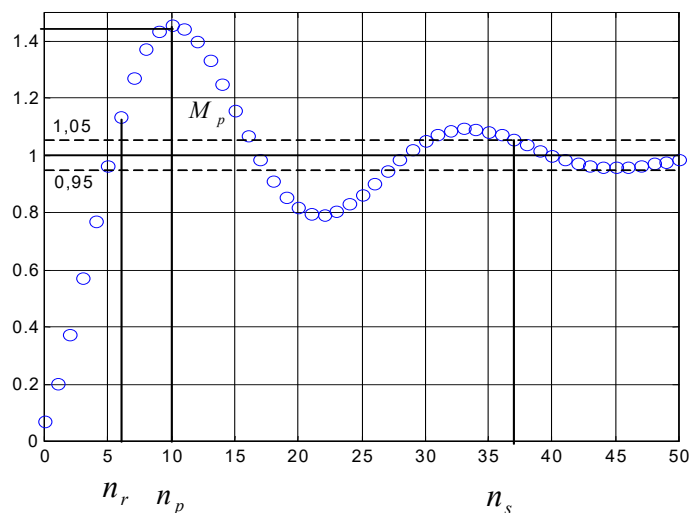
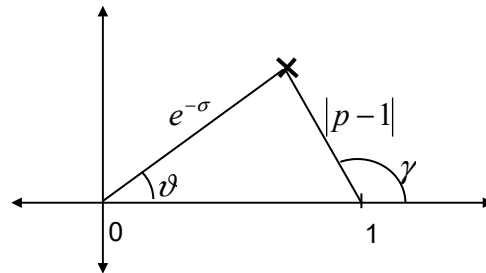
para este caso dicho término adopta la expresión:

$$\frac{P(p)}{(p-1)Q'(p)} = \frac{0,5}{|p-1| e^{-\sigma} \sin\vartheta} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)} \tag{6.55}$$

por tanto el ángulo $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \gamma$, y por tanto sustituyendo en (6.53), obtenemos finalmente la expresión de la respuesta que viene dada por:

$$\begin{aligned}
 y_n &= \frac{K}{1 - 2e^{-\sigma} \cos \vartheta + e^{-2\sigma}} + \frac{K}{|p-1|e^{-\sigma} \sin \vartheta} e^{-n\sigma} \cos(n\vartheta - \frac{\pi}{2} - \gamma) = \\
 &= \frac{K}{1 - 2e^{-\sigma} \cos \vartheta + e^{-2\sigma}} + \frac{K}{|p-1|e^{-\sigma} \sin \vartheta} e^{-n\sigma} \sin(n\vartheta - \gamma)
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

De esta forma, tenemos perfectamente definida la respuesta ante un escalón de un sistema de segundo orden con polos complejos conjugados, en función de la posición de dichos polos en el plano Z. Los parámetros obtenidos de dicha posición y utilizados en la expresión (6.56), pueden ser fácilmente recordados por la siguiente representación gráfica:



Gráficamente la respuesta de dicho sistema será del siguiente estilo:

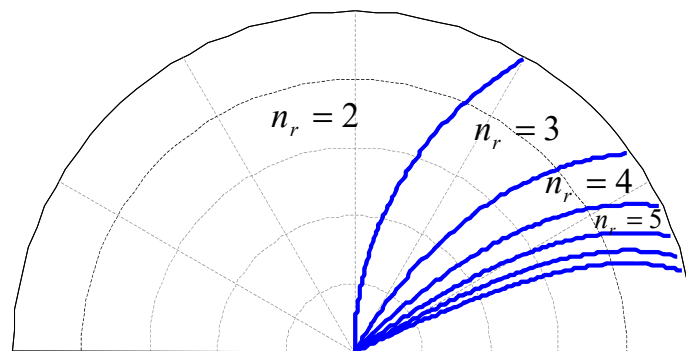
De forma similar a los sistemas continuos, se definen una serie de parámetros fundamentales que sirven para caracterizar la respuesta temporal del sistema. Estos son los siguientes:

1. **Índice de subida** n_r : Se define como el número de elementos que, ante una entrada escalón, necesita la respuesta para pasar del 10% al 90% del valor final. En los sistemas de segundo orden oscilatorios, se suele modificar esta definición, pasando a significar el índice del primer elemento que alcanza o supera el 100% del valor final. La expresión matemática del índice dada por (6.57), se obtiene de igualar el valor final con la expresión general de los términos de la secuencia.

$$n_r = \frac{\gamma}{\vartheta} + q_r \quad \text{con} \begin{cases} 0 \leq q_r < 1 \\ q_r \in Z \end{cases} \quad (6.57)$$

Se puede utilizar Matlab para ver el los lugares geométricos correspondientes a los distintos índices de subida:

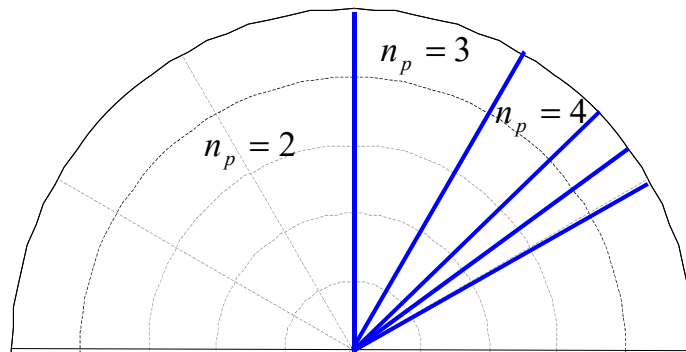
```
%funcion para obtener el lugar geométrico de nr
modulo=0:.01:0.99
v=0:99;
l=[0 1.7 1.0 0.8 0.6 0.5 0.35]
a=0
f=inline('tan(pi-theta*nr)-mod*sin(theta)/(1-mod*cos(theta))',
        'theta','mod','nr');
for i= 2:7
    for j= 1:100
        x=fzero(f,l(i), [],j/100,i);
        v(j)=x;
    end
    polar(v,modulo)
    if a==0 hold
        a=1
    end
end
hold
```



2. **Índice de pico n_p** : Se define como el índice del elemento máximo de la secuencia ante una entrada en escalón. Este índice lo obtenemos comprobando cuando la diferencia $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, se hace negativa o igual a cero por primera vez. En los sistemas continuos equivaldría al cálculo de la derivada de la señal, la cual igualamos a cero para obtener los máximos y mínimos locales. El primer valor corresponderá para un sistema de segundo orden de fase mínima subamortiguado con la máxima sobreoscilación. La expresión final obtenida será:

$$n_p = \frac{\pi}{\vartheta} + q_p \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq q_p < 1 \\ q_p \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.58)$$

El lugar geométrico sobre el plano Z de los distintos valores de n_p resultan ser mucho más sencillos de calcular, puesto que es función directa de ϑ . Por no quedar afectados por el valor del módulo, finalmente a cada sector del círculo unitario le corresponderá un determinado índice de pico. La siguiente figura muestra estos valores:



3. **Sobreoscilación máxima M_p** : Se define como el porcentaje del valor final que sobrepasa el valor del máximo. Es decir, $M_p [\%] = 100 \frac{y_{n_p} - y_\infty}{y_\infty}$. Desarrollando esta expresión, obtenemos el valor de M_p en función de los valores característicos de los polos:

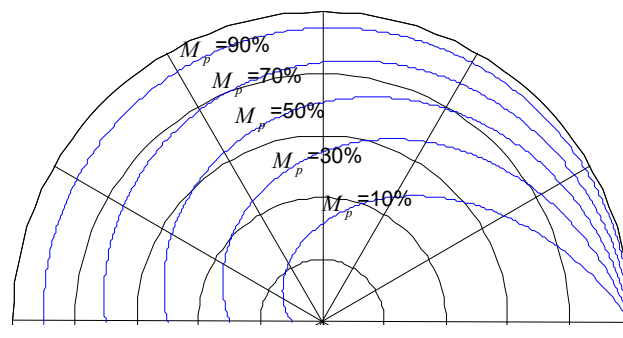
$$M_p [\%] = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\sigma}{\vartheta}} = 100 \cdot |p|^{n_p} \tag{6.59}$$

Hay que destacar, que la expresión (6.59), se ha obtenido suponiendo que hay un punto de la secuencia que está situado justo en el máximo de la función continua que recorre la secuencia (es decir $q_p = 0$). Si quisiéramos el valor exacto, la expresión adoptaría la siguiente forma:

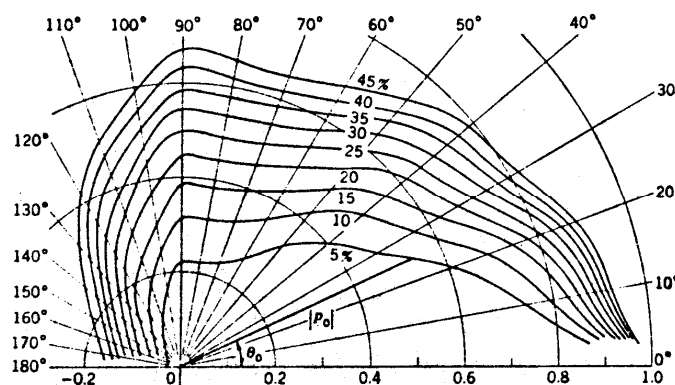
$$M_p [\%] = \left(\cos(q_p \vartheta) + \frac{1 - e^{-\sigma} \cos \vartheta}{e^{-\sigma} \sin \vartheta} \sin(q_p \vartheta) \right) e^{-\sigma \left(\frac{\pi}{\vartheta} + q_p \right)} \tag{6.60}$$

Por su misma complejidad, es más lógico en este caso aplicar la misma definición de sobreoscilación para obtener un valor numérico.

Mediante Matlab, representamos las curvas para distintos valores de sobreoscilación máxima, utilizando la expresión (6.59).



Si en vez de tomar la formulación aproximada, adoptamos la fórmula exacta, la figura resultante mucho más compleja sería la siguiente, obtenida de un ábaco para sistemas discretos:



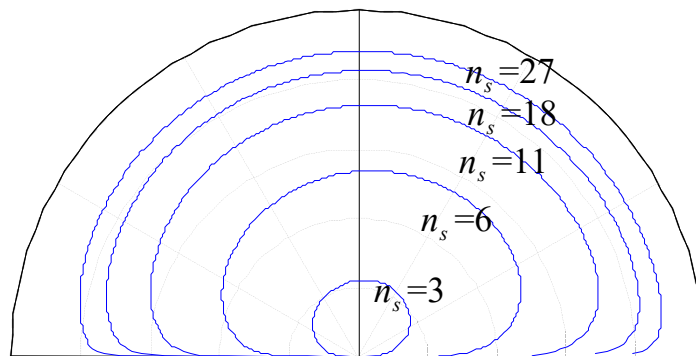
4. **Índice de establecimiento** n_s : Se define como el valor del índice del primer elemento de la secuencia de salida ante una entrada escalón, a partir del cual la respuesta se mantiene en la banda de $\pm 5\%$ de su valor final. Para valores de γ tales que $\sin \gamma \approx 1$, obtenemos como solución:

$$n_s = \frac{\pi}{\sigma} + q_s \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq q_s < 1 \\ q_s \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.61)$$

Para valores de γ cualesquiera, la solución, se obtiene habitualmente por medio de ábacos, puesto que no es posible la obtención de una solución analítica.

Si utilizamos de nuevo MatLab, para mostrar la solución real, tendremos:

```
%funcion para obtener el lugar geométrico de nr
indice=floor(pi*100)
angulo=0:floor(pi*100);
modulo=0:floor(pi*100);
l=[0 1.7 1.0 0.8 0.6 0.5 0.35]
f=inline('mod^ns-0.05*mod*sin(theta)/sqrt((1-mod*cos(theta))^2 +
(mod*sin(theta))^2)', 'mod', 'theta', 'ns');
%dibujo el semicirculo
for j= 1:(indice+1)
    angulo(j)=(j/100);
    modulo(j)=1;
end
polar(angulo,modulo)
hold
for i= 1:1:5
    for j= 1:(indice+1)
        angulo(j)=(j/100);
        x=fzero(f,0.5, [], angulo(j), 2+i*i);
        modulo(j)=x;
    end
    polar(angulo,modulo)
end
hold
```



Como norma general por la forma de las curvas se puede concluir entonces, que en la medida en que los polos dominantes del sistema se encuentran más lejos del origen, el sistema es más lento. Esto concuerda con lo deducido en el epígrafe del sistema reducido equivalente, mediante el análisis de los elementos a los que daba lugar cada polo tras aplicar la transformada inversa en Z .

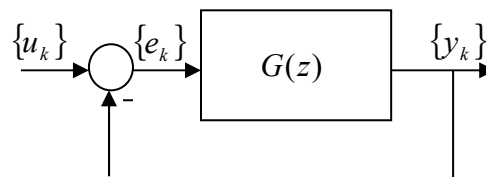
6.6 Errores en régimen permanente de sistemas discretos

Una de las características más importantes de un sistema de control es la precisión que el mismo logra en su acción. Es decir, en que medida se diferencia el desempeño del sistema logrado por el control realizado frente al deseado.

Se define como error en régimen permanente de un sistema a la diferencia entre el valor deseado en la salida y su valor real. En el caso de sistemas con realimentación unitaria, se puede definir la secuencia de error como:

$$\{e_k\} = \{u_k\} - \{y_k\} \quad (6.62)$$

correspondiendo estas secuencias a las indicadas en la siguiente figura:



Operando en el plano Z se obtendrá la expresión del error ante cualquier entrada según la expresión siguiente:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} U(z) \Rightarrow$$

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} U(z) \quad (6.63)$$

Sin embargo, de cara a la clasificación y análisis directo de la precisión de los sistemas de control discreto, se procede de forma análoga a la seguida en los sistemas continuos ponderando el efecto sobre la serie de error del sistema ante distintas entradas estándar. Esto además permite la clasificación por tipos de sistema, en función precisamente del comportamiento de los mismos ante las distintas entradas.

A continuación se observa como el concepto de tipo aplicado al campo continuo es válido también para el campo discreto. Se recuerda que el tipo de un sistema realimentado,

se definía como el número de integradores puros del sistema en cadena abierta, es decir el exponente n del término s^n del denominador. De la misma forma, los sistemas de control en tiempo discreto podrán clasificarse según el número de polos en lazo abierto en $z = 1$, que significa un integrador puro en los sistemas discretos.

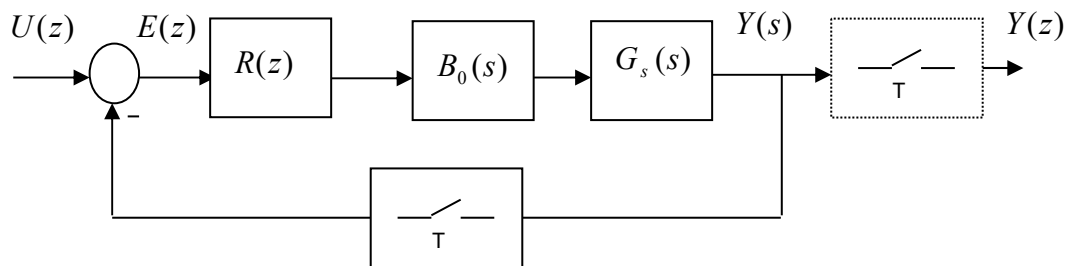
Expresando la función de transferencia en lazo abierto del sistema de la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{con } A(1) \neq 0, B(1) \neq 0 \quad (6.64)$$

Entonces el sistema se puede clasificar como de tipo 0, tipo 1, tipo 2, etc, en función del valor de N .

Los índices que determinan el comportamiento estático del error ante las distintas secuencias de prueba, se denominan constantes de error. Respectivamente, las secuencias escalón de rampa y parábola, generan las constantes de error de posición, velocidad y aceleración. Se verá con un poco más de detalle cada uno de estos aspectos del error.

Para realizar la exposición se utilizará el siguiente sistema con realimentación unitaria como modelo:



Este sistema, tendrá como función de transferencia total:

$$M(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{R(z)BG_s(z)}{1 + R(z)BG_s(z)} \quad (6.65)$$

Por tanto, si llamamos $G(z)$ a la función de transferencia en cadena abierta:

$$G(z) = R(z)BG_s(z) \quad (6.66)$$

entonces, la expresión (6.65) puede expresarse de la forma:

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (6.67)$$

Siendo por tanto equivalente al descrito al principio del epígrafe. La transformada de la secuencia del error cumple entonces:

$$E(z) = U(z) - Y(z) = U(z) - U(z)M(z) = U(z) \left(1 - \frac{G(z)}{1 + G(z)} \right) = \frac{1}{1 + G(z)} U(z) \quad (6.68)$$

6.6.1 Error de posición. Constante de error de posición.

El error de posición queda determinado por el error en régimen permanente del sistema ante una entrada en escalón. Por tanto, siendo la secuencia escalón unitario

$$\{U_k\} = \{1_k\} \quad (6.69)$$

Y su transformada en Z

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (6.70)$$

el error de posición del sistema vendrá dado por el teorema del valor final

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} \quad (6.71)$$

Definiendo K_p como constante de error de posición el límite (6.72)

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (6.72)$$

el error de posición e_p vendrá determinado por la siguiente expresión:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} \Rightarrow e_p [\%] = 100 \frac{1}{1 + K_p} \quad (6.73)$$

Según esta expresión, si el sistema es de tipo cero, entonces el límite (6.72) es finito, y coincide con la ganancia estática del sistema. Por lo que en la medida en que se incrementa dicha ganancia el error disminuye. Si $G(z)$ es de tipo mayor que cero, entonces el límite pasa a valer infinito, por lo que el error de posición es nulo.

6.6.2 Error de velocidad. Constante de error de velocidad.

Siendo T el periodo de muestreo del sistema considerado, se define como secuencia rampa unitaria aquella que resulta del muestreo de una rampa unitaria continua, y por tanto:

$$u_k = kT \quad \forall k \geq 0 \quad (6.74)$$

La transformada Z de esta secuencia tiene por transformada:

$$U(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (6.75)$$

Se denomina error de velocidad del sistema realimentado, al valor final del error ante la entrada rampa unitaria. Aplicando de nuevo el teorema del valor final se obtiene que el error en velocidad e_v toma la siguiente expresión:

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1) + (z-1)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G(z)} \quad (6.76)$$

Definiendo la constante de error de velocidad K_v como

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) \quad (6.77)$$

Entonces el error de velocidad e_v viene dado por

$$e_v = \frac{T}{K_v} \quad (6.78)$$

Si el sistema es de tipo cero, entonces el límite (6.77) valdrá cero, y por tanto el error tenderá a ser ∞ . Si el sistema es de tipo uno, entonces dicho límite adoptará un valor finito, y dará un error de velocidad no nulo. Por último, para sistemas de tipo superior, el límite se hará infinito por lo que el error en velocidad será nulo.

6.6.3 Error de aceleración. Constante de error de aceleración.

Se define el error de aceleración, como el error observado ante una entrada de la secuencia de parábola, resultante del muestreo de una parábola unitaria continua.

Por tanto, siendo la entrada la secuencia parábola unitaria,

$$u_k = \frac{1}{2}(kT)^2 \quad \forall k \geq 0 \tag{6.79}$$

cuya transformada en Z viene dada por,

$$U(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \tag{6.80}$$

el error de aceleración resultará ser:

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 G(z)} \tag{6.81}$$

Definiendo la constante de error de aceleración K_a como:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) \tag{6.82}$$

entonces el error de aceleración adoptará la expresión:

$$e_a = \frac{T^2}{K_a} \tag{6.83}$$

Por tanto, para sistemas de tipo inferior a dos, el límite (6.82) valdrá cero, por lo que el error de aceleración tenderá hacia ∞ . Para sistemas de tipo dos, adoptará un valor finito, mientras que para sistemas de tipo superior, el error de aceleración será nulo.

La siguiente tabla muestra un resumen de los distintos errores en función del tipo.

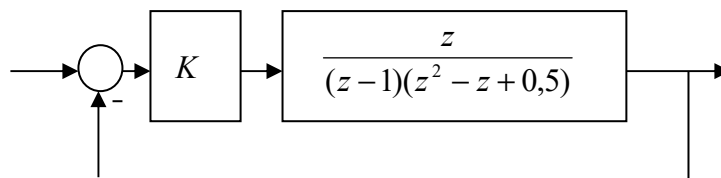
Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{T}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$
3 ó más	0	0	0

Dada la definición del error establecida, para sistemas con realimentación no unitaria, será necesario incluir la influencia de la función de transferencia de la realimentación, tanto como si es de carácter estático como dinámico. Por ello la forma más segura de proceder es establecer mediante operaciones sobre el diagrama de bloques una equivalencia con el sistema realimentado unitariamente.

Problema.

Dado el sistema discreto de la figura, se pide:

- 1.- Valores de K que hacen el sistema estable.
- 2.- Sistema de orden reducido equivalente para $K = K_{\max} / 1,25$.
- 3.- Calcular el valor del índice de establecimiento, índice de pico, sobreoscilación e índice de subida de la respuesta ante la secuencia escalón.
- 4.- Determinar los errores de posición, velocidad y aceleración si el periodo de muestreo es de 1s.



1.- Para poder aplicar el criterio de Jury, es necesario calcular la ecuación característica del sistema en cadena cerrada:

$$M(z) = \frac{kz}{(z-1)(z^2 - z + 0,5)} \Rightarrow D(z) = z^3 - 2z^2 + (1,5 + k)z - 0,5 = 0$$

$$1 + \frac{kz}{(z-1)(z^2 - z + 0,5)}$$

Aplicamos Jury al polinomio característico $D(z)$:

Jury 1: $|-0,5| < 1$

Jury 2: $D(1) = 1 - 2 + 1,5 + k - 0,5 > 0 \Rightarrow K > 0$

Jury 3: $D(-1) = -1 - 2 - (1,5 + K) - 0,5 < 0 \Rightarrow K > -5$

Jury 4: La tabla de Jury será la siguiente:

-0,5	1,5 + K	-2	1
1	-2	1,5 + K	-0,5
-0,75	1,25 - 0,5K	-0,5 - K	
-0,5 - K	1,25 - 0,5K	-0,75	

Aplicando el cuarto criterio obtenemos:

$$|-0,75| > |-0,5 - K| \Rightarrow K < 0,25$$

Por tanto el sistema es estable $\forall K \in (0, 0.25)$

2.- Se pide el sistema reducido equivalente para $K = \frac{K_{\max}}{1,25} = \frac{0,25}{1,25} = 0,2$.

Calculamos la función de transferencia del sistema en cadena cerrada con este valor del regulador proporcional:

$$D(z) = z^3 - 2z^2 + 1,7z - 0,5 \Rightarrow D(z) = (z - 0,55)((z - 0,72)^2 + 0,61^2)$$

$$M(z) = \frac{0,2z}{(z - 0,55)((z - 0,72)^2 + 0,61^2)}$$

Observamos cómo comparativamente los polos complejos están mucho más cerca del círculo unidad que el polo real:

$$1 - |0,72 + 0,61j| = 0,06 \ll 1 - 0,55 = 0,45$$

Por tanto se establece un sistema reducido equivalente del tipo:

$$M(z) \approx M_{eq}(z) = \tilde{K} \frac{0,2z}{(z - 0,72)^2 + 0,61^2} = \tilde{K} \frac{0,2z}{z^2 - 1,44z + 0,89}$$

Se realiza el ajuste de la ganancia estática:

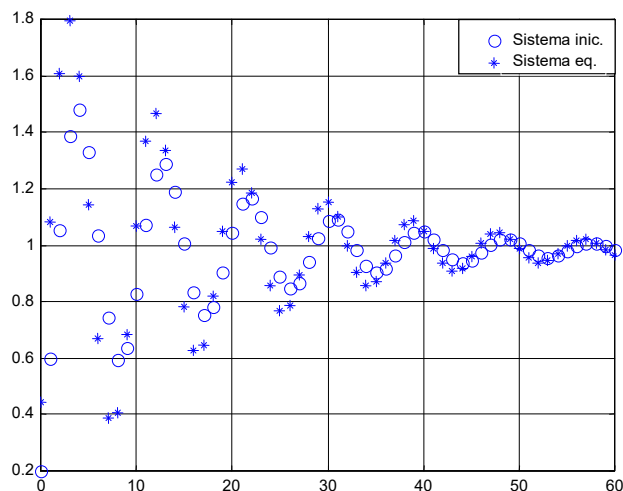
$$\lim_{z \rightarrow 1} M(z) = \lim_{z \rightarrow 1} M_{eq}(z) \Rightarrow 0,98 = 0,44 \cdot \tilde{K}$$

$$\tilde{K} = \frac{0,98}{0,44} = 2,22$$

Por tanto M_{eq} será:

$$M_{eq} = \frac{0,44z}{z^2 - 1,44z + 0,89}$$

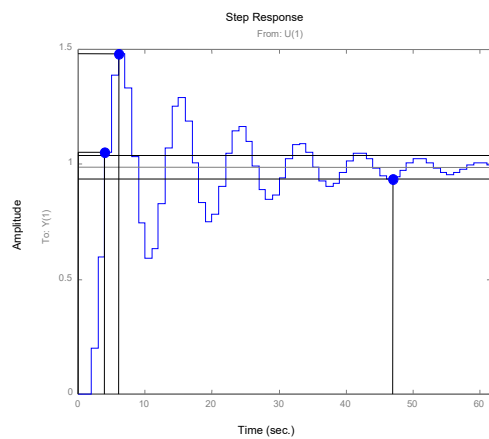
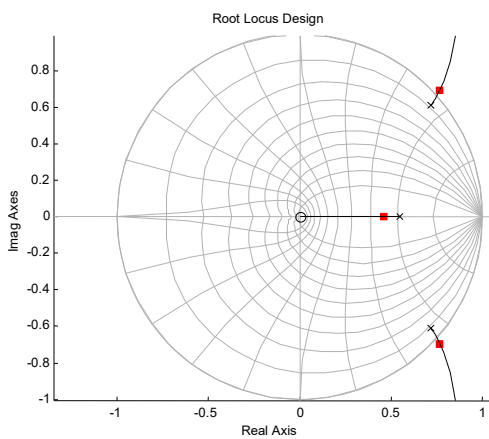
Utilizamos MatLab para realizar una comparación de la respuesta al escalón:



Observamos como en el sistema equivalente tenemos mayor sobreoscilación, pero el resto de parámetros permanece prácticamente igual.

3.- Realizamos ahora el cálculo de los índices que caracterizan la señal de respuesta. Antes de proceder al cálculo teórico, se va a utilizar MatLab para extraer estos resultados sobre la función de transferencia real. Para ello utilizaremos la herramienta *rltool* pero esta vez aplicada sobre los sistemas discretos.

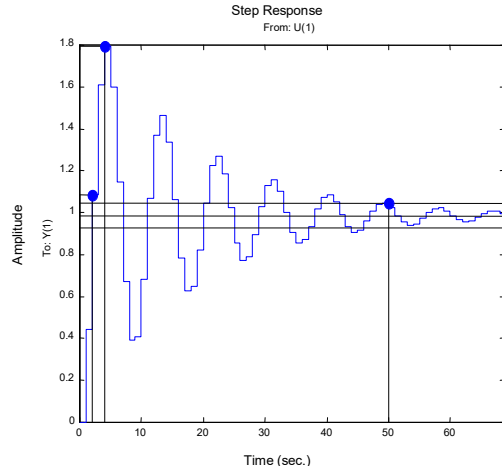
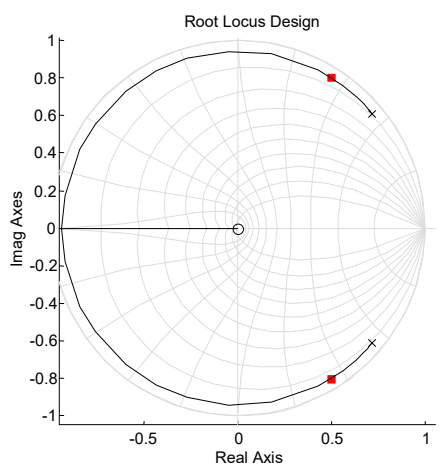
```
%uso de rltool para sistemas discretos
den=poly([0.72+0.61j 0.72-0.61j 0.55]);
num=[0.2 0];
%establecemos T=1, puesto que de momento el ejercicio es atemporal
g=tf(num,den,1);
rltool(g);
```



Mediante esta herramienta obtenemos la respuesta al escalón del sistema original, arrojando:

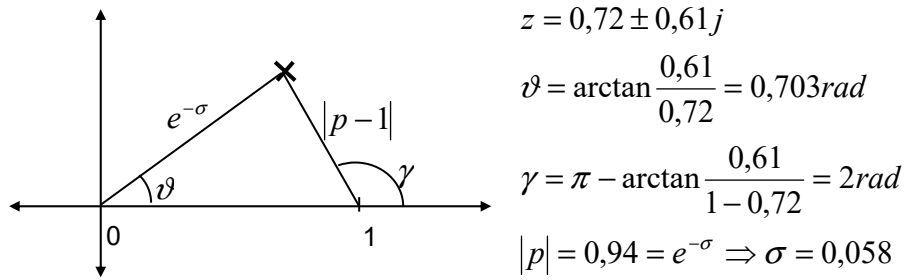
$$n_s = 47 \quad n_p = 6 \quad n_r = 2 \quad M_p = 48\%$$

Para el sistema reducido obtendremos:



$$n_s = 50 \quad n_p = 4 \quad n_r = 2 \quad M_p = 80\%$$

Vamos a realizar la deducción teórica de estos mismos parámetros a través del sistema reducido equivalente:



$$z = 0,72 \pm 0,61j$$

$$\vartheta = \arctan \frac{0,61}{0,72} = 0,703 \text{ rad}$$

$$\gamma = \pi - \arctan \frac{0,61}{1 - 0,72} = 2 \text{ rad}$$

$$|p| = 0,94 = e^{-\sigma} \Rightarrow \sigma = 0,058$$

$$n_s = \frac{\pi}{\sigma} + q_s = 54,21 + q_s = 55$$

$$n_r = \frac{\gamma}{\vartheta} + q_r = 2,85 + q_r = 3$$

$$n_p = \frac{\pi}{\vartheta} + q_p = 4,47 = 5$$

$$M_p = 100 \cdot |p|^{n_p} = 74,83\%$$

Sin embargo, recordemos que para el modelo utilizado en el análisis de sistemas de segundo orden, se utilizó un sistema determinado por la función de transferencia indicado en (6.52), la cual carece de ceros en el origen. Por la teoría de la transformada en Z, se deduce que los ceros en el origen, significan un adelanto de la secuencia en una unidad. Teniendo este cero en cuenta, los valores previstos mediante el sistema reducido para los parámetros característicos serán:

$$n_s = 54 \quad n_r = 2 \quad n_p = 4 \quad M_p = 74,83\%$$

Estos resultados prácticamente coinciden con los simulados a pesar de las expresiones aproximadas utilizadas para el cálculo de los índices.

4.- Por tener el sistema en cadena abierta un polo en $z = 1$, será de tipo I. Por tanto el error de posición es nulo, y el error de aceleración es infinito. El único error que toma un valor finito es el de velocidad que obtendremos a través de las expresiones (6.77)(6.78), con un periodo de muestreo de 1s.

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)R(z)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0,2z}{(z - 1)(z^2 - z + 0,5)} = 0,4$$

$$e_v = \frac{T}{K_v} = 2,5$$

7 Diseño de reguladores discretos.

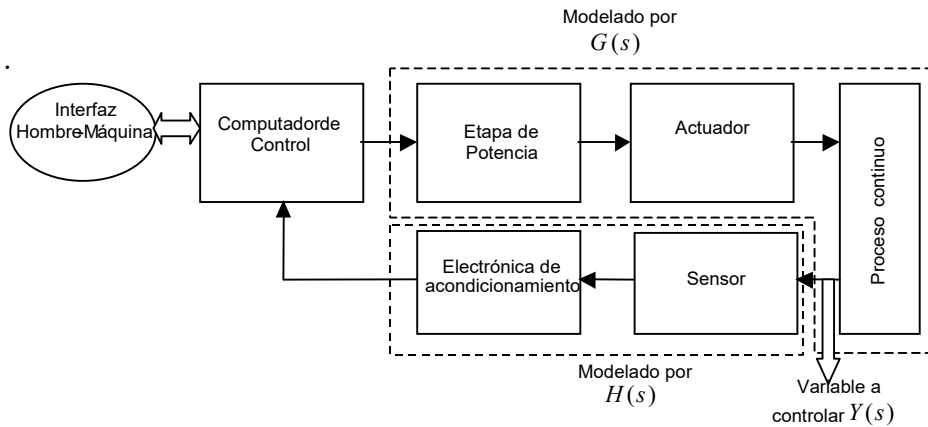
De la misma forma a como se procedía en los sistemas continuos, los capítulos anteriores han servido para establecer las herramientas de análisis necesarias para abordar el diseño de reguladores discretos. La finalidad de estos, es lograr que el comportamiento del sistema a controlar mejore cualitativamente tras la inclusión del sistema de regulación.

7.1 Consideraciones generales

A menudo, la utilización de controladores analógicos para regular el comportamiento de un determinado proceso, queda fuertemente limitado por las posibilidades físicas de la tecnología utilizada para su implementación. Al trabajar en el campo discreto, y ser finalmente un algoritmo desarrollado por un procesador o sistema análogo el que realiza los cálculos de las acciones de control, estas limitaciones quedan establecidas exclusivamente a las etapas de entrada y salida que permiten al sistema de control interactuar con el proceso. Esta limitación es mucho menor, y lo que es más importante, queda en cierta medida oculta a los ojos del diseñador, permitiendo un desarrollo más libre de las limitaciones físicas que habitualmente aparecen al trabajar en los sistemas continuos.

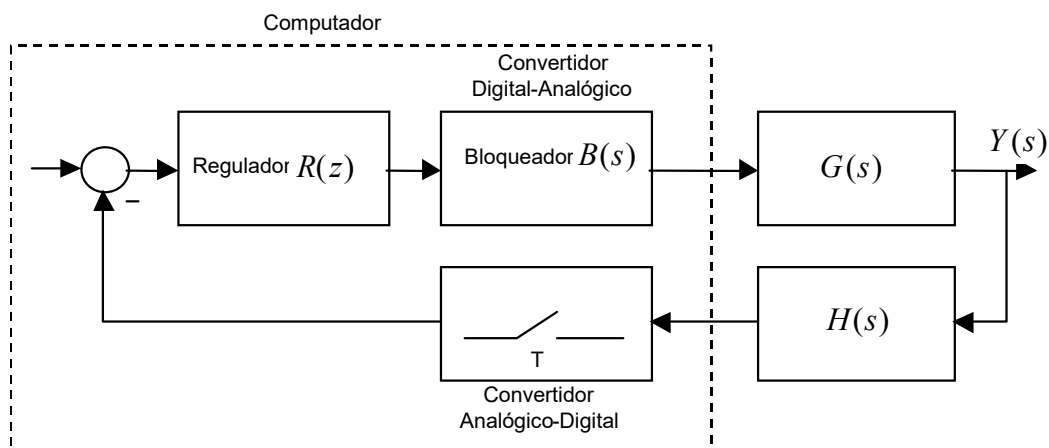
Por lo tanto, muchos sistemas de control que han sido imposibles con controles analógicos, si que se han podido realizar mediante sistemas discretos de control. Mediante el uso de controladores discretos, pueden desarrollarse reguladores capaces de fijar el comportamiento de la secuencia de error del proceso para que esta sea cero a partir de un determinado índice y se mantenga en cero desde ese momento.

Un esquema de control discreto básico es el presentado en la siguiente figura.



Habitualmente se tendrá un proceso de continuo del cual se quiere controlar alguna de sus variables (una articulación de un robot). Para ello disponemos de un sistema de actuación (el correspondiente motor) que será controlado por el computador de control. Evidentemente el computador no está preparado para suministrar la potencia eléctrica requerida por el sistema de actuación, y es necesaria una etapa de potencia que adapte la señal de salida generada por el control a esta. En el lazo de realimentación se tendrá un sistema sensorial, y habitualmente una etapa de acondicionamiento que adapta la medida del sensor a los niveles e impedancias de entrada que permitan conectarlo al sistema de control. Las consignas de referencia son generadas por el propio computador en función de una acción directa del operador a través de una interfaz, o bien a través de unas directrices establecidas anteriormente.

Como se muestra en la figura, a menudo se agrupan estos elementos en dos funciones de transferencia continuas: por una lado al FDT que modela la planta y por otro la que modela la captación de la señal. La siguiente figura muestra el mismo esquema de control, desde un punto de vista más matemático:



Para que el sistema de control digital pueda interactuar con los dispositivos físicos de la planta, es necesario el uso de convertidores digitales-analógicos CDA, y convertidores analógicos-digitales CAD, puesto que el computador trabaja con valores numéricos codificados de forma digital, mientras que las señales del proceso son de

naturaleza analógica. Se puede establecer una cierta correspondencia entre el CDA y el bloqueador, puesto que la funcionalidad de ambos es reconstruir la señal, y entre el CAD y el muestreador, que se encargan de obtener las secuencias a partir de la señal continua. Ambos convertidores trabajan a la misma frecuencia correspondiente al periodo T del muestreo.

En cuanto el regulador en sí mismo, se realiza su implementación a través de un programa realizado en un lenguaje de programación, ya sea de alto o bajo nivel. El proceso se suele realizar sobre procesadores específicos, DSP, o sobre la propia CPU del ordenador. Antes de proceder estrictamente con el diseño de reguladores discretos, es necesario tratar el modo de realizar el ajuste del periodo de muestreo, como aspecto específico de los sistemas de control discreto.

7.1.1 El periodo de muestreo

Como se mencionó en el anterior capítulo de análisis, las características de la respuesta de un sistema de control en tiempo discreto quedaban directamente afectadas por el periodo de muestreo T . Un periodo de muestreo elevado tiene efectos dañinos sobre la estabilidad relativa del sistema, además de perderse información que para señales de variación más rápida pueden ser importantes para la actuación del regulador. En la medida en que disminuimos el periodo de muestreo, y por tanto se obtienen los elementos de la secuencia a mayor frecuencia, el sistema en conjunto tiende a comportarse de forma muy parecida a un sistema continuo.

Sin embargo, utilizar un muestreo de alta frecuencia puede ser contraproducente por dos motivos. En primer lugar, las variaciones en la señal detectables por el computador dependen directamente del número de bits de codificación de los convertidores. A frecuencias muy elevadas, el efecto de *cuantificación* de las señales, puede producir efectos indeseados como oscilaciones de alta frecuencia que al final se traducen en ruido. En segundo lugar, alta frecuencia de muestreo significa incrementar el flujo de datos que debe ser manejado por un sistema de tiempo real. En el caso de sistemas de procesamiento específico este problema no es importante, puesto que el fabricante ya limita en las especificaciones el máximo periodo de muestreo que se puede manejar. Sin embargo para el caso de ordenadores con sistemas operativos, es posible que aparezcan serias dificultades aún en el caso de sistemas que tengan especificaciones de *tiempo real*.

Es por ello que existen diversas reglas prácticas que permiten establecer un periodo de muestreo que no falte por defecto ni por exceso. Para sistemas oscilatorios se establece como regla que el sistema recoja ocho o diez muestras en cada oscilación dominante de la señal. Una de las más utilizadas por los ingenieros de control – y la que se adoptará en este capítulo – es establecer que el intervalo de muestreo cumpla:

$$T_s < \frac{\tau_{sistema}}{10} \quad (7.1)$$

en donde $\tau_{sistema}$ es la constante de tiempo dominante del sistema.

Experimentalmente y de forma genérica – en ningún caso aplicable como regla- se observa que periodos de muestreo de aproximadamente un segundo son adecuados en procesos de flujo, presión, nivel y temperatura, variables que habitualmente se mueven lentamente. Los sistemas electromecánicos habitualmente requieren de sistemas de control con tiempos de muestreo del orden de milisegundos.

7.1.2 Diseño del regulador digital

Existen básicamente dos enfoques para el diseño de reguladores digitales:

1.- Diseño del regulador mediante técnicas de control continuo, siempre que el proceso que se desea controlar sea de este tipo, y posteriormente **discretizar** el regulador continuo obtenido pasando del plano s al plano z .

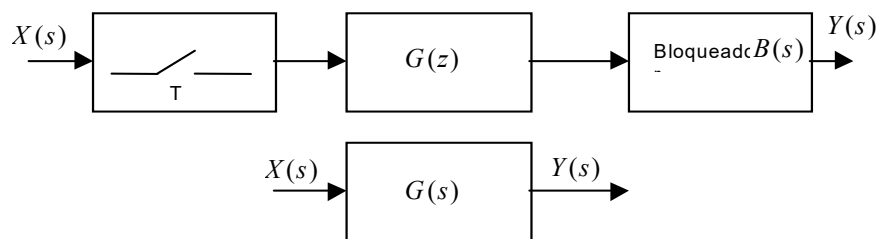
2.- **Diseño digital directo**. En caso de que la planta sea continua, se discretiza el modelo de la planta y se realiza el diseño del regulador mediante técnicas discretas.

En el caso del primer procedimiento, se aplicarán las mismas técnicas establecidas para el diseño de reguladores continuos ya vistas, con la salvedad de que siempre hay que tener en cuenta el efecto del periodo de muestreo. De esta forma se considera qué es lo que el sistema digital ve, y no qué es lo que hay. En algunos casos esta distinción puede resultar importante. Teniendo en cuenta este aspecto, se podrá realizar el diseño tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

El segundo procedimiento, admite modos de diseño análogos a los estudiados para los sistemas continuos, basándose especialmente en las técnicas que intentan posicionar los polos dominantes en los lugares geométricos que significan el comportamiento deseado. Sin embargo tienen mucho más interés los métodos de diseño específicos, entre los que hay que destacar las técnicas de control óptimo. Sin embargo, aunque el diseño con estos métodos produce soluciones exactas, hay que tener en cuenta que los valores de las señales medidas y tratadas corresponden únicamente a los instantes de muestreo, por lo que entre ellos, las variables pueden tomar valores que no sean aceptables.

7.2 Discretización de reguladores continuos

Se desea obtener la función de transferencia $G(z)$ como resultado de discretizar $G(s)$ de forma que al función de transferencia obtenida en el plano discreto logre que las siguientes dos figuras se comporten de forma semejante:



Evidentemente, como se comprobó en el capítulo de muestreo y reconstrucción, la equivalencia no es posible conseguirla, y por tanto se tratará de obtener la aproximación que más se acerque. Existen diversas formas de abordar el problema, y por tanto distintas soluciones. Este epígrafe se centrará en las técnicas que se basan en los métodos de integración numérica utilizados para la solución numérica de ecuaciones diferenciales por computador. De entre estas se estudiarán las más simples, puesto que generan funciones de transferencia discretas lineales.

7.2.1 Aproximación del operador derivada

Discretizar una función de transferencia continua, significa en definitiva buscar una transformación entre una ecuación diferencial y una ecuación en diferencias. Es posible aproximar los términos de derivación por cocientes incrementales según se muestra en la siguiente expresión:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=KT} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad (7.2)$$

Para obtener la segunda derivada, bastará con aplicar esta operación de diferenciación sobre el resultado dado en (7.2):

$$\left. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=KT} = \frac{\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=KT} - \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=(K-1)T}}{T} \approx \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T^2} \quad (7.3)$$

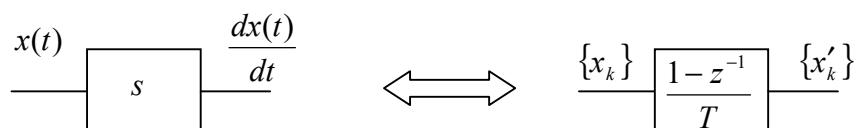
Si se denomina x'_k a la secuencia resultante de muestrear la derivada de $x(t)$ con un periodo de muestreo T ,

$$x'_k = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad (7.4)$$

entonces, aplicando la transformación en Z , se puede obtener la expresión de la secuencia resultante de muestrear la derivada de una señal, en función de $X(z)$ la secuencia resultante de muestrear dicha señal:

$$Z[x'_k] = Z\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{T}\right] = \frac{1 - z^{-1}}{T} X(z) \quad (7.5)$$

Por tanto, de esta forma se ha logrado una aproximación de la función de transferencia s , tal y como queda reflejado en la figura:



Mediante las operaciones de bloques, todo sistema continuo puede llegar a ser representado en función de bloques con función de transferencia s y bloques de ganancias estáticas. La Discretización entonces de la función de transferencia continua, se lograría sustituyendo los bloques s , por el bloque indicado en la figura y expresado mediante la aproximación (7.5).

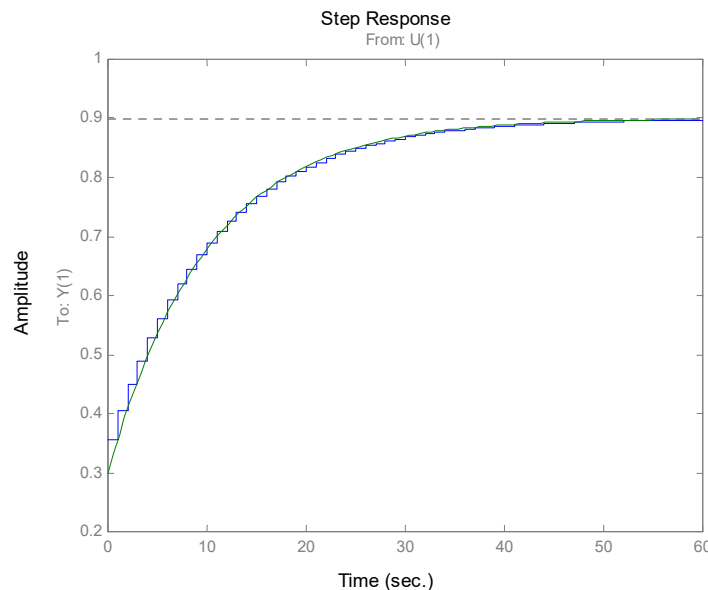
El mismo resultado se logra de forma más sencilla, sustituyendo en la expresión del regulador en función de s dicha variable por la expresión $\frac{1-z^{-1}}{T}$, es decir:

$$R(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \tag{7.6}$$

De esta forma, la discretización de un regulador genérico $R(s) = \frac{A(s+a)}{s+b}$ con un periodo T , según la aproximación de la derivada sería:

$$R(z) = \frac{A \left(\frac{1-z^{-1}}{T} + a \right)}{\frac{1-z^{-1}}{T} + b} = \frac{A(1+aT)}{1+bT} \cdot \frac{z - \frac{1}{1+aT}}{z - \frac{1}{1+bT}} \tag{7.7}$$

Simulando mediante MathLab la respuesta ante el escalón del regulador $R(s)$ en el tiempo, y por otro lado el resultante de discretizarlo para un periodo de muestreo de 1 s. observamos la aproximación realizada. Para el ejemplo se han tomado los siguientes valores: $A = 0.3$ $a = 0.3$ $b = 0.1$ $T = 1$



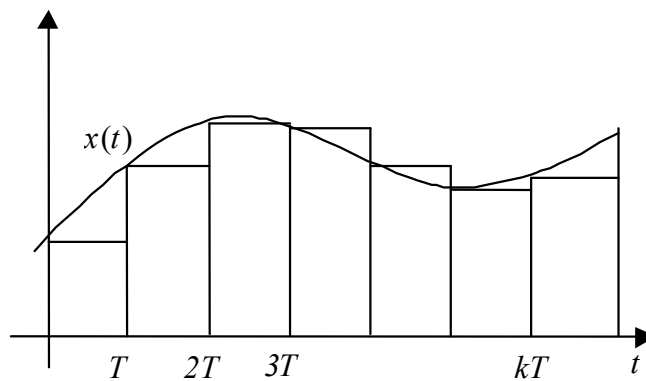
Esta figura ha sido obtenida con las siguientes instrucciones de MatLab:

```

%Definición de las FDT
disp('FDT del regulador continuo:');
g=tf(0.3*[1 0.3],[1 0.1])
disp('FDT del regulador discretizado');
gd=tf(0.3545*[1 -0.7692],[1 -0.909],1)
%respuesta al escalón
disp('respuesta al escalón');
step(gd);
hold;
step(g);

```

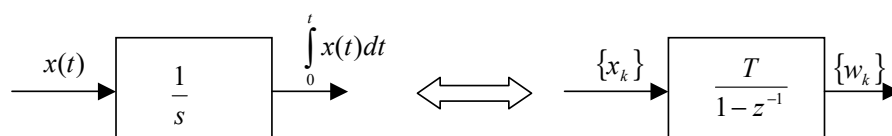
Se obtendría el mismo resultado, si se procede a obtener una expresión equivalente a la integración continua según la aproximación indicada en la figura:



Es decir, si $w(t)$ es la integral de la función $x(t)$, la secuencia $\{w_k\}$ aproximada por este criterio, resultante de la integración de $x(t)$ en función de la secuencia discreta resultante de muestrear con un periodo T , tendrá el siguiente término general:

$$w_k = \sum_{i=0}^k T x_i = w_{k-1} + T x_k \quad (7.8)$$

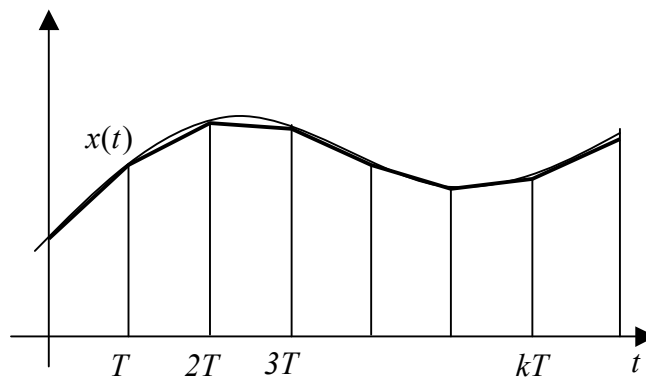
Finalmente, siguiendo el mismo criterio seguido para el operador derivada, se obtendría la siguiente equivalencia de bloques:



Observando, que esta transformación es equivalente a la indicada en la expresión (7.6) obtenida a través de la aproximación de la derivada.

7.2.2 Transformación bilineal.

Sin embargo, basándose en la integración, se puede realizar una aproximación más precisa de dicha operación. Mediante la aplicación de la integración trapezoidal, se realiza una aproximación mucho más exacta al área de la superficie delimitada por la función continua $x(t)$ como se muestra en la figura. Este método numérico utilizado habitualmente en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, consiste en aproximar el área delimitada (y por tanto la integración) por la suma las áreas de los trapecios delimitados por dos puntos de muestra en vez de por rectángulos como ocurría en el caso anterior. Visualmente se observa que dicha aproximación es mucho más precisa.



Desarrollando algebricamente esta idea, llegamos a la expresion de la transformacion bilineal:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \int_0^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{aproximación}} w_k = w_{k-1} + \frac{x_k + x_{k-1}}{2} T \\
 w(z) &= z^{-1} w(z) + \frac{x(z) + z^{-1} x(z)}{2} T \\
 w(z) &= \frac{T (1 + z^{-1})}{2 (1 + z^{-1})} x(z)
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Que lleva a finalmente realizar el siguiente cambio de variable si se quiere discretizar un regulador según esta aproximación:

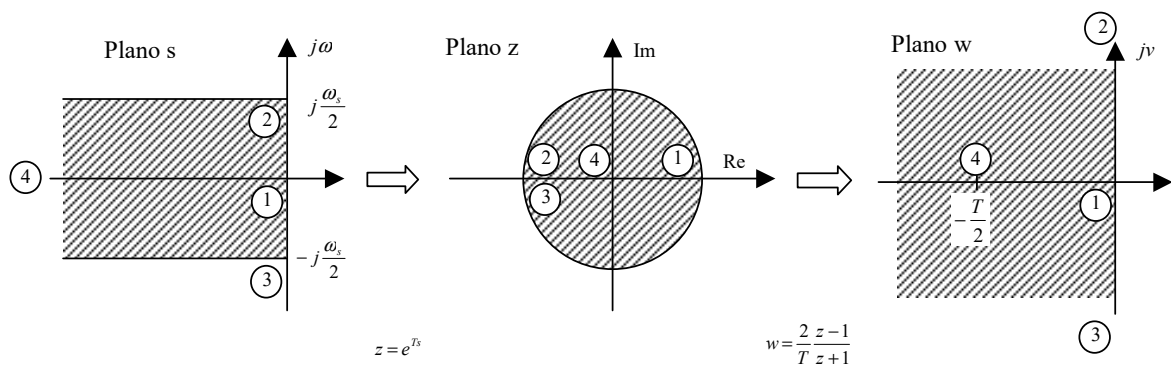
$$s = \frac{2 (1 - z^{-1})}{T (1 + z^{-1})} = \frac{2 (z - 1)}{T (z + 1)} \tag{7.10}$$

Puesto que se trata de un cambio de variable finalmente, es interesante la obtención del cambio inverso.

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad \text{siendo } w \approx s \quad (7.11)$$

La designación en w en vez de en s , se debe a que esta transformación es unívoca, puesto que se trata de una sustitución, mientras que la relación entre el plano s y el plano z no es unívoca como se vió en el capítulo de muestreo y reconstrucción de señales.

Mediante la transformada Z , la franja primaria del semiplano izquierdo del plano s delimitada por los valores $\pm j \frac{\omega_s}{2}$, es transformada al interior del círculo unitario en el plano z , al ser considerado el efecto de muestrear la señal. Deseando obtener una aproximación continua que permita la aplicación de los métodos de diseño descritos en el plano s , la transformada w (bilineal), transforma el interior del círculo unitario en Z a la totalidad del semiplano izquierdo del plano w .



A pesar de que el semiplano izquierdo del plano w corresponde al semiplano izquierdo del plano s , y el eje imaginario del plano w corresponde al eje imaginario del plano s , existen notables diferencias entre ambos planos. La diferencia más importante es que el comportamiento en el plano s sobre el intervalo de frecuencia $-\frac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \frac{1}{2}\omega_s$ corresponde al intervalo $-\infty < \nu < \infty$, donde ν es la frecuencia ficticia en el plano w . Esto significa que al discretizar un regulador continuo, el comportamiento del regulador discreto resultante, se desarrollará sobre un intervalo finito de frecuencias, mientras que el analógico trabaja sobre todo el espectro.

Aunque el plano w se parece geoméricamente al plano s , el eje de frecuencias en el plano w está distorsionado (de ahí la denominación de frecuencia ficticia). La siguiente expresión relaciona la frecuencia ficticia ν con la real ω .

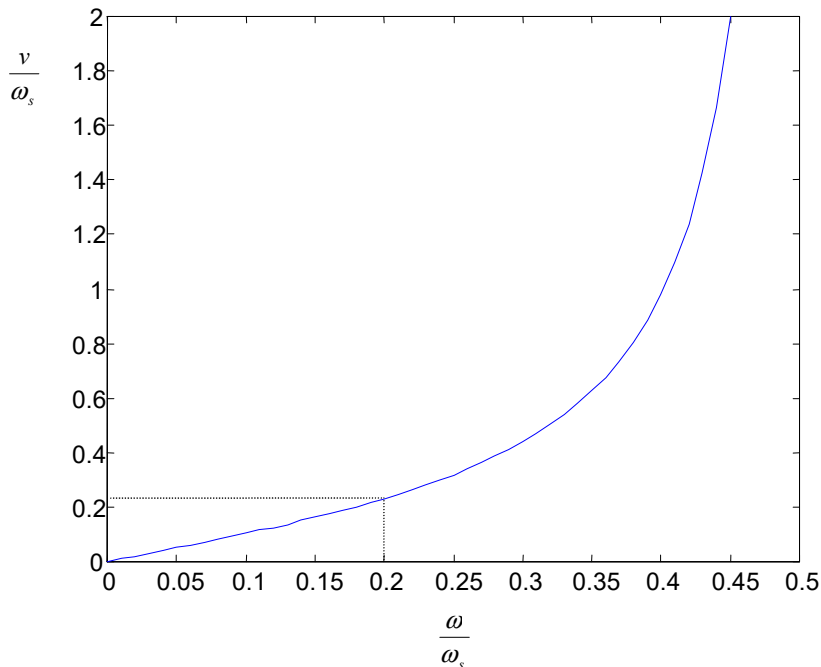
$$w|_{w=j\nu} = j\nu = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} j \tan \frac{\omega T}{2} \quad (7.12)$$

y por tanto,

$$v = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \tag{7.13}$$

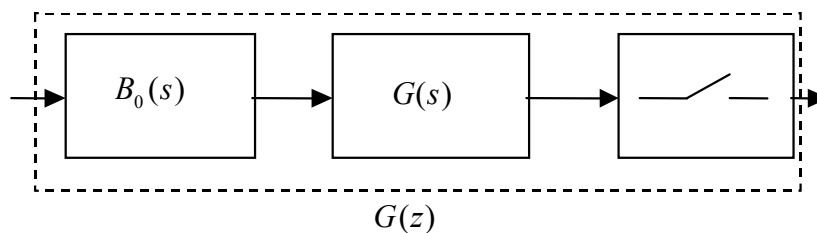
Por propiedades de la función tangente, se observa que a bajas frecuencias respecto de la frecuencia de muestreo si que es considerable la aproximación $\omega \cong v$. Esto quiere decir que para valores pequeños de ωT las funciones de transferencia $G(s)$ y $G(w)$ se parecen la una a la otra. A frecuencias nulas se convierte en una identidad por lo que mantendremos las mismas constantes de error antes y después de la transformación.

La siguiente figura muestra el valor que toma v frente a ω , que refleja gráficamente lo expuesto. Para poder adoptar una expresión genérica, tanto los valores de v como de ω aparecen normalizados respecto de ω_s :



Se observa cómo para frecuencias reales inferiores a $\frac{1}{5} \omega_s$ el comportamiento es prácticamente lineal.

Mediante el ejemplo siguiente se va a realizar una comparación del comportamiento en frecuencia de un sistema continuo, y el resultado de aplicar la transformación w a la función de transferencia discreta obtenida al considerar una reconstrucción con un bloqueador de orden cero en la entrada y un muestreador a la salida con periodo $T=0.1s$:



Discretizamos $G(s) = \frac{10}{s+10}$ con el periodo de muestreo T

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right] = \\ &= 10(1-z^{-1}) \cdot \sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{s(s+10)} \cdot \frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}} \right) = \\ &= 10(1-z^{-1}) \cdot \left[\frac{1}{10(1-z^{-1})} - \frac{1}{10(1-0.36z^{-1})} \right] = \frac{0.632}{z-0.36} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada w , se observará en cierta medida que es lo que ve el ordenador de la función continua original si utiliza el método numérico de integración trapezoidal como base de sus operaciones diferenciales. Aplicando la expresión (7.11) se obtendrá:

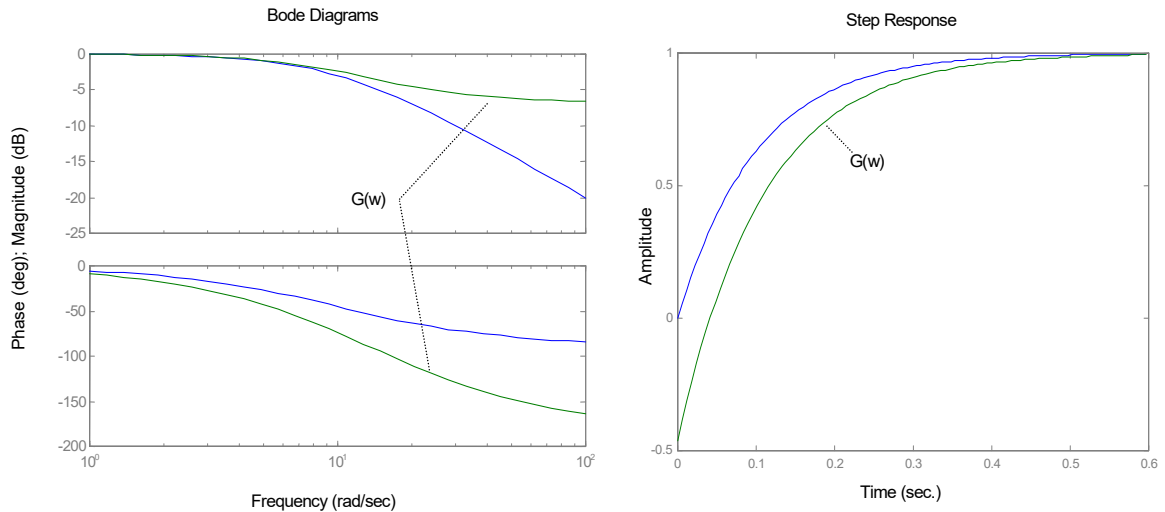
$$\begin{aligned} z = \frac{1+0.05w}{1-0.05w} \Rightarrow G(w) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+0.05w}{1-0.05w}} &= \frac{0.632}{\frac{1+0.05w}{1-0.05w} - 0.36} \Rightarrow \\ G(w) &= 9.24 \frac{1-0.05w}{w+9.24} \end{aligned}$$

Se puede observar como el sistema original y el obtenido mediante la transformada w son muy parecidos aunque con ciertas diferencias que hay que resaltar:

En primer lugar, la transformación w da lugar a sistemas de fase mínima introduciendo ceros reales positivos en el plano w aunque que la función continua original sea de fase mínima. El efecto de este cero será más notable en la medida en que el periodo de muestreo sea mayor. Al disminuir el periodo T (mayor frecuencia) este cero tenderá a desplazarse hacia el infinito haciéndose más despreciable lo que nos lleva a la conclusión de siempre: a mayor frecuencia de muestreo, la similitud entre el sistema continuo y el resultado de discretizarlo es mayor.

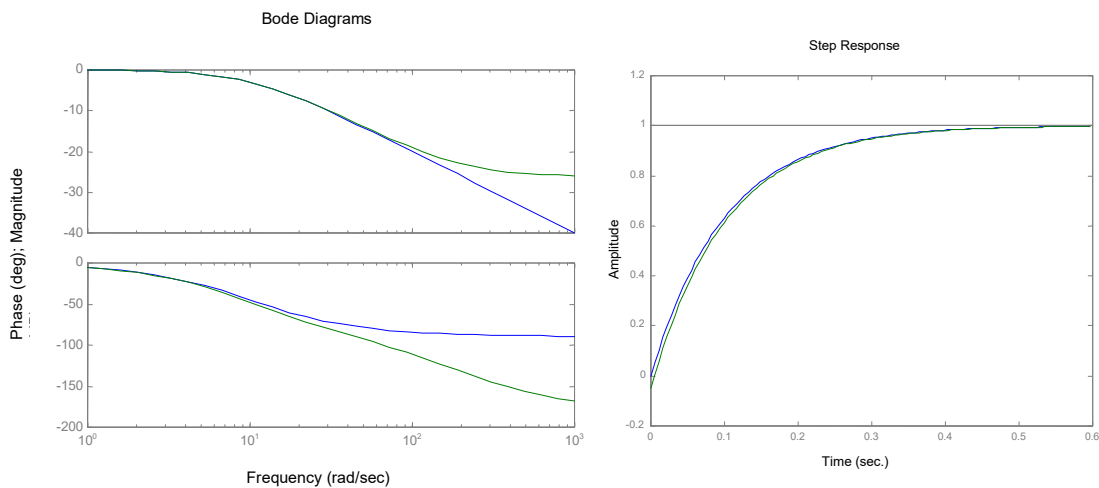
Se observa un ligero desplazamiento del polo lo que indica que se variarán las características de respuesta temporal del sistema al quedar afectada la constante de tiempo (en el dominio temporal) y la frecuencia de corte del polo (en el dominio de la frecuencia). Esta diferencia será más acusada en la medida en que la constante de tiempo correspondiente al polo original se sitúe más cerca de la mitad del valor del periodo de muestreo, o lo que es lo mismo, que el polo se encuentre más cerca del punto $\frac{-2}{T}$.

Para poder apreciar mejor estos efectos, para este ejemplo se ha seleccionado un periodo de muestreo demasiado “arriesgado”, en el sentido de que no cumple con las recomendaciones prácticas de selección de dicho periodo descritas al principio del capítulo. Mediante el uso MatLab se va a realizar una comparativa del sistema original y el obtenido mediante la transformada w :



Si por el contrario se dibuja el diagrama de bode resultante de utilizar un periodo de muestreo diez veces más pequeño, se observa un parecido mucho mayor:

$$G(w) = 0.05 \frac{200 - w}{w + 9.992}$$



Por tanto, se observa como a frecuencias del orden de una década inferior a la frecuencia de muestreo, la aproximación es bastante buena. Para valores superiores, esta similitud se pierde completamente, especialmente debido al efecto predominante que adquiere el cero introducido por la transformada w en esa zona del espectro.

¿Porqué es tan importante esta transformación?. La importancia de la transformación bilineal es que logra una aproximación relativamente buena del sistema continuo que podría dar origen al sistema discreto considerando manteniendo en la función de transferencia resultante una forma racional de cociente de polinomios.

Si se desea utilizar las herramientas de diseño de reguladores para sistemas continuos, para funciones de transferencia discretas (desconocido el modelo continuo), y aplicásemos la transformación inversa existente entre la transformada z y la transformada s , se obtendrían la serie de exponenciales que dan lugar a la multiplicidad infinita de los polos por bandas ya estudiada anteriormente. Esto haría imposible el trazado del diagrama de bode tan necesario para la aplicación de las técnicas de diseño basado en frecuencia.

Mediante la aproximación bilineal que da lugar a la transformada w , obtenemos un modelo del comportamiento frecuencial observado por el sistema digital sobre una secuencia, y nos permite el trazado de el bode de dicho sistema discreto mediante su aproximación siempre que se considere la zona de baja frecuencia alejada de la frecuencia de muestreo.

Dado que la transformada bilineal es el método más extendido para el diseño e implementación de filtros digitales, este efecto distorsionador nos permite evaluar espectralmente el modelo considerado por el sistema digital.

Según todo lo expuesto, en sentido estricto, para realizar el diseño correcto de un regulador digital para un proceso continuo, es necesaria la consideración de este efecto distorsionador, en particular cuando se desea utilizar las técnicas de diseño frecuenciales. Inicialmente podría parecer que basta con diseñar un regulador continuo considerando el modelo también continuo de la planta, y sin tener en cuenta los efectos de la reconstrucción de la señal que ataca a la planta. Sin embargo puede ser necesario (depende del tiempo de muestreo y del tipo de planta y regulador) considerar el efecto de la tecnología aplicada para su implementación mediante el diseño en el plano w . A esta prevención ante los errores derivados de la discretización se la denomina *pre-warping* puesto que tiene en cuenta el efecto de distorsión debido a la discretización.

7.3 Diseño en frecuencia de reguladores discretos

En los sistemas de control continuos, se utiliza mucho el diseño por medio del diagrama de Bode por su exactitud, y la capacidad de establecer de forma directa características que definen la estabilidad relativa.

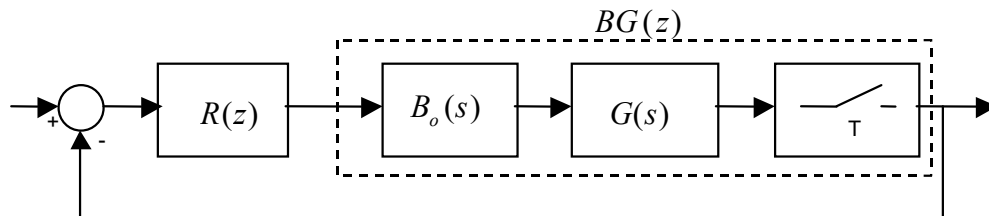
Mediante el uso de la transformación bilineal (transformada w) es posible aplicar los métodos de diseño en frecuencia sobre sistemas discretos. El hecho de que el resultado es una función polinomial permite el trazado rápido de funciones de transferencia complejas, y por tanto la consideración del sistema sin una reducción que lo desvirtúe.

Por tanto, siempre que tengan en cuenta las limitaciones de la aproximación, en particular en frecuencias que se acerquen al valor de la frecuencia de muestreo, es posible realizar el diseño de reguladores digitales mediante las técnicas de diseño en frecuencia convencionales.

Es importante destacar que el método de diseño sobre el diagrama de Bode en el plano w se utiliza con frecuencia, y muchos sistemas de control digital de éxito han sido diseñados mediante este proceso.

Procedimiento de diseño en el plano w :

Se utilizará como modelo de referencia el esquema de control indicado en la siguiente figura:



El cual responde a uno de los esquemas más habituales en control digital. Donde $G(s)$ es el modelo continuo de la planta que se desea controlar mediante la realimentación del error regulado por el compensador $R(z)$. El procedimiento de diseño en el plano w es como sigue:

1. Obtenemos el modelo discreto del conjunto planta bloqueador, para un periodo T de muestreo. Obtenido $BG(z)$, procedemos a convertir esta función de transferencia al plano w mediante la transformada bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w} \tag{7.14}$$

Por tanto,

$$BG(w) = BG(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}} \tag{7.15}$$

Es importante la correcta selección del periodo de muestreo. Además de los criterios prácticos basados en la respuesta temporal, existe un criterio equivalente para el dominio de la frecuencia, que establece que una buena

frecuencia de muestreo debe cumplir que debe ser 10 veces mayor a la frecuencia de corte del sistema en cadena cerrada.

2. Puesto que el comportamiento en baja frecuencia es idéntico al del sistema continuo, debido al factor de escala de la transformación w , determinamos el valor necesario de la ganancia K que cumple los requerimientos estáticos del diseño del regulador.
3. Trazado del diagrama de Bode para las frecuencias ficticias. Se procede exactamente igual que en los sistemas continuos pero en este caso sobre la transformada w . Es decir, dibujamos la evolución de modulo y fase de $K \cdot BG(jv)$.
4. Utilizando las técnicas de diseño en frecuencia establecidas para los sistemas continuos, se obtienen las posiciones de los polos y ceros del regulador $R(w)$, dando lugar a las distintas redes estudiadas en el plano w .
5. Mediante la transformación bilineal establecida en (7.11), obtenemos la expresión en z del regulador obtenido:

$$R(z) = R(w) \Big|_{w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (7.16)$$

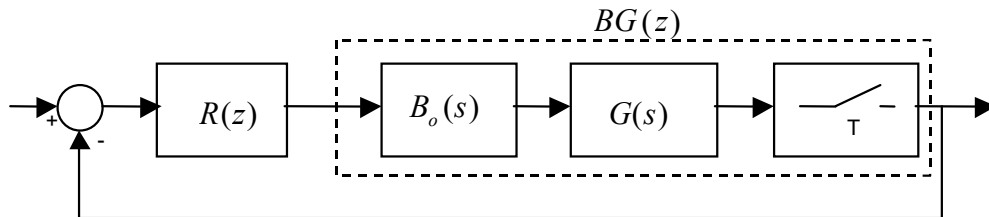
Que constituye la función de transferencia discreta del regulador digital.

6. Se realiza la implementación del regulador mediante un algoritmo de computador.

En el caso de que el efecto de *warping* debido al muestreo y reconstrucción sea considerado como despreciable debido a que el sistema es muy estable y a que la frecuencia de muestreo es elevada respecto de la zona del espectro significativa del sistema, bastará con discretizar el regulador continuo resultante mediante la aplicación de la expresión (7.11) sobre la expresión obtenida de $R(s)$ y realizando el algoritmo que lo implementa en el sistema digital.

Problema 1.

Dado el sistema representado en la figura, diseñar el regulador digital de forma que el margen de fase sea de 50°, la constante de error en velocidad de $2s^{-1}$, siendo el periodo de muestreo del sistema digital de 200 ms. El modelo continuo obtenido de la planta tiene como función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.



Se observa que el periodo de muestreo del sistema, es demasiado cercano a la constante del tiempo del sistema. De hecho es un quinto, cuando la recomendación es que el menos sea un décimo. Por tanto, tendremos en cuenta el efecto del muestreo a la hora de realizar el diseño.

Calculamos el modelo discreto de la planta:

$$BG(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \frac{0.01873z + 0.01752}{z^2 - 1.818z + 0.818}$$

Para realizar este cálculo, se han utilizado las tablas de transformadas Z de un sistema continuo precedido por un bloqueador de orden cero. Este mismo cálculo puede realizarse con Matlab a través de los siguientes comandos:

```
g=tf(1, [1 1 0])
bg=c2d(g, 0.2, 'zoh')
```

Puesto que se debe tener en cuenta el efecto distorsionador aplicamos la transformada w, para obtener el sistema continuo equivalente percibido por el sistema de control:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

Sustituyendo,

$$BG(w) = BG(z) \Big|_{z=\frac{1+0.1w}{1-0.1w}} = \frac{-0.000332(w+300)(w-10)}{w(w+0.9967)}$$

Sistema de fase no mínima, en este caso obtenido mediante la siguiente instrucción de Matlab que es equivalente:

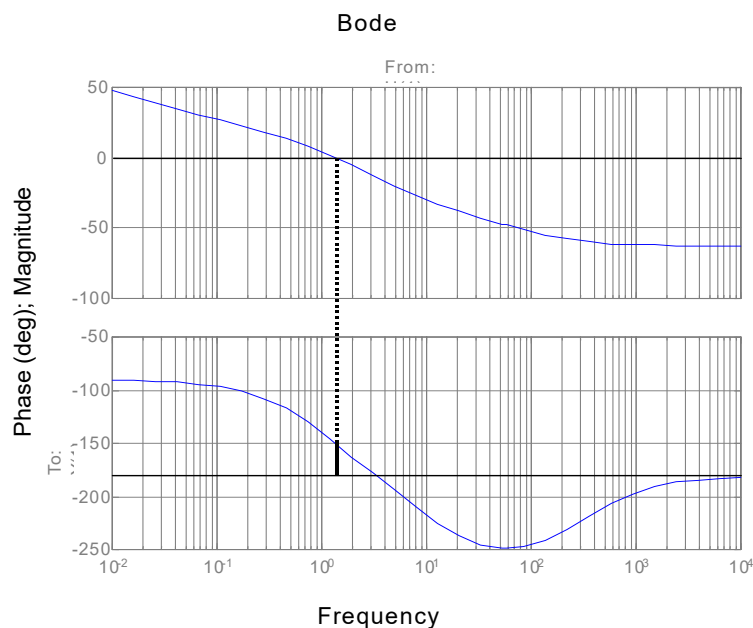
```
d2c(bg, 'tustin')
```

Realizamos en este punto el diseño del regulador, considerando esta función de transferencia como la de la planta. Por tanto, en primer lugar, ajustaremos la ganancia que asegure el cumplimiento de las especificaciones del error:

$$K_v = \lim_{w \rightarrow 0} w \cdot K \cdot BG(w) = 0.864K \Rightarrow K = 2.31$$

Con lo que se ha obtenido la acción proporcional del regulador.

Dibujamos el diagrama de Bode para el sistema con la ganancia ajustada.



Del cual obtenemos que el margen de fase es de 28° . Aplicamos en consecuencia una red de adelanto de función de transferencia:

$$R(s) = K_c \frac{s + \frac{t}{\alpha t}}{s + \frac{1}{\alpha t}}$$

Dicha red deberá aportar:

$$\Phi_m = \gamma_{deseado} - \gamma_0 + \gamma_{seguridad} = 50 - 28 + 5 \cong 30$$

Aplicando la ecuación que relaciona el aporte máximo con el parámetro α se obtiene:

$$\sin \Phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 0.333$$

Busco la frecuencia en la que se debe aportar esta fase máxima teniendo en cuenta el aporte de ganancia de la propia red. Por tanto localizo el punto en el que $K \cdot BG(w)$ tiene una ganancia de $10 \log \alpha$:

$$|KBG(w)| = 10 \log \frac{1}{3} = -10 \text{dB} \Rightarrow v_g = 2.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Que será la nueva frecuencia ficticia de cruce de ganancia. Se centrará la red en este punto mediante la ecuación que relaciona t con el máximo aporte de fase:

$$\omega_m = \frac{1}{t\sqrt{\alpha}} = v_g \Rightarrow t = 0.75$$

Por tanto, la red ya expresada en el plano continuo adoptará la siguiente función de transferencia:

$$R(s) = 3 \cdot 2.31 \frac{s+1.33}{s+4} \cong 7 \frac{s+1.33}{s+4}$$

Finalmente se obtiene la expresión resultante de discretizar este regulador mediante la transformación bilineal:

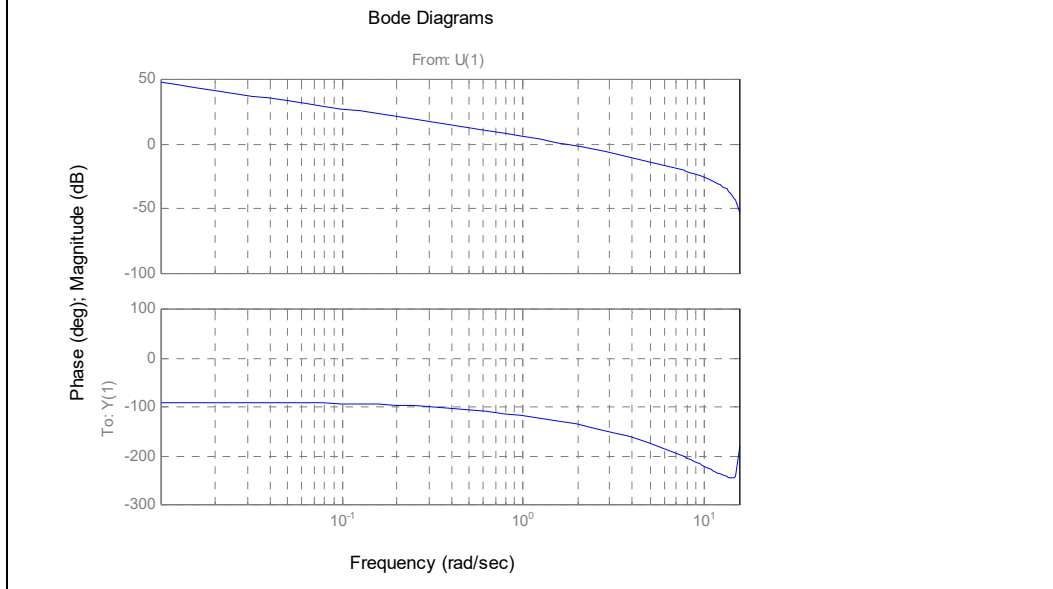
$$s = 10 \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow R(z) = \frac{5.665z - 4.335}{z - 0.4286} = 5.665 \frac{z - 0.7652}{z - 0.4286}$$

La cual nos lleva directamente a una ecuación en diferencias fácilmente implementable mediante un computador:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} = R(z) &\Rightarrow Y(z)(z - 0.4286) = 5.665 \cdot X(z)(z - 0.7652) \Rightarrow \\ Y(z)(1 - 0.4286z^{-1}) &= 5.665 \cdot X(z)(1 - 0.7652z^{-1}) \Rightarrow \\ y_k &= 5.665(x_k - 0.7652x_{k-1}) + 0.4286y_{k-1} \end{aligned}$$

Las siguientes instrucciones simulan el sistema en MatLab, obteniéndose las especificaciones establecidas para el error y un margen de fase de 49°.

```
>>rs=tf(7*[1 1.33],[1 4])  
>>rzbg=rz*bg  
>>bode(rzbg)
```



8 Introducción a los automatismos

Un sistema automático busca la sustitución del operador humano tanto en sus tareas físicas como mentales. El concepto de regulación automática manejada hasta el presente capítulo, se ha centrado especialmente en tareas de control que pueden ser consideradas como muy unidas al proceso que se desean controlar. De esta forma, siempre se ha considerado que existe una consigna que de alguna forma es suministrada por el usuario, y que el sistema de control debe conseguir como respuesta del sistema. Sin embargo, en un sistema automático actual, éste es un lazo de control considerado como de nivel básico.

Las teorías y técnicas de regulación de procesos, tanto continuos como discretos, tienen como objetivo conseguir que las variables controladas se comporten según unas consignas de mando y unas características. Este objetivo no es el único ni el más complejo quedando aún muchos aspectos que tocar a la hora de automatizar.

Muchas de las operaciones que deben ser realizadas en un sistema automático, no necesitan de la precisión, el seguimiento, o el control dinámico hasta ahora supuesto en el estudio de los sistemas continuos. Es más, la mayoría de las acciones de control que se realizan quedan constituidas por sistemas que sólo admiten dos estados: o activos o inactivos. Tal es el caso de la activación de una cinta transportadora, del cierre de una pinza, el accionamiento de un alimentador discreto, o la lectura de determinados sensores de presencia, contacto, luz, etc. Por tanto, en muchos casos, ya no es tan importante cómo se hacen las operaciones automáticas, sino cuándo y cómo se coordinan las mismas. Este aspecto de la automatización, residente sobre sistemas con un número finito de estados, es lo que se denomina control todo-nada.

Mediante los siguientes capítulos, se pretende acercar al lector a un sistema automático más amplio en donde los conocimientos adquiridos tanto en la sección dedicada al control continuo como el discreto pasan a ser herramientas de un sistema de mayor envergadura denominado automatismo. Sin embargo, plantearse abarcar todo un

sistema automático en estas escasas páginas es irreal. Por ello se accederá a aspectos concretos de las tecnologías implicadas que permitan ilustrar estas pinceladas de introducción a la automatización. En este marco se pretende dar al lector unas ligeras nociones de algunas de las tecnologías implicadas de forma que puedan realizarse algunas implementaciones prácticas y completas de automatismos sencillos.

Se dedicará especial atención a un componente actualmente esencial en los sistemas automáticos: el PLC. Como se verá en más detalle, será la herramienta que permitirá la realización de los esquemas de control automático. Su orientación fuertemente industrial, su versatilidad, y su bajo coste lo han convertido en un elemento indispensable de los sistemas automáticos industriales. Finalmente se darán unas nociones de neumática por ser una tecnología muy presente en los sistemas industriales que permite además ser fácilmente implementada en el laboratorio. La utilización de la teoría de automatismos, junto con su implementación sobre el PLC, y el manejo de dispositivos neumáticos, permitirán el desarrollo de sistemas completos que los autores consideran fuertemente ilustrativos del control todo-nada.

8.1 Definición y concepto de automatismo.

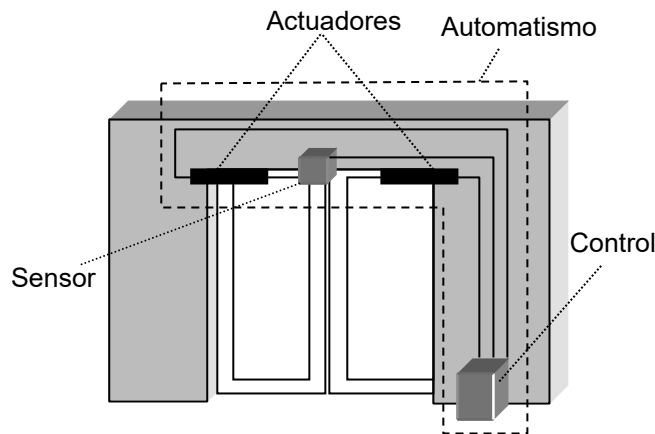
Un automatismo es un dispositivo capaz de reaccionar ante situaciones que se presentan en el funcionamiento de una máquina o proceso, ejerciendo sobre la misma acciones de control según las directrices con las que ha sido concebido.

De la misma definición de automatismo, se deduce que para que dicho sistema pueda ser llevado a cabo, es necesario que pueda recibir información inmediata del proceso, y que de alguna manera pueda actuar sobre el mismo. Por tanto, de forma genérica se puede establecer que un sistema automático se compondrá de tres elementos funcionalmente diferenciados: los sensores¹, que adquieren información del proceso; los actuadores, que permiten la acción sobre el mismo; y los equipos de control que se encargarán de regular las acciones de los actuadores en función de la información obtenida mediante los sensores.

En la figura se muestra el automatismo sencillo de apertura automática de unas puertas. El sistema dispone de un solo captador constituido por un sensor de presencia ultrasónico, de dos actuadores constituidos por los motores eléctricos de accionamiento lineal que nos permiten abrir y cerrar las puertas, y la unidad de control.

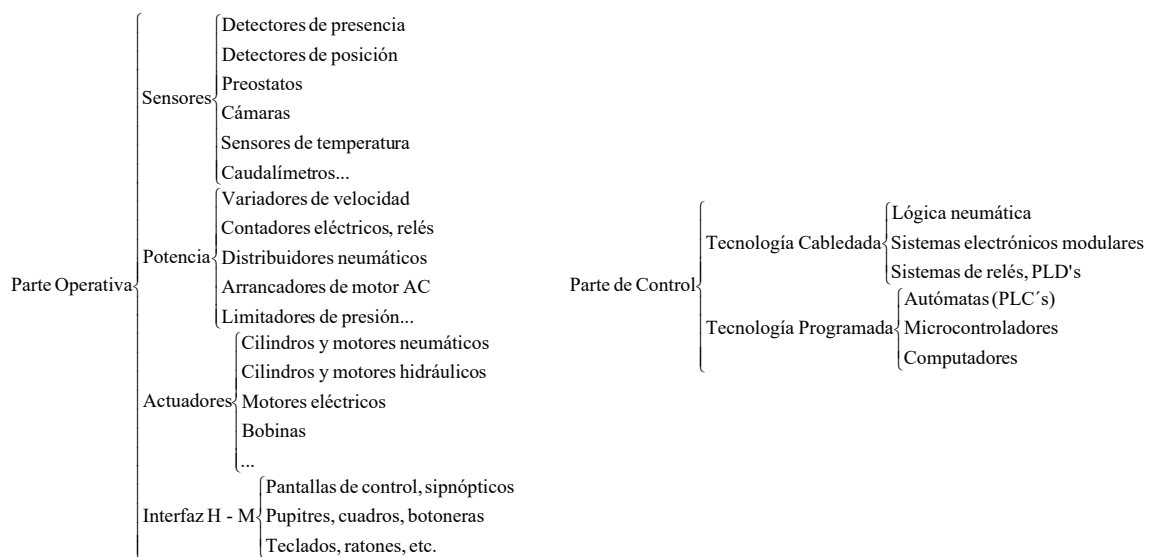
Según lo expuesto, se pueden establecer dos partes diferenciadas en un automatismo, la parte operativa y la parte de control.

¹ Existen diversos nombres utilizados en la literatura para hacer mención de los distintos dispositivos o efectos que nos permiten extraer información del entorno. Cada cual tiene su matiz particular, pero en muchos casos son utilizados indistintamente. Entre estas otras denominaciones pueden destacarse los términos *transductor* y *captador* además del utilizado *sensor*.



La parte operativa conecta la parte de control con el proceso o la máquina. La parte de control recibe consignas de mando junto con la información procedente de los sensores y elabora de acuerdo a las directrices establecidas las acciones de control para las máquinas y actuadores.

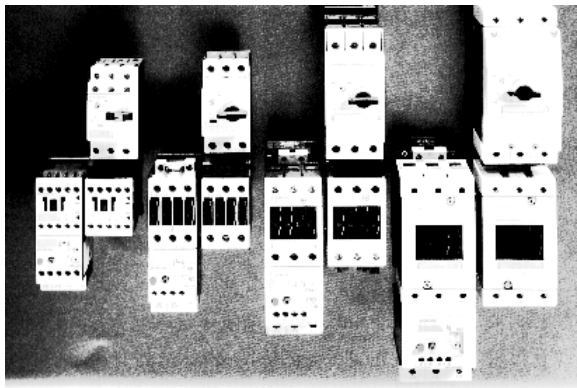
A continuación en el siguiente esquema se enumeran una serie de dispositivos y tecnologías que aparecen implicados en los sistemas de automatización más comunes.



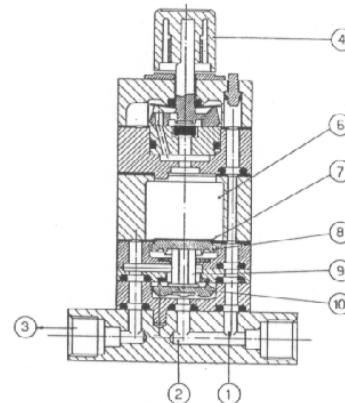
La parte operativa, depende fuertemente del proceso o máquina que se desea controlar. Así, para una máquina expendedora de bebidas, parece absurdo plantearse el uso de actuadores de tipo neumático dada la instalación adicional necesaria para poder hacer uso de esta tecnología.

No ocurre así con la parte de control. La utilización de una u otra opción dependerá en gran medida de los criterios de diseño del sistema, especialmente para el caso de automatismos de poca complejidad.

La tecnología cableada se realiza en base a uniones físicas de los módulos que componen la parte de control. Cada uno de estos elementos es capaz de realizar ciertas operaciones lógicas básicas o de memoria de forma que mediante la correcta combinación de los dispositivos se pueden lograr automatismos combinacionales o secuenciales. En las ilustraciones siguientes se muestran dispositivos representativos de esta tecnología. En primer lugar aparecen un conjunto de relés industriales de distintos tamaños y funcionalidad. Otra posible tecnología cada vez más relegada al campo de la actuación, es el uso de sistemas neumáticos. En la figura aparece el esquema de un temporizador neumático. Por último, a caballo entre la tecnología programada y cableada, se muestra un ejemplo de electrónica modular actual como es el caso del sistema LOGO de SIEMENS.



Algunos relés industriales.



Esquema de un temporizador neumático.

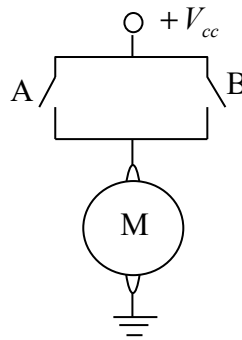


Sistema electrónico modular LOGO de SIEMENS.

En cambio, en la tecnología programada, el control se realiza mediante la confección de un programa residente en la memoria de un sistema basado en microprocesador.

Actualmente, el uso de la tecnología cableada sólo puede estar justificado en la implementación de sistemas muy simples.

En el siguiente diagrama se expone un ejemplo sencillo de cómo se puede realizar una función lógica mediante la utilización de interruptores. Para este caso, el motor se moverá en caso de que se pulse uno u otro interruptor. La lectura lógica de este sistema sería: *Si A es pulsado o B es pulsado, entonces mueve el motor.*



Los inconvenientes más destacados de esta tecnología frente a la programada son:

- Ocupa mucho espacio
- Es poco flexible frente a modificaciones o ampliaciones.
- Es muy difícil de mantener (seguimiento de errores, y reparación).
- No es factible en sistemas de control complejos.

Sin embargo, los sistemas basados en microprocesador para pequeños automatismos pueden resultar excesivamente costosos y necesitan siempre de un personal más especializado. Inicialmente estos sistemas también planteaban el problema de que no se encontraban suficientemente adaptados para los entornos industriales. Actualmente existen dispositivos de distinto nivel de complejidad adaptados perfectamente a este entorno, desde los autómatas más sencillos, hasta potentes ordenadores industriales.


Tanto por su importancia histórica como por su presencia actual en prácticamente todos los sistemas industriales actuales, debe destacarse como elemento de control el autómatas programable o PLC. Este dispositivo nació por la necesidad de disponer de un elemento de control que fuera programable y por tanto reutilizable y configurable, pero específico para el entorno industrial. Su fácil instalación, manejo y mantenimiento lo han convertido en elemento destacable de los sistemas automáticos. Es por ello que se dedicará especial atención a estos dispositivos tras ver primero unos fundamentos o conceptos básicos que permitan el diseño de automatismos.

8.2 Conceptos básicos

Anteriormente se ha mencionado que el diseño de automatismos puede también ser identificado con el diseño de sistemas de control todo o nada para la mayoría de las aplicaciones. Esto es debido a que la mayoría de las señales tanto de lectura como de actuación, siguen un patrón binario. Debido a ello es necesario para el diseño de estos sistemas conocer el álgebra binaria, así como los sistemas desarrollables a partir de las distintas operaciones lógicas y sus métodos de representación.

8.2.1 Álgebra binaria

Se repasan a continuación las principales funciones del álgebra de Boole o binaria, su nomenclatura y las principales propiedades. La forma de presentarlas es mediante tablas de verdad las cuales muestran el resultado de una operación lógica en función de las distintas combinaciones posibles de los operandos binarios.

FUNCIONES LÓGICAS			
	<i>Símbolo</i>	<i>Contactos</i>	<i>Lógica</i>
Básicas	+	paralelo	OR
	·	serie	AND
		negación	NOT
Comp.	⊕		XOR

La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

A	B	A+B	A·B	A⊕B
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

El álgebra de Boole, establece una serie de propiedades y leyes que permiten simplificar en muchos casos las expresiones resultantes del seguimiento de procedimientos de diseño. Las más importantes son las siguientes:

- Propiedad conmutativa:
 $A + B = B + A$
 $A \cdot B = B \cdot A$
- Elemento neutro:
 $0 + A = A$
 $1 \cdot B = B$
- Propiedad distributiva:
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
- Elemento simétrico:
 $A + \bar{A} = 1$
 $B \cdot \bar{B} = 0$
- Propiedad asociativa:
 $A + (B + C) = (A + B) + C$
 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Ley de Absorción

$$A \cdot (A + B) = A + (A \cdot B) = A$$

- Leyes de Morgan:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot B + A \cdot C + B \cdot \bar{C} = A \cdot C + B \cdot \bar{C}$$

8.2.2 Sistemas combinacionales

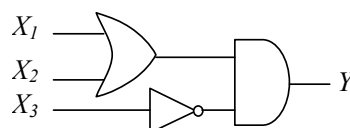
Los sistemas o bloques lógico podemos dividirlos en dos grandes categorías: combinacionales o secuenciales.

Un sistema combinacional es aquel cuyas salidas dependen únicamente del estado de sus entradas, con total independencia de cuál sea el estado inicial de partida. Esta definición lleva implícito que la función de transferencia del sistema son simplemente funciones lógicas que relacionan las salidas con las entradas mediante la combinación de los operadores lógicos básicos. El nombre combinacional se deriva precisamente del hecho de que a las variables de salida dependen exclusivamente de la combinación de las variables de entrada que se aplique.

Siendo las variables Y las que representan las salidas, y las variables X las entradas, un sencillo ejemplo sería el siguiente:

$$Y = (X_1 + X_2) \cdot \bar{X}_3$$

Que podría ser implementado mediante el siguiente circuito digital:



8.2.3 Sistemas secuenciales

Los sistemas secuenciales por el contrario, es aquel cuyas salidas dependen de las variables de entrada y del propio estado del sistema. Si tenemos en cuenta que cualquier estado puede ser tomado como estado inicial, se desprende que el sistema ha de ser capaz de memorizar todos y cada uno de los estados posibles. Dichos estados se memorizan mediante variables internas denominadas variables de estado. La denominación de sistema secuencial se debe precisamente a que el valor de las salidas depende de los estados de las entradas y de la secuencia anterior de estados en dichas entradas.

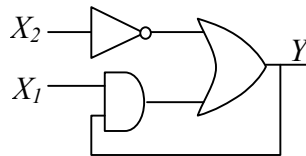
Desde el punto de vista del modelo matemático, la función o funciones de transferencia de un sistema secuencial siguen siendo funciones lógicas, pero contienen variables internas que guardan memoria del estado del sistema. Estas variables internas son

las que marcan la diferencia entre un sistema combinacional y un sistema secuencial. Por tanto, desde el punto de vista tecnológico para poder construir sistemas secuenciales debe disponerse en ella de una célula básica de memoria capaz de ejecutar la función de almacenamiento. A esta célula básica se le suele llamar también biestable y suele estar formada por dispositivos lógicos combinacionales interconectados de forma que exista un enclavamiento interno entre ellos.

Un circuito sistema secuencial simple sería el que realizase la siguiente función:

$$Y_{k+1} = (X_1 \cdot Y_k) + \bar{X}_2$$

Una realización de dicha función mediante un circuito digital asíncrono simple sería la siguiente:



Por tanto, respecto de un bloque que represente un automatismo lógico genérico, se pueden definir los distintos tipos de variables que están involucradas:

- Las entradas de un bloque son las variables independientes, es decir, su estado varía de acuerdo a unas condiciones u órdenes externas, no controladas por el propio bloque.
- Las variables internas son aquellas que elabora el sistema a partir de las entradas eventualmente de otras variables internas. Dentro de las variables internas podemos distinguir dos tipos: las dependientes sólo de las entradas o combinacionales y las de estado.
- Finalmente las variables de salida son en el caso más general, variables dependientes de las entradas y de las variables de estado.

Los sistemas reales son combinación de sistemas secuenciales y combinacionales en la gran mayoría de los casos. En consecuencia, los sistemas como tales suelen ser híbridos conteniendo parte combinacional y parte secuencial.

8.2.4 Métodos de Representación

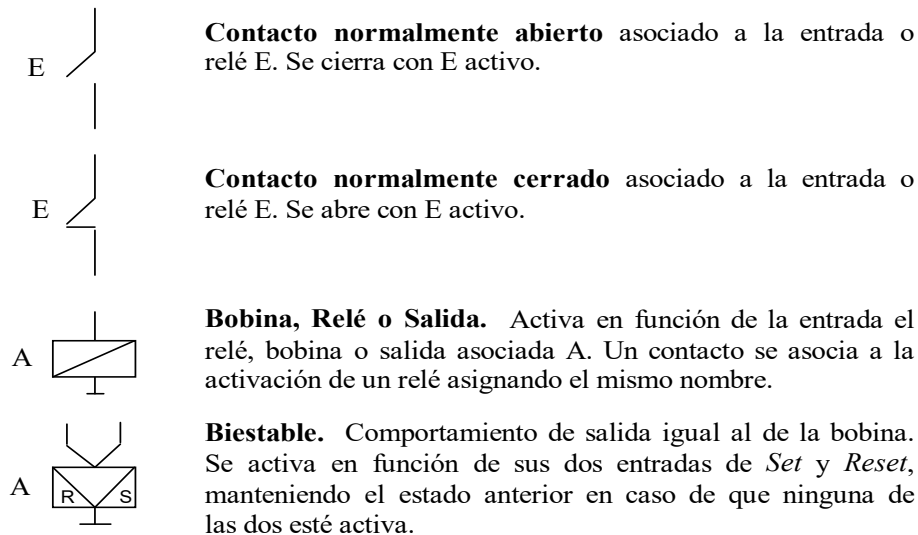
Existen diversas formas de representar un automatismo además de la ya utilizada por medio de sus funciones de transferencia (combinación de funciones lógicas). No todos los métodos son capaces de representar todas las funcionalidades necesarias, pero al menos

deberán de ser capaces de representar las funciones lógicas que relacionan las señales de entrada con las salidas.

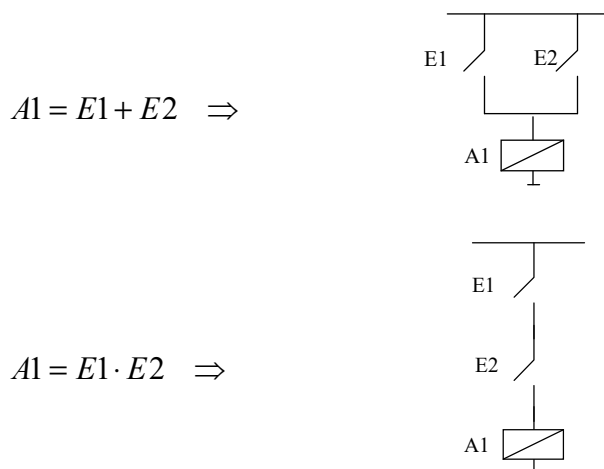
Esquema de contactos

Este método corresponde con el esquema de conexiones eléctricas que hay que realizar para construir el automatismo mediante el uso de contactores, relés y otros componentes electromecánicos. Por tanto es traducible directamente a un automatismo realizado mediante lo que anteriormente se ha definido como tecnología cableada.

Se compone de una serie de símbolos básicos que corresponden con sistemas reales que interconectados entre sí permiten la realización de las distintas funciones lógicas. Alguno de los símbolos básicos más importantes son los siguientes:



Las siguientes ecuaciones lógicas, se representarían con los esquemas de contactos adyacentes.



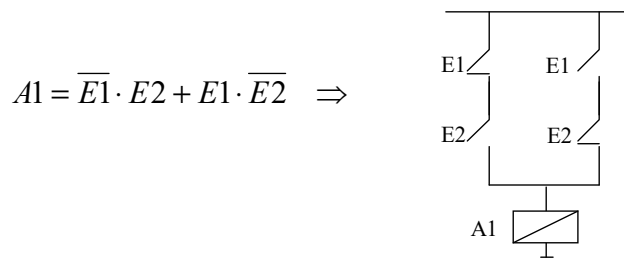
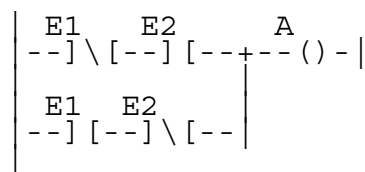


Diagrama de escalera o plano de contactos (KOP)

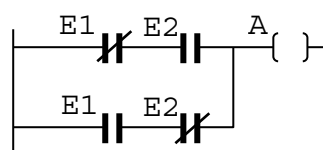
Sigue la norma DIN 19239, y es esencialmente equivalente al esquema de contactos, pero realizado mediante símbolos fácilmente plasmables mediante una máquina de escribir. A diferencia del esquema de contactos, la orientación de las conexiones en este caso es horizontal. Los símbolos equivalentes a los descritos para el plano de contactos son los siguientes:

- $\overline{E}] [-$ Contacto normalmente abierto.
- $\overline{E}] \setminus [-$ Contacto normalmente cerrado.
- $\overline{A} () -$ Bobina, relé, salida.
- $\overline{A} - (s) -$ Activación del biestable (*Set*).
- $\overline{A} - (r) -$ Desactivación del biestable (*Reset*).

Como ejemplo ilustrativo el modelo KUP del automatismo definido por la ecuación lógica $A1 = \overline{E1} \cdot E2 + E1 \cdot \overline{E2}$ es el siguiente:



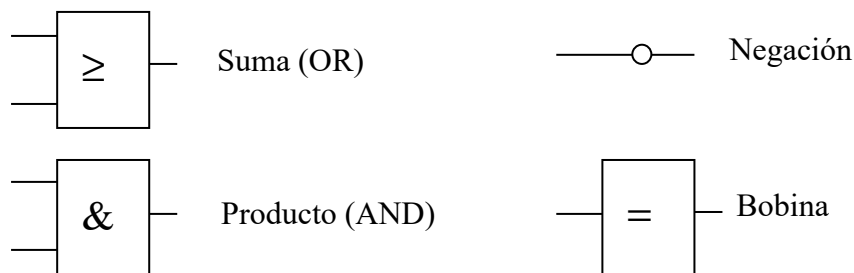
Con la evolución de los sistemas de impresión, y en particular del uso del ordenador como herramienta principal de generación de documentación, el uso de tipografías de máquina de escribir ha quedado sustituido en muchos casos por representaciones gráficas análogas pero más estéticas. El anterior automatismo quedaría de la forma siguiente según esta representación actualizada:



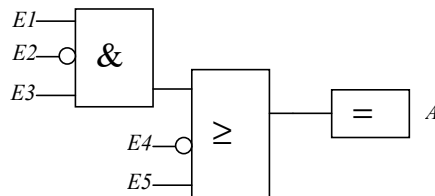
Plano de funciones (FUP)

Es un método gráfico de representación establecido en las normas DIN 40700, DIN 40719 y DIN 19239 en el que las funciones lógicas básicas se representan mediante símbolos que representan circuitos lógicos electrónicos. La tendencia a unificar los modos de representación gráfica ha provocado que en muchos casos, para símbolos de elementos más sofisticados que los utilizados hasta ahora (e.g.: temporizadores específicos) se utilice la misma representación en FUP y en KOP.

Los símbolos para las operaciones combinacionales más básicas son las siguientes:



La representación de la ecuación lógica $A1 = E1 \cdot \overline{E2} \cdot E3 + \overline{E4} + E5$ es la siguiente:



Lista de instrucciones

Cómo se ha mencionado en la introducción, la mayoría de los automatismos industriales se realizan mediante un programa en la memoria de un PLC o autómatas. Este mismo programa que define funcionalmente con exactitud y de forma exhaustiva el automatismo puede ser considerado un modelo del mismo. Sin embargo, y aunque muchas de las instrucciones son comunes a los distintos autómatas, los lenguajes utilizados por cada casa son específicos. En el capítulo siguiente se verá con cierto detalle el lenguaje STEP 5 utilizado por los autómatas de Siemens de la serie 5.

8.3 Síntesis de sistemas combinacionales

Tanto para los sistemas combinacionales como secuenciales se va a realizar un breve recordatorio de los métodos utilizados para el diseño de ambos sistemas.


Por su propia definición en un sistema combinacional las salidas en todo instante sólo dependen de la entrada. Por tanto para realizar la síntesis de estos sistemas, bastará con **generar una tabla de verdad** con todas las combinaciones de entradas posibles –que no tienen por que coincidir con todas las codificables- e indicar las salidas deseadas.

Para ver el proceso de síntesis, se va a realizar un sistema combinacional de un sistema de tres botones y una bombilla que se desea que se encienda cuando hay al menos más de un botón pulsado. Cada botón ($B1, B2, B3$) por tanto constituye una entrada puesto que es independiente del automatismo. La bombilla es la única salida L . La tabla de verdad correspondiente a la función que se desea realizar es la siguiente:

B1	B2	B3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Directamente es posible codificar L como función de productos de sumas canónicas: $L = \overline{B1} \cdot B2 \cdot B3 + B1 \cdot \overline{B2} \cdot B3 + B1 \cdot B2 \cdot \overline{B3} + B1 \cdot B2 \cdot B3$, lo cual es directamente traducible en un diagrama de contactos algo extenso, aunque poco eficiente. Por ello es conveniente proceder a la minimización de la función lógica correspondiente mediante el uso de los **mapas de Karnaugh** para cada una de las salidas:

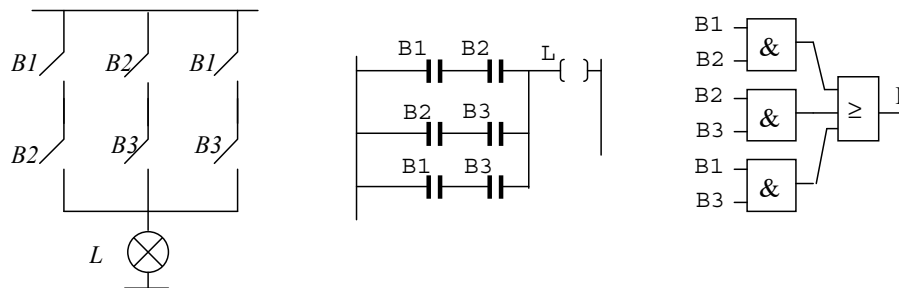
$B1 \backslash B2 \ B3$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1



Se obtienen tres agrupaciones que permiten la reducción a la suma de tres productos de dos variables lógicas:

$$L = B1 \cdot B2 + B2 \cdot B3 + B1 \cdot B3$$

Dicha función reflejada mediante los distintos sistemas de representación será finalmente:



8.4 Diseño de sistemas secuenciales

Existen diversas clasificaciones en función de la tecnología utilizada para implementar el sistema secuencial que se desea realizar. Los circuitos secuenciales en electrónica digital se diferencian en dos tipos síncronos o asíncronos, en función de si los cambios de las variables de estado y de las salidas queda regulado por una señal de sincronismo denominada reloj. Este mismo concepto puede ser aplicado a la síntesis genérica de sistemas secuenciales. Así, el diseño de un automatismo implementado por una autómatas, por su modo de funcionamiento es equivalente al diseño de un sistema secuencial síncrono. Sin embargo, si este mismo automatismo se realiza mediante relés, contactores y cableado, se debe considerar que es la síntesis de un sistema asíncrono en donde los cambios en los distintos componentes depende exclusivamente del propio estado y de la entrada sin que haya una señal de sincronismo común a todos los elementos.

Además en función del tipo de los elementos que se deseen utilizar para la construcción del mismo, o del modo de programación del autómatas, realizaremos el diseño mediante los denominados autómatas de *Moore* o de *Mealy*. Dado que el propósito de este epígrafe es sólo refrescar las ideas esenciales del diseño de máquinas de estado o autómatas, se considerará el caso más genérico: autómatas de *Mealy* asíncronos. Un autómatas asíncrono es directamente convertible a otro de tipo síncrono, y la representación de *Mealy* es más genérica que la de *Moore* (en ambos casos también son un poco más complejos en consecuencia).

Los pasos genéricos que hay que seguir en el diseño de un sistema secuencial son los siguientes:

- Identificación de entradas y salidas
- Realización del diagrama de estados (*Mealy*).
- Comprobación/Reducción del diagrama.
- Determinación del número de biestables o unidades de memoria binarias.
Asignación de estados. Comprobación de transiciones asíncronas.

- e. Realización de las tablas de verdad: Tablas del estado siguiente en función del estado y las entradas actuales, y tablas de salida en función de las entradas y el estado actual.
- f. Minimización de las funciones lógicas mediante los mapas de *Karnough*.
- g. Realización de la representación del autómata.

El siguiente ejercicio se utilizará como ilustración de los distintos pasos que hay que realizar en la síntesis del automatismo.

Se desea construir un pulsador con memoria para accionar otros dispositivos. Dicho pulsador tendrá dos salidas A y B que responderá a sus dos posibles estados: encendido A o encendido B . Siempre uno de las dos salidas estará activa. Mediante la pulsación del botón se cambiará de una a otra. Es importante destacar que los cambios en la salida se producirán al ser pulsado el botón y no mientras este esté pulsado (se detecta el flanco de subida).

a. *Identificación de entradas y salidas:*

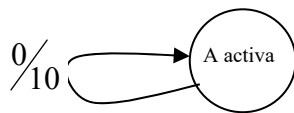
Para el ejemplo, el número de entradas es uno, y es el botón P . Consideraremos como uno lógico cuando está pulsado, y cero cuando no. El número de salidas es dos A y B , aunque se observa que ambas son complementarias.

b. *Realización del diagrama de estados (Mealy):*

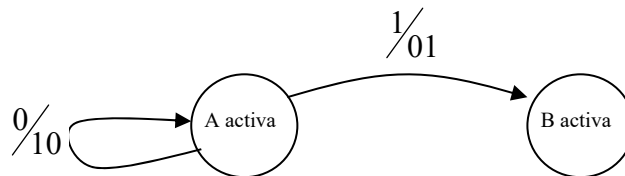
Mediante la máquina de *Mealy* representamos un autómata en el que las salidas dependen del estado en el que se encuentre el sistema y el valor de las entradas. Esto viene reflejado de la siguiente forma: Los estados se enmarcan en círculos, mientras que las transiciones entre estados y las condiciones de permanencia en los mismos estados se indica mediante flechas. A cada una de estas transiciones se le asigna una condición (dada por las variables de entrada) y la salida generada. Una transición estará activa si el estado del automatismo es el de su partida, y se cumple la condición de la transición. Para cada transición activa se debe asociar un determinado vector de valores de las variables de salida.

La representación de las distintas variables debe indicarse al comienzo de la máquina de estados para poder entender de esta forma el valor al que hacen referencia. Para el ejercicio propuesto, se considerará la siguiente notación para las transiciones: P/AB donde P es el valor lógico del pulsador que activa la transición, y A y B los valores lógicos de las salidas cuando dicha transición está activa.

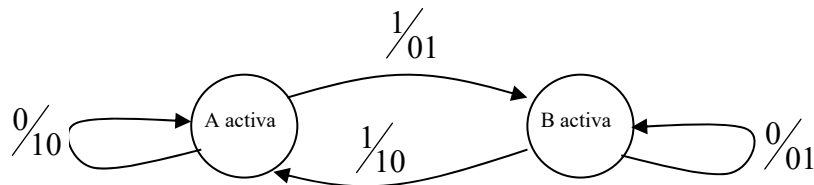
Para el ejemplo, inicialmente consideramos como posible estado de partida uno en el que A está activo. Mientras que no se pulse P , seguirá activa la salida A , y B no. Representamos este primer estado con esa condición de permanencia:



Al pulsar el botón se desea que la salida *A* se desactive y que se active *B*. Puesto que al soltar el botón las salidas establecidas deben permanecer como se han indicado, es necesario cambiar a otro estado, al cual de momento vamos a denominar como *B activa*.

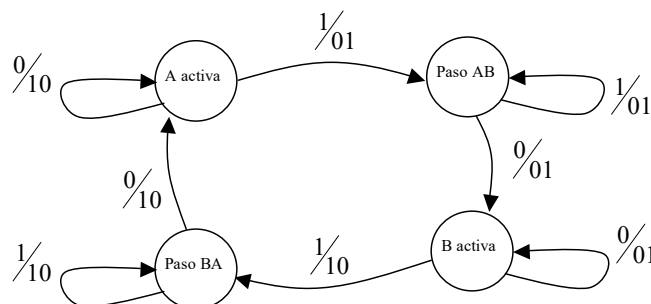


La condición de permanencia en éste será análoga a la del estado *A activa*, manteniéndose en el mismo mientras que no se apriete de nuevo el botón. La transición hacia *A activa* se producirá en caso de que sea pulsado, introduciendo los nuevos estados de salida:



Sin embargo, este diagrama de estados no es correcto. Considérese que partiendo del estado *A activa* pulso el botón y lo mantengo continuamente pulsado. Entonces, pasará al estado *B activa* mediante la transición con la condición $P=1$. Sin embargo, al seguir P pulsado, volverá a saltar de estado a través de la transición que partiendo de *B activa* tiene como condición $P=1$. Por tanto siempre que pulse el botón, el sistema permutará de estado tan rápido como lo permita la tecnología sobre la que esté realizado, y se congelará en aquel que coincida con el momento de soltar el mismo. Evidentemente es incorrecto, y es un aspecto que hay que cuidar especialmente en el dibujo del diagrama de estados: habitualmente no debe haber transiciones de entrada con la misma condición que transiciones de salida salvo que se trate de un estado intermedio utilizado para evitar problemas de sincronismo como se observará más adelante con un ejemplo específico.

El diagrama de estados correcto para el automatismo se resuelve introduciendo unos estados de transición que detecten que el botón ha sido soltado:



c. *Comprobación/Reducción del diagrama*

Para comprobar la integridad del diagrama de estados hay que comprobar los siguientes aspectos:

- *Comprobación de transiciones:* el conjunto de transiciones salientes de cada estado debe codificar a totalidad de combinaciones posibles de las entradas. Si no usan símbolos genéricos, entonces el número de transiciones saliente coincidirá con el número de combinaciones posibles que se pueden dar a la entrada.
- *Comprobación de estados:* No existen estados de los que sólo salen flechas, excepto aquellos que se producen al arrancar o reiniciar el sistema automático. No pueden existir estados finales a los que sólo lleguen flechas (el automatismo se quedaría eternamente estancado).
- *Reducción del diagrama:* Se simplifica el diagrama si existen estados equivalentes. Dos estados son equivalentes si producen la misma salida, y si las transiciones que parten del estado son iguales. No importan por tanto las condiciones de entrada (es decir las transiciones entrantes).

d. *Determinación del número de memorias, asignación de estados y comprobación de transiciones asíncronas.*

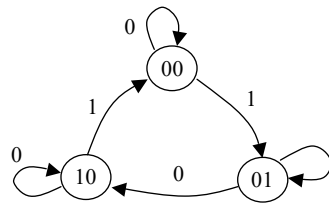
Como mínimo serán necesarios tantos elementos de memoria como bits necesarios para codificar el número total de estados en codificación binaria natural. Es decir, siendo N el número de estados y n el número de elementos de memoria considerado, se debe cumplir que $2^n \geq N$. En general, como criterio se tomará el mínimo número de biestables (lo cual no quiere decir que sea la solución óptima). Por tanto, para el ejemplo, necesitaremos como mínimo dos elementos biestables. Una vez seleccionado el número de elementos que codificarán el estado interno del autómatas, se procederá a la asignación de estos estados.

Dependiendo de cómo se realice la asignación de estados la máquina quedará más compleja o más sencilla (no es algo fácil). La asignación inicialmente se hace a ojo, intentando en el caso de las máquinas asíncronas que la codificación binaria de estados contiguos sea adyacente (casillas contiguas del mapa de *Karnaugh*). La asignación para el ejemplo, siendo M_0 y M_1 los elementos biestables, es la siguiente:

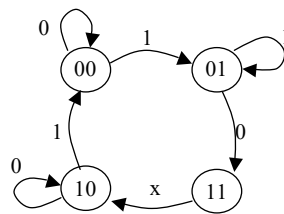
Estado	M_1	M_0
<i>A activa</i>	0	0
<i>Paso AB</i>	0	1
<i>B Activa</i>	1	1
<i>Paso BA</i>	1	0

¿Porqué es necesario que los estados estén codificados de forma adyacente entre estados contiguos de un sistema asíncrono?. Es posible que surjan problemas por el hecho de que no todos los componentes son igual de rápidos. Así para el caso del diagrama de

estados del siguiente ejemplo, se observa que la transición desde 01 a 10 requiere cambiar los dos bits de estado.



Si el paso de 01 se produce más lentamente en el segundo biestable que en el primero, es posible que se detecte durante un breve lapso de tiempo un estado falso dado por 00. Al ser la condición de la transición cero, este estado que parecía de paso pasa a convertirse en el estado de destino. Cuando utilizamos una realización del automatismo asíncrona (uso de relés o lógica neumática), es conveniente intentar conseguir que el cambio de las variables de estado entre dos estado contiguos, se produzca sólo en un elemento. Si es necesario introducimos estados de paso intermedios que consigan este propósito. El ejemplo indicado se resolvería de la siguiente forma:



e. Realización de las tablas de verdad:

Estado	M_t^1	M_t^0	P	$M_{t+\Delta t}^1$	$M_{t+\Delta t}^0$	A	B
<i>A activa</i>	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	1	0	1	0	1
<i>Paso AB</i>	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	0	1
<i>B activa</i>	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	1	0	1	0
<i>Paso BA</i>	1	0	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	0	1	0

- *Tabla de las variables de estado:* Al ser una máquina de Mealy las variables de estado $M_{t+\Delta t}^i$ siguiente al de un instante considerado, será función del estado actual dado por las variables de estado M_t en ese instante y de las entradas E :
- *Tabla de salidas:* Las salidas serán función del estado actual y de las entradas de igual forma a como ocurre con las variables de estado del instante siguiente.

Por tanto se puede utilizar una misma tabla para representar las tablas de verdad tanto de las salidas como de variables de estado.

- h. *Minimización de las funciones lógicas mediante los mapas de Karnough.* Se obtienen las expresiones de las funciones lógicas como si de un sistema combinacional se tratase, para cada una de las variables de estado, y para cada una de las salidas. Para el caso del ejemplo, puesto que B es la negación de A, sólo es necesario representar el mapa para A:

$P \setminus M^1 \ M^0$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$M^0_{t+\Delta t}$

$P \setminus M^1 \ M^0$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

$M^1_{t+\Delta t}$

$P \setminus M^1 \ M^0$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

A

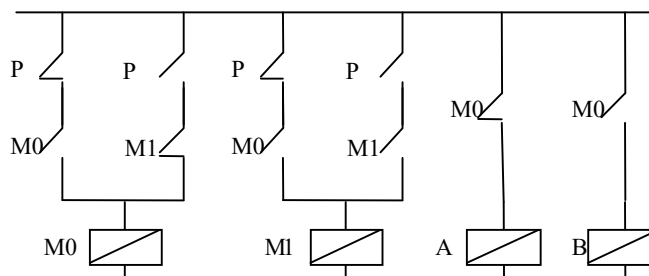
Por tanto las ecuaciones lógicas resultantes serán:

$$M^0_{t+\Delta t} = \bar{P} \cdot M^0_t + P \cdot \bar{M}^1_t$$

$$M^1_{t+\Delta t} = \bar{P} \cdot M^1_t + P \cdot M^0_t$$

$$A = \bar{M}^0_t \Rightarrow B = M^0_t$$

- i. *Representación del automatismo:* Utilizando por ejemplo el método de representación del esquema de contactos, tendremos finalmente el automatismo:



Por último, antes de dar por finalizado este pequeño retraso, se va a ver el caso en el que los dispositivos de memoria o incluso las salidas estén realizados por medio de biestables con señales de *set* y *reset*. En este caso se procede de igual forma, pero tras realizar la tabla de verdad, se procede a ver sólo los casos en los que varían las distintas variables, tal y como se muestra en la tabla de verdad posterior realizada para el mismo ejemplo.

Los mapas de Karnough –si son necesarios- se realizarán sobre las señales de *set* y *reset* puesto que son las que se necesita obtener. La mayoría de las veces es innecesario debido a que si los estados son contiguos las variaciones no suelen ser muchas.

Estado	M_t^1	M_t^0	P	$M_{t+\Delta t}^1$	S/R	$M_{t+\Delta t}^0$	S/R	A	B
<i>A activa</i>	0	0	0	0	-	0	-	1	0
	0	0	1	0	-	1	S	0	1
<i>Paso AB</i>	0	1	0	1	S	1	-	0	1
	0	1	1	0	-	1	-	0	1
<i>B activa</i>	1	1	0	1	-	1	-	0	1
	1	1	1	1	-	0	R	1	0
<i>Paso BA</i>	1	0	0	0	R	0	-	1	0
	1	0	1	1	-	0	-	1	0

Por tanto obtendremos que las expresiones lógicas de *Set* y *Reset*, para M^1 y M^2 son:

$$M^1 : \begin{cases} set = \overline{M^1} \cdot M^0 \cdot \overline{P} \\ reset = M^1 \cdot \overline{M^0} \cdot \overline{P} \end{cases} \quad M^0 : \begin{cases} set = \overline{M^1} \cdot \overline{M^0} \cdot P \\ reset = M^1 \cdot M^0 \cdot P \end{cases}$$

8.5 El autómatas programable

Una vez enunciadas las herramientas básicas para el análisis y diseño de automatismos sencillos, se va a abordar el aspecto de la implementación. Como se vió al comienzo del capítulo, el sistema más habitual utilizado para la realización física del sistema automático es el autómatas programable. Este epígrafe busca dar al lector una serie de nociones básicas sobre el autómatas que permitan entender esta máquina industrial tan importante.

8.5.1 Características de los autómatas.

La demanda en la industria de un sistema económico, robusto, flexible, fácilmente modificable y con mayor facilidad para tratar con tensiones y corrientes fuertes que la que tenía el ordenador, hizo que se desarrollasen los autómatas programables industriales, abreviadamente API en la literatura castellana o PLC en la literatura anglosajona.

Una primera definición de lo que es un PLC puede ser la que propone la *National Electrical Manufacturers Association* (NEMA) de Estados Unidos: «Aparato electrónico digital que usa una memoria programable para el almacenamiento de instrucciones que implementan funciones lógicas, secuenciales, temporizadores, contadores y aritméticas, para controlar a través de módulos de Entradas/Salidas digitales y analógicas, diferentes tipos de máquinas o procesos.»

Los primeros autómatas pretendían, básicamente, sustituir a los sistemas convencionales con relés o circuitos lógicos, con las ventajas evidentes que suponía tener un hardware estándar. Por ello nacieron con unas prestaciones muy similares a las que ofrecían dichas tecnologías convencionales y sus lenguajes de programación eran muy próximos a los esquemáticos empleados en las mismas.

Los autómatas actuales han mejorado sus prestaciones respecto a los primeros en muchos aspectos, pero fundamentalmente a base de incorporar un juego de instrucciones más potente, mejorar la velocidad de respuesta y dotar al autómata de capacidad de comunicación. Los juegos de instrucciones incluyen actualmente, aparte de las operaciones lógicas con bits, contadores y temporizadores, otra serie de operaciones lógicas con palabras, operaciones aritméticas, tratamiento de señales analógicas, funciones de comunicación y una serie de funciones de control no disponibles en la tecnología clásica de relés.

En definitiva, se puede decir que los grandes autómatas actuales se acercan cada vez más a las prestaciones de un pequeño ordenador, siendo algunos programables en lenguajes típicamente informáticos como puede ser el C. Sin embargo, la principal virtud del autómata sigue siendo su robustez y facilidad de interconexión al proceso y la tendencia actual no es precisamente la de acercarlo más a las prestaciones de los ordenadores en cuanto a su capacidad de cálculo, sino dotarlo de funciones específicas de control y de canales de comunicación para que puedan conectarse entre sí o a otros sistemas programables, como puede ser un ordenador personal. El resultado de esta integración permite formar una red de autómatas conectados a uno o varios ordenadores capaz de ofrecer las prestaciones y ventajas de ambos, integrando en un solo sistema híbrido las funciones de un sistema CIM (producción asistida por ordenador).

Sin embargo, el uso de los autómatas está cada vez menos ligado exclusivamente al mundo de la industria. Su integración en la vida cotidiana es mucho mayor de lo que podría parecer a simple vista. Pueden encontrarse autómatas en sitios tan comunes como una escalera mecánica, un ascensor, las puertas automáticas, alarmas domóticas, sistemas de iluminación y de riego en casas particulares, etc.

Para entender lo que es un autómata faltaría por introducir un aspecto importante de su concepción: *la modularidad*. Mediante este término se expresa que este hardware está fragmentado en partes interconectables que permiten configurar un sistema a la medida de las necesidades. De esta forma, encontramos autómatas compactos que incluyen una unidad de control y un mínimo de entradas y salidas y luego tienen previstas una serie de unidades de expansión que les permiten llegar a un número mucho mayor de entradas/salidas, o de funcionalidades. Así, a un autómata básico podemos agregarle la capacidad de controlar un proceso continuo por medio de un módulo que implemente varios reguladores, la capacidad de acceder a un determinado sistema de comunicación (ethernet, profibus, etc.), y otras muchas aplicaciones, sencillamente agregando un nuevo módulo al sistema original.

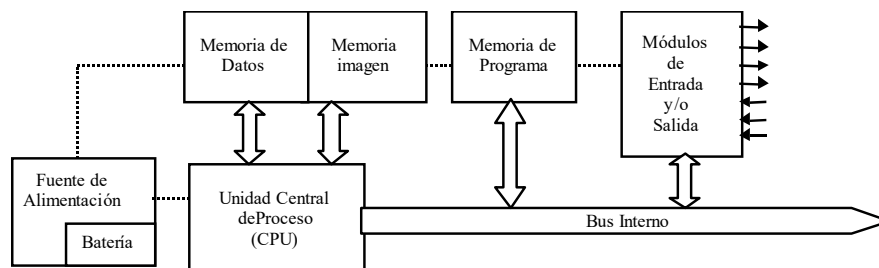
Antes de finalizar esta introducción es interesante mencionar de qué forma trabajan los autómatas integrados en sistemas de gran complejidad. La tendencia actual en estos

casos es utilizar los autómatas en red o como periféricos de un ordenador central, de forma que se combinan la facilidad de cálculo del ordenador y la facilidad de interfaces estándar que a través de la modularidad ofrece el autómata. El sistema de control resultante de esta combinación ofrece como resumen las siguientes prestaciones:

- Sistema programable con una gran potencia de cálculo.
- Gran cantidad de software estándar para manipulación de los datos y gestión de la producción.
- Interfaces estándar de ordenador para estaciones gráficas que permiten monitorizar el proceso de forma amigable.
- Control descentralizado con inteligencia distribuida, con posibilidad de mantener el proceso en funcionamiento aun cuando se produzcan fallos en el control central.
- Sistemas de comunicación estándar para redes de área local o extensa.
- Facilidad de interfaz con la planta.
- Mantenimiento fácil por secciones.
- Gran disponibilidad de herramientas de test y mantenimiento.
- Posibilidad de visualizar el proceso en tiempo real.
- Flexibilidad para realizar cambios.

8.5.2 Arquitectura del Autómata

Un autómata programable se compone esencialmente de los siguientes elementos:



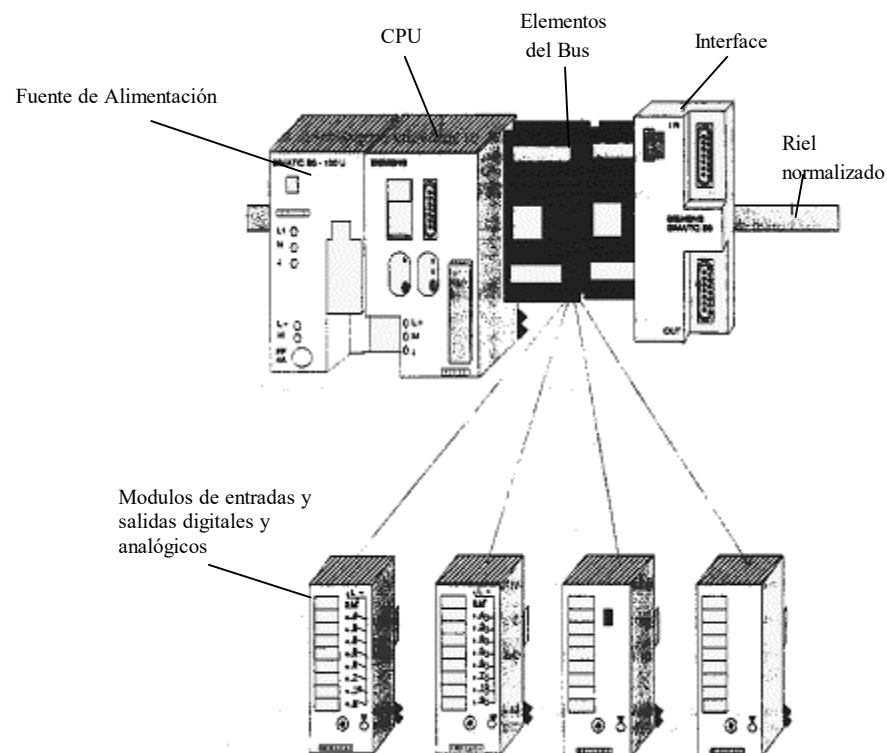
- *Unidad central de proceso (CPU)*: Su función es similar a la de otro sistema informático. Recoge de la memoria la secuencia de instrucciones que debe ir ejecutando. La ejecución de instrucciones es en serie.
- *Fuente de alimentación*: Se tiene adaptación en general a cualquiera de las tensiones frecuentes en la industria, continua o alterna. Frecuentemente incluyen baterías para la alimentación de la memoria y gestión de emergencias por corte en la alimentación del autómata.
- *Memoria*: contiene todo los datos e instrucciones necesarios para la ejecución de la tarea de control. A diferencia del esquema de mapeado seguido en los ordenadores, en los autómatas podemos diferenciar de zonas de memoria distintas. La *memoria interna* , o memoria de trabajo, la

cual se encarga de almacenar los datos intermedios de cálculos, variables internas, y lo que es más específico de la arquitectura del autómeta: una memoria imagen de los últimos datos leídos en las entradas así como de las órdenes enviadas a las salidas. La *memoria de programa* que contiene el conjunto de instrucciones programadas que se deben ejecutar así como datos constantes definidos por el usuario. De esta forma, las modificaciones sobre el sistema de control sólo necesitarán regrabar esta memoria. Normalmente es externa y enchufable a la CPU. Durante el desarrollo se suele trabajar con RAM permanente por medio de una batería. Terminado el desarrollo se suele pasar a una memoria no volátil EPROM o EEPROM.

- *Módulos de entrada y salida:* Los módulos de entrada y salida establecen la comunicación entre la unidad central y el proceso, filtrando, adaptando y codificando de forma comprensible para dicha unidad las señales procedentes de los elementos de entrada, y decodificando y amplificando las señales generadas durante la ejecución del programa antes de enviarlas a los elementos de salida. Existe una cantidad enorme de módulos de entrada/salida como consecuencia de la diversidad de señales que tienen lugar en un proceso. Estas interfaces pueden clasificarse de diferentes formas, según se muestra a continuación:
 - Por el tipo de señales:
 - Digitales
 - Analógicas (4-20 mA)
 - Por la tensión de alimentación:
 - De corriente continua (estáticas de 24/110 V_{cc}).
 - De corriente continua a colector abierto (PNP o NPN).
 - De corriente alterna (60/110/220 V_{ca}).
 - Salidas por relé (libres de tensión).
 - Por el aislamiento:
 - Con separación galvánica (optoacopladores).
 - Con acoplamiento directo.
 - Por la forma de comunicación con la unidad central
 - Comunicación serie.
 - Comunicación paralelo.
 - Por la ubicación:
 - Locales.
 - Remotos.

Además del manejo de señales eléctricas del proceso, se dispone de una serie de módulos externos conectables mediante un bus de expansión que realizan tareas más específicas de entrada y salida. Entre éstos se pueden mencionar los intérpretes de encoders, reguladores contiguos, controladores específicos de temperatura, posición, motores paso a paso, etc.

- *Módulos de comunicación:* Siendo módulos de entrada y salida, por su interés particular suelen ser considerados como un elemento diferenciado. Implementan conexiones punto a punto (RS-232,422) o de red local (Profibus, Modbus, Ethernet, etc.).
- *Unidad de programación:* Al conjunto de elementos básicos mostrados en el diagrama, es necesario añadir el dispositivo que permite al usuario interactuar con el autómeta. En muchos casos, esta interacción se realiza por medio de alguno de los sistemas de comunicación anteriormente mencionados, pero casi todos los autómetas suelen disponer de una pequeña paleta que es un periférico directamente conectable, y que permite la programación de la unidad.



En la figura se muestra el autómeta de SIEMENS de la serie 5, modelo 100-U, donde se pueden identificar externamente casi todos los componentes mencionados.

8.5.3 Funcionamiento básico de un autómeta

Los autómetas programables inicialmente fueron concebidos para sustituir los circuitos de relés en el control de los sistemas secuenciales. Su modo de funcionamiento ha de ser por tanto análogo. Sin embargo, el modo de funcionamiento de los sistemas de relés por su propia construcción es parcialmente en paralelo, de forma que todos los relés de entrada asociados directamente a variables del proceso, se actualizan de forma simultánea.

Al estar el PLC basado en un sistema de procesamiento en serie, si se accediera directamente a las entradas de los módulos, el tiempo de recogida de las muestras sería distinto para una consulta realizada al principio del programa y otra realizada al final debido a los tiempos de cómputo necesarios para realizar las operaciones intermedias.

Para asegurar que durante la consulta de las entradas en un mismo ciclo de programa no se ven modificados los valores de las entradas, se utilizan modos de procesamiento síncronos que sólo consideran las entradas y actualizan las salidas en instantes concretos del tiempo. Este funcionamiento es reproducido por casi todos los autómatas programables industriales.

Una vez cargado un programa en la memoria del autómatas, se indica al mismo que entre en el modo de ejecución. A partir de ese momento, y hasta que el autómatas sea parado externamente, el sistema funcionará de la siguiente forma:

1. Lectura de todas las entradas del sistema y almacenamiento de sus valores en la memoria imagen, también conocida por el término de memoria tampón. Para el caso concreto de los autómatas de la casa SIEMENS, esta memoria se denomina PAE (imagen del proceso de entrada).
2. Ejecución del programa completo. Durante dicha ejecución, los resultados de las combinaciones lógicas y demás operaciones son almacenados en memoria. Los resultados aplicados a variables de salida, no se transfieren de manera inmediata las salidas, sino que se almacenan en otra memoria tampón. (PAA en SIEMENS o imagen del proceso de salidas).
3. Se actualizan los valores de las salidas de forma simultánea a partir de los valores contenido en la memoria tampón.
4. Se realizan una serie de operaciones genéricas de seguridad y comunicaciones. (Autodiagnóstico, perro guardián, integridad de memoria,...).
5. Repetición del proceso desde 1.

Existe por tanto un tiempo de respuesta del autómatas que transcurre desde que se produce un cambio en sus entradas hasta que las consecuencias del mismo aparecen reflejadas en las salidas. Este tiempo de ciclo dependerá de la complejidad del programa por lo que suele medirse en milisegundos por *Kbyte* de programa .

Además de este funcionamiento cíclico, normalmente antes de comenzar con él se efectúan una serie de operaciones de arranque o puesta en marcha como son:

- Comprobación del estado correcto de memoria, comunicaciones, etc.
- Comprobación de la integridad del programa de usuario (ausencia de módulos, checksum, inconsistencia).

- Comprobación de los módulos de Entrada y Salida.
- Puesta a cero de todas las salidas.

Del mismo modo, cuando se da la orden de parada se realizan las siguientes acciones:

- Finalización del ciclo del autómeta.
- Opcionalmente puesta a cero de las salidas.

8.6 Nociones de neumática

Con la idea de poder realizar el diseño de un automatismo completo, aunque de forma sencilla y sin acceder en profundidad a todos los problemas que se presentan a la hora de abordar un diseño real, se pretende dar unas ligeras nociones de una tecnología presenta habitualmente en el diseño de sistemas automáticos: la neumática.

8.6.1 Introducción

El principal motivo por el que la tecnología neumática se encuentre tan difundida en los sistemas industriales, reside en la facilidad y bajo precio que requiere la instalación de múltiples actuadores de relativa potencia, una vez establecida la línea de alimentación del aire comprimido. Las características más importantes que tiene esta tecnología a la hora de realizar los sistemas de actuación son las siguientes:

- Permite transportar fácilmente potencia mecánica.
- No necesita de circuitos de retorno, puesto que la salida puede expulsarse al aire directamente
- Admite al almacenamiento de energía mecánica
- Es limpio y no contamina
- No es muy sensible a la temperatura y es antideflagrante.
- La fuerza que es capaz de desarrollar es limitada
- El hecho de que el fluido sea comprensible limita la calidad de los movimientos realizables.

El fundamento físico de esta tecnología reside en la diferencia de presión entre el aire presente en la atmósfera y el que aparece confinado en el circuito neumático. Esta diferencia de presión, se traduce en una fuerza superficial que puede ser aprovechada mediante un conveniente diseño mecánico para generar diversos movimientos.

En un sistema de actuación uno de los parámetros más importantes desde el punto de vista del diseño, es la potencia que es capaz de desarrollar. La potencia depende directamente de la fuerza, la cual es proporcional a la diferencia de presión entre el aire del circuito y el atmosférico. Se define por este motivo como presión relativa a la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica de forma que:

$$P_{absoluta} = P_{relativa} + P_{atmosférica} \quad (8.1)$$

La presión relativa, o también denominada efectiva, es la que permite ejercer un movimiento sobre el émbolo de un cilindro. La presión que miden los manómetros es la relativa. En el sistema internacional, la unidad de presión es el Pascal (1 N/m^2). Sin embargo al ser una valor muy pequeño, se utiliza el bar (10^5 N/m^2). El bar es muy parecido a la atmósfera (kp/cm^2), aunque no exactamente igual:

$$1 \text{ atm} = \frac{1 \text{ Kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{1 \text{ cm}^2} = \frac{9,8 \text{ N}}{1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 10^5 \text{ Pascales} = 1 \text{ bar}$$

En ocasiones, siguiendo el sistema anglosajón, la unidad utilizada es el *psi* (libras por pulgada cuadrada) cuya relación con el bar es $1 \text{ bar} = 14.08 \text{ psi}$.

La velocidad que podrá desarrollar un émbolo no dependerá directamente de la presión sino del caudal de fluido a presión que el sistema es capaz de suministrar. La unidad de caudal volumétrico es el m^3/s , aunque a veces se emplea el l/min .

Por tanto la potencia desarrollada por un émbolo de área efectiva A , sobre el que se aplica una presión efectiva P con un caudal Q será:

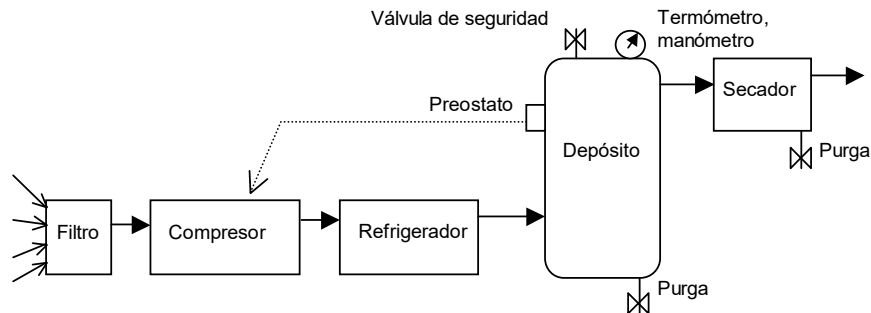
$$W = F \cdot v = (P \cdot A) \cdot \frac{Q}{A} = P \cdot Q \quad (8.2)$$

La potencia desarrollable por un sistema neumático es directamente proporcional al caudal y la presión del aire aplicado. La unidad de potencia es el watio.

8.6.2 Producción de aire comprimido

La utilización del aire como elemento transmisor de energía para generar movimiento, se hace a base de elevar la presión (típicamente 6 bares) y distribuirlo hasta los elementos actuadores donde su expansión y correspondiente disminución de presión genera movimiento. Además para evitar que las partículas sólidas y de vapor de agua, que acompañan al aire atmosférico, dañen el conjunto de los elementos que componen la instalación, es preciso someter al aire a ciertos tratamientos de filtrado, secado y lubricación.

Un esquema típico de una unidad de generación de aire comprimido es el siguiente:



El aire aspirado y comprimido por el compresor es el atmosférico, y por tanto contiene impurezas y un cierto porcentaje de vapor de agua. Ambos elementos son perjudiciales para la instalación neumática. Las partículas de polvo y suciedad pueden obturar las estrechas secciones de algunos dispositivos o dañar los materiales con los que se construyen las juntas de estanqueidad de las partes móviles. La humedad origina la oxidación de las partes metálicas y provoca una merma en la lubricación.

Por estos motivos, la admisión de aire por el compresor se realiza a través de un *filtro* de aire que elimina las partículas de polvo. Para eliminar la humedad del aire se emplean diferentes métodos: enfriamiento, absorción y adsorción. El procedimiento de *enfriamiento* es el primero en aplicarse y el más común. La cantidad de agua contenida en el aire disminuye con la presión y la temperatura. Por tanto, al enfriar (aunque sea a la temperatura ambiental debido al incremento de presión) se condensará parte de del agua contenida.

Los *secadores* por adsorción separan el vapor de agua mediante un filtrado físico compuesto por un gel de óxido de silicio que absorbe la humedad. La absorción se basa en una reacción química que elimina el vapor de agua. En estos casos, es necesaria la sustitución del óxido o el reactivo periódicamente.

Salvo para el caso de instalaciones muy simples, el aire a presión generado por el compresor, no pasa directamente al sistema de distribución, sino que se acumula en un *depósito*. Su finalidad es análoga a la realizada por los condensadores de alta capacidad que se utilizan en la etapa final de las fuentes de alimentación. Este depósito tiene como funciones más importantes las siguientes:

- Elimina el rizado en la presión del aire, originado por el carácter pulsante de algunos compresores (compresores de émbolo).
- Evita que el compresor trabaje de forma discontinua, por su capacidad de acumular energía. Para ello se utiliza un *preostato* tarado a un valor máximo y mínimo, que marcará respectivamente el apagado y encendido del compresor.
- Permite el enfriamiento del aire, y como consecuencia su condensación a la base del depósito en donde se sitúa una *llave de purga*.
- Permite controlar la calidad del aire mediante la serie de sensores que normalmente están situados en el depósito: *manómetro*, *termómetro*. Además para evitar

peligrosos valores de la presión, el depósito cuenta con una *válvula de seguridad limitadora de presión*.

Una vez generado el aire comprimido, es necesario distribuirlo por las distintas áreas de la planta. Esta conducción se realiza a través de una red de tuberías que pueden ser de plástico, cobre o acero.

Las metálicas se unen mediante soldaduras o manguitos roscados. Las virutas procedentes de la soldadura, así como su posible oxidación son inconvenientes que aconsejan el uso de las conducciones de plástico a pesar de su precio superior. Como normas básicas de la instalación se evitará la instalación de tuberías empotradas, y en el caso de realizar líneas horizontales, se dará al menos una pendiente de un 1-2% para facilitar la eliminación del agua. Las derivaciones se realizarán siempre hacia arriba y las terminaciones para realizar la conexión en horizontal para evitar que el agua pase a los elementos posteriores.

Esquemáticamente una toma de presión se representa por medio del siguiente símbolo:



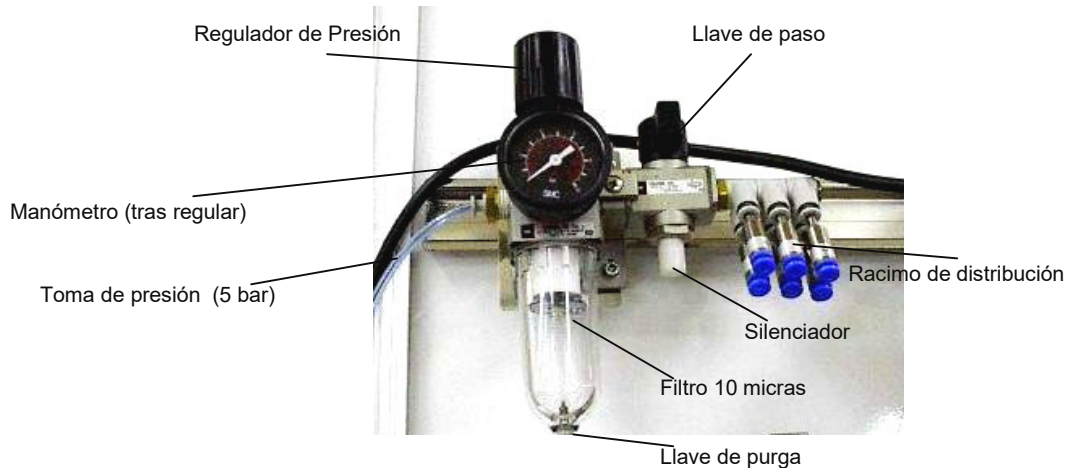
Mientras que una toma de escape, que no es necesario que esté conducida, se representa por un triángulo invertido:



Justo antes de que el aire acceda a cada área de la instalación se intercala una unidad de mantenimiento que incluye una serie de dispositivos de manera compacta, y cuya misión es mejorar la calidad del aire acondicionándolo a las necesidades del área. Las funciones que suele incluir esta unidad son las siguientes:

- Filtrado de partículas procedentes de la propia red de distribución. Los tamaños típicos de las partículas que hay que filtrar son del orden de diez micras .
- Regulación de la presión mediante la reducción a un valor fijo. Por tanto, la presión de la red será algo superior a la necesaria para los dispositivos.
- En algunos casos se incluye un elemento lubricador del aire, pero en la actualidad es cada vez más habitual el uso de elementos que no necesitan la lubricación o que son autolubricados.

La siguiente fotografía muestra una unidad de mantenimiento típica:

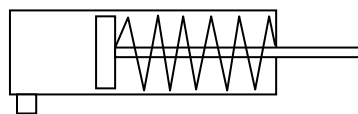


Obtenido el aire comprimido, y acondicionado para su uso, se expondrán a continuación los distintos elementos que realizan la distribución controlada del aire (válvulas), así como los actuadores, todos ellos presentes al final de la instalación.

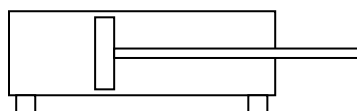
8.6.3 Actuadores neumáticos

Son los encargados de transformar la energía almacenada en el aire comprimido en movimiento. Este movimiento puede ser lineal o rotativo, diferenciándose entonces entre cilindros y motores. Los actuadores más frecuentes son los siguientes:

Cilindro de simple efecto: en el cilindro de simple efecto, el avance del émbolo se consigue por la presión del aire sobre el émbolo, mientras que el retroceso se realiza por la acción de un resorte. Es importante considerar que este tipo de cilindros sólo desarrollarán esfuerzo en un sentido, puesto que el resorte apenas ejerce la fuerza necesaria para lograr el retorno del émbolo. La figura muestra de forma de representación de estos cilindros con una sola toma por la que se produce tanto la admisión como el escape.

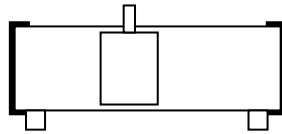


Cilindro de doble efecto: tanto el avance como el retroceso del émbolo se consigue por efecto de la acción del aire sobre el mismo, y por tanto puede desarrollar fuerza en ambas direcciones. Su representación esquemática es la siguiente, en donde se muestran las tomas de aire tanto a un lado del émbolo como al otro:

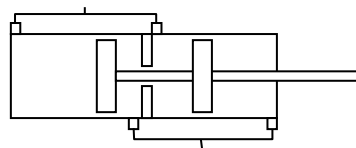


Cilindros sin vástago: Cuando se precisan carreras de émbolo muy largas, el cilindro normal presenta una serie de problemas derivados de los riesgos de flexión, y del espacio necesario para su uso. Estos inconvenientes se resuelven mediante el uso de un

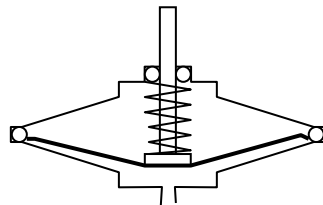
cilindro sin vástago. El émbolo desplaza un carro exterior a través de una unión que se desplaza a lo largo de una junta estanca. Esta es su representación esquemática:



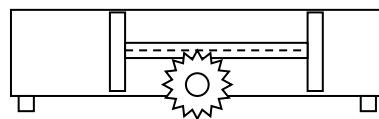
Cilindros tándem: La finalidad de los mismo es lograr máyores fuerzas en un mismo espacio. Para ello se dispone internamente de dos cilindros puestos en serie, por lo que el área sobre la que actúa la presión se duplica y con ello la fuerza ejercida. Esquemáticamente se puede observar su funcionamiento:



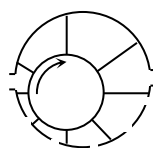
Cilindros de membrana: contituyen un caso especial de cilindros de simple efecto. El émbolo está constituido por una membrana de caucho o metal, y su carrera es normalmente muy corta (5 cm.). Sin embargo, la posibilidad de tener superficies amplias le permite desarrollar grandes esfuerzos. Su representación es la siguiente:



Cilindros rotativos: Internamente incluyen un sistema de transmisión que convierte el desplazamiento lineal del émbolo en el giro de un eje de salida. Básicamente consiste en una cremallera situada entre dos émbolos sobre la que engrana el eje de salida:



Motores neumáticos: Se utilizan cuando es necesario lograr giros continuos. Las ventajas de estos motores son su buena relación potencia peso, así como su reducido peso y ausencia de problemas de sobrecalentamiento ante sobrecargas. La mayoría de los motores neumáticos son de paletas, aunue también existen aquellos que basan su funcionamiento en el uso de pistones o en una turbina. En la figura se representa un motor de paletas:








8.6.4 Válvulas de distribución

Las válvulas de distribución o válvulas de vías, tienen por misión dirigir el aire hacia diferentes conductos en función de una o varias señales de mando. Estas señales de mando pueden ser mecánicas, eléctricas, neumáticas, etc. Salvo excepciones para casos de control muy fino, estas válvulas son todo o nada, y no funcionan de forma proporcional.

Una válvula de distribución queda especificada por el número de vías y posiciones. El número de vías es el número de conductos que pueden ser conectados a la válvula. Las diferentes conexiones que pueden establecerse entre los conductos es lo que se denomina posición. Para identificar una válvula se indica el número de vías y el número de posiciones separados por una barra. De esta forma una válvula 5/2 indica que es de cinco vías y dos posiciones.

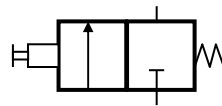
La representación de las válvulas tanto en un diagrama esquemático como en el mismo dispositivo físico sigue el siguiente convenio:

- Las posiciones se representan por cuadros contiguos.
- El número de cuadros corresponde al número de posiciones.
- En el interior del cuadro se indican las conexiones que se establecen en esa posición mediante flechas (conexión) o trazos transversales que indican bloqueo.
- Las vías se representan en un solo cuadro y externo al mismo mediante trazos perpendiculares.
- En el funcionamiento de la válvula, se supone que las vías permanecen quietas mientras los cuadros se desplazan estableciendo conexiones o cierres en las mismas.
- En los extremos de las válvulas se representa el tipo de mando asociado al movimiento de los cuadros siguiendo los siguientes símbolos:

Manual		
Mecánico		
Neumático		
Eléctrico		

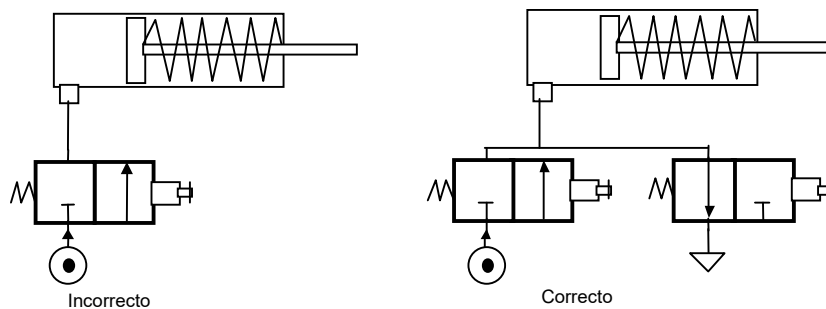
Para entender el modo de representación, a la vez que se realiza una exposición de las válvulas más frecuentes, se verán las representaciones de distintos circuitos de actuación neumáticos en cada caso:

Válvula 2/2: Se utiliza para abrir o cerrar el paso de aire a una zona del circuito. Si se desea controlar un simple efecto harían falta dos de estas válvulas funcionando de forma complementaria. El esquema de una de estas válvulas, monoestable (para solo hay una posición estable ante ausencia de entradas de mando) y con accionamiento manual es el siguiente:

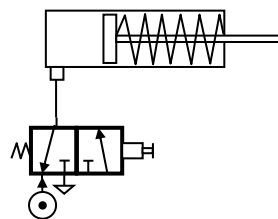


Cuando se activa el mando (situado a la izquierda), imagínese el lector que todos los cuadros se desplazan a la derecha una posición quedando la situación de las vías fija. En este caso, se tendrá comunicación entre la vía de arriba y la de abajo, por lo que se permite el paso de aire. Mientras que el mando no este activado, el resorte de la derecha, “empuja” los cuadros hacia la izquierda, obligando a que la posición sea la indicada por defecto, que es la de cierre de la vía inferior (y como consecuencia la superior).

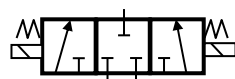
El control de un cilindro de simple efecto se muestra mediante las siguientes dos figuras. La primera representa un esquema incorrecto, puesto que no permite salir a los gases para que se produzca el retorno del émbolo. La segunda es la configuración correcta desde el punto de vista funcional, puesto que estas válvulas no son las adecuadas para el control de cilindros de simple efecto:



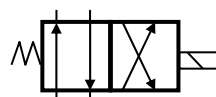
Válvula 3/2: Se utiliza precisamente para el mando de cilindros de simple efecto , tal y como muestra la figura:



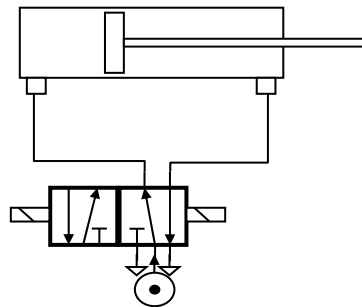
Válvula 3/3: Al ser de tres posiciones y dos mandos, lo habitual es que una de las posiciones (la central) sea estable, y las otras dos dependan de las señales de control. Es análoga a la 3/2, pero con una posición intermedia que bloquea todas las vías.



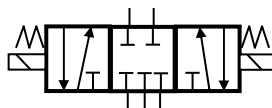
Válvula 4/2: Permiten el control de un cilindro de doble efecto. Su construcción es más compleja que la 5/2 que cumple la misma función, por lo que es menos frecuente:



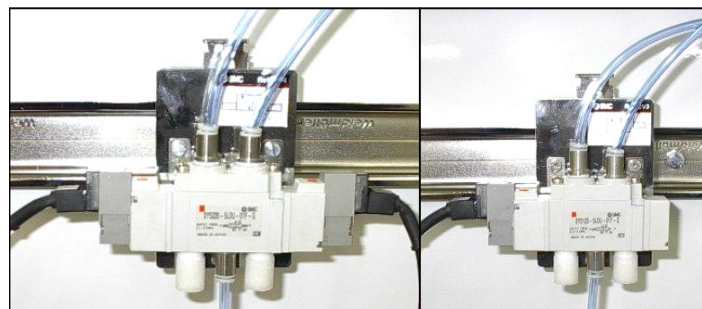
Válvula 5/2: Es de las válvulas más frecuentes puesto que su aplicación habitual es el control de cilindros de doble efecto. La válvula representada para el control del cilindro es biestable puesto que no existe ningún resorte o elemento que empuje la válvula hacia una posición determinada. Por eso, al adoptar una posición, esta posición se mantiene hasta que una señal de mando no indique lo contrario. Al activar el mando de la izquierda, se empujarán las posiciones hacia la derecha, y será por tanto el cuadro izquierdo el activo. Al activar la derecha será la posición derecha la activa. Si activásemos ambas señales simultáneamente, la válvula adoptará una de las dos posiciones que es definida como preferente:



Válvula 5/3: Similar a la válvula 5/2, pero con una posición intermedia de reposo en la que todas las vías son bloqueadas:



La siguiente fotografía muestra una válvula biestable 5/2 de mando eléctrico comercial a la izquierda, y otra monoestable del mismo tipo a la derecha. Nótese que las tomas correspondiente al escape, tienen sendos silenciadores, para evitar el ruido que este provoca, ya que carecen de un tubo de retorno:



8.6.5 Válvulas de bloqueo

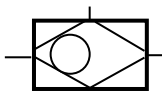
Su misión es cortar el paso de caudal de aire. Básicamente existen tres tipos:

Válvula antirretorno: Permite el paso del aire en un solo sentido. Suele ser usada combinada con otros elementos para generar dispositivos de regulación más complejos. Su representación esquemática es la siguiente:



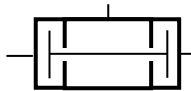
En este caso, el sentido permitido de flujo es de izquierda a derecha.

Válvula selectora: Tienen dos entradas y una salida de modo que en cada instante se conecta sólo una de las entradas con la salida. La entrada conectada será la que tenga más presión. Su representación esquemática es la que se muestra a continuación, en donde las entradas se sitúan a ambos lados de la válvula mientras que la salida aparece representada en la parte superior.



Su principal utilidad es la de tener varias tomas de alimentación en un circuito de forma que siempre se selecciona la que parece estar más descargada.

Válvula de simultaneidad: Equivalen a la función lógica AND, y son muy habituales en circuitos de seguridad, en los que se establece que un determinado accionamiento (por ejemplo una máquina de corte) sólo debe activarse si se pulsan dos mandos (uno para cada mano) de forma simultánea. Sólo aparecerá presión a la salida, si existe una presión análoga en sus dos entradas.

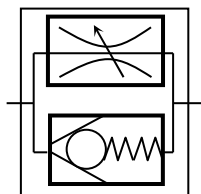


8.6.6 Válvulas reguladoras de caudal

Utilizan un estrangulador ajustable para disminuir la sección de paso del aire y así el caudal. Esta regulación es bidireccional, de forma que no importa el sentido en que circule el aire. El mando que lo ajusta es a menudo un tornillo de taraje, aunque existen también mandos manuales. Su representación esquemática es la siguiente:

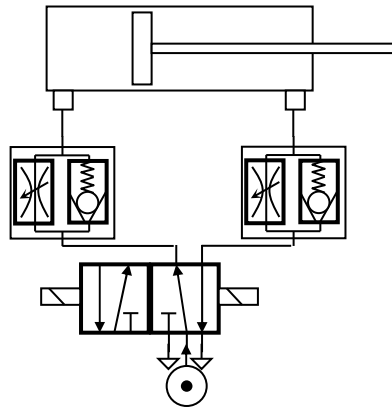


Si se desea regular en un sólo sentido se utiliza un regulador como el anterior montado en paralelo con una válvula antirretorno de modo que el caudal sólo se regula en el sentido inverso al admitido por el antirretorno, mientras que en el directo circula libremente.



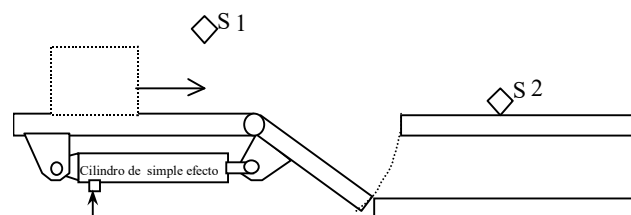
Una aplicación típica de la válvula reguladora de caudal unidireccional, es la regulación del avance de un cilindro mediante el ajuste del caudal del escape. Podría regularse también el caudal de admisión, pero los resultados son mucho peores.

El siguiente ejemplo muestra la regulación del avance de un cilindro de doble efecto por regulación del escape, activado mediante una válvula 5/2:



Problema

La presente figura, representa una bifurcación en el plano vertical en una cinta transportadora de un sistema automático. Para conseguir el movimiento del segmento del carril de la bifurcación, se ha dispuesto de un cilindro neumático de simple efecto, controlado por una válvula monoestable pilotada eléctricamente.



El sensor S1 es un sensor infrarrojo, dispuesto de tal forma que cuando las cajas entrantes superan una determinada altura, el sensor responderá con 24 V, mientras que estará fijando una señal de 0V en cualquier otro caso (cajas más pequeñas o ninguna).

El sensor capacitivo de presencia S2, detecta, en el carril superior, que la caja ya ha salido completamente de la bifurcación, de tal modo que siempre se activa (24 V) ante

la presencia de la caja, y está situado respecto del final del carril móvil a una distancia tal que asegura que se cumple lo expuesto.

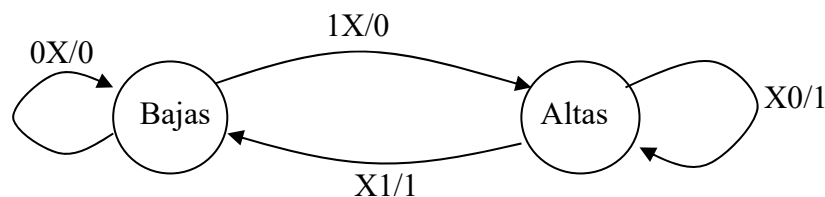
El automatismo funciona de la siguiente manera:

La posición de reposo es la indicada en la figura. Siempre que se detecte una caja en S1 (es decir, una caja alta), se desviará al carril superior, y por tanto deberá permanecer en esta posición hasta detectar que la caja ha salido.

Las cajas discurren por la cinta con bastante espacio entre ellas, no dándose nunca la situación de que dos cajas puedan estar a la vez en la bifurcación.

1. Dibujar el esquema neumático del sistema, indicando el tipo de válvula.
 2. Realizar el diagrama de estados del automatismo según la representación de Mealy. No considerar para el diagrama de estados ninguna situación de error.
 3. Deducir las ecuaciones lógicas que rigen el sistema (de la salida y de los estados si los hay).
 4. Dibujar el circuito eléctrico que mediante relés y contactores consigue el automatismo propuesto.
-

1. Dibujar el esquema neumático del sistema, indicando el tipo de válvula. Bastará con una válvula 3/2 monoestable de mando eléctrico.
2. Realizar el diagrama de estados del automatismo según la representación de Mealy. No considerar para el diagrama de estados ninguna situación de error. Seguiremos la representación S1 S2/A+, en donde S1 es el sensor de cajas altas, S2 el sensor que indica que las cajas han salido y A+ es la señal que acciona el cilindro de la plataforma. Un diagrama de estados válido es el siguiente:



Por tanto, bastará con una sola variable binaria de estado para codificar los estados del sistema. Este biestable lo denominaremos Q , y tomará valor 0 para el estado de *cajas bajas* y uno para *cajas altas*. Para que la lógica salga más simplificada, se ha hecho depender la salida directamente del estado activo, por ello las transiciones de llegada siguen manteniendo el estado de la salida que tenían de su estado de partida.

3. Deducir las ecuaciones lógicas que rigen el sistema (de la salida y de los estados si los hay). Realizamos la tabla de verdad y los mapas de Karnaugh para Q, y A.

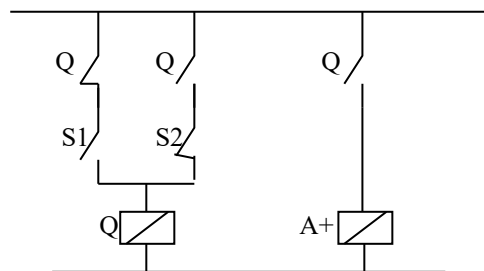
Q_k	S1	S2	Q_{k+1}	A+
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

La tabla de Karnaugh para Q_{k+1} , será:

$Q_k \backslash S1S2$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Por lo que $Q_{k+1} = \overline{Q_k} \cdot S1 + Q_k \cdot \overline{S2}$ y A+ coincide con Q.

4. Dibujar el circuito eléctrico que mediante relés y contactores consigue el automatismo propuesto.



9 Programación de los autómatas programables

Los autómatas programables son los componentes que en un cuadro eléctrico permiten elaborar y modificar las funciones que tradicionalmente se han realizado con relés, contactores, temporizadores, etc. Hay en el mercado autómatas que se adaptan a casi todas las necesidades, con entradas/salidas digitales y/o analógicas, pequeños y grandes. La programación suele ser sencilla o compleja, dependiendo básicamente de lo que se pretenda conseguir. A pesar de poder utilizar en cada tipo de PLC una misma simbología (esquema de contactos), no es fácil saber manejar el de cualquier otro fabricante, ya que cada uno tiene su propio lenguaje de programación. Lo importante es conocer las posibilidades de un autómata y saber cómo llevarlas a la práctica mediante su correcta programación.

Las existencias de los distintos lenguajes obedecen a los diversos orígenes de los equipos y a las distintas etapas de desarrollo tecnológico del producto. Así, en los Estados Unidos, se pasó de la resolución de los problemas de automatización mediante armarios de relés, a las soluciones programables, prácticamente sin emplear tecnologías intermedias. En cambio, en Europa, existió una etapa prolongada en que se explotaron las soluciones de los circuitos lógicos estáticos.

En consecuencia, los lenguajes basados en el esquema de contactos (*Ladder diagram*) se hallan preferentemente en los equipos de fabricación americana, mientras que los europeos han desarrollado los lenguajes en *lista de instrucciones*, como evolución de las ecuaciones de Boole y de los lenguajes de bloques funcionales.

Por otra parte, si para una determinada secuencia de control, se hace un análisis restrictivo al conjunto de variables discretas que le afectan, se convendrá en que la realidad subyacente, sea cual sea el lenguaje de programación empleado, corresponde a

las ecuaciones del Álgebra de Boole. En síntesis y prescindiendo de la simbología propia de cada equipo o fabricante, lo que se define con cada lenguaje particular es un conjunto de ecuaciones booleanas que representan al automatismo a desarrollar.

9.1 Tipos de instrucciones

Aunque la variabilidad es mucha entre los lenguajes de programación de los PLCs (gráficos o literales), eso no implica que no exista una agrupación de las instrucciones del autómata por su funcionalidad. Luego, posteriormente, y en cada lenguaje, se expresarán de formas distintas las expresiones algebraicas del control del automatismo. También dependiendo de la capacidad de la CPU del PLC, el autómata podrá interpretar todo el conjunto o un subconjunto de las instrucciones de que disponen en un lenguaje particular. Además, en función de la tecnología disponible y de las nuevas aplicaciones de los autómatas, el conjunto de instrucciones se va ampliando con las nuevas instrucciones complejas (lazos de regulación PID, redes de comunicación, etc).

En el conjunto de instrucciones del autómata se pueden considerar los siguientes grupos:

- Instrucciones de funciones lógicas.
- Instrucciones de temporización y conteo.
- Instrucciones aritméticas.
- Instrucciones de manipulación de datos.
- Instrucciones de transferencia de datos.

Las instrucciones determinan el tratamiento que debe realizar la CPU con la información dada. De hecho, los tipos de datos a procesar serán:

- Variables de entrada discretas (todo-nada).
- Variables de salida discretas (todo-nada).
- Variables internas o auxiliares (binarias).
- Variables de entrada numéricas.
- Variables de salida numéricas.
- Variables internas numéricas.

Los próximos párrafos tratan de indicar las funcionalidades principales de cada uno de los grupos mencionados, teniendo en cuenta que la implementación dependerá del nivel tecnológico del PLC y del propio lenguaje.

9.1.1 Instrucciones de funciones lógicas

Este subconjunto de instrucciones define, en el lenguaje empleado, los operadores lógicos booleanos: Y (AND), O (OR), y complemento. Estas instrucciones permiten la resolución de los tratamientos de información correspondientes a procesos lógicos combinatorios, mediante la implementación de las funciones lógicas o ecuaciones de Boole.

Para la realización física de los sistemas secuenciales habrá de añadir las marcas. Éstas serán implementadas mediante elementos biestables RS.

9.1.2 Instrucciones de temporización y contaje

Las instrucciones de temporización se tratan de funciones temporales en la que se manipulan variables discretas binarias, de forma que adquieren el estado de una variable lógica (estado '0' ó '1') transcurrido un tiempo t preestablecido (preselección o valor de consigna del temporizador). Cuando la variable temporizada adquiere el estado '1' de la variable control con un retardo t , se trata de un temporizador con retardo a la conexión; mientras que si partiendo del estado '1' la variable temporizada alcanza el estado '0' de la variable de control con un retardo t , se trata de temporizador con retardo a la desconexión.

Las instrucciones de conteo se tratan de funciones en la que la variable de salida Y adquiere estado '1', cuando han tenido lugar n (valor de consigna o preselección) transiciones de '0' a '1' del estado de la variable de contaje X ; para que las transiciones sean contabilizadas, es preciso que la variable de control (validación y puesta a cero) permanezca en el estado '1'. Es posible encontrar instrucciones de contador que permiten la función incrementar /decrementar (*UP/DOWN*); en estos casos hay dos variables, X de contaje y X' de descontaje.

9.1.3 Instrucciones aritméticas

Por lo general, se agrupan en estas instrucciones las operaciones básicas de adición (+), sustracción (-), multiplicación (x) y división (/). En éstas se especifican una variable numérica destino de la operación que tiene lugar entre otras dos variables numéricas (registros):

$$\text{Reg. Y} = \text{Reg. X} + \text{Reg. X'}$$

En la programación, la instrucción se completa con una señal de control u orden de ejecución; algunos equipos permiten programar instrucciones con operaciones múltiples, es decir, la variable destino adquiere el valor resultante de operaciones aritméticas distintas entre más de dos operandos.

En procesadores potentes se tiene además instrucciones de cálculo, como la extracción de la "raíz cuadrada", operaciones con implicación de resultados intermedios internos (acumuladores del *scratchpad*), operaciones matemáticas, y el empleo de notación en coma flotante, para aumentar la precisión de los cálculos.

9.1.4 Instrucciones de manipulación de datos

Estas instrucciones permiten el manejo de información correspondiente a variables numéricas o contenidos de los registros de datos. Entre ellas hay que considerar las funciones de comparación de variables numéricas, funciones de conversión del código de representación de la variable (binario, BCD, etc.), funciones

con operadores lógicos a nivel de registro (AND, OR, etc.) y funciones de rotación o desplazamiento de la información (bits) en un registro o grupo de registros.

9.1.5 Instrucciones de tratamiento de datos

En el tratamiento de variables numéricas se hace necesario operar o comparar dichas variables con datos o grupos de datos, que deben ser distintos en función de la secuencia que se esté ejecutando, o del valor de otra variable discreta o numérica.

Para esto es necesario disponer de instrucciones que permiten trasladar o copiar, uno o varios datos contenidos en los registros de la memoria de datos a otros registros de la misma memoria, o a un conjunto de variables numéricas; éstas son las instrucciones de transferencia que operan a nivel de registro o grupo de registros y con variables numéricas internas, de entrada o de salida.

9.1.6 Instrucciones de control del ciclo de ejecución

Estas instrucciones permiten alterar la ejecución secuencial de las instrucciones del programa de control, mediante saltos condicionales a determinadas secciones del programa, o mediante el abandono del programa principal para realizar secuencias de instrucciones denominadas *subrutinas*.

9.2 Lenguajes de programación

Una vez obtenida las expresiones algebraicas del automatismo, éstas deben ser introducidas al PLC. Los lenguajes pueden ser de tipo literal o gráficos. En este capítulo, por la escasez de tiempo, se va a desarrollar en el lenguaje de instrucciones AWL y luego se pasará al modo de programación más interesante, el GRAFCET. Sin embargo, antes de entrar en la parte esencial de este capítulo, se mencionan de nuevo la representación en esquemas de contactos y en diagramas de funciones.

9.2.1 Diagrama de contactos o Ladder (LD o KOP)

El esquema de contactos fue diseñado para proporcionar un software más flexible de simulación que pudiera reemplazar los contactores, temporizadores, y contadores de forma análoga a los sistemas de control de 1960 a 1970. El KOP no sólo ha sido un éxito, también ha superado sus modestos objetivos, es una herramienta potente cuando es utilizada en aplicaciones que realizan tareas específicas. No obstante, no puede soportar los múltiples retos de los actuales PLC. Para ello se han añadido características que soporten aplicaciones más complicadas, pero estas mejoras son torpes, lentas, y son muy difíciles o casi imposibles de emplear.

La mayoría de los fabricantes incorporan este lenguaje; esto se debe a su semejanza con los esquemas de relés empleados en los automatismos eléctricos de lógica cableada, lo que facilita la programación a los técnicos habituados a trabajar con dichos automatismos.

9.2.2 Diagrama de funciones (FUP)

Proviene de la tradición de los técnicos de la Electrónica Digital, al mostrar las funciones lógicas según la norma DIN 40700 y DIN 40719. Además de las propias puertas lógicas se han añadidos otros bloques para la realización de ciertas operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, operaciones de conteo, temporizadores,... Sin embargo, estas ampliaciones resultan ser insuficientes para la multitud de instrucciones que los PLCs actuales realizan.

9.2.3 Lista de instrucciones (LDI o AWL)

Es un lenguaje de bajo nivel similar al lenguaje ensamblador a base de sentencias. Solo permite una operación por línea. Este lenguaje es adecuado para pequeñas aplicaciones y para optimizar partes de una aplicación. Se basa en las definiciones del Álgebra de Boole. Las instrucciones, en su literatura, son cambiadas de un fabricante a otro y hasta dentro del mismo productor resultan también diferentes. En este sentido, se muestra AWL de STEP5 por ser muy extendido dentro de la industrial actual. En esta dirección se va a cubrir las sintaxis que cubren las instrucciones lógicas, de temporización y de conteo.

9.2.3.1 Instrucciones lógicas

Las entradas y salidas digitales al PLC se reconocen por el carácter 'E' y 'A' respectivamente; mientras las marcas son designadas por 'M'. El acceso a sus valores puede ser realizado a modo de *bit*, *byte* o de palabra. En el cuadro adjunto muestra los datos de E/S digitales en S5, así como las marcas:

TIPO DE DATOS	NOMENCLATURA	DESCRIPCIÓN
ENTRADAS		
Bit	En.m	Entrada tamaño bit
Byte	EBn	Entrada tamaño byte
Word	EWn	Entrada tamaño palabra (16 bits)
SALIDAS		
Bit	An.m	Salida tamaño bit
Byte	ABn	Salida tamaño byte
Word	AWn	Salida tamaño palabra (16 bits)
MARCAS		
Bit	Mn.m	Marca tamaño bit
Byte	MBn	Marca tamaño byte
Word	MWn	Marca tamaño palabra (16 bits)

El índice n indica la referencia numérica a la dirección del interfase de E/S o a la posición de memoria. El segundo índice, m , es empleado para el posicionamiento del bit dentro del byte; su rango estará entre 0 y 7.

Recuérdese que en los PLCs antes de ejecutar las instrucciones guardará previamente los valores de las E/S en zonas de memorias internas a éstos. En S5 las entradas son copiadas en el PAE y las salidas en el PAA; obviamente, en cada ciclo los

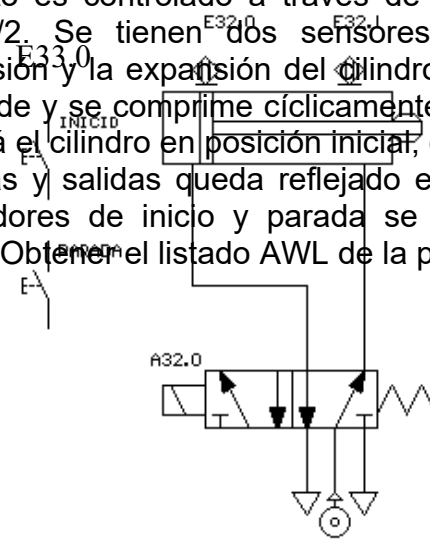
valores de estos bancos pueden ser diferentes a los que hay físicamente. Al terminar el ciclo, las salidas son actualizadas con los valores procesados y guardados en el PAA.

Las instrucciones del primer grupo, las lógicas, corresponden con las funciones AND, OR y sus negadas. Además de disponer de los paréntesis para poder aplicar las propiedades distributivas respecto a la suma y a la multiplicación. A ellas se añaden las operaciones de memoria SET y RESET. Especial interés para estas dos instrucciones resulta el indicador binario VKE. Éste muestra la evolución temporal del segmento indicando la posibilidad de activación o desactivación de las instrucciones con RESET o con SET. El VKE hace las veces de registro de estado donde su valor puede ser sólo '0' lógico ó '1' lógico. Cuando en una línea de AWL, la sentencia es verdadera entonces el VKE se pone a '1'. En el caso contrario, la expresión booleana de la línea sea falsa, el VKE estará a '0'. De esta manera, se evaluará las expresiones lógicas de una variable, mediante líneas de AWL con instrucciones de operadores lógicos, y al llegar la asignación de la variable se activará o desactivará en función del valor del VKE.

OPERACIONES LÓGICAS	AWL	DESCRIPCIÓN
OR	O	Combinación OR
AND	U	Combinación AND
NOR	ON	Combinación NOR
NAND	UN	Combinación NAND
Combinación OR de expresiones	O(o ON(Operación OR con paréntesis
Combinación AND de expresiones	U(o UN(Operación AND con paréntesis
Fin de expresión entre paréntesis)	Final del paréntesis
OPERACIONES DE MEMORIA		
SET	S	Báscula biestable de puesta a '1'
RESET	R	Báscula biestable de puesta a '0'
Asignación	=	Asignación a salida

Ejemplo 22.1

Un cilindro neumático de doble efecto es controlado a través de una electroválvula distribuidora monoestable 5/2. Se tienen dos sensores de proximidad E1 y E2, que marcan la compresión y la expansión del cilindro. Al pulsar el botón de inicio, el cilindro se expande y se comprime cíclicamente. El pulsador de parada detendrá el ciclo y pondrá el cilindro en posición inicial, esto es, comprimido. El mapeado de las entradas y salidas queda reflejado en el esquema neumático; respecto a los pulsadores de inicio y parada se han colocado en E33.0 y E33.1 respectivamente. Obtener el listado AWL de la parte de control del automatismo.



Al iniciar el análisis de este automatismo se observa que se necesita al menos dos marcas debido al empleo de una electroválvula distribuidora de tipo monoestable. Una de ellas se aplicará para conocer si el sistema está en funcionamiento o parado, al que se designará por la marca bit M0.0. La otra será necesario para conocer si el cilindro está en expansión o en compresión, asociándole, por ejemplo, con la marca M0.1. Si esta marca se encuentra activa, indicará que el cilindro se está expansionando y si esta desactiva que el cilindro está comprimiéndose. Hay que observar que se podía haber llegado a un acuerdo justamente al contrario, activación compresión y desactivación expansión.

En la primera marca, ésta será de tipo reset preferente, mientras en la segunda da igual la preferencia al ser imposible que se cumplan las dos condiciones a la vez, sólo pudiera suceder en caso de avería. Sus ecuaciones lógicas serán:

$$M0.0 \begin{cases} SET_0 = INICIO \\ RESET_{0(P)} = PARADA \end{cases} \quad M0.1 \begin{cases} SET_1 = M0.0 \cdot E32.0 \text{ (Expansión)} \\ RESET_1 = M0.0 \cdot E32.1 \text{ (Compresión)} \end{cases}$$

Una vez resuelta la parte secuencial del automatismo, habrá de calcular la tabla de verdad del sistema combinacional:

M0.0	M0.1	E32.0	E32.1	A32.0	Observaciones
0	X	X	X	0	En reposo (compresión)
1	0	0	0	0	Se está comprimiendo
1	0	0	1	0	Máxima expansión
1	0	1	0	0	Máxima compresión
1	0	1	1	0	Avería
1	1	0	0	1	Se está expandiendo
1	1	0	1	1	Máxima expansión
1	1	1	0	1	Máxima compresión
1	1	1	1	0	Avería

De la tabla de la verdad se deduce la lógica de la electroválvula haciendo las simplificaciones de Karnaugh:

$$A32.0 = M0.0 \cdot M0.1 \cdot (\overline{E32.0} + \overline{E32.1})$$

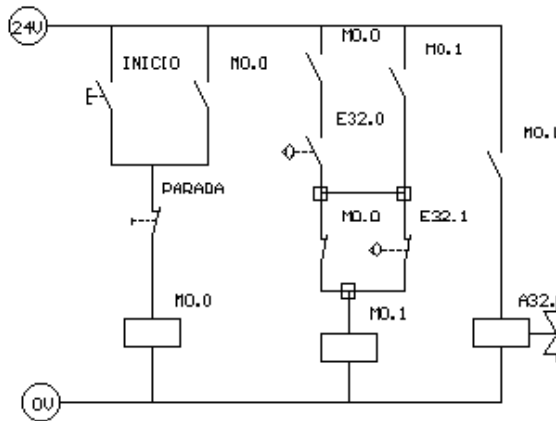
No obstante, si se considera que en caso de avería, con el proceso funcionando, se activase la electroválvula se simplificaría la lógica:

$$A32.0 = M0.0 \cdot M0.1$$

Aun más, se podría simplificar asignando sólo la electroválvula con la marca M0.1:

$$A32.0 = M0.1$$

En el esquema eléctrico se ha implementado la marca M0.1 como reset preferente, aunque podría haberse elegido igualmente set preferente. La traducción a AWL se ha hecho que M0.1 sea set preferente. Nótese que la colocación posterior del set, en este caso, hace que sea preferente como consecuencia de la dinámica del VKE.



* M0.0 reset preferente	
U	E33.0
S	M0.0
U	E33.1
R	M0.0
*M0.1 set preferente	
U	M0.0
U	E32.1
R	M0.1
U	M0.0
U	E32.0
S	M0.1
*Electrovalvula	
U	M0.1
=	A32.0

9.2.3.2 Los temporizadores

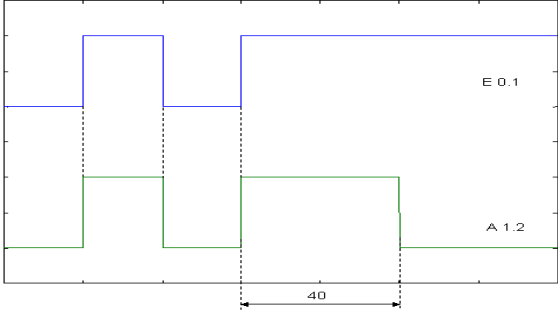
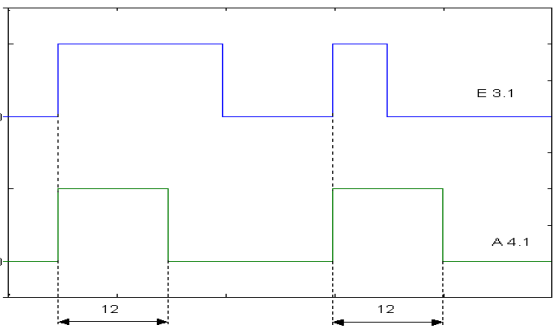
Los temporizadores son dispositivos capaces de retardar una orden de salida (activación o desactivación) durante un tiempo preseleccionado, a partir de una señal de entrada. Aunque hay varios tipos de temporizadores, la operativa de funcionamiento resulta ser similar y son tres los aspectos de la programación: función del temporizador, número de éste y sus parámetros. En la función del temporizador se definen las características del temporizador, si es de retardo a la desconexión o a la conexión, si funciona como monoestable, etc. Estas propiedades vendrán definidas en cada tipo de PLC, aunque puede considerarse cuatro grupos bien diferenciado. El número del temporizador es la etiqueta por la cuál se referencia y de cuyas prestaciones están definidas por esta etiqueta. En S5 se emplean números enteros que van desde el 0 hasta el valor máximo que depende del tipo de CPU del PLC, yendo desde 15, 31 ó 127 temporizadores. Por último, el parámetro más importante del temporizador es el tiempo de retardo. Este valor se definirá obedeciendo a la familia del PLC. Los párrafos siguientes tratarán de esclarecer los dos aspectos más relevantes: la carga del tiempo del temporizador y los tipos de temporizadores.

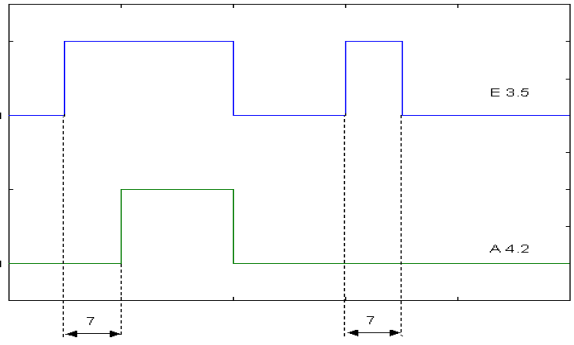
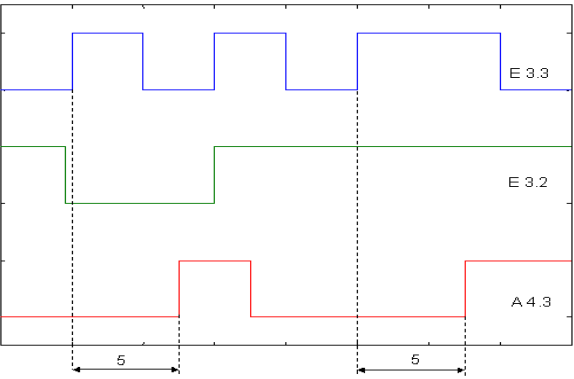
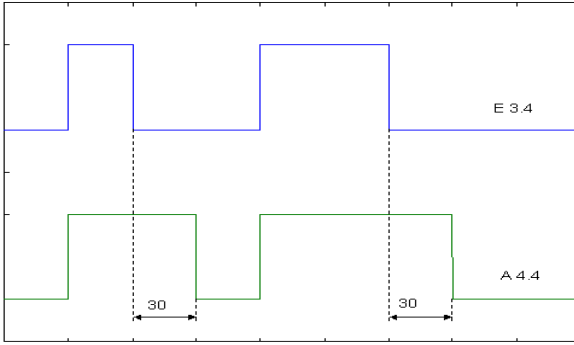
En STEP5, la forma de determinar el tiempo del temporizador se hace a través de la carga representativa del tiempo en el acumulador, bien a través de una constante (KT) o bien mediante una palabra de datos (DW, EW, AW o MW). En el primer caso,

Hay cuatro grupos de temporizadores. El primer grupo lo constituye los temporizadores al impulso. Éstos se caracterizan por tener activa la salida mientras dure la señal de mando, hasta un cierto tiempo máximo denominado tiempo de impulso. En S5 este temporizador se designa por el comando “SI”. El segundo grupo corresponde con los monoestables o conformadores de impulsos. Semejante al impulso de conexión, la salida se mantiene activa, una vez activada la señal de mando, durante un tiempo constante e independiente de esta señal. La función en S5 de este temporizador es “SV”.

Luego están los temporizadores con retardo a la conexión y a la desconexión. El tercer grupo corresponde a los temporizadores con retardo a la conexión, cuya salida se retarda hasta que transcurra el tiempo de retardo. Es el temporizador más empleado. En S5 se implementa a través de las funciones “SE” y “SS”. Los temporizadores con retardo a la desconexión es el último tipo. Sus salidas se activan con las señales de mando y se mantienen hasta un tiempo después de caer aquellas. A ese tiempo se le denomina tiempo de desconexión. La función en S5 se llama “SA”.

El cuadro 22.1 indica cómo funcionan y cómo se programan los cinco temporizadores de S5. En él aparece el listado de instrucciones en AWL y su cronograma.

Nombre	AWL	Cronograma
Temporización como impulso “SI”	U E0.1 L KT 400.1 SI T1 U T1 = A1.2	
Temporización como monoestable “SV”	U E3.1 L KT 120.1 SV T2 U T2 = A4.1	

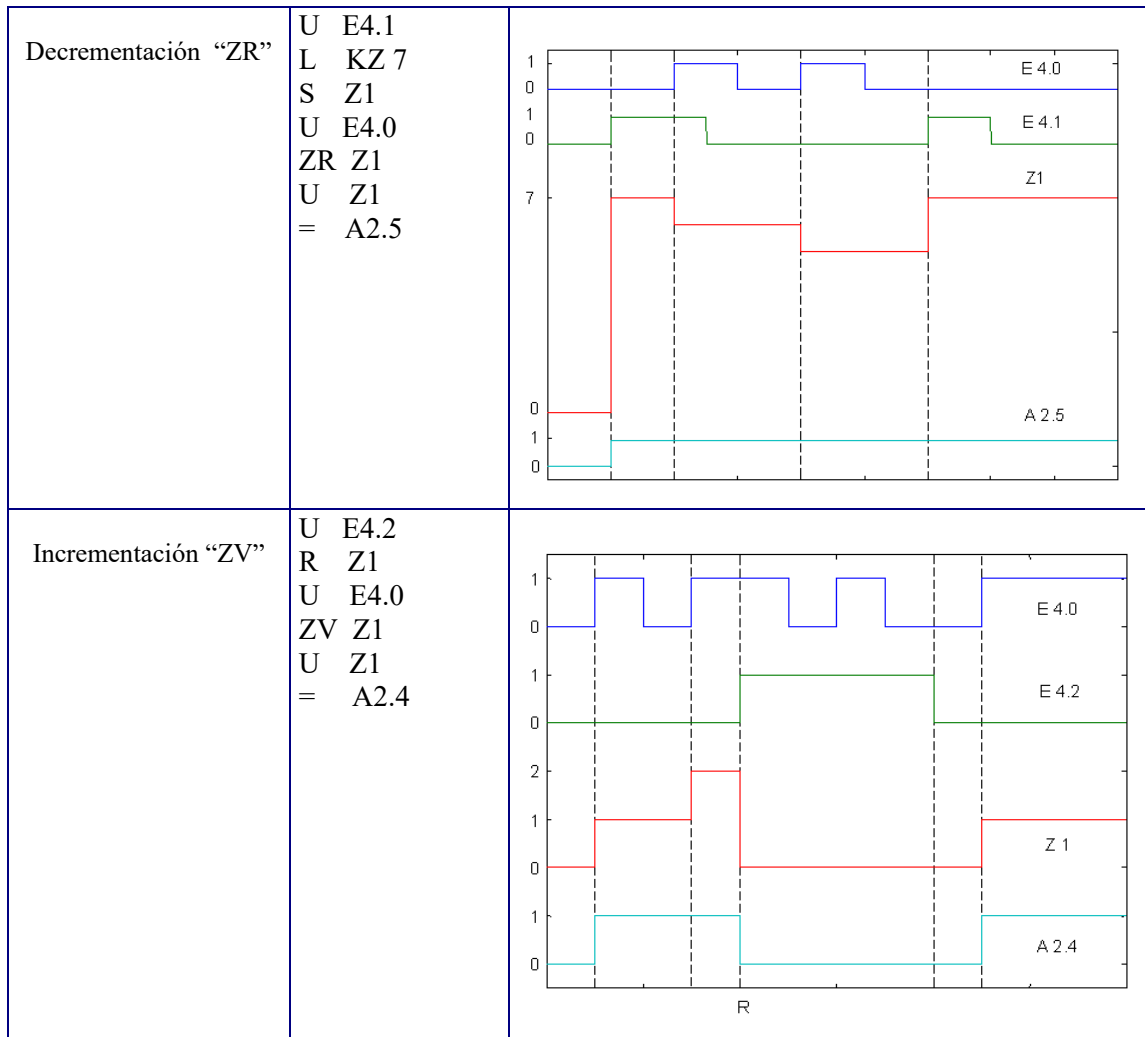
<p>Retardo a la conexión “SE”</p>	<p>U E3.5 L KT 70.1 SE T2 U T2 = A4.2</p>	 <p>The diagram shows two signals over time. The top signal, labeled 'E 3.5', is a blue square wave that transitions from 0 to 1 and back to 0. The bottom signal, labeled 'A 4.2', is a green square wave that transitions from 0 to 1 and back to 0. Vertical dashed lines mark the rising and falling edges of the event signal. Horizontal arrows below the axis indicate a time delay of 7 units between the event transitions and the corresponding action transitions.</p>
<p>Retardo a la conexión memorizada “SS” y reposición de una temporización “R”</p>	<p>U E3.3 L KT 50.1 SV T4 U E3.2 R T4 U T4 = A4.3</p>	 <p>The diagram shows three signals over time. The top signal, labeled 'E 3.3', is a blue square wave. The middle signal, labeled 'E 3.2', is a green square wave. The bottom signal, labeled 'A 4.3', is a red square wave. Vertical dashed lines mark the rising and falling edges of the event signal. Horizontal arrows below the axis indicate a time delay of 5 units between the event transitions and the corresponding action transitions.</p>
<p>Retardo a la desconexión “SA”</p>	<p>U E3.4 L KT 300.1 SA T5 U T5 = A4.4</p>	 <p>The diagram shows two signals over time. The top signal, labeled 'E 3.4', is a blue square wave. The bottom signal, labeled 'A 4.4', is a green square wave. Vertical dashed lines mark the falling edges of the event signal. Horizontal arrows below the axis indicate a time delay of 30 units between the event transitions and the corresponding action transitions.</p>

Cuadro 22. 1. Cronogramas de los temporizadores de STEP5

9.2.3.3 Los contadores

Los contadores son dispositivos capaces de medir los cambios de una variable de entrada de carácter discreto. Su salida, también discreta, se activará o se desactivará cuando el número de transiciones en la variable de entrada haya alcanzado un valor prefijado.

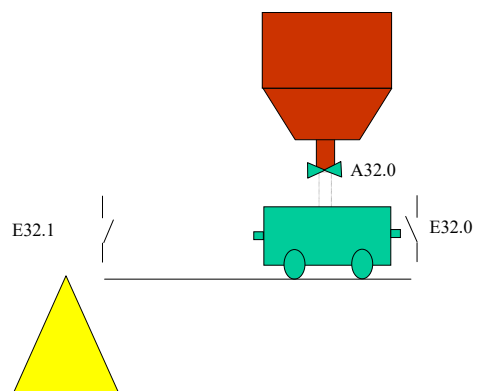
Al igual que los temporizadores, la programación de los contadores en los PLCs requieren del nombre de la función del contador, el número de elemento y los parámetros de la preselección. La función del contador define el tipo de contador a utilizar (“ZV” y “ZR”). El número de elemento hace referencia a la etiqueta de un contador que lo caracteriza. En S5 se enumeran desde 0 hasta el número máximo que puede tener de contadores el autómatas; este valor dependerá del modelo. El parámetro



Cuadro 22. 2. Cronograma de los contadores de STEP5

Ejercicio 22.2

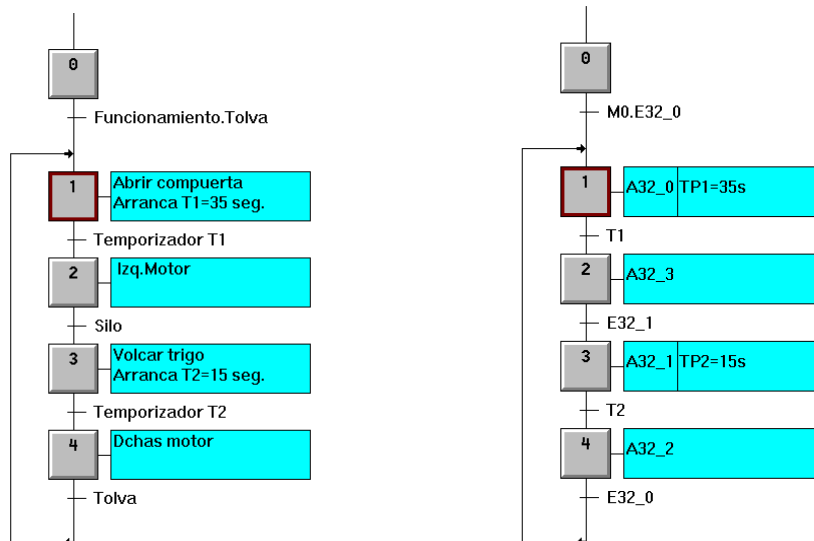
Una vagoneta transporta trigo desde una tolva hasta un silo. El automatismo tiene un pulsador de inicio (E33.0). La vagoneta en posición de reposo se encuentra debajo de la tolva, esto es, activando E32.0. Cuando se pulsa inicio, la vagoneta es cargada desde el silo con trigo, abriendo durante 35 segundo la electroválvula asociada con la salida A32.0, transcurrido ese tiempo se cerrará la tolva y el carro se desplazará hacia la izquierda hasta alcanzar el silo (E32.1). Un cilindro hidráulico, controlado por una electroválvula monoestable (A32.1), levantará la carga de la vagoneta hacía el silo durante 15 segundos. Posteriormente, la



vagoneta volverá a posición inicial y se volverá a repetir este ciclo cinco veces. El movimiento del motor es realizado a través de un motor eléctrico con inversión de giro y cuya tabla de verdad corresponde a:

A32.2	A32.3	Motor
0	0	Parado
0	1	A izquierdas
1	0	A derechas
1	1	Parado

Hasta ahora los ejemplos vistos resultaban casi intuitivos el número de marcas que tenía el automatismo, ya que el número de éstas no superaban más de dos o tres marcas. Sin embargo, ahora se observa que puede haber hasta cinco marcas. Adelantando la programación gráfica con GRAFCET se pueden obtener de forma metodológica el número de marcas. El grafo base de la figura adjunto muestra el comportamiento secuencial del automatismo del ejemplo. Hay tantas marcas como estados del grafo. De las condiciones de transitividad se obtienen las condiciones lógicas de los SETs de las marcas y los RESET corresponden a los estados posteriores:



$$\begin{aligned}
 M0.0 & \begin{cases} S : E33.0 \\ R_p : \overline{Z1} \cdot E32.0 \end{cases} & M0.1 & \begin{cases} S : M0.0 \cdot E32.0 \\ R_p : M0.2 \end{cases} & M0.2 & \begin{cases} S : T1 \\ R_p : M0.3 \end{cases} \\
 M0.3 & \begin{cases} S : E32.1 \\ R_p : M0.4 \end{cases} & M0.4 & \begin{cases} S : T2 \\ R_p : M0.1 + \overline{M0.0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Marca 0	Marca 1	Marca 2	Marca 3	Marca 4
U E33.0	U M0.0	U T1	U E32.1	U T2
S M0.0	U E32.0	S M0.2	S M0.3	S M0.4
U M0.0	S M0.1	U M0.3	U M0.4	U M0.1
L KZ 5	U M0.2	R M0.2	R M0.3	R M0.4
S Z1	R M0.1	U M0.1	U M0.3	O M0.4
U E32.1	U M0.1	= A32.3	L KT 50.1	ON M0.0
ZR Z1	L KT 350.1		SE T2	= A32.2
UN Z1	SE T1		U M0.3	
U E32.0	U M0.1		= A32.1	
R M0.0	= A32.0			

9.2.4 Estructura de los programas en STEP5

Los programas de usuario pueden ser muy extensos y complejos o pueden ser sencillos y con pocas instrucciones. En cualquier caso, siempre es conveniente dividir el automatismo en parte lógicas, para posteriormente traducir los programas como conjuntos de subrutinas. Como no todas las partes del programa requieren el mismo tratamiento existirán distintitos tipos de subprogramas. En S5 se ofrece al programador varios tipos de módulos o zonas para colocar las instrucciones y los datos de sus programas:

- a) módulo de organización, OB
- b) módulos de programa, PB
- c) módulos de datos, DB
- d) módulos de funciones, FB

a) Módulos de organización, OB

Constituyen la interfase o intermediario entre el sistema operativo del PLC y el programa del usuario. Forman parte del programa de usuario pero sólo pueden ser llamados por el sistema operativo; hay alguna excepción. Estos módulos desempeñan funciones específicas. Por ejemplo, el OB1 es el módulo donde se inicia la ejecución cíclica del programa; desde este módulo son llamados todos los demás. El OB21 es el módulo que se procesa en el re arranque a partir del estado de la CPU "STOP"; cuando se hace un arranque desde el estado STOP, el autómata programable realizará las instrucciones depositadas en este módulo. El OB22 es el elaborado en el re arranque después del retorno de la tensión de red. Otros módulos de organización se especializan en la elaboración de alarmas, en el tiempo de ciclo,... Estos módulos tienen mucho que ver con GEMMA.

b) Módulos de programa PB

Los módulos de programa serán los soportes principales para las instrucciones del usuario. Su programación comienza con la designación de un número para nombrarlos. Se pueden llamar desde los módulos de organización, de funciones o desde los mismos módulos de programa. Existe un número máximo de módulos de programas utilizables. También está limitado el número de instrucciones que pueden contener uno cualquiera de estos módulos. Son posible dos formas de acceso a estos módulos: la absoluta, que emplea la instrucción “SPA” y la condicional que emplea la instrucción “SPB”. Con estas instrucciones se accede también a los módulos de funciones.

c) Módulos de datos DB

Como su nombre indica son las subrutinas o partes del programa destinado a almacenar los datos del programa de usuario. Al igual que en los módulos de programa, se empieza dándoles un número que sirve para llamarlos cuando sean necesarios. En estos módulos se guardan los datos en formas de bits, en forma de números (hexadecimal, BCD, ...) o en forma de caracteres alfanuméricos.

Para llamar a estos módulos se emplea la instrucción “A”; por ejemplo, para llamar al módulo de datos 10 sería A DB 10. A partir de este momento se podría trabajar con este módulo de datos. Como en el caso de los módulos de programa existen límites tanto para el número de datos que pueden contener uno de estos módulos, como para el número de datos que se pueden utilizar con cada PLC.

d) Módulos de funciones FB

Se crearon para la realización de funciones complicadas o que se repiten con frecuencia. En dos grandes grupos se podrían clasificar: los módulos funciones estándares que son suministrados por el fabricante, y los módulos funcionales creados por el propio programador. Los primeros son programas que el fabricante suministra en este formato de módulo funcional para ayudar al usuario en tareas más o menos complicadas de programación. Existen módulos funcionales estándares para el tratamiento de las señales analógicas, para la conversión de códigos, para multiplicar, dividir, etc.

Para acabar se muestra en la figura 22.1 una manera gráfica de una posible estructura de un programa. Se observa cómo se salta de un OB a un PB y luego a un FB. Cada uno de los módulos debe de realizar una tarea distinta y bien definida de la máquina o proceso objeto de la automatización. Esta característica de división de un programa en módulos o subrutinas es común a todos los fabricantes. Tener un programa bien estructurado facilita la comprensión y la detección de errores.

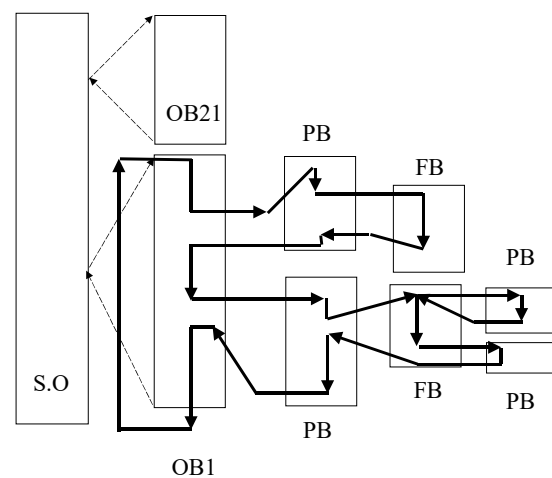


Figura 22. 1. Ejecución cíclica de un programa en STEP5

9.3 Introducción a GRAFCET

El GRAFCET o Grafo de Control ETAPA-TRANSICIÓN nació como resultado de los trabajos de la AFCET¹, iniciados en la década de los setenta. En principio se pretendía satisfacer la necesidad de disponer de un método de descripción de los procesos, con independencia de la tecnología, mediante un gráfico funcional que pudiera ser interpretado por no especialistas de la automatización. El gráfico funcional permite unificar la forma de descripción del proceso para los técnicos de distintos campos, desde los ingenieros de la organización o de producción, que definen las necesidades del automatismo, pasando por el de diseño, que debe de implementar el sistema de control y los accionamientos, hasta el técnico de mantenimiento, que debe cuidar de su funcionalismo o de introducir modificaciones en la fase de explotación.

GRAFCET plantea sobre el proceso dos puntos de vistas complementarios. El llamado NIVEL 1, donde se definen las especificaciones funcionales del automatismo, concretando de forma concisa las diferentes funciones, informaciones y órdenes implicadas en él, sin entrar en detalles propios de la parte tecnológica utilizada (actuadores, transductores, etc). En el segundo punto de vista, denominado NIVEL 2, se incluyen los recursos concretos que permitirán la realización física del automatismo.

En la actualidad, diversos autómatas programables incorporan compiladores desde la programación en GRAFCET a código nativo, o lo traduce a instrucciones de medio nivel de la máquina². No obstante, de estas traducciones no se debe de llegar a pensar que GRAFCET es un lenguaje de programación. Es mucho más, sus dos niveles de vista sobre el proceso a controlar, no sólo hacen referencia a la propia algoritmia del PLC sino también a los aspectos tecnológicos y de la propia organización del proceso automatizar.

9.4 Diseño basado en GRAFCET

El GRAFCET representa una herramienta para el modelado dinámico de los sistemas de control todo-nada. Con este objetivo, se usarán diagramas que presenten los comportamientos de estos sistemas en el tiempo. Un proceso puede ser explicado en términos de operaciones más o menos complejas, por ejemplo, taladrar, enroscar, limpiar,... Con éstas se expresarán las secuencias de las operaciones que constituyen el sistema. A cada una de estas operaciones se la llama MACROETAPA. A su vez, éstas pueden ser desglosadas en instrucciones más elementales, como impulsar pieza, bajar broca, expulsar aire, etc³. Cuando estas acciones pueden ser expresada por ecuaciones

¹ AFCET: Asociación Francesa para la Cibernética, Economía y Técnica

² En este sentido, el departamento posee el paquete MEDISS, capaz éste de convertir el GRAFCET de nivel 2 en instrucciones AWL para STEP 5 y 7.

³ Nótese el enfoque de arriba-abajo en el nivel de abstracción, ampliamente utilizado en todos los campos de la Ingeniería

lógicas combinaciones en un estado determinado, entonces a estas operaciones se les llamará ETAPAS. Una MACROETAPA esta constituida por una o varias ETAPAS.

Bajo esta perspectiva, el GRAFCET ha determinado la parte secuencial del proceso a controlar, ya que cada ETAPA del diagrama corresponde con un estado de la máquina de estados finitos que constituye el automatismo. De forma, que el número de marcas a memorizar es igual al número de ETAPAS del grafo, esto es, el número de variables de estado es igual al número de ETAPAS. Un automatismo modelado y constituido con GRAFCET no va a constituir una máquina de estado óptima, en el sentido de encontrar el número mínimo de variables de estado para este sistema secuencial, caso que si sucede con el método de Huffmann. Por lo tanto, la implementación no resulta la más satisfactoria desde el punto de vista del hardware y del software, al necesitar más recursos computacionales. Sin embargo, desde la óptica de la fiabilidad del sistema, su facilidad de testeo y un mejor mantenimiento, hace preferible emplear esta herramienta. Además, con la evolución de los recursos computaciones resulta casi insignificante un aumento del número de marcas y los consecuentes retrasos en las salidas.

9.4.1 Elementos gráficos de base

Un GRAFCET, por lo tanto, es un diagrama funcional, el cual describe gráficamente los diferentes comportamientos de un automatismo secuencial. El grafo está constituido por una sucesión alternativa de ETAPAS y TRANSICIONES unidas por LÍNEAS DE EVOLUCIÓN.

Las ETAPAS, que representan cada uno de los estados del sistema, se definen como las situaciones en la que las entradas y las salidas del autómatas permanecen invariables con el tiempo, esto es, las relaciones entre las entradas y las salidas de las etapas son puramente combinacionales. La etapa se representa por un cuadrado o por un rectángulo con un número en su interior, el cual indica su referencia. Se denominan etapas iniciales aquellas que se posiciona el automatismo al empezar el proceso por primera vez. Éstas son representadas por un cuadrado o por un rectángulo de doble línea.

A cada etapa se le puede asociar una serie de ACCIONES a efectuar sobre el sistema, las cuales se ejecutarán sólo cuando la etapa esté activa. Las acciones asociadas a una etapa se describen en el interior de rectángulos situados a la derecha de la etapa y unidos a ésta por un segmento horizontal. En general, se suele emplear el criterio que cuando una etapa está activada, las acciones asociadas también lo están, esto es, las salidas de las acciones estarán a '0' lógico mientras la etapa esté desactiva y se pondrán a '1' cuando se active.

La TRANSICIÓN es la separación entre etapas, indicando la finalización de las actividades de una etapa e iniciando las operaciones de otra. Se representa por una línea cruzada sobre la línea de evolución. A toda transición se le asocia una condición lógica denominada RECEPTIVIDAD que escrita en forma de función lógica se pone al lado de la transición.

Las **LÍNEAS DE ACTIVIDAD** son segmentos horizontales o verticales que unen las etapas con transiciones. Las líneas se entenderán siempre orientadas de arriba hacia abajo, a menos que se represente una flecha en sentido contrario. Nunca una línea enlazará una etapa con otra sin transición entre medias. En definitiva, cuando se recorra el gráfico de evolución, por cualquier camino posible, deben alternarse siempre una etapa y una transición.

El gráfico funcional representa el conjunto de actividades del proceso de forma estática. Es posible, sin embargo, representar la situación dinámica en un instante dado, indicando qué etapa o etapas están activas en ese momento. El simbolismo utilizado para ello consiste en marcar con un punto las etapas activas. La evolución temporal del automatismo estará representada por la traza temporal de los puntos que pasan por las distintas etapas. Cabe señalar, finalmente, que los números de las etapas nada indican respecto a su orden de ejecución, sino simplemente tienen carácter de identificación.

9.4.2 Evolución del GRAFCET

Un GRAFCET evoluciona según las siguientes reglas:

1. Cada etapa tiene asociada una variable de estado de tipo bit. Una etapa está activa cuando su variable de estado está a '1' y desactivada cuando está a '0'.
2. Todo GRAFCET debe de poseer una o más etapas iniciales que son las que están activas al comienzo del funcionamiento.
3. Durante la evaluación normal del proceso, una etapa no inicial se activará cuando esté activa la etapa anterior y se cumpla la condición de transición entre ellas. Cualquier etapa se desactiva cuando se cumplan las condiciones de transición a la siguiente o siguientes y dicha transición se haya efectuado.
4. Una transición puede encontrarse en una de las cuatro siguiente situaciones:

No validada: La etapa o etapas inmediatamente anteriores o siguientes no están activadas.

Validada: La etapa o etapas inmediatamente anteriores están activadas, pero no se cumple la condición lógica de transición, esto es, la receptividad de la transición es falsa.

Franqueable: La etapa o etapas inmediatamente anteriores están activadas y se acaba de cumplir la condición lógica de transición. Ésta es una situación transitoria, pues dicha transición será automáticamente franqueada.

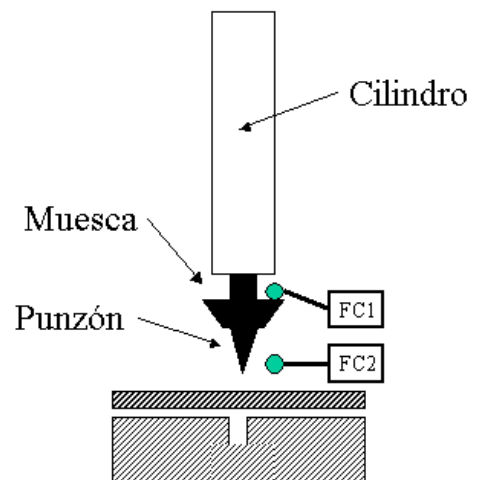
Franqueada: Se ha activado la etapa o etapas inmediatamente siguientes y se han desactivado la etapa o etapas inmediatamente anteriores.

5. Cuando se franquea una transición, se activa todas las etapas inmediatamente siguientes a la transición y se desactivan todas las etapas inmediatamente precedentes.
6. Varias etapas pueden ser franqueadas simultáneamente.
7. Si la validación del GRAFCET fuese que una etapa se activase y se desactivase a la vez, ésta permanecerá activa.
8. El gráfico de evolución expresado en GRAFCET debe ser siempre cerrado, sin dejar ningún camino abierto.

Para ilustrar el método de diseño basado en GRAFCET se va a desarrollar un ejemplo sencillo. Se tratará del automatismo de una punzonadora, reflejándose en el nivel 1 el automatismo sin tecnología y posteriormente se pasará al nivel 2 preparando tanto la parte operativa como el control del automatismo.

Ejemplo 22.3

La punzonadora semiautomática de la figura se compone de un cilindro neumático donde se ha ubicado solidariamente al vástago de éste, un punzón y una muesca capaz de desplazar los finales de carrera. El usuario tiene un pulsador de MARCHA. Al actuar sobre el pulsador la punzonadora pasa de la situación de reposo al de desplazamiento máximo. Los finales de carrera 1 y 2, FC1 y FC2, marcan las posiciones anteriores respectivamente. Cuando el punzón alcanza la situación de FC2 retornará a la de reposo, marcada por el FC1, siempre y cuando, el pulsador de MARCHA no esté todavía activo.



Al iniciar la punzonadora está se encontrará en posición de reposo, esto es, con el cilindro recogido y a la espera que el usuario toque el pulsador de MARCHA. Cuando el usuario pulse MARCHA deseará PUNZONAR una pieza, el punzonador bajará hasta la posición del FC2 y permanecerá en esta posición si se sigue apretando MARCHA, en el caso de no seguir pulsado MARCHA subirá hasta alcanzar la posición inicial e iniciando de nuevo el ciclo. Este automatismo quedará expresado en GRAFCET nivel I :

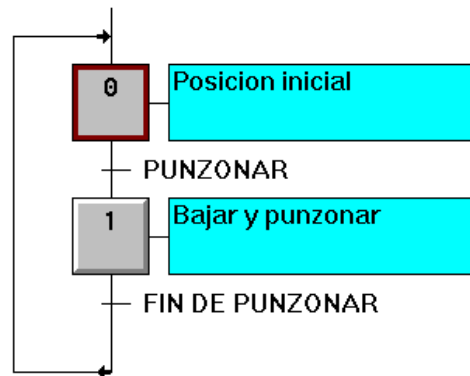
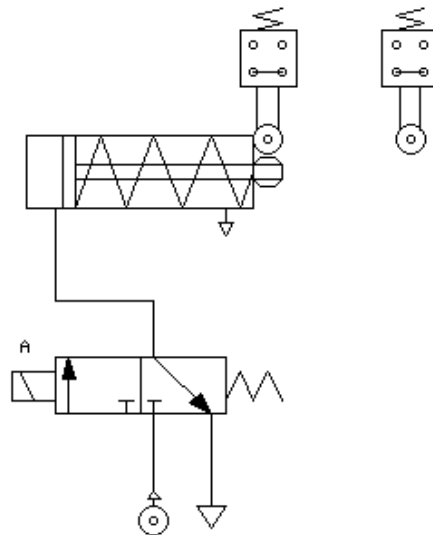


Figura 22. 2. GRAFCET de nivel 1 de la punzonadora

Para el nivel 2 habrá de descender a los recursos tecnológicos a emplear. En el caso de la punzonadora se implementará con un cilindro neumático y debido a que el esfuerzo mecánico debe darse en el proceso de expansión del cilindro neumático y en la recogida no existe una fuerza de oposición, se empleará un cilindro neumático de simple efecto con resorte en el lado del vástago. A consecuencia de esta elección se empleará una electroválvula monoestable 3/2 para el control del cilindro. El esquema neumático será de la forma:



Respecto a las posiciones de la punzonadora se emplearán los dos finales de carrera, tal cual se citan en el enunciado. Las receptividades de PUNZONAR y FIN DE PUNZONAR corresponderán con las expresiones lógicas de:

$$\begin{aligned} \text{PUNZONAR} &= \text{MARCHA} * \text{FC1} \\ \text{FIN DE PUNZONAR} &= \overline{\text{MARCHA}} * \text{FC2} \end{aligned}$$

En cuanto a las acciones de las etapas, en la inicial la electroválvula monoestable estará apagada y cuando baja a punzonar se excitará, indicándolo con $A = '1'$. El grafo de nivel 2 quedará como⁴:

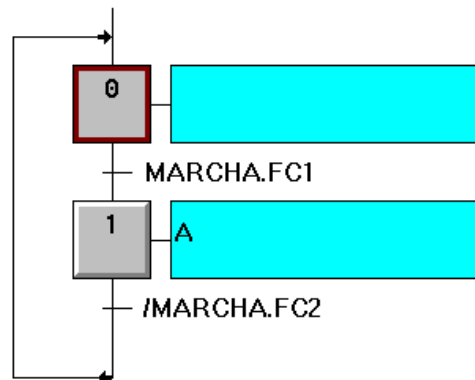


Figura 22. 3. GRAFCET de nivel 2

9.4.3 Estructuras básicas del GRAFCET

No todos los automatismos a desarrollar tienen una estructura tan simple como el del ejemplo hecho, en donde el sistema secuencial sigue una secuencia lineal de etapas. GRAFCET dispone de las estructuras suficientes para describir cualquier automatismo secuencial por complejo que sea. Así por ejemplo, puede suceder que existan subprocesos alternativos y que se elija uno de ellos a partir de la información de las etapas anteriores. Otro caso típico es la generación de multitareas simultáneas a partir de un cierto nivel de actividad del proceso. Estas posibilidades reales y cotidianas en los automatismos secuenciales son recogidas en GRAFCET con las tres estructuras básicas de control:

1. Secuencia lineal
2. Divergencia y convergencia de subprocesos alternativos o en “O”
3. Divergencia y convergencia de subprocesos simultáneos o en “Y”

9.4.3.1 Secuencia lineal

La característica de este proceder es una ejecución de una etapa tras otra, contenida en un sólo hilo o hebra (*thread*) y reflejado en el GRAFCET como una consecución de etapas una detrás de otra. Formalmente no hay impedimento para que aparecieran dos o más etapas activas a la vez, sin embargo, mostraría un mal diseño en el GRAFCET. Las actividades paralelas o multihebras se reflejan con estructuras de

⁴ Observe que la negación de una de las condiciones de la transición de la etapa 1 a la 0, MARCHA, aparece de forma no estándar, esto es, no queda simbolizada por una línea superior sobre la etiqueta lógica sino a través de la barra del UNIX, ‘/’.

divergencias de subprocesos simultáneos (que se verán más adelante). Además, estas presentaciones de varias etapas secuenciales lineales activas pueden provocar contradicciones en las condiciones de activación y desactivación de las propias etapas. Por lo tanto, en el procesamiento lineal se caracterizará por tener una única etapa activa y todas las demás, de esa hebra, están desactivadas. Una muestra de este tipo de procesamiento se ha visto en el ejemplo anterior.

En las secuencias lineales una etapa se activará cuando su receptividad este franqueada, desactivando la etapa anterior. En general, esta estructura se encontrará como parte de una estructura más compleja.

9.4.3.2 Divergencia y convergencia de subprocesos alternativos o en “O”

Estas estructuras de control corresponden con las bifurcaciones en las dinámicas de los automatismos, de aquí su carácter de alternancia o del por qué se emplea la “O” como símbolo para su identificación, ya que refleja el comportamiento de la función OR del Álgebra de Boole. Las relaciones semánticas que establecen son del tipo: ‘o este subproceso o este otro o éste’. Hay muchos ejemplos de esta manera de actuar, por ejemplo, se podría pensar en una máquina expendedora de bebidas refrescantes, en donde algunos productos tuviesen igual precio y el usuario eligiese una de las bebidas entre los varios tipos de refrescos. El automatismo, después de haber superado las etapas de adquisición de monedas, pasará a una divergencia alternativa, donde el usuario elegirá la bebida y la máquina seguirá una de las posibles ramas de ejecución para expulsar el producto seleccionado. La bifurcación se manifiesta como la selección de una rama entre varias posibles, atendiendo a alguna condición que se produce en el momento de la separación. En el ejemplo expuesto, la condición lógica está dada por el usuario al haber apretado el botón de la bebida preferida.

Pero también se decanta que toda divergencia debe de acabar en una convergencia de igual naturaleza. Los automatismos son grafos de un ciclo, por lo tanto, las ramas de una divergencia deben de confluir en un mismo punto de convergencia. Siempre sucederá que la divergencia se produce antes que la convergencia. El GRAFCET del proceso debe de mostrar que en todas sus posibilidades de ejecución sus comportamientos son cíclicos, esto es, no puede haber ningún recorrido que quede abierto, todos deben de ser cerrados.

Está claro que primero será siempre la divergencia y luego confluirá en la convergencia. No puede haber confluencia en una secuencia lineal pues no ha habido ninguna divergencia anteriormente. Si existe una divergencia también existe posteriormente una confluencia.

Cuando se ha comentado que la convergencia debe de ser de la misma naturaleza que la divergencia, se pone de manifiesto que si la divergencia es alternativa la convergencia también lo será. Si el proceso sigue, en un momento dado, una única hebra y ésta llega a un punto donde hay varios caminos alternativos a seguir (divergencia alternativa), confluirá en una etapa que podría haber llegado por otro recorrido, pues bien, esta convergencia no se sincronizará con ninguna otra hebra, pues el proceso es de carácter monohebra, al igual que la divergencia. En el ejemplo expuesto, la máquina devolverá la bebida elegida y volverá a estar dispuesta a recibir el

dinero para servir otro refresco. Como se observa, la máquina confluye al mismo estado con independencia del tipo de refresco elegido. Este tipo de convergencia es de tipo alternativo.

En GRAFCET se admite la posibilidad de encadenamiento de estructuras de control, esto es, puede haber otros pares de divergencia/convergencia de igual o de distinta naturaleza dentro de otro par divergencia/convergencia. Al primero tipo las llamaremos HIJAS y al segundo PADRE. Así, al alcanzar un cierto nivel de evolución de un proceso se puede encontrar con una divergencia PADRE y dentro de sus ramas pueden aparecer otras divergencias HIJAS, generándose anidamientos en la dinámica del proceso. Dos aspectos a tener en cuenta: primero, todas las ramas de una divergencia en un nivel determinado de anidamiento, se cierran en una convergencia que se da en el mismo punto e igual anidamiento. Si existen divergencias HIJAS de otra PADRE, la convergencia de las HIJAS estará antes que la del PADRE. Y en segundo lugar, que si en un nivel de anidamiento la divergencia es de una naturaleza su convergencia también lo será de la misma naturaleza.

Cuando desde una etapa de automatismo puede continuar su evolución por varias secuencias alternativas, se emplearán ramas en divergencia alternativa o en “O”. Éstas se representan por ramas paralelas de una sola línea y en las que cada una de ellas tienen una transición. La desactivación de la etapa anterior a la divergencia se ocasiona con la activación alternativa de cualquiera de las etapas siguientes. La activación de cualquier etapa siguiente a la divergencia requiere de la activación de la etapa anterior al punto de divergencia y que la transición de la etapa sea franqueable. El carácter excluyente de esta divergencia supone que la activación de una rama desactiva al resto, además exige un nivel de prioridades en las transiciones de cada una de ellas. Este fin se consigue añadiendo en las condiciones de transición de las de menor prioridad, las condiciones de transición negada de las de mayor prioridad. En la figura 22.3 se observa que en la divergencia PADRE, la rama de la derecha tiene prioridad sobre la izquierda. Nótese que en la receptividad de la etapa 2 se ha añadido la negación de la receptividad de la etapa 5. En el caso de cumplir en el mismo momento las dos condiciones, T2 y T5, el proceso seguirá por la rama de la derecha, al aparecer en la izquierda la negación de T5.

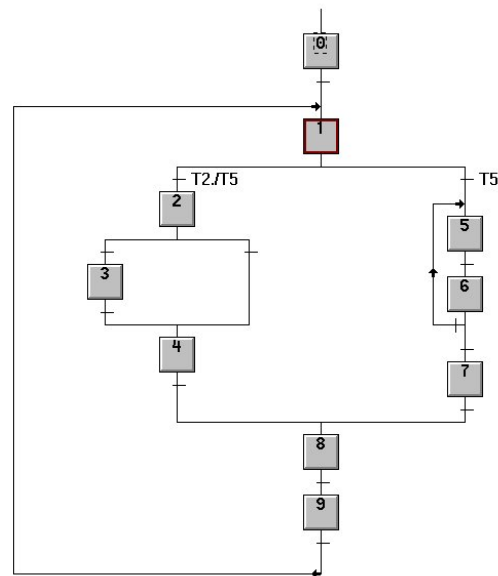
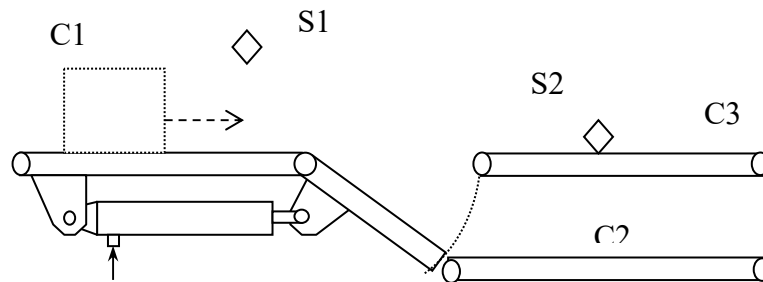


Figura 22. 4. Anidamiento de divergencia/convergencia O

Ejemplo 22.4

La presente figura, representa una bifurcación en el plano vertical en una

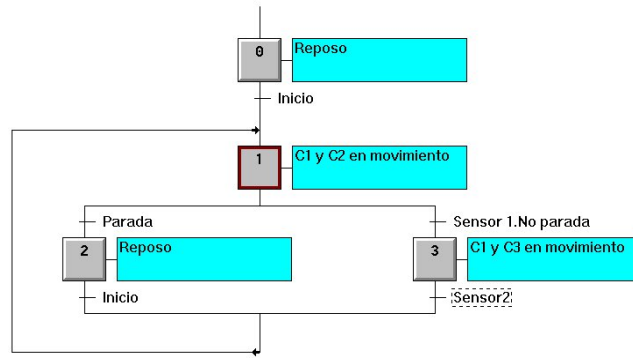


cinta transportadora de un sistema automático. Para conseguir el movimiento del segmento del carril de la bifurcación, se ha dispuesto de un cilindro neumático de simple efecto, controlado por una válvula monoestable pilotada eléctricamente.

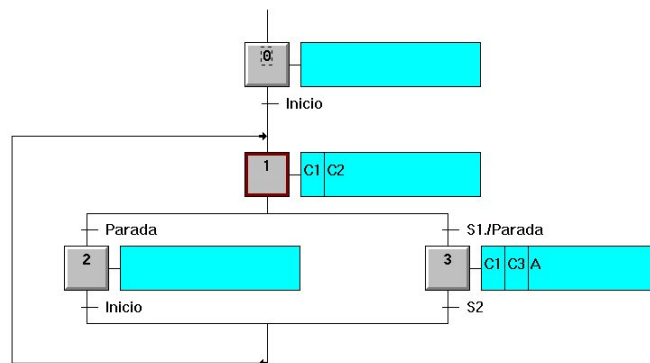
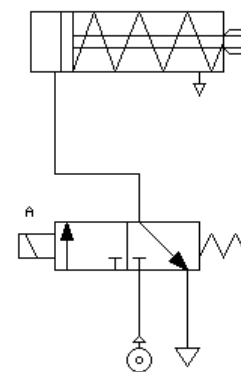
El sensor S1 es un sensor infrarrojo, dispuesto de tal forma que cuando las cajas entrantes superan una determinada altura, el sensor responderá con 24 V, mientras que estará fijando una señal de 0V en cualquier otro caso (cajas más pequeñas o ninguna). El sensor capacitivo de presencia S2 detecta, en el carril superior, que la caja ya ha salido completamente de la bifurcación, de tal modo que siempre se activa (24 V) ante la presencia de la caja, y está situado respecto del final del carril móvil a una distancia tal que asegura que se cumple lo expuesto. El automatismo funciona de la siguiente manera:

La posición de reposo es la indicada en la figura. Siempre que se detecte una caja en S1 (es decir, una caja alta), se desviará al carril superior, y por tanto deberá permanecer en esta posición hasta detectar que la caja ha salido. Las cajas discurren por las cintas con bastante espacio entre ellas, no dándose nunca la situación de que dos cajas puedan estar a la vez en la bifurcación. Al mismo sistema se le añaden dos pulsadores, uno de inicio y otro de parada. Al pulsar el botón de inicio, el sistema moverá las cintas transportadoras C1 y C2 o C1 y C3 según el tamaño de las cajas. Si se pulsa el botón de parada, las cintas se pararán pero asegurándose que no se queda ninguna caja alta en la bifurcación. Realizar el GRAFCET nivel 1 y 2.

En el automatismo se observa que una vez apretado el pulsador de inicio y habiéndose puesto en funcionamiento las cintas transportadoras C1 y C2, hay una bifurcación alternativa, o se pulsa parada y se detienen las cintas C1 y C2 o ha llegado una caja alta y se activan las cintas C1 y C3. Esta sintaxis queda expresada en GRAFCET de nivel 1 como:



Nótese que en la bifurcación se ha priorizado la rama de la parada. Para el nivel 2, se resuelve que el control sobre los motores de las cintas transportadoras se basa sólo en control todo/nada, esto es, o encendido o apagado. Respecto al cilindro de la trampilla, al haber sólo esfuerzo mecánico en la subida y no en la bajada, requerirá de un cilindro de simple efecto con resorte de retorno. La electroválvula corresponderá, en una de sus soluciones, a dos posiciones y tres vías y de tipo monoestable. El esquema electroneumático queda reflejado en la figura adjunta. Se ha denominado con la etiqueta *A* la variable del monoestable. El GRAFCET de nivel 2 ha quedado definido a partir de la implementación tecnológica decidida y por la naturaleza de los sensores mencionados:



9.4.3.3 Divergencia y convergencia de subprocessos simultáneos o en 'Y'

El proceso alcanza una divergencia en 'Y' cuando debe de hacer varias tareas de manera simultáneas. En este punto la hebra se divide en varias más. Cada hebra hija realizará un conjunto de actividades expresada a través de las etapas que debe de recorrer. Los tiempos de ejecución de las hebras hijas no deberán ser idénticos, pero deberán de converger en un punto. Esta exigencia supone que los subprocessos tienen obligación de esperar a que todas las hebras abiertas hayan acabado antes de continuar. Obviamente, la naturaleza de la convergencia deberá ser de tipo simultáneo.

Una ley que se puede citar tanto en las divergencias/convergencias ‘Y’ o en ‘O’ es lo siguiente: en el mismo nivel de anidamiento de la hebra si existe una divergencia alternativa, la convergencia será también alternativa, y, lo mismo, si la divergencia es simultánea la convergencia será simultánea.

La divergencia será representada por una doble línea transversal, ubicando la condición de transición por encima. Sólo habrá una única condición y tras ser superada se abrirán tantas hebras como ramas existan en la divergencia. No habrá ninguna divergencia sin su punto de convergencia. El grafo será globalmente cerrado.

La convergencia también se mostrará por una doble línea transversal y la condición de transición estará colocada por debajo. Esta condición será franqueada cuando todas las hebras confluyentes hayan alcanzado su último estado. Como lo normal es que los tiempos de ejecución de cada hebra sean distintos, a veces se representan en las ramas etapas de espera, esto es, estados sin actividades con el único propósito de esperar hasta que las demás ramas terminen.

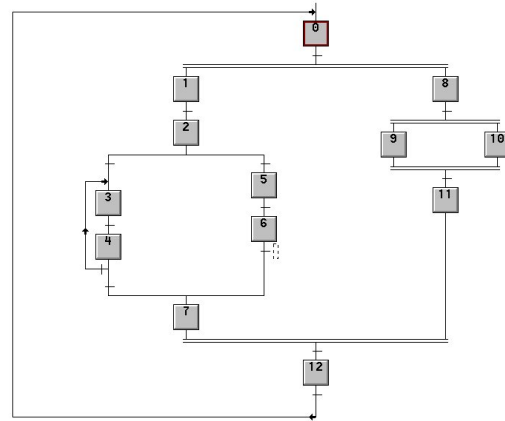
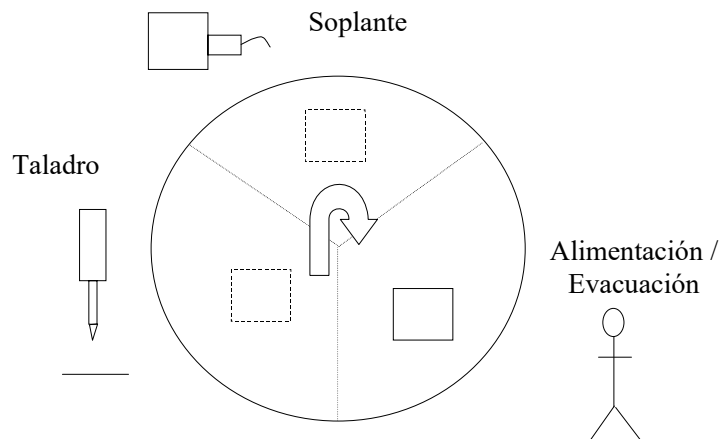


Figura 22. 5. Ejemplo de divergencia/convergencia simultánea

Ejemplo 22.5

Un área de automatización está constituida por un plato giratorio y por tres zonas: alimentación / evacuación de piezas, taladro y soplado (ver figura adjunta). En cada una de estas zonas se hacen tareas de forma simultánea respecto a las otras. El área reservado al usuario permite introducir y retirar piezas. Si hay una pieza mecanizada, la retira e introduce otra nueva para que sea procesada. Una luz verde le indicará al usuario que puede quitar la pieza e introducir otra. Cuando haya acabado de hacer esta tarea pulsará el pedal de avance y siempre y cuando hubieran acabada las otras actividades, se producirá un tercio de giro en la mesa.

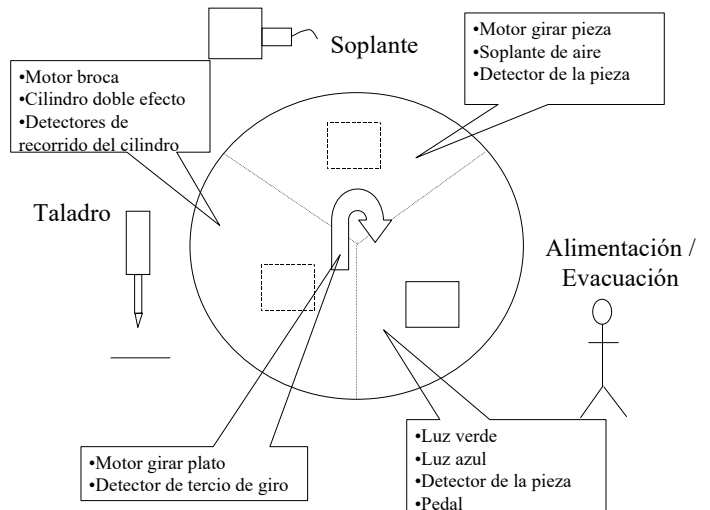


La pieza en la zona de taladro sufre el siguiente proceso: hay una taladradora eléctrica que detecta la pieza, baja y gira la broca a derechas,

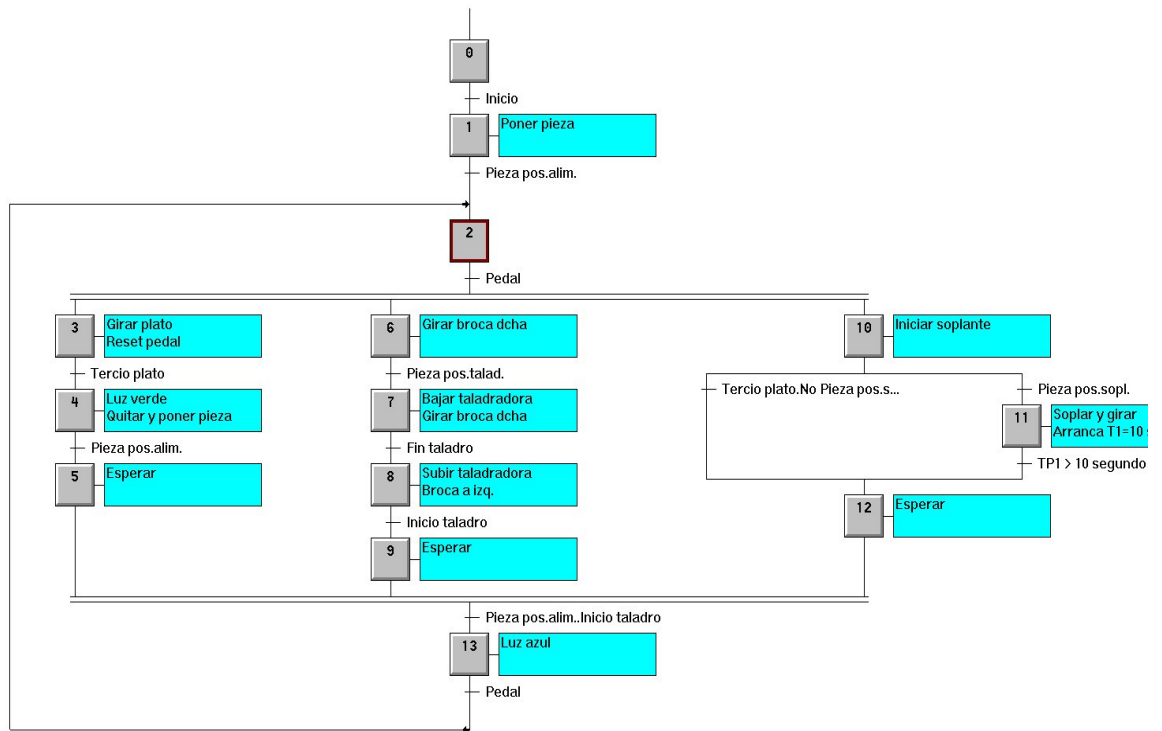
alcanza el tope de taladro, sube y la broca gira a izquierdas. Cuando llega a posición inicial se para.

Una vez taladrada la pieza se pasará a quitar las rebabas mediante un soplante que expulsa aire a presión durante 10 segundos. Esta acción se combina con el giro de la pieza. Por último, una luz azul señalará el fin del ciclo. Habrá un pulsador de inicio y otro de parada. No considerar la no alimentación de piezas en cada ciclo.

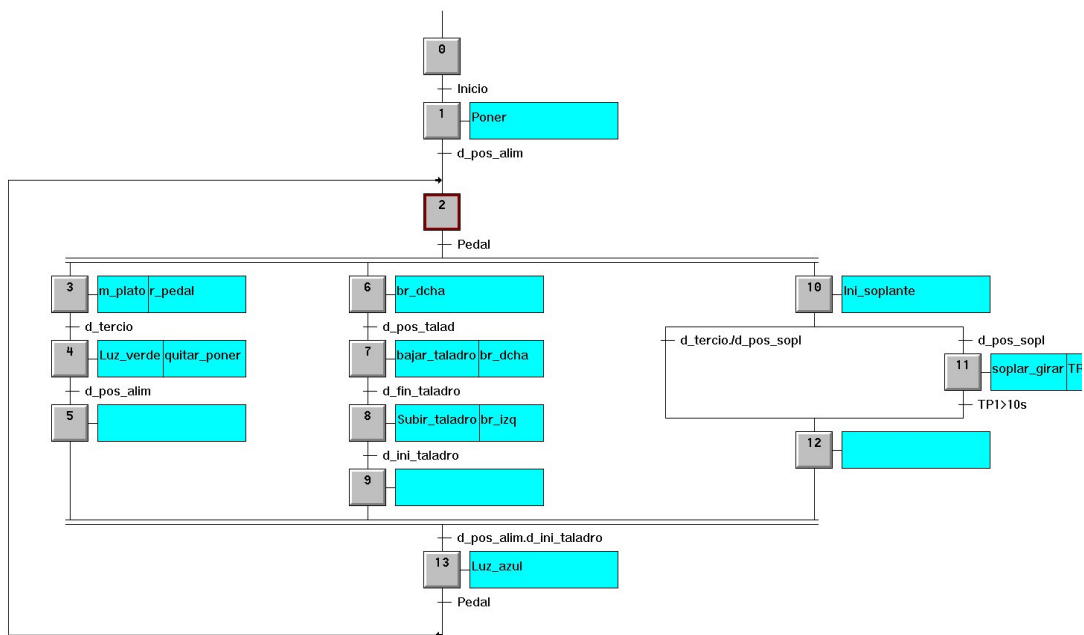
Se empleará un motor eléctrico para mover el plato y un detector de giro de un tercio del plato. En el puesto del usuario se colocará la luz verde y la luz azul; además, al pedal se le podrá la electrónica asociada a un biestable de forma que al apretarle se ponga a uno y el PLC se encargue de ponerle a cero. La zona de taladros se unirá la broca a un motor con inversor de giro y la bajada de la taladradora con un cilindro neumático de doble efecto. Será necesario detectar la posición de inicio y final de la taladradora junto con la presencia de la pieza. El soplante estará constituido por aire comprimido, un motor eléctrico que hace girar la pieza y un detector de la presencia de la pieza en esta área.



El GRAFCET de nivel 1 mostrará una divergencia simultanea para indicar las tareas paralelas que se ejecutan en las tres áreas. Hay que darse cuenta que en la primera vez de ejecución del ciclo en la zona de soplante no habrá ninguna pieza. Por lo tanto, en este subproceso se marcará una divergencia alternativa.



Con las decisiones tecnológicas tomadas, el GRAFCET de nivel 2 quedará como:



Se propone al alumno que modifique el GRAFCET de forma que en los ciclos finales de producción el usuario no introduzca ninguna pieza en la alimentación.

9.4.4 Macroetapas

El diseño inicial de un automatismo empieza con las grandes líneas de actuación de éste. Por ejemplo, en el último ejercicio resuelto, el sistema realiza tareas de alimentación / evacuación, taladrado y soplado. Pues bien, la formación del nivel 1 del GRAFCET puede ser contemplado por un proceso mediante aproximaciones sucesivas. Antes del alcanzar el resultado final se puede hacer un bosquejo a través de las tareas principales, sin necesidad de entrar en todas las actividades que pueden llevar implícitas. Palabras como roscar, fresado, alimentación, pintura, taladrado y otras tantas, sirven muy bien para una primera aproximación. GRAFCET define el concepto de macroetapas para esta utilidad. Una macroetapa es una tarea que engloba varias etapas. Esta agrupación puede tener divergencias en 'O' y en 'Y', aunque exige que en su expansión tenga una sola etapa inicial y otra final. Su representación es un cuadrado dividido en tres partes. La parte superior se deja para la enumeración en el contexto del grafo, la del medio para la identificación de la macro y la tercera se reserva para un texto significativo.

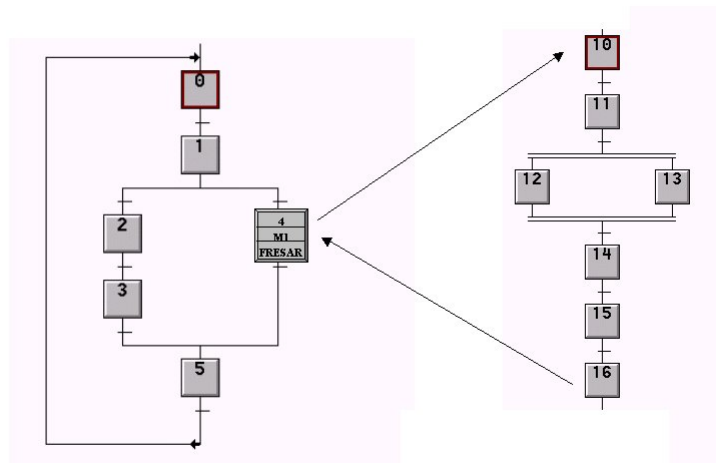


Figura 22. 6. Grafo con macroetapas

El uso de macroetapas facilita un desarrollo de lo genérico a lo particular. Además, permite fácilmente insertar el conocimiento de los ingenieros de producción en el diseño de los automatismos, los cuáles tienen una idea clara de las tareas que hay que automatizar y cómo debe de ser su organización.

En la macroetapa, la receptividad de la transición de entrada de ésta, significa la activación de su etapa inicial. Por el contrario, el estado activo de su última etapa supone la validación de la transición de salida de la macroetapa. En el ejemplo de la figura 22.6, cuando sea franqueable T4 saltará a la etapa 10, iniciando la ejecución de la macroetapa. Al activarse la etapa 16, la transición final de la macroetapa será validada y cuando cumpla su receptividad franqueable, volviendo al grafo principal.

9.4.5 Las ecuaciones lógicas de control del GRAFCET

Una vez definido el GRAFCET de nivel 2, en donde al automatismo no sólo se le ha reconocido sus partes sino que además tiene el soporte tecnológico para su

realización física, a lo que se le ha llamado la parte operativa del automatismo, cabe ahora preguntarse si existe también en el grafo la definición de la parte del control de éste. Así es, ésta se encuentra de forma implícita en la representación gráfica. De hecho, hay algunos PLCs que son capaces de ser programados a este nivel. Otros requieren de paquetes extras para la compilación desde el grafo hasta el código de instrucciones del PLC⁵. Sin embargo, bien sea por la simplicidad del automatismo, lo que supone que no se necesita emplear un PLC, o por que el autómata programable no sea capaz de entender este grafo, se pueden extraer las ecuaciones lógicas booleanas de control a partir del grafo.

Como todo automatismo secuencial tendrá dos partes: la secuencial y la combinacional. La primera vendrá definida por las etapas del grafo y por las condiciones de transición, quedando así definidas las memorias del automatismo. Mientras que la parte combinacional usará las salidas de la parte secuencial para constituir las acciones de cada etapa. Obviamente, si se tiene las memorias del sistema, las acciones de cada etapa son expresadas por ecuaciones combinacionales de la memoria de esa etapa y por otras condiciones adicionales de carácter combinacional.

Las expresiones resultantes corresponderán con la lógica booleana. Para una mayor generalización de las conclusiones, las memorias serán enunciadas por ecuaciones de comportamiento de los biestables RS. Luego estas ecuaciones son fácilmente traducibles a lenguajes de instrucciones de los autómatas programables o a la implementación en circuitos lógicos programables (PLDs) o a código en otros lenguajes de programación informáticos.

9.4.5.1 Diseño de la parte secuencial

En GRAFCET, la parte secuencial queda definida por las etapas del grafo. Como ya se ha comentado, cada etapa corresponderá con la memorización de cada uno de los estados del proceso. Por lo tanto, a cada etapa se le asociará una memoria. Al implementar esa memoria con un biestable RS, habrá de definir las ecuaciones del SET y del RESET de este biestable. Las expresiones algebraicas del SET estarán dadas por las condiciones de activación de las etapas a representar, mientras las desactivaciones de las etapas determinarán las expresiones del RESET.

Por lo tanto, a cada etapa se le asociará un biestable RS, el cuál será designado por M_i , siendo i el número de la etapa. El SET_i estará definido por la condición o condiciones de transición y por la etapa o etapas que le precedan. Dependiendo en donde la etapa se ubique respecto a la estructura de control, el SET_i estará definido por:

$$SET_i = \begin{cases} T_i \cdot M_{i-1} & \text{Secuencial lineal} \\ \bigcup T_j M_j & \text{Convergencia alternativa} \\ T_i \cap M_j & \text{Convergencia simultanea} \end{cases} \quad (22. 1)$$

⁵ En el caso de los PLCs del departamento se está empleando el SW MEDISS para la generación de código AWL para STEP5.

en donde T_i expresa la receptividad de la etapa i^6 . Para secuencias lineales se activará cuando esté franqueable su condición de transición T_i . Si la etapa está detrás de una convergencia en 'O' dependerá por cuál camino llegue la secuencia de ejecución, por este motivo aparece la unión de condiciones de transición junto con las etapas que le preceden. Por último, si hay varias hebras de ejecución simultánea y la etapa se encuentra después de la convergencia, la etapa requerirá para que T_i sea franqueable que todos los subprocesos convergentes hayan alcanzado las etapas anteriores a la de convergencia.

La desactivación de la etapa viene dada por la activación de la etapa o etapas posteriores. El $RESET_i$ es mucho más fácil de expresar, de la forma más genérica sería:

$$RESET_i = \bigcup M_{i+j} \quad j = 1,2,3,\dots \quad (22. 2)$$

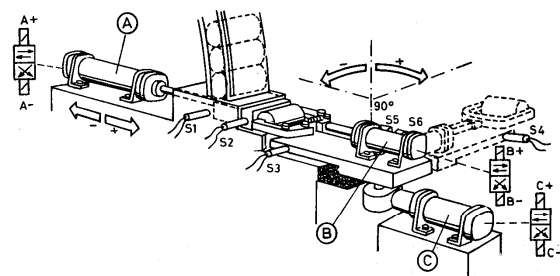
Para el caso de procesamiento lineal, j sería sólo 1, esto es, se desactivaría cuando se activase la etapa siguiente. En el caso de divergencia en 'O', el $RESET_i$ se pondría a uno lógico cuando el proceso siguiera a alguna de las ramas alternativa, activando una de las etapas posteriores y por tanto poniendo a $RESET_i$ a '1', en este caso j sería 1 ó 2 ó 3,... Si la divergencia es simultánea, todas las etapas posteriores se activarán y pondrían el $RESET_i$ a uno lógico.

9.4.5.2 Diseño de la parte combinacional

Las acciones de las etapas son expresiones combinacionales de las memorias de éstas, M_i . Tomando las salidas de M_i junto con las condiciones eventuales que se consideren se definirán las expresiones lógicas de las acciones.

Ejemplo 22.6

El transporte de un material cilíndrico de un alimentador a una línea de producción queda mostrada en la figura adjunta. En ella se observa tanto la elección sensorial como los propios actuadores. El cilindro neumático A empuja al cilindro desde el alimentador a las pinzas neumáticas. Éste cierra y el cilindro C hace rotar la pieza 90° hasta depositarlo en la línea de producción. El automatismo a continuación vuelva a posición inicial para un comportamiento cíclico. Determinar el GRAFCET básico de nivel 1 y 2, así como las expresiones algebraicas de la parte de control del automatismo.

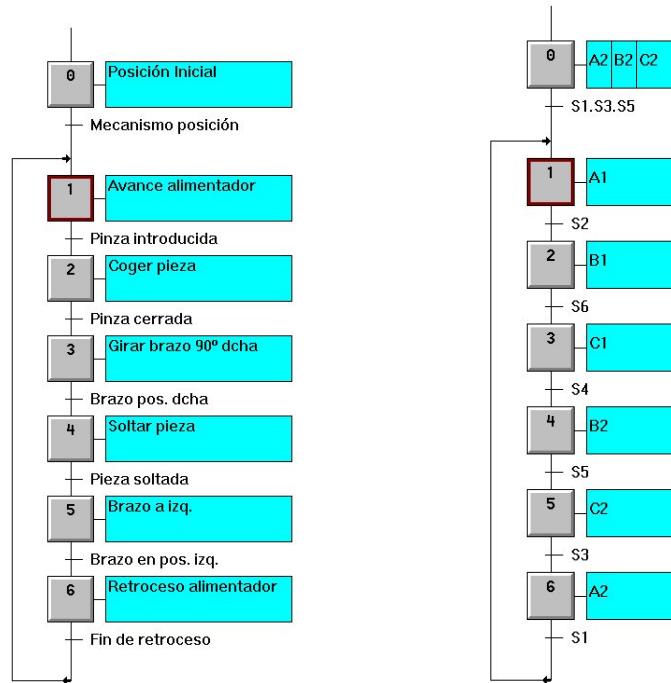


ACCIONES	
A +	Empuje alimentador
A -	Retroceso alimentador
B +	Cierre pinza
B -	Apertura pinza
C +	Giro brazo a derecha
C -	Giro brazo a izquierda

RECEPTIVIDADES	
S1 -	Final retroceso alimentador
S2 -	Final avance alimentador
S3 -	Brazo en posición izquierda
S4 -	Brazo en posición derecha
S5 -	Pinza abierta
S6 -	Pinza cerrada

⁶ Se está suponiendo que en la numeración de las etapas se sigue el criterio de ir enumerando en orden de aparición en el flujograma, esto es, las etapas antecedentes tienen numeración menor que las posteriores.

La operativa del mecanismo muestra que éste se caracteriza por un comportamiento secuencial lineal. Las figuras de abajo indican el GRAFCET de nivel 1 y 2.



En cuanto a las expresiones del Álgebra de Boole estará constituida por seis biestables. Recuérdese que los biestables son también marcas en el argot empleado. Se designarán por M_i , siendo i el número de la etapa. Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}
 M0 & \begin{cases} SET_0 = MARCHA \\ RESET_0 = M1 \end{cases} & M1 & \begin{cases} SET_1 = S1 \cdot S3 \cdot S5 \cdot M0 + S1 \cdot M6 \\ RESET_1 = M2 \end{cases} & M2 & \begin{cases} SET_2 = S2 \cdot M1 \\ RESET_2 = M3 \end{cases} \\
 M3 & \begin{cases} SET_3 = S6 \cdot M2 \\ RESET_3 = M4 \end{cases} & M4 & \begin{cases} SET_4 = S4 \cdot M3 \\ RESET_4 = M4 \end{cases} & M5 & \begin{cases} SET_5 = S5 \cdot M4 \\ RESET_5 = M6 \end{cases} & M6 & \begin{cases} SET_6 = S3 \cdot M1 \\ RESET_6 = M1 \end{cases} \\
 A1 = M1; & B1 = M2; & C1 = M3; & A2 = M0 + M6; & B2 = M0 + M4; & C2 = M0 + M5
 \end{aligned}$$

9.4.6 Arranques, paradas, emergencias y averías

Hasta este momento se ha contemplado exclusivamente lo que se llama el GRAFCET básico, esto es, las etapas de la producción normal. Pero sin duda, en la parte del control del proceso quedan muchos otros aspectos a tratar. Nada se ha comentado sobre el tipo de arranque del automatismo o que pasará si el usuario quiere parar parcial o indefinidamente el proceso. Yendo más lejos, ¿puede el automatismo ser tolerante a fallos?. Todas estas cuestiones son de un gran calado tanto teórico como su puesta en práctica.

Así, en el arranque se distingue entre un arranque en frío y otro en caliente. En el primero, el automatismo inicia sus variables de estado y está preparado para ponerse en funcionamiento. En cambio, cuando el arranque se produce en caliente, resulta que el automatismo se ha parado por circunstancia voluntarias o involuntarias y hay que reiniciarlo en la etapa donde se encontraba cuando se paró.

El paro del automatismo, bien por que se desea parar o por que se ha detectado un fallo, supone divergencias paralelas en cada una de las transiciones del GRAFCET básico. Esta situación volvería engorroso y de difícil seguimiento al grafo de la producción normal. Por eso se propone grafos alternativos para seguir estas etapas.

Todas estas preguntas requieren de una metodología para ser resueltas. GEMMA es un método para el estudio de las posibles situaciones de parada y de marcha y de cómo deben de evolucionar con el tiempo. GEMMA es un gráfico que no sólo contempla los estados de funcionamiento, sino también los de paro y los de fallo. A modo de resumen, se desglosa de forma somera los estados normalizados que contempla GEMMA, éstos se clasificarían en:

- Estados de funcionamiento
 - Producción normal (F1)
 - Marcha de preparación (F2)
 - Marcha de finalización (F3)
 - Verificación de marcha en desorden (F4)
 - Verificación de marcha en orden (F5)
 - Marcha de test (F6)
- Estados de paro
 - Paro en estado inicial (A1)
 - Demanda de paro a final del ciclo (A2)
 - Demanda de paro en un estado determinado (A3)
 - Paro en estado intermedio (A4)
 - Preparación de arranque después de un fallo (A5)
 - Inicialización de la parte operativa (A6)
 - Preposicionamiento de la parte operativa (A7)
- Estados de fallo
 - Paro de emergencia (D1)
 - Diagnóstico y/o tratamiento del fallo (D2)
 - Seguir en producción con fallo (D3)

En la figura 22.7 se muestran las familias de los estados normalizados de GEMMA. La envergadura de esta metodología y la falta de tiempo, de momento, en la explicación de esta teoría, hace desbordar las pretensiones de estos apuntes. Sin embargo, el futuro ingeniero debe de tener en mente que será una obligación, si acaso trabajase en este ámbito de la profesión, su profundización en esta materia y su implementación en el contexto de su trabajo.

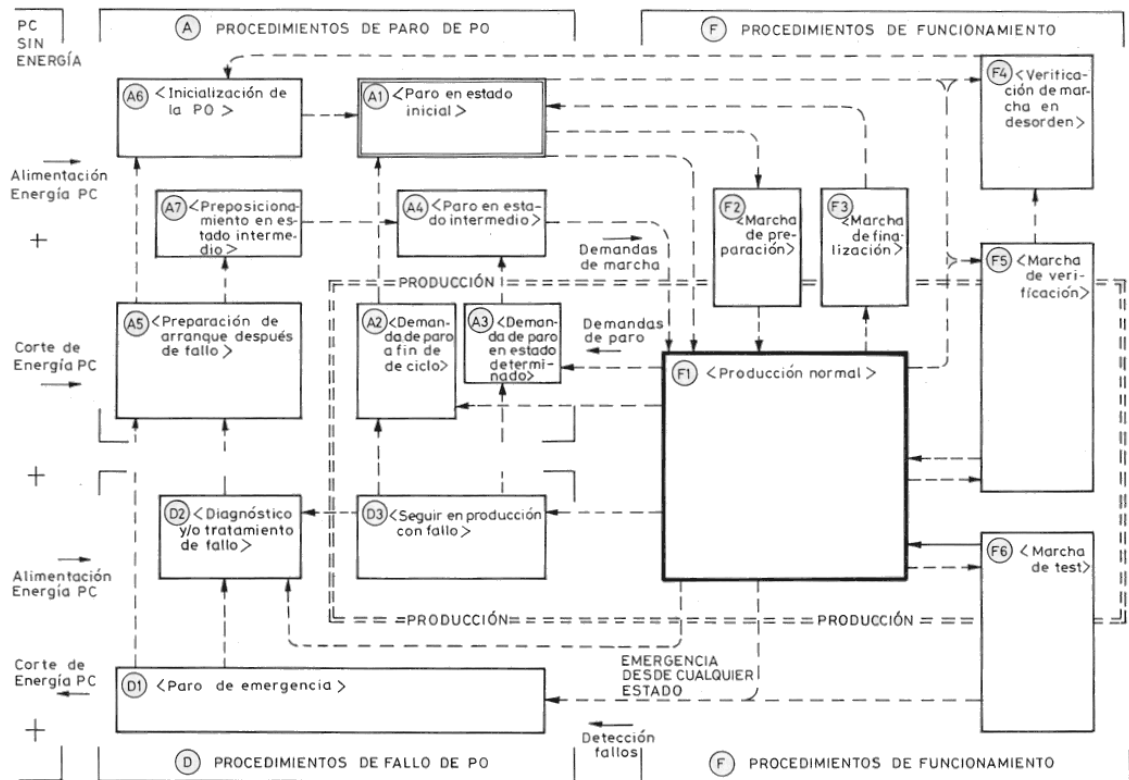


Figura 22.7. Estados formalizados de GEMMA

9.5 Ejercicios

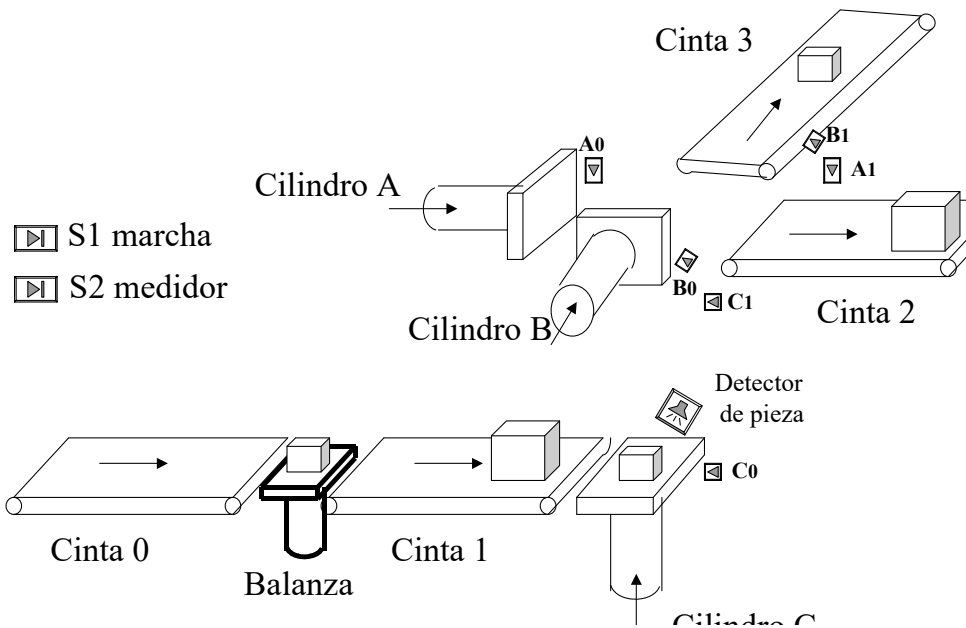
9.5.1 Primer ejercicio

Se desea controlar con un autómata un sistema elevador clasificador de paquetería, de forma que los paquetes sean clasificados por su peso. El funcionamiento se describe seguidamente:

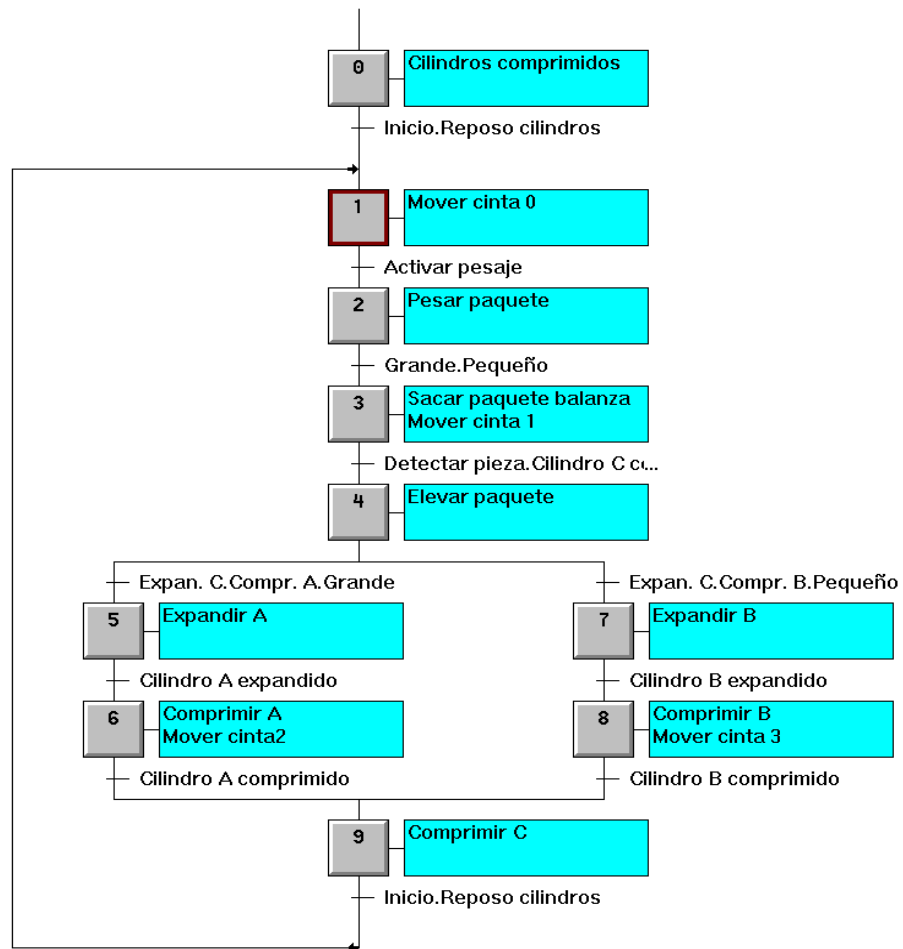
1. El programa se inicia al pulsar S1; la primera acción a realizar es conectar la cinta 0.
2. Cuando se pulsa S2 la cinta 0 se para y, se envía la orden de pesado a la balanza, PB. Si el paquete es grande se activa la señal P1 de salida de la báscula; por el contrario, si es pequeño se activa la salida P2 de la báscula que se mantiene hasta el siguiente flanco ascendente de PB. La balanza dispone del correspondiente mecanismo de retirada de paquetes que se activará desde RB. El paquete sale de la báscula y es transportado por la cinta 1 hasta el elevador (accionado por el cilindro C).
3. Cuando se detecta un paquete sobre el cilindro C, este es elevado. Si el paquete es grande (señal P1), se activa el cilindro A; cuando el paquete está sobre la cinta 2 el cilindro A retrocede y simultáneamente se activa la cinta 2. Cuando el cilindro A está en su posición de reposo, el cilindro C comienza a bajar y la cinta 2 se para.
4. Si el paquete es pequeño (detector 2), se activa el cilindro B; cuando el paquete está sobre la cinta 3, el cilindro B retrocede y simultáneamente se activa la cinta 3. Cuando el cilindro B está en posición de reposo, el cilindro C comienza a recuperar y la cinta 3 se para.
5. Todos los cilindros disponen de los correspondientes detectores de posición A0, A1, B0, B1, C0 y C1.
6. Por cuestiones de seguridad laboral el control sobre las electroválvulas serán de tipo biestable.

Se pide:

1. Representar el diagrama Grafcet de nivel I
2. Selección de los cilindros y de las correspondientes vías y posiciones de las electroválvulas
3. Identificación de las entradas y salidas digitales, mapándolas sobre E32 y A32
4. Representar el diagrama Grafcet de nivel II



1. El GRAFCET de nivel 1 quedará como:



2. Los cilindros neumáticos serán de simple efecto, ya que sólo hay potencia mecánica en la expansión de éstos. En cuanto a las electroválvulas serán de tres vías y dos posiciones. Por cuestiones de seguridad se emplearán un control biestable, su fundamento se encuentra en que si el automatismo pierde el fluido eléctrico, el sistema se quedará en la última posición controlada.

3.

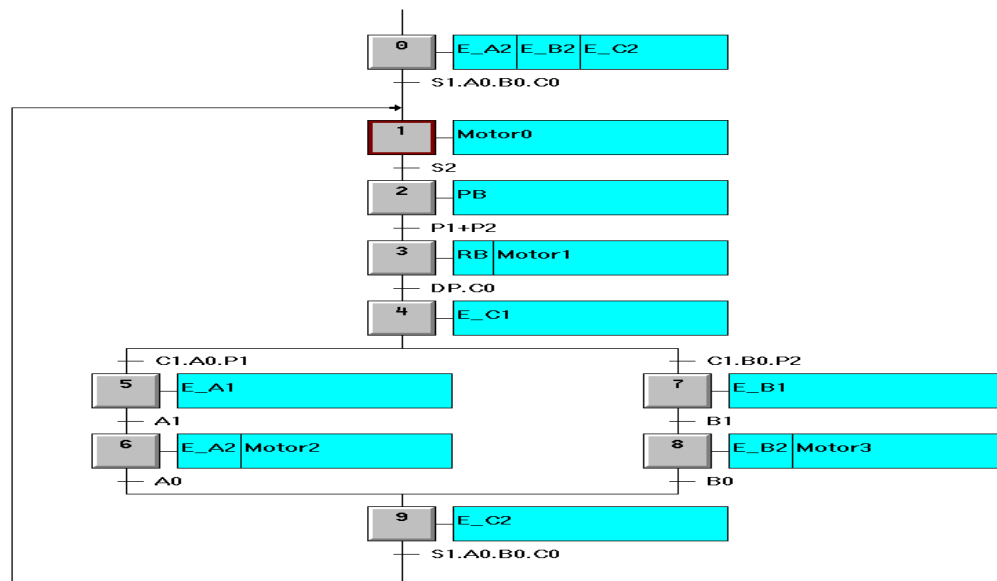
ASIGNACION DE ENTRADAS

NIVEL2	NIVEL1	MAPEO S5
A0	Cilindro A comprimido	E32.0
A1	Cilindro A expandido	E32.1
B0	Cilindro B comprimido	E32.2
B1	Cilindro B expandido	E32.3
C0	Cilindro C comprimido	E32.4
C1	Cilindro C expandido	E32.5
DP	Detectar pieza	E32.6
P1	Grande	E32.7
P2	Pequeño	E33.0
S1	Inicio	E33.1
S2	Activar pesaje	E33.2

ASIGNACION DE SALIDAS

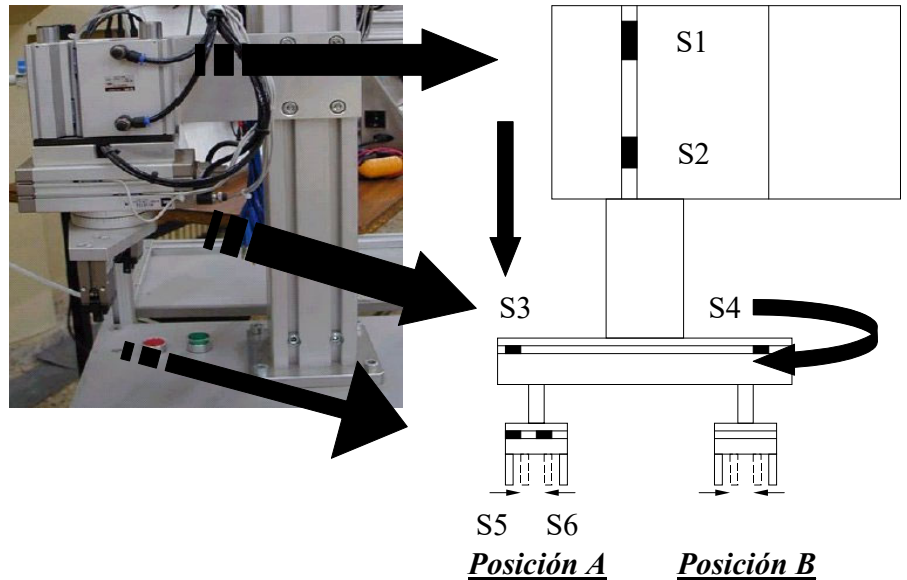
NIVEL2	NIVEL1	MAPEO S5
E_A1	Expandir A	A32.0
E_A2	Comprimir A	A32.1
E_B1	Expandir B	A32.2
E_B2	Comprimir B	A32.3
E_C1	Elevar paquete	A32.4
E_C2	Comprimir C	A32.5
Motor0	Mover cinta 0	A32.6
Motor1	Mover cinta 1	A32.7
Motor2	Mover cinta 2	A33.0
Motor3	Mover cinta 3	A33.1
PB	Pesar paquete	A33.2
RB	Sacar paquete balanza	A33.3

4.



9.5.2 Ejercicio 2

El manipulador de la figura es empleado dentro de un proceso de automatización para el intercambio de piezas de la posición A a la B y viceversa. En reposo, el cilindro cartesiano está arriba, el cilindro volteador está en 0° grados y las pinzas, ambas solidarias, están abiertas.



Cuando el operario pulsa inicio se produce el siguiente ciclo, el cilindro cartesiano baja y a continuación se cierran las pinzas. Con las piezas agarradas, se sube el cartesiano, se voltea 180° y de nuevo se baja, abriendo las pinzas, produciendo el intercambio de piezas entre las posiciones A y B. Posteriormente, se sube el cartesiano para iniciar de nuevo el ciclo. Se pide

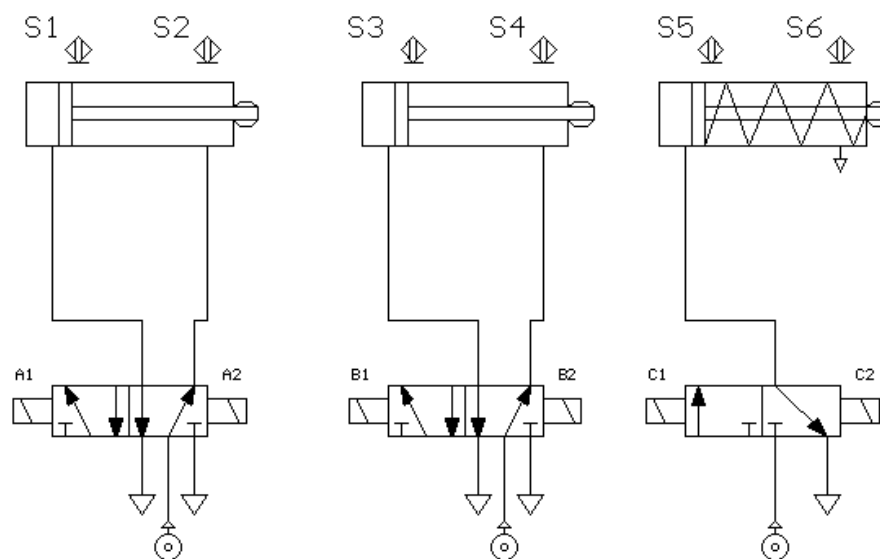
1. GRAFCET de nivel 1.
2. Selección de los cilindros y de las electroválvulas, indicando los criterios.
3. Con los componentes neumáticos seleccionados, realizar el esquema neumático y la ubicación sensorial.
4. GRAFCET de nivel 2.
5. Implementación del GRAFCET en STEP5. Mapear las entradas y salidas del automatismo a partir de la E32 y A32 respectivamente.

1. El GRAFCET de nivel 1 quedará como indica el grafo siguiente:

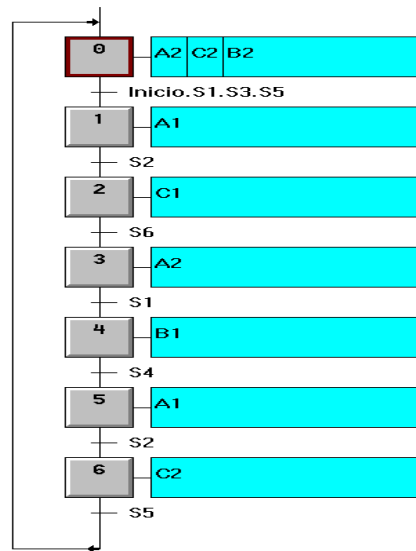


2. Los cilindros neumáticos del cartesiano y el volteador deben ser de doble efecto por realizar potencia mecánica tanto en el proceso de expansión como de compresión. En cambio, las pinzas sólo hacen potencia en agarrar las piezas, luego se necesita un cilindro de simple efecto. Las electroválvulas de los tres cilindros serán biestables, ya que cualquier corte de energía eléctrica mantendrá al manipulador en la última posición controlada. Es una cuestión de seguridad laboral.

3. El circuito electroneumático quedará:



4. El GRAFCET de nivel 2 resultará:



5. La implementación en STEP5 será:

Mapeo de entradas y salidas

ASIGNACION DE ENTRADAS

NIVEL2	NIVEL1	MAPEO S5
Inicio	Inicio	E32.0
S1	Cartesiano arriba	E32.1
S2	Cartesiano abajo	E32.2
S3	Giro 0°	E32.3
S4	Giro 180°	E32.4
S5	Pinzas abiertas	E32.5
S6	Pinzas cerradas	E32.6

ASIGNACION DE SALIDAS

NIVEL2	NIVEL1	MAPEO S5
A1	Bajar cartesiano	A32.0
A2	Subir cartesiano	A32.1
B1	Voltear 180°	A32.2
B2	Voltear 0°	A32.3
C1	Cerrar pinzas	A32.4
C2	Abrir pinzas	A32.5

OB1

SPA PB1; Llamada al modulo de activacion
SPA PB2; Llamada al modulo de acciones
BE

OB21

; Inicializacion del grafcet
UN M128.0 ; Condicion cierta, marca no
remanente
S M128.0
S -X0; Activar Etapa Inicial
R -X1
R -X2
R -X3
R -X4
R -X5
R -X6
R -X7
R -X8
; Fin inicializacion del grafcet
BE

PB1

;Activacion de etapas del grafcet
U -X8 ; Etapa 8 Activa
U -S1 ; y Cartesiano arriba
U -Inicio ; y Inicio
S - M100.0

U M100.0

R - X8 ; ... Desactivar etapa 8

U -X0 ; Etapa 0 Activa

R - X8 ; ... Desactivar etapa 8

U -X7 ; Etapa 7 Activa

U -S5 ; y Pinzas abiertas

S - X8 ; ... Activar etapa 8

U -X8 ; Etapa 8 Activa

R - X7 ; ... Desactivar etapa 7

U -X6 ; Etapa 6 Activa

U -S2 ; y Cartesiano abajo

S - X7 ; ... Activar etapa 7

U -X7 ; Etapa 7 Activa

R - X6 ; ... Desactivar etapa 6

U(;

U -X4 ; Etapa 4 Activa

U -S4 ; y Volteador en 180°

)

O(; o

U -X5 ; Etapa 5 Activa

U -S3 ; y Volteador en 0°

)

S - X6 ; ... Activar etapa 6

U -X6 ; Etapa 6 Activa

R - X4 ; ... Desactivar etapa 4

U -X6 ; Etapa 6 Activa

R - X5 ; ... Desactivar etapa 5

U -X3 ; Etapa 3 Activa

U -S1 ; y Cartesiano arriba

U -S4 ; y Volteador en 180°

S - X5 ; ... Activar etapa 5

U -X5 ; Etapa 5 Activa

R - X3 ; ... Desactivar etapa 3

U -X3 ; Etapa 3 Activa

U -S1 ; y Cartesiano arriba

U -S3 ; y Volteador en 0°

S - X4 ; ... Activar etapa 4

U -X4 ; Etapa 4 Activa

R - X3 ; ... Desactivar etapa 3

U -X2 ; Etapa 2 Activa

U -S6 ; y Pinzas cerradas

S - X3 ; ... Activar etapa 3

U -X3 ; Etapa 3 Activa

R - X2 ; ... Desactivar etapa 2

U -X1 ; Etapa 1 Activa

U -S2 ; y Cartesiano abajo

S - X2 ; ... Activar etapa 2

U -X2 ; Etapa 2 Activa

R - X1 ; ... Desactivar etapa 1

U M100.0

O ; o

U -X0 ; y Etapa 0 Activa

U -Inicio ; y Inicio

U -S1 ; y Cartesiano arriba

U -S3 ; y Volteador en 0°

U -S5 ; y Pinzas abiertas

S - X1 ; ... Activar etapa 1

U -X1 ; Etapa 1 Activa

R - X0 ; ... Desactivar etapa 0

U -X1 ; Etapa 1 Activa

R - M100.0

BE

PB2

U -X0 ; Etapa 0 Activa

O ; o

U -X3 ; y Etapa 3 Activa
O ; o
U -X8 ; y Etapa 8 Activa
= -A2 ; ... Subir cartesiano

U -X1 ; Etapa 1 Activa
O ; o
U -X6 ; y Etapa 6 Activa
= -A1 ; ... Bajar cartesiano

U -X0 ; Etapa 0 Activa
O ; o
U -X7 ; y Etapa 7 Activa
= -C2 ; ... Abrir pinzas

U -X4 ; Etapa 4 Activa
= -B1 ; ... Voltrear a 180°

U -X0 ; Etapa 0 Activa
O ; o
U -X5 ; y Etapa 5 Activa
= -B2 ; ... Voltrear a 0°

U -X2 ; Etapa 2 Activa
= -C1 ; ... Cerrar pinzas

BE