Fundamentos Vectoriales (extracto)

Miguel Balbás
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas y Energía
Universidad Politécnica de Madrid

Colección Fundamentos Físicos de la Ingeniería

ÍNDICE :

CAPITULO 1 : MAGNITUDES VECTORIALES

CAPITULO 2 : PRODUCTOS ENTRE VECTORES

CAPITULO 4 : MOMENTOS

CAPÍTULO 1 :
MAGNITUDES VECTORIALES

Una de las herramientas más eficaces en el desarrollo de la física ha sido la introducción de las ***magnitudes vectoriales****, es decir, aquellas que están dotadas de una* ***dirección*** *y un* ***sentido****.*

Muchas magnitudes tienen ese carácter ***direccional****: entre otras, las fuerzas, velocidades, aceleraciones, campos eléctricos y magnéticos.....*

OBJETIVOS:

1-I	Clasificar un vector en función de sus relaciones de igualdad y equipolencia.
1-II	Calcular la expresión analítica cartesiana de un vector.
1-III	Identificar la recta soporte de un vector deslizante de expresión analítica dada.
1-IV	Decidir si una magnitud vectorial está completamente determinada.

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes cuya medida queda completamente determinada mediante un número real, se denominan **escalares** .

Masa, densidad y temperatura son ejemplos de magnitudes escalares por ser su representación un punto de una escala, es decir, un punto sobre la recta de los números reales. Por ejemplo : la temperatura de 38°C queda determinada por el número real 38, correspondiente a un punto de la escala trazada en el termómetro.

Aquellas otras magnitudes que, como el desplazamiento, la fuerza y la velocidad, necesitan para su completa determinación que se indique su dirección y sentido, se denominan **vectoriales**.

Una magnitud vectorial necesita para su determinación, el conocimiento de tres elementos:

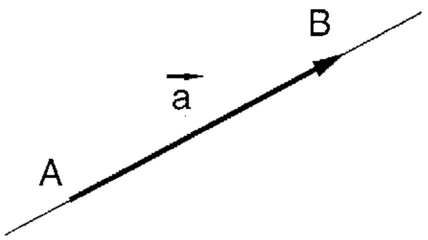
- Un número real positivo o **módulo**
- Una **dirección**
- Un **sentido** sobre la dirección

Así, para informar sobre la velocidad del viento en un momento determinado, habría que decir que es de 30 km./hora (*módulo*), procedente del Sur hacia el Norte (*dirección* Norte-Sur) y (*sentido* de Sur a Norte, dentro de la dirección definida).

1.2 Representación gráfica de una magnitud vectorial

Evidentemente la descripción de una magnitud vectorial puede expresarse con palabras. Por ejemplo, una velocidad de 50 km./hora en dirección sudoeste, ascendiendo por una rampa que forma un ángulo de 25 grados con la horizontal u otros términos similares. Sin embargo, es mucho más fácil y expresivo definir esa velocidad u otra magnitud vectorial mediante una representación gráfica.

La representación gráfica de una magnitud vectorial es un segmento orientado de recta llamado **vector**, que contiene los tres elementos: módulo, dirección y sentido.



El módulo es el número real que mide su longitud, comprendida entre su *origen* y su *extremo*.

La dirección es la de la recta en que está contenido y el sentido se representa por una *punta de flecha* en su extremo.

fig. 1.1

1.3 Notación vectorial

Para hacer referencia a un vector se emplea una flecha sobre las letras mayúsculas que definen su origen y extremo. Así, el vector $\overrightarrow{AB}$ corresponde al de la figura 1.1. También se puede emplear una letra minúscula con su pequeña flecha sobre ella. Así: $\vec{a}$.

Cuando haya que referirse únicamente al módulo, se emplea la notación $|\vec{a}|$ que significa : el módulo del vector $\vec{a}$.

Cuando el módulo de un vector es la unidad, se le denomina **vector unitario.**

1.4 Clases de vectores

Según sean las condiciones de libertad impuestas al origen, o punto de aplicación, aparecen tres clases de vectores :

- *Libres*
- *Deslizantes*
- *Localizados o ligados*

☐ Son *vectores libres* aquellos cuyo origen, o punto de aplicación, puede ser cualquier punto del espacio.

- ☐ Son *vectores deslizantes* aquellos en que su origen o punto de aplicación, puede ser cualquier punto de una recta determinada, pero no puede estar fuera de dicha *recta soporte*, que tiene la dirección el vector.

- ☐ Son *vectores localizados* o *ligados* aquellos cuyo punto de aplicación u origen, es un punto determinado. El vector está localizado en dicho punto, no habiendo libertad de elección.

1.5 Igualdad vectorial

Teniendo en cuenta la clasificación que se ha hecho de los vectores, se definen los siguientes casos de igualdad:

- ☐ Dos *vectores libres* son *iguales* cuando tienen respectivamente iguales sus módulos, direcciones y sentidos, aún cuando difieran en sus orígenes o puntos de aplicación.

- ☐ Dos *vectores deslizantes* son *iguales* si, además de tener iguales sus módulos, direcciones y sentidos, están situados sobre la misma recta soporte. Si están contenidos en rectas diferentes, no son iguales.

- ☐ Dos *vectores ligados* o *localizados* son *iguales* si, además de la igualdad de módulos, direcciones y sentidos, tienen el mismo origen o punto de aplicación.

1.6 Equipolencia vectorial

Quizás haya sorprendido lo que se acaba de afirmar: que dos vectores deslizantes que tengan iguales módulos, direcciones y sentidos no son iguales si sus rectas soportes son diferentes y que, del mismo modo, dos vectores localizados no son iguales si, aún cuando presenten igualdad de sus elementos, tienen distinto origen o punto de aplicación.

Para matizar esta cuestión, se introduce el concepto de *equipolencia* de vectores que, evidentemente, no puede afectar a los vectores libres.

- ☐ Dos *vectores deslizantes* son *equipolentes*, cuando tienen iguales sus módulos, direcciones y sentidos y están contenidos en rectas soporte diferentes, aunque lógicamente, tienen que ser paralelas para que tengan la misma dirección.

- ☐ Dos *vectores ligados* o *localizados* son *equipolentes* si, con distintos puntos de aplicación, tienen iguales los módulos, direcciones y sentidos.

Ejemplo

Consideremos los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, *de la figura, que tienen*

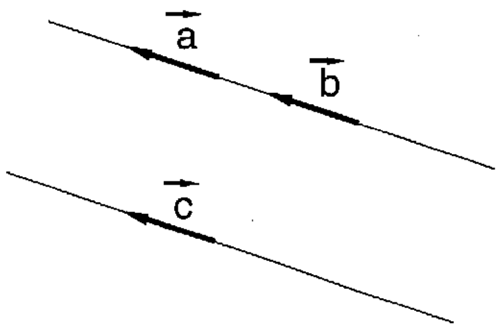


fig 1.2

iguales módulos, direcciones y sentidos, es decir:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

Se trata de determinar si esos tres vectores son iguales o equipolentes entre sí, según se consideren libres, deslizantes o localizados.

Invitamos al estudiante a que detenga la lectura en este punto y trate de formular razonadamente su respuesta. Fácilmente llegará al siguiente planteamiento :

1°. Si los tres vectores son libres, se puede afirmar que son iguales.

2°. Si fueran deslizantes, resultaría que los vectores $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *serían iguales y ambos equipolentes del* $\vec{c}$ *.*

3°. Si los tres vectores fuesen localizados, al tener puntos de aplicación distintos, no pueden ser iguales, pero cada uno será equipolente de los otros dos.

• Aplicación

Mediante las relaciones de igualdad y equipolencia es posible clasificar un vector. En efecto : (Fig. 1.2)

Si un vector $\vec{a}$ es igual a otro cuyo origen no esté en la recta de $\vec{a}$, el vector es libre.

Si $\vec{a}$ es igual a otro vector $\vec{b}$ con origen en su propia recta soporte pero no es igual sino equipolente al $\vec{c}$, de origen fuera de la recta de $\vec{a}$, se trata de un vector deslizante.

Si $\vec{a}$ es equipolente, y no igual al $\vec{b}$, cuyo origen está en su propia recta soporte, es un vector localizado.

1.7 Operaciones con vectores libres

Con las magnitudes vectoriales pueden realizarse operaciones algebraicas. Comenzaremos por definir, para vectores libres, las operaciones :

- *Suma*
- *Diferencia*
- *Producto por un escalar*

Todas las operaciones son generalizables a vectores deslizantes o localizados, tomando en un punto vectores equipolentes de los dados.

1.8 Suma de vectores

Se define como suma de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$, al vector $\vec{S}$, que se obtiene representando el vector $\vec{b}$ a partir del extremo del vector $\vec{a}$, tal como se indica en la figura 1.3.

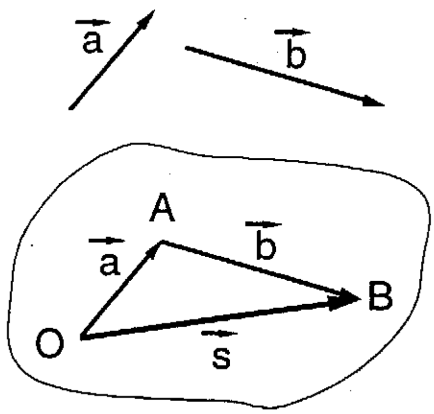


fig 1.3

Si A es el extremo de $\vec{a}$, tomamos este punto A como origen de $\vec{b}$, siendo entonces B el extremo de $\vec{b}$. El vector suma $\vec{S}$ es el vector que tiene por origen el punto O, origen de $\vec{a}$, y por extremo el punto B, extremo de $\vec{b}$.

La definición dada puede extenderse a la suma de varios vectores.

Sean los vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ (fig. 1.4).

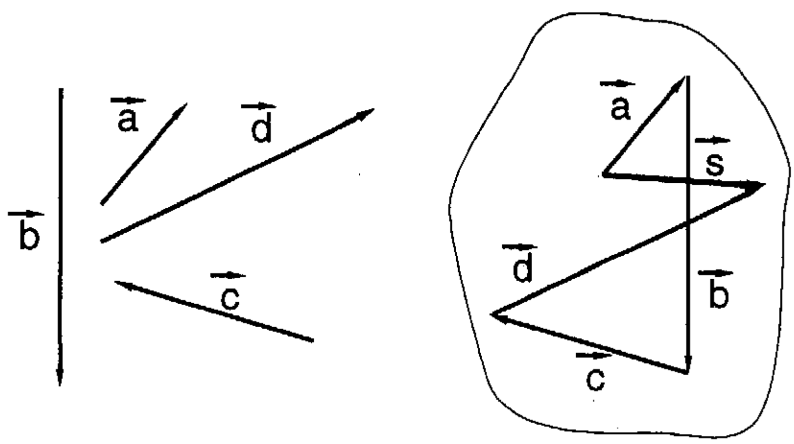


fig 1.4

El vector suma $\vec{S}$ se obtiene llevando cada vector a continuación del anterior y es el vector que tiene por origen el punto origen del primero y por extremo el extremo del último. El polígono que se forma con los vectores sumandos recibe el nombre de **polígono vectorial.**

Si en un caso dado el polígono vectorial resultase cerrado, es decir, al hacer la construcción el extremo del último vector coincidiera con el origen del primero, evidentemente el vector suma sería nulo, su módulo sería cero, puesto que su extremo y origen coincidirán en un mismo punto. Este vector se denomina **vector cero** o **vector nulo**.

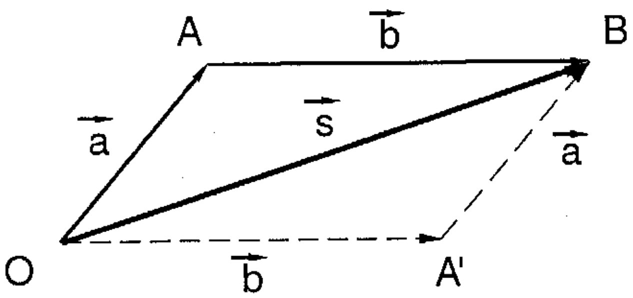


fig 1.5

En el caso de la suma de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, la construcción del polígono vectorial de vértices OAB (Fig. 1.5) es equivalente a construir el paralelogramo con lados

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \text{y} \quad \vec{AB} = \vec{b} \qquad (1.1)$$

siendo el vector suma $\vec{S}$ el vector diagonal del paralelogramo $\vec{OB} = \vec{S}$.

1.9 Propiedades de la suma vectorial

- **Propiedad conmutativa**

En la figura 1.5, se ve como el vector $\vec{S}$, suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, puede obtenerse formando el polígono OAB, es decir, llevando a continuación de $\vec{a}$ el otro sumando $\vec{b}$. Pero de la misma figura se desprende que la determinación de $\vec{S}$ puede hacerse formando el polígono $OA'B$, o lo que es lo mismo, llevando a continuación de $\vec{b}$ el vector $\vec{a}$. Por tanto, puede variarse el orden de los sumandos sin que cambie el resultado de la suma. Es decir :

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1.2}$$

- **Propiedad asociativa**

Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (Fig. 1.6) El vector suma $\vec{S}$ se ha determinado construyendo el polígono vectorial $OABC$. La suma parcial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el vector $\vec{OB}$ de tal manera que $\vec{S}$ es suma de $\vec{OB}$ y $\vec{c}$.

$$\vec{S}=\vec{OB}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} \tag{1.3}$$

Por otro lado, la suma parcial de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es el vector $\vec{AC}$, pudiendo expresarse $\vec{S}$ como suma de $\vec{a}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{S}=\vec{a}+\vec{AC}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \tag{1.4}$$

De ambas expresiones de $\vec{S}$, se obtiene :

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \tag{1.5}$$

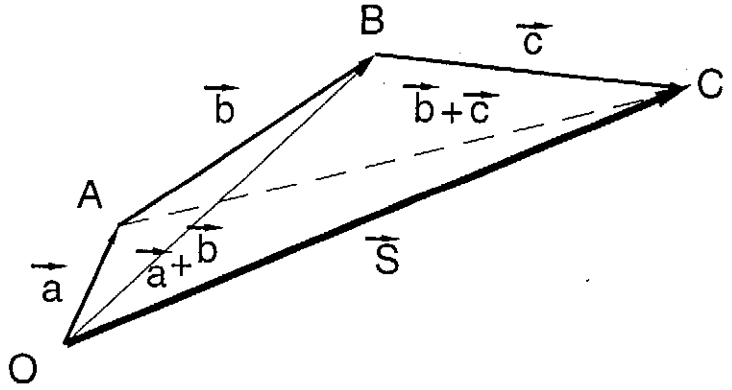
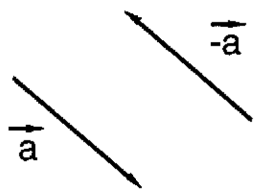


fig 1.6

1.10 Vector opuesto. Diferencia de vectores

Se define como vector opuesto de un vector dado $\vec{a}$, a otro vector que tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto al primero, y lo llamaremos $-\vec{a}$. (Fig. 1.7).

De la propia definición se deduce que la suma de un vector y su opuesto da como resultado el vector nulo $\vec{0}$, puesto que el polígono vectorial es cerrado. Por tanto :



$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0} \tag{1.6}$$

Se define como la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, al vector que se obtiene al sumar a $\vec{a}$, el opuesto de $\vec{b}$.

fig 1.7

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right) \tag{1.7}$$

En la figura 1.8 se representa el vector $\vec{a}-\vec{b}$, diferencia entre los $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dados.

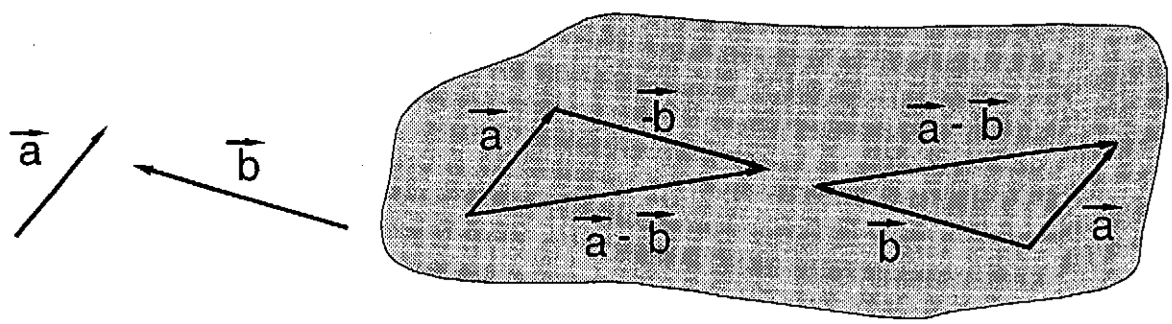


fig 1.8

Como se ve el vector $\vec{a}-\vec{b}$ obtenido como suma del $\vec{a}$ y del opuesto de $\vec{b}$ puede también construirse como el vector que tiene origen en el punto extremo de $\vec{b}$ y el extremo en el punto extremo de $\vec{a}$,si ambos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se trazan desde un origen común O.

Estamos ya en condiciones de realizar *sumas algebraicas de vectores*, es decir, una serie de operaciones con vectores separados por signos + ó - . Los vectores precedidos del signo + se tomarán con su propio sentido, mientras que los precedidos por el signo - se llevarán al polígono vectorial tomando su opuesto.

Ejemplo :

Obtener la suma algebraica $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}-\vec{e}$ *de los cinco vectores dados en la figura 1.9 .*

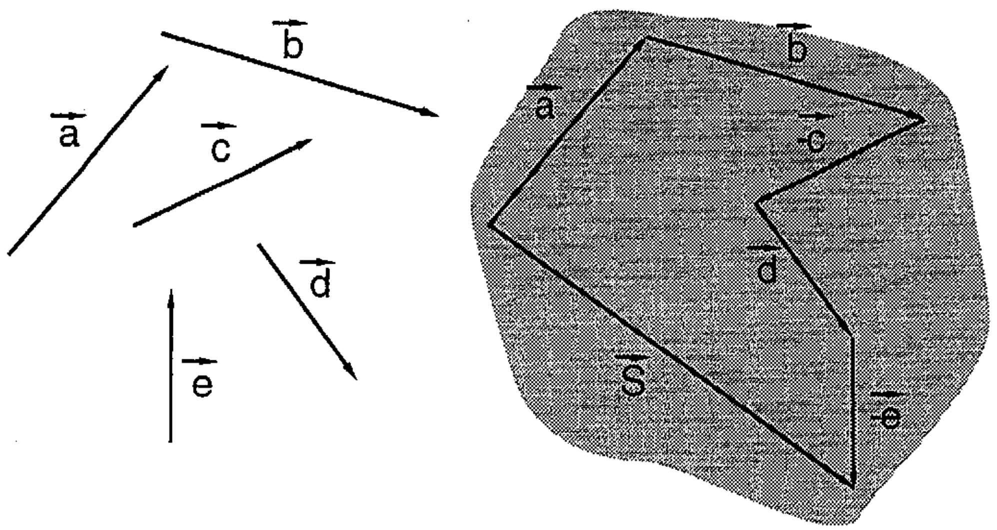


fig 1.9

Los polígonos vectoriales representados, como por ejemplo este último de la figura 1.9, no tienen que ser necesariamente planos. El hecho de estar dibujados sobre el papel puede llevar al lector a la idea equivocada de que todos los vectores han de estar contenidos en un mismo plano. Debe entenderse que esta construcción se hace en general en el espacio. Si los vectores estuvieran contenidos en un mismo plano, no sería más que un caso particular de la construcción general.

1.11 Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar n por un vector libre $\vec{a}$ es otro vector libre de la misma dirección de $\vec{a}$, de módulo igual al producto de n por el módulo de $\vec{a}$ y con el mismo sentido de $\vec{a}$ si n es positivo, o el contrario si n es negativo.

Ejemplo :

Calculemos el producto del escalar 3 por el vector $\vec{a}$ dado en la figura 1.10. El vector producto es otro vector de la misma dirección y mismo sentido que $\vec{a}$ y cuyo módulo es tres veces el de $\vec{a}$.

Si ahora queremos formar el producto del vector $\vec{b}$ por el escalar -2 obtenemos un vector de la dirección de $\vec{b}$, sentido contrario y módulo igual a $2\ |\vec{b}\ |$.

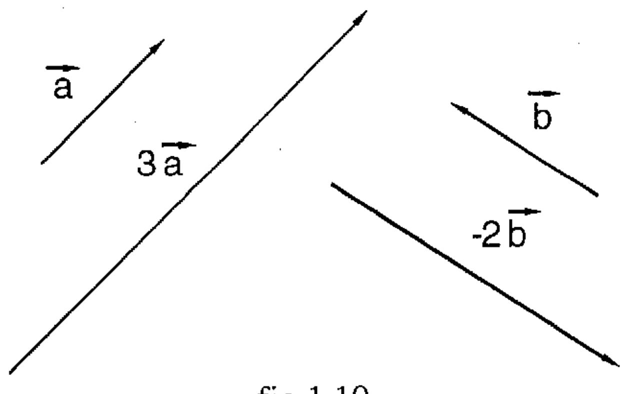


fig 1.10

El producto de un escalar por un vector tiene la propiedad distributiva respecto a la suma, tanto si la suma es de vectores como de escalares. Es decir, siendo m y n dos escalares y $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dos vectores, se cumple :

$$\begin{aligned}(m+n)\,\vec{a} &= m\vec{a}+n\vec{a}\\ n(\vec{a}+\vec{b}) &= n\vec{a}+n\vec{b}\end{aligned} \tag{1.8}$$

En la figura 1.11A vemos como la suma de los vectores $m\vec{a}$ y $n\vec{a}$ tiene como resultado un vector $(m + n)\,\vec{a}$ de módulo $(m + n)$ veces el de $\vec{a}$ .En la figura 1.11B se observa como el polígono OAB , triángulo formado para obtener la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, da lugar a un triángulo proporcional, el OCD, ya que :

$$OC = n\,OA \qquad y \qquad CD = n\,AB \tag{1.9}$$

y por tanto:

$$OD = n\,OB \tag{1.10}$$

de donde la suma de $n\vec{a}$ y $n\,\vec{b}$ es un vector de dirección la de $\vec{a}+\vec{b}$, y de módulo n veces el de $\vec{a}+\vec{b}$

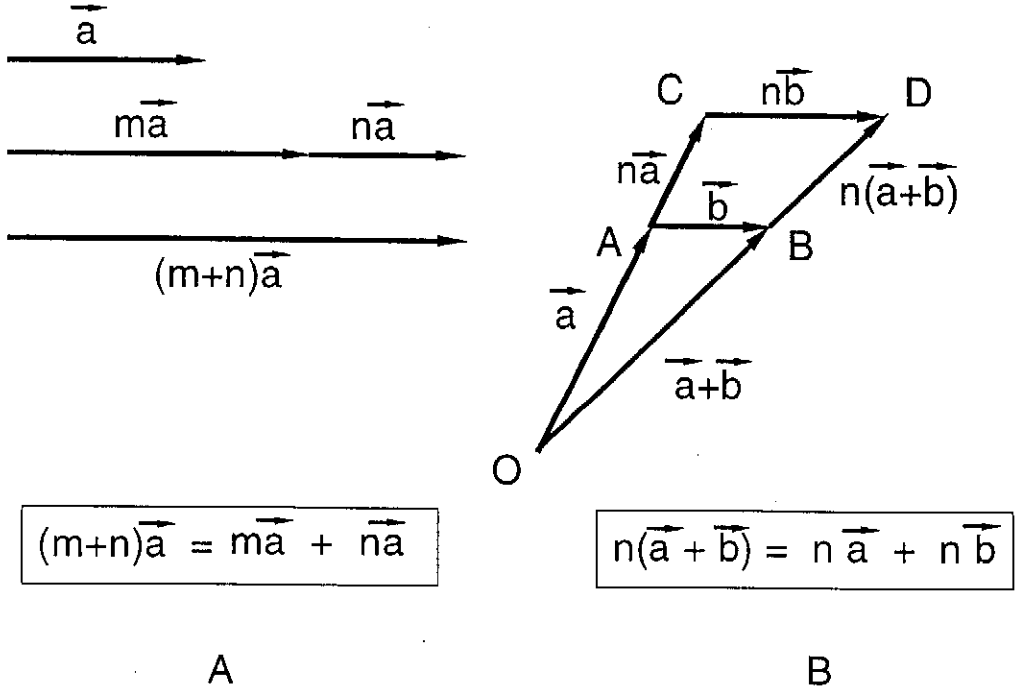


fig 1.11

Como caso particular si el escalar viene dado por $1/n$, el producto se convierte en el cociente por el escalar n. Si dividimos un vector libre $\vec{a}$ por su propio módulo, el resultado es un vector que conserva la dirección y sentido de $\vec{a}$, pero cuyo módulo es la unidad puesto que se obtiene dividiendo el módulo $|\vec{a}|$ del vector $\vec{a}$ por el escalar $|\vec{a}|$. Este vector recibe el nombre de unitario $\vec{e}_a$ en la dirección y sentido de $\vec{a}$.

El vector $\vec{a}$ puede ahora expresarse en función de $\vec{e}_a$ puesto que ambos tienen la misma dirección y el módulo de $\vec{a}$ es $|\vec{a}|$ veces el módulo de $\vec{e}_a$, que es la unidad. Así : $\vec{a} = |\vec{a}|\, \vec{e}_a$. Si un vector $\vec{b}$ tiene sentido contrario al $\vec{e}_a$, podemos escribir: $\vec{b} = - |\vec{b}|\, \vec{e}_a$. En general para cualquier $\vec{v}$ que tenga esta dirección, escribiremos $\vec{v} = v\, \vec{e}_a$ donde el escalar v, cuyo valor absoluto coincide con $|\vec{v}|$ será positivo si $\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{e}_a$, y negativo en caso contrario.

1.12 Expresión analítica de un vector libre

Necesitamos una expresión del vector que sea operativa, que fácilmente nos permita realizar las operaciones vectoriales. Para ello, nos vamos a valer de estas operaciones que hemos definido anteriormente.

Consideremos un vector libre $\vec{a}$ y tres direcciones cualesquiera en el espacio, correspondientes a las de los tres vectores unitarios $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (Fig. 1.12A). El polígono vectorial $OABC$ expresa que $\vec{a}$ se puede escribir como suma de $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$, vectores que tienen las direcciones de los unitarios. Las tres direcciones y los unitarios sobre ellas constituyen una **base** o **sistema de referencia**. en el espacio de tres dimensiones. Los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$, se denominan **componentes vectoriales** de $\vec{a}$ en la base dada. En la figura 1.12B, se han representado con origen en O. Puede escribirse, por tanto :

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \tag{1.11}$$

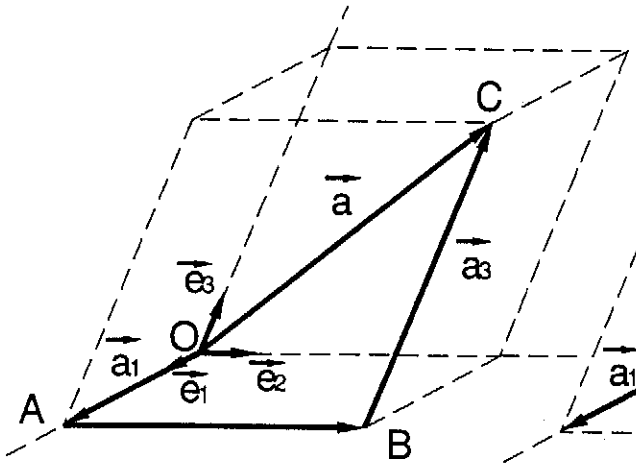


fig 1.12A

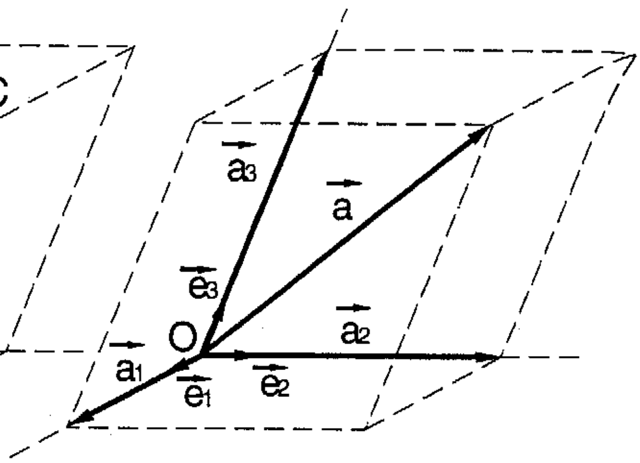


fig 1.12B

Las componentes vectoriales pueden expresarse en función de los vectores unitarios. Así :

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad (1.12)$$

Los números a_1 , a_2 y a_3 reciben el nombre de componentes escalares de $\vec{a}$, o simplemente componentes, en la base de referencia dada. La expresión obtenida es la expresión analítica de $\vec{a}$ en esta base. Cuando las direcciones son perpendiculares entre sí, los unitarios reciben el nombre de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente, y las rectas son los ejes OX, OY y OZ de la base, que en este caso se llama cartesiana. En el desarrollo de este curso utilizaremos siempre bases de referencia cartesianas.

Ejemplo:

Sea el vector $\vec{a}$ de expresión cartesiana

$\vec{a} = 4\,\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$

Su representación está dada en la figura 1.13, en la que :

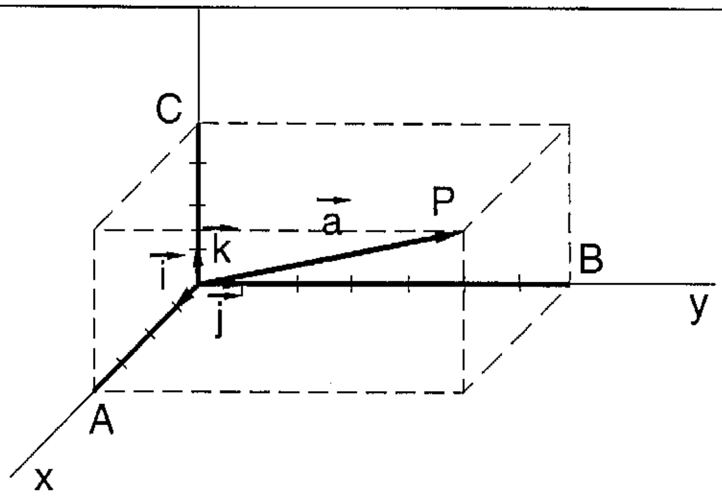


fig 1.13

$OA = a_1 = 4$, $OB = a_2 = 7$ y $OC = a_3 = 4$

1.13 Determinación de un vector libre

Para que una magnitud física pueda ser representada por un vector, éste debe estar correctamente determinado.

Analicemos en primer lugar de qué manera puede determinarse un vector libre. Veamos tres casos :

□ *Se conocen las componentes escalares cartesianas* a_1 , a_2 y a_3 *del vector*

En este caso, la expresión analítica es :

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \tag{1.13}$$

Si deseamos ahora obtener el valor del módulo de $\vec{a}$, la aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio nos da (Fig. 1.14) :

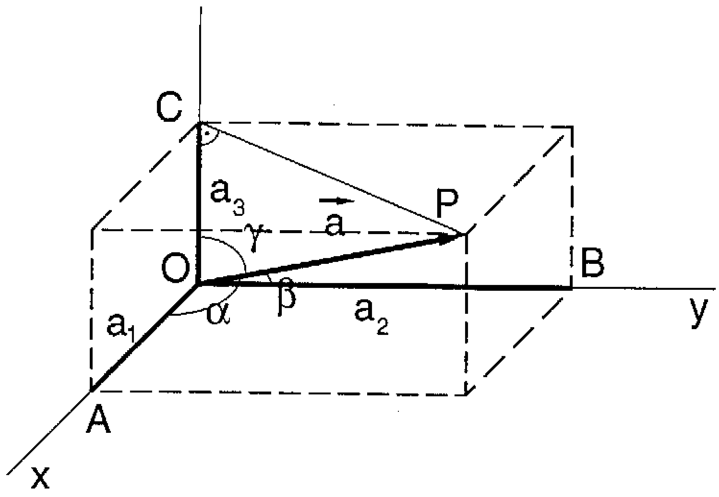


fig 1.14

$$|\vec{a}|^2 = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} \qquad (1.14)$$

y por tanto

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (1.15)$$

Con los datos del ejemplo anterior podemos escribir :

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9$$

La dirección de $\vec{a}$ la obtendremos calculando los ángulos α , β , γ que forma $\vec{a}$ con cada uno de los ejes del sistema de referencia. Veamos, por ejemplo, el valor de γ , ángulo que forma la dirección de $\vec{a}$ con el tercer eje *OZ*. En la figura 1.14 se ve que en el triángulo *OCP*, de ángulo recto en el vértice *C*, el coseno de γ viene dado por el cociente entre el cateto contiguo $\overline{OC}$ y la hipotenusa $\overline{OP}$, es decir :

$$\cos \gamma = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \qquad (1.16)$$

De manera análoga, razonando sobre los triángulos *OAP* y *OBP*, obtendríamos los otros dos cosenos. Podemos escribir así :

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad , \qquad \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad , \qquad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \qquad (1.17)$$

Obsérvense que los cosenos directores están relacionados entre sí, puesto que la suma de sus cuadrados es igual a la unidad.

$$cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma = \frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1$$

(1.18)

Volviendo al ejemplo que estábamos exponiendo, escribiremos :

$$\cos\alpha = \frac{4}{9} \quad , \quad \cos\beta = \frac{7}{9} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{4}{9}$$

De esta manera a partir de las componentes escalares hemos obtenido el módulo y la dirección del vector.

Se conocen el modulo $|\vec{a}|$ *y la dirección y sentido mediante los valores* α, β *y* γ.

Las componentes escalares pueden calcularse a partir de las expresiones anteriores. Así :

$$a_1 = |\vec{a}|\, cos\, \alpha \quad ; \quad a_2 = |\vec{a}|\, cos\, \beta \quad ; \quad a_3 = |\vec{a}|\, cos\, \gamma \qquad (1.19)$$

que no hacen sino expresar que las componentes escalares son las proyecciones ortogonales del vector sobre los ejes. La expresión analítica ya puede escribirse al conocer los valores de a_1 , a_2 y a_3

En nuestro ejemplo, los datos hubieran sido ahora :

$|\vec{a}| = 9 \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{4}{9} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{7}{9} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{4}{9}$

de donde :

$a_1 = 9 \cdot \frac{4}{9} = 4 \ , \quad a_2 = 9 \cdot \frac{7}{9} = 7 \ , \quad a_3 = 9 \cdot \frac{4}{9} = 4$

y por tanto :

$\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$

□ *Se conocen las coordenadas de los puntos M y N, origen y extremo del vector.*

En la figura 1.15 está representado el vector libre siendo las coordenadas de M, x_M , y_M , z_M , y las del punto N , x_N , y_N , z_N. Calculemos sus componentes escalares. Hagámoslo por ejemplo , para la tercera componente a_3 , representada en la figura por el segmento $\overline{MR}$.

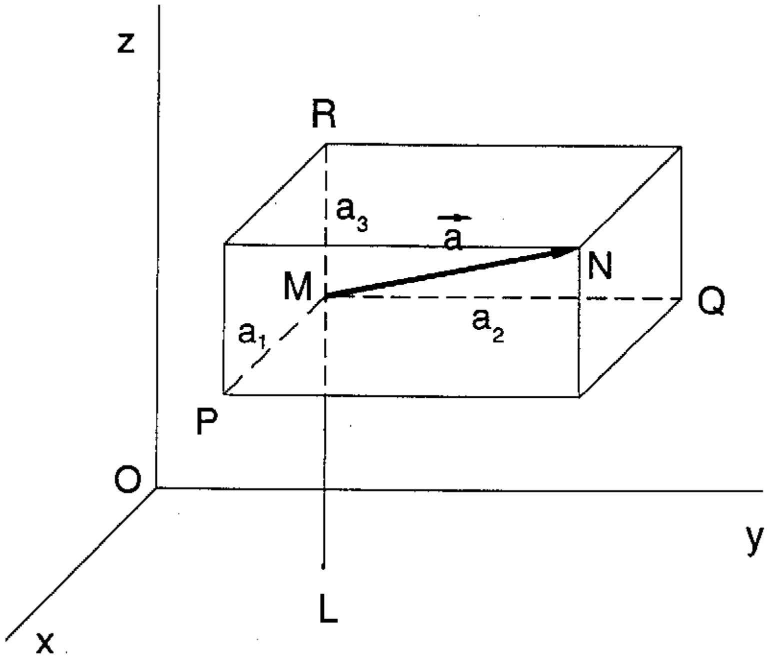


fig 1.15

Los puntos N y R tienen la misma coordenada z por estar en el mismo plano horizontal:

$$z_N = z_R \tag{1.20}$$

Por tanto, restando las longitudes de los segmentos $\overline{LR}$ y $\overline{LM}$:

$$a_3 = z_N - z_M \tag{1.21}$$

Y análogamente para las otras dos :

$$a_1 = x_N - x_M \qquad ; \qquad a_2 = y_N - y_M \tag{1.22}$$

Las componentes se obtienen restando de las coordenadas del punto extremo N las del punto origen M. Así la expresión analítica es :

$$\vec{a} = (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j} + (z_N - z_M)\vec{k} \tag{1.23}$$

El módulo y la dirección del vector se obtienen a partir de esta expresión como en el primer caso .

Ejemplo :

Sea el vector $\vec{a}$ definido por su punto origen $M(3,8,5)$ y su extremo N $(7,15,9)$ su expresión analítica vendrá dada por :

$\vec{a} = (7 - 3)\vec{i} + (15 - 8)\vec{j} + (9 - 5)\vec{k} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$

cuya representación tenemos en la figura 1.15.

1.14 Determinación de vectores localizados y de vectores deslizantes

Para los vectores localizados se procede de la misma manera que para un vector libre, pero añadiendo necesariamente las coordenadas de su punto de aplicación para que el vector quede totalmente determinado. Si el vector $\vec{a}$ de la figura 1.15 fuese un vector localizado, junto con su expresión analítica, $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$, debemos dar las coordenadas de M (3,8,5).

En el caso de vectores deslizantes, además de la expresión analítica, que se obtiene como en los vectores libres, debemos conocer la recta soporte del vector dando sus ecuaciones o dando un punto de la recta, ya que su dirección es conocida. En este último caso, utilizando la misma figura 1.15 pero estableciendo que el vector es deslizante y que su expresión analítica ya es conocida, supongamos que $M\ (x_M\ ,\ y_M\ ,\ z_M)$ es el punto conocido de la recta soporte del vector (representar el vector con origen en M supone que lo hemos hecho deslizar por la recta hasta la posición de la figura). El lector recordará de la geometría analítica elemental que las ecuaciones de la recta en forma continua pueden escribirse así :

$$\frac{x - x_M}{\cos\alpha} = \frac{y - y_M}{\cos\beta} = \frac{z - z_M}{\cos\gamma} \tag{1.24}$$

o lo que es igual :

$$\frac{x - x_M}{\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}} = \frac{y - y_M}{\dfrac{a_2}{|\vec{a}|}} = \frac{z - z_M}{\dfrac{a_3}{|\vec{a}|}} \tag{1.25}$$

Simplificando :

$$\frac{x - x_M}{a_1} = \frac{y - y_M}{a_2} = \frac{z - z_M}{a_3} \tag{1.26}$$

Para los datos en el ejemplo numérico de la figura 1.15 , es decir : $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$ *y M (3,8,5), la recta será :*

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-8}{7}=\frac{z-5}{4}$$

Obsérvese como las componentes de $\vec{a}$ constituyen un juego de parámetros directores de su dirección.

• **Aplicación :**

Digamos, finalmente, y como consecuencia de esta última exposición que, si queremos escribir un vector unitario de dirección la de una recta dada por sus ecuaciones en forma continua, con los parámetros a_1, a_2 y a_3 , formaremos primero el vector $\vec{a}$ que tiene la misma dirección. Bastará dividir el vector $\vec{a}$ por su módulo $|\vec{a}|$ para obtener el unitario $\vec{e}_r$. Cualquier vector de módulo y sentido conocidos, contenido en la recta podrá escribirse así : $\vec{b} = b\,\vec{e}_r$

Ejemplo :

Se quiere obtener la expresión analítica de un vector $\vec{b}$ *de módulo* $|\vec{b}| = \sqrt{200}$ *contenido en la recta de ecuaciones* $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ *y cuyo sentido coincide con el del vector cuyas componentes escalares son los parámetros de la recta (3,4,5).*

El vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ *de componentes los parámetros directores de la recta r, tienen la propia dirección de r . Su módulo es :*

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

El unitario de la dirección vendrá dado por :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{50}}\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right)$$

Por último

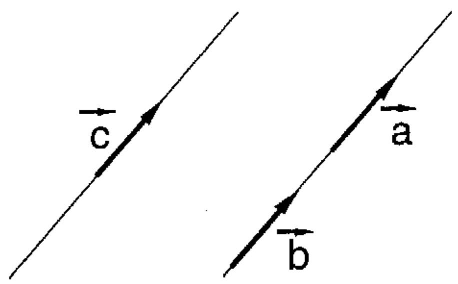
$$\vec{b} = b\,\vec{e}_r = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}}\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right) =$$

$$= \sqrt{4}\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right) = 2\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right) = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}$$

PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN

Objetivo 1-I:

1. Dados los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de iguales módulos, direcciones y sentidos, se sabe que el vector $\vec{a}$ es igual al vector $\vec{b}$ y equipolente del $\vec{c}$.



¿Cuál de las afirmaciones siguiente es verdadera?

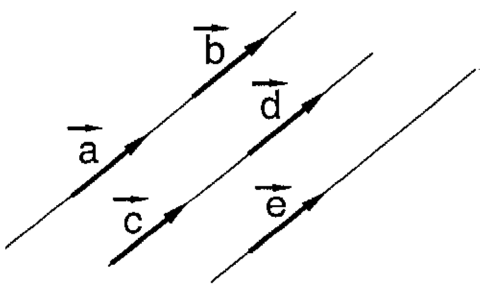
A) El vector $\vec{a}$ es libre.

B) El vector $\vec{a}$ es deslizante.

C) El vector $\vec{a}$ es localizado.

D) No se puede saber si el vector $\vec{a}$ es libre, deslizante o localizado.

2. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ y $\vec{e}$ de iguales módulos, direcciones y sentidos, dígase si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes expresiones :



A) Si los vectores son libres, son todos iguales entre sí.

B) Si los vectores son localizados, son todos iguales entre sí.

C) Si los vectores son deslizantes, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales entre sí, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son iguales entre sí y $\vec{e}$ es equipolente de los demás.

D) Si son deslizantes, $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son iguales.

3. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de igual módulo y sentido, están contenidos sobre la misma recta soporte, pero siendo sus puntos de aplicación distintos. Si los vectores no son iguales, ¿son libres, deslizantes o localizados?.

Objetivo 1-II:

4. El vector $\vec{a}$ tiene módulo $|\vec{a}| = 5$ y su dirección forma con los ejes de un sistema de referencia cartesiana, ángulos cuyos cosenos respectivos son :

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos\beta = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos\gamma = 0$$

¿Cuál de las siguientes expresiones analíticas de $\vec{a}$ es la correcta?

A) $\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$

B) $\vec{a} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$

C) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

D) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

5. Un vector $\vec{v}$ está situado sobre la recta de ecuaciones :

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-4}$$

siendo su módulo $|\vec{v}| = 12$ y su sentido el mismo que el vector de componentes los propios parámetros directores de la recta. ¿Cuál es su expresión analítica?.

6. Si un vector tiene por expresión analítica cartesiana $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, indíquese cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F) :

A) $\cos\alpha = \frac{8}{9}$

B) $|\vec{a}| = 9$

C) $\cos\beta = \frac{1}{9}$

D) $\cos\gamma = \frac{1}{9}$

Objetivo 1-III:

7. Dado el vector deslizante $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ y un punto M (1,2,5) de su recta soporte, identifíquese cuál de las siguientes expresiones nos da las ecuaciones de la recta soporte de $\vec{a}$

A) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{2}$

B) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{5}$

C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{3}$

D) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+5}{3}$

8. Un vector $\vec{a}$ es paralelo a la dirección de parámetros directores (2,3,5) y está aplicado en el punto $M(0,1,-1)$.

Escríbanse las ecuaciones de su recta soporte.

9. La recta de ecuaciones

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{5}$$

es la recta soporte de algunos de los vectores siguientes. Indíquese de cuáles.

A) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ aplicado en M_1 (-2,2,0)

B) $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ aplicado en M_2 (2,-2,0)

C) $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ aplicado en M_2 (2,-2,0)

D) $\vec{d} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 10\vec{k}$ aplicado en M_2 (2,-2,0)

Objetivo 1-IV:

10. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F) ? :

A) Un vector libre $\vec{a}$ queda determinado mediante su expresión analítica $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$

B) Un vector deslizante $\vec{b}$ queda determinado mediante su módulo $|\vec{b}| = 7$ y su dirección que forma con los ejes de la base ángulos cuyos cosenos valen respectivamente :

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\beta = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{11}{6} \, .$$

C) Un vector libre $\vec{c}$ queda determinado mediante su módulo $\left|\vec{c}\right| = 4$

D) Un vector deslizante $\vec{d}$ queda determinado mediante sus componentes escalares $d_1 = 2$, $d_2 = 7$, y $d_3 = 5$ y el punto $M(1,0,3)$ de su recta soporte.

11. Indíquese qué expresiones son correctas (V) y cuáles no (F) :

A) Un vector deslizante $\vec{a}$ queda determinado conociendo su módulo y su punto de aplicación.

B) Un vector localizado $\vec{b}$ queda determinado mediante su expresión analítica $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ y su punto de aplicación $M\,(2,5,4)$.

C) Para determinar un vector libre $\vec{c}$ es necesario conocer la recta sobre la que está contenido.

D) Si de un vector localizado $\vec{d}$ se conoce su punto de aplicación y su módulo, dirección y sentido, el vector esta determinado.

12. De un vector $\vec{a}$ deslizante se conocen las ecuaciones de su recta soporte y su sentido, dentro de la recta. Para obtener su expresión analítica, ¿qué otro dato es necesario?.

CLAVE	DE RESPUESTAS
1.	B
2.	A - V B - F C - V D - F
3.	Localizados
4.	C
5.	$\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{i} - 8\vec{k}$
6.	A - V B - V C - F D - F
7.	C
8	$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{5}$
9.	C y D
10.	A - V B - F C - F D - V
11.	A - F B - V C - F D - V
12.	El módulo

CAPITULO 2 :
PRODUCTO DE VECTORES

El estudio de los productos de vectores es imprescindible para el desarrollo del álgebra vectorial, cuya visión panorámica terminamos en este capítulo.

Algunas magnitudes vectoriales físicas han de ser definidas en función de productos vectoriales. Como ejemplo se pueden citar el momento cinético y la inducción electromagnética.

OBJETIVOS:

2-I	Calcular los productos escalar, vectorial y mixto de vectores.
2-II	Interpretar geométricamente los productos de vectores.
2-III	Establecer las condiciones de perpendicularidad, paralelismo y coplanariedad de vectores.

2.1 Producto escalar

Comenzamos con el más sencillo de los tres : el escalar.

El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es una cantidad escalar igual al producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo α que forman las vectores (figura 2.1).

El producto escalar se representa con un punto entre ambos vectores. Escribiremos por tanto :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \, \cos\alpha \tag{2.1}$$

Si fuera necesario el uso de paréntesis en los cálculos, reservaremos los paréntesis curvos para el producto escalar: $(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

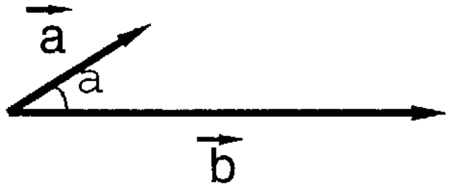


fig 2.1

En la figura 2.2 vemos que el segmento $\overline{OC}$, proyección del vector $\vec{a}$ sobre

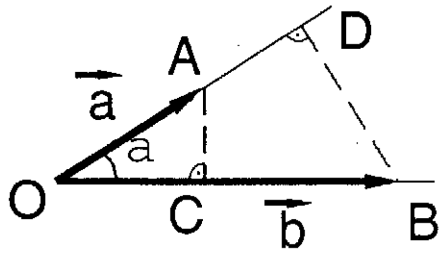


fig 2.2

la dirección de $\vec{b}$ que llamaremos a_b vale :

$$a_b = |\vec{a}| \, \cos\alpha \tag{2.2}$$

donde a_b es positiva si $\cos\alpha > 0$ y negativa en caso contrario.

Por tanto, el producto escalar puede expresarse así :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \left| \vec{b} \right| \tag{2.3}$$

Pero análogamente si a OD, proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, lo denominamos b_a , podemos escribir :

$$b_a = \left| \vec{b} \right| \cos\alpha \tag{2.4}$$

y por tanto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| b_a \tag{2.5}$$

Es decir, el producto escalar de dos vectores puede expresarse también como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

2.2 Principales consecuencias de la definición de producto escalar

De la propia definición que hemos dado se deducen algunas consecuencias que nos interesa destacar porque nos van a facilitar el cálculo de los productos escalares.

- Si uno de los vectores es nulo, el producto escalar es nulo.

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0 \tag{2.6}$$

- Si los dos vectores son perpendiculares, el producto escalar es nulo, por ser el cos de α cero.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos 90^0 = 0 \tag{2.7}$$

- El producto escalar de cada dos vectores unitarios de una base cartesiana es nulo, por ser los vectores perpendiculares entre sí.

$$\left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) = \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) = 0 \tag{2.8}$$

- Cuando los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, su producto escalar es el producto de sus módulos, puesto que el ángulo es 0^0 y $\cos 0^0 = 1$.

  Si tienen sentidos contrarios, el producto escalar es el producto de los módulos pero con signo negativo, puesto que ahora el ángulo es 180^0 y $\cos 180^0 = -1$.

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}|^2 \tag{2.9}$$

- El producto escalar de un vector unitario por si mismo es igual a la unidad puesto que su módulo es 1. En una base cartesiana tenemos :

$$\left(\vec{i} \cdot \vec{i}\right) = |\vec{i}|^2 = 1 \qquad \left(\vec{\mathrm{j}} \cdot \vec{\mathrm{j}}\right) = 1 \qquad \left(\vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{\mathrm{k}}\right) = 1 \tag{2.10}$$

- El producto escalar de dos vectores es positivo o negativo según que el ángulo de las direcciones de los vectores sea agudo (coseno positivo) u obtuso (coseno negativo).

- Si m es un escalar se puede escribir :

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{2.11}$$

  puesto que si $m>0$

$$|m\vec{a}| = m\,|\vec{a}| \tag{2.12}$$

  y para ambos términos de la igualdad dada obtendremos el número :

$$m\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \alpha \tag{2.13}$$

  y de forma análoga se razona para $m<0$.

2.3 Propiedades del producto escalar

Veamos las propiedades conmutativa y distributiva respecto a la suma en el producto escalar, que nos facilitarán los cálculos algebraicos en los que intervenga el producto escalar.

- ***Propiedad conmutativa :***

De la propia definición que hemos dado se deduce que el producto escalar $\left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$ es el producto de ambos módulos por el coseno de α. Por tanto coincide con $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ y podemos escribir :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{2.14}$$

- ***Propiedad distributiva respecto a la suma***

Formemos el producto escalar

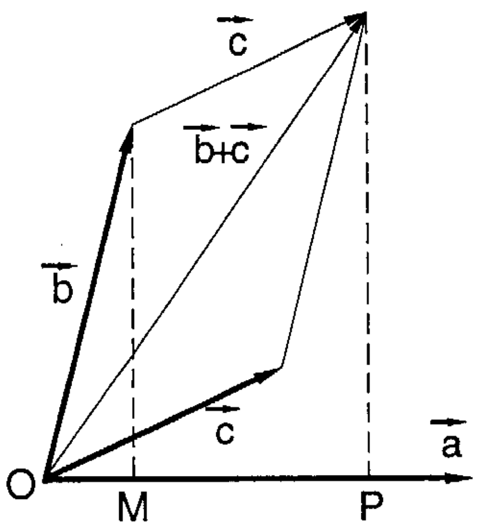


fig 2.3

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b}+\vec{c}\right) \tag{2.15}$$

Calculémoslo multiplicando el módulo de $\vec{a}$ por la proyección de $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ sobre $\vec{a}$. En la figura 2.3 vemos como esta proyección es el segmento $\overline{OP}$ que llamaremos según la notación empleada antes $\left(b+c\right)_a$.

Así :

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left|\vec{a}\right| \, \left(b+c\right)_a \tag{2.16}$$

Por otro lado el producto $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ es el producto del módulo de $\vec{a}$ por la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, b_a. Esta proyección es igual al segmento $\overline{OM}$. Análogamente, para el producto $(\vec{a} \cdot \vec{c})$ formamos el producto de $|\vec{a}|$ por c_a , proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$ y que en la figura coincide con el segmento $\overline{MP}$. Sumando ambos productos tendremos :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})+(\vec{a} \cdot \vec{c}) = |\vec{a}|\, b_a + |\vec{a}|\, c_a = |\vec{a}|\,(b_a + c_a) \qquad (2.17)$$

Pero como la suma de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{MP}$ es el segmento $\overline{OP}$, escribiremos, recordando que $\overline{OP} = (\vec{b}+\vec{c})_a$.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})+(\vec{a} \cdot \vec{c}) = |\vec{a}|\,(b_a + c_a) = |\vec{a}|\,(b+c)_a \qquad (2.18)$$

Es decir :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})+(\vec{a} \cdot \vec{c}) \qquad (2.19)$$

2.4 Expresión analítica del producto escalar

Necesitamos disponer de una expresión analítica del producto escalar lo más sencilla posible y que nos permita realizar operaciones con facilidad.

Supongamos que disponemos de una base de referencia cartesiana en la cual podemos expresar analíticamente los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ mediante sus componentes escalares :

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k} \quad , \qquad \vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k} \qquad (2.20)$$

Formemos el producto escalar teniendo en cuenta las propiedades que acabamos de ver :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}\right) \cdot \left(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}\right) =$$
$$= a_1 b_1 \left(\vec{i} \cdot \vec{i}\right) + a_2 b_2 \left(\vec{j} \cdot \vec{j}\right) + a_3 b_3 \left(\vec{k} \cdot \vec{k}\right) + \qquad (2.21)$$
$$+ \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right)\left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) + \left(a_1 b_3 + a_3 b_1\right)\left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) + \left(a_2 b_3 + a_3 b_2\right)\left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right)$$

Los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ multiplicados escalarmente de dos en dos, nos dan productos nulos como ya hemos visto :

$$\left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) = \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right) = 0 \qquad (2.22)$$

Luego los tres últimos sumandos de $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ son nulos. Además al multiplicar escalarmente uno de ellos por sí mismo su producto es la unidad :

$$\left(\vec{i} \cdot \vec{i}\right) = \left(\vec{j} \cdot \vec{j}\right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{k}\right) = 1 \qquad (2.23)$$

De manera que la expresión analítica queda :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (2.24)$$

Ejemplo

Consideremos los vectores $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *y* $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. *Pedimos al lector que forme los productos escalares* $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)$ *y* $\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$, *deteniendo por un instante la lectura.*

La solución es muy sencilla :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 6 + 1 = 11$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 12 - 3 - 2 = 7$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 3 - 2 - 2 = -1$$

2.5 Aplicaciones del producto escalar

Veamos tres aplicaciones inmediatas que nos van a ser muy útiles en cálculos posteriores :

- ***Condición de perpendicularidad de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.***

Si dos vectores son perpendiculares el coseno de $\alpha = 90^0$ es cero y por tanto, su producto escalar también.

> ***Ejemplo :***
>
> *Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + b_3\vec{k}$, el alumno debe calcular el valor de b_3 para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.*
>
> *La respuesta es : Si son perpendiculares su producto escalar es cero . Por tanto :*
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot b_3 = 6 - 3b_3 = 0$$
>
> $$b_3 = 2$$

- ***Proyección de un vector $\vec{a}$ sobre una recta dada***

Situemos un vector $\vec{b}$ sobre la recta, por ejemplo, tomando como componentes de $\vec{b}$, los parámetros directores de la recta, como vimos en el último epígrafe del capítulo anterior. El sentido de $\vec{b}$ se elige de manera $(\vec{a} \cdot \vec{b}) > 0$. La proyección de $\vec{a}$ sobre la recta es la proyección de $\vec{a}$ sobre la dirección de $\vec{b}$, es decir a_b . Pero :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \left|\vec{b}\right| \tag{2.25}$$

de donde

$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \tag{2.26}$$

La expresión $\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ es un vector de módulo 1, que tiene la dirección de $\vec{b}$, es decir, de la recta dada, y que llamaremos $\vec{e}_r$, unitario sobre la recta. Así :

$$a_b = \vec{a} \cdot \vec{e}_r \tag{2.27}$$

que expresa que la proyección de $\vec{a}$ sobre la recta es el producto de su módulo por el coseno del ángulo que forma con el unitario, ya que el producto escalar es el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman y en este caso el módulo de $\vec{e}_r$ es 1 .

Ejemplo :

Tomamos la recta descrita en epígrafe 1.14 del capitulo 1, de ecuaciones :

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-8}{7} = \frac{z-5}{4}$$

El lector debe determinar la proyección del vector $\vec{a} = \vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$ *sobre la recta dada. Calcúlela antes de seguir leyendo.*

La solución se obtiene sabiendo que el vector $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\,\vec{j} + 4\vec{k}$ *de componentes los parámetros* 4, 7, 4, *tiene la dirección de la recta dada. El módulo de* $\vec{b}$ *vale :*

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4^2+7^2+4^2} = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9$$

y por tanto

$$a_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{1\cdot 4+4\cdot 7+1\cdot 4}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

- ***Ángulo que forman dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$***

Despejando el coseno de la expresión del producto escalar tendremos :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \tag{2.28}$$

Con esta expresión podemos obtener el valor del ángulo si conocemos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2.6 Producto vectorial

Veamos a continuación un nuevo producto, el vectorial, que contrariamente al anterior , tendrá ahora por resultado un vector que llamaremos $\vec{p}$.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{p}$ cuyos elementos son :

- el módulo de $\vec{p}$ es el producto de los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por el seno del ángulo que forman los vectores :

$$\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \operatorname{sen}\alpha \tag{2.29}$$

- la dirección de $\vec{p}$ es la de la recta perpendicular al plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

- el sentido de $\vec{p}$ es el de avance del sacacorchos o del tornillo que giran a la derecha, al llevar el primer vector $\vec{a}$ sobre el segundo $\vec{b}$.

El sacacorchos normal o a derechas es aquel que, al aplicarlo sobre una botella, le hacemos girar en sentido de las agujas del reloj a medida que penetra hacia abajo en el tapón (figura 2.4). Si el lector no ha utilizado con anterioridad el concepto de producto vectorial, debe ejercitarse haciendo girar su *mano derecha* en el sentido de las agujas del reloj, manteniendo extendidos sus dedos índice y pulgar. El producto vectorial de dos vectores cuyos sentidos están marcados por las posiciones inicial y final del dedo pulgar en este orden, tiene el sentido que marca el dedo índice.

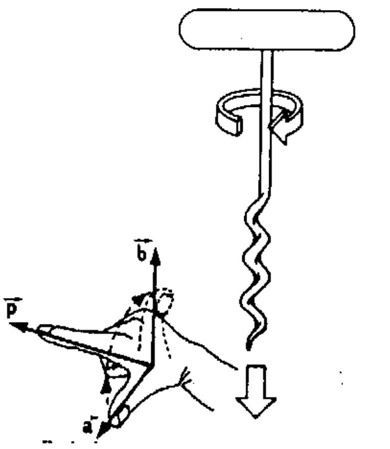


fig 2.4

En la figura 2.5 hemos representado los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y su producto, el vector $\vec{p}$.

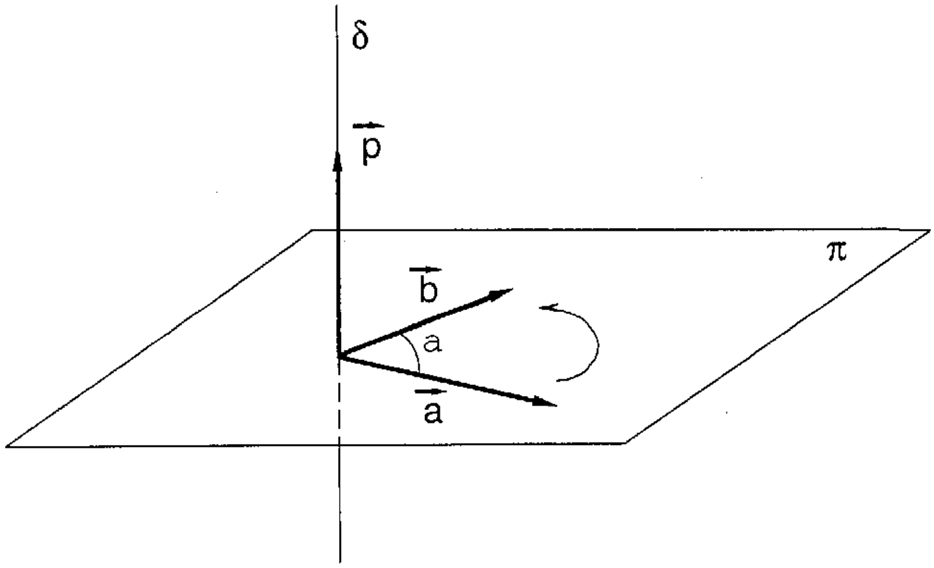


fig 2.5

El plano π trazado por el punto 0 es el que contiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$. La recta δ es la recta perpendicular al plano π y sobre ella se ha dibujado $\vec{p}$, en el sentido en que avanza un sacacorchos normal al girar $\vec{a}$ para llevarlo sobre $\vec{b}$. Este sentido del giro lo hemos indicado en la figura mediante una flecha curva dibujada en el plano π .

El producto vectorial lo escribiremos con un aspa intercalada entre los vectores :

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{2.30}$$

y cuando sea necesario el uso del paréntesis, usaremos los corchetes o paréntesis cuadrados :

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \tag{2.31}$$

2.7 Consecuencias de la definición de producto vectorial

Veamos algunas de las consecuencias que van a ser útiles en nuestros cálculos :

- El producto vectorial es anticonmutativo, es decir, al cambiar el orden de los factores, se obtiene el resultado opuesto. En efecto en la figura 2.5 vemos que al formar el producto $\vec{p}' = \vec{b} \times \vec{a}$, el plano π sigue siendo el mismo y la recta δ también. El módulo del producto es el producto de los módulos por el seno del ángulo α . Pero el sentido es ahora el contrario al hacer girar $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, es decir hacia abajo en la figura. Por tanto $\vec{p}'$ es el vector opuesto a $\vec{p}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left[\vec{b}' \times \vec{a}\right] \tag{2.32}$$

- Si uno de los vectores es nulo, el producto vectorial es nulo.

$$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \tag{2.33}$$

- Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección su producto vectorial es nulo, tengan sentido iguales o contrarios, puesto que el módulo es nulo al ser el sen 0^0 = sen $180^0 = 0$.

- Por tanto el producto vectorial de un vector $\vec{a}$ por sí mismo es nulo.

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \tag{2.34}$$

- Si dos vectores son perpendiculares, su producto vectorial tiene por módulo el producto de sus módulos ya que sen $90^0 = 1$.

- Los vectores unitarios de una base cartesiana (figura 2.6) dan lugar a las relaciones siguientes :

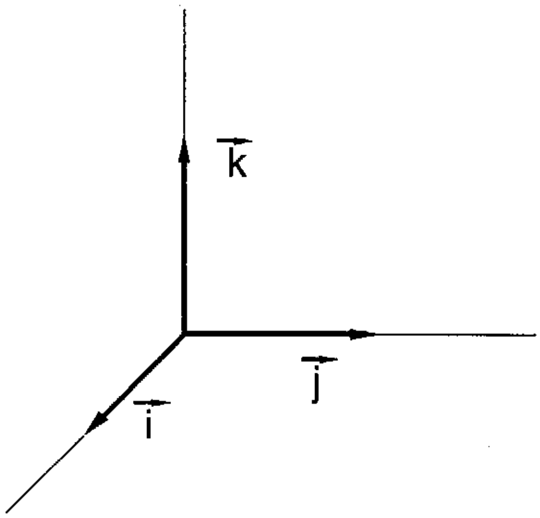


fig 2.6

Veamos en primer lugar que :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \tag{2.35}$$

En efecto. Por ser $\vec{i}$ y $\vec{j}$ vectores perpendiculares entre sí y de módulo unidad, el módulo de su producto es igual a 1.

La dirección de $[\vec{i} \times \vec{j}]$ es la de la recta normal al plano que definen, es decir, la dirección de $\vec{k}$. Y el sentido de $[\vec{i} \times \vec{j}]$ es precisamente el de $\vec{k}$.

El lector, razonando de igual forma para los demás productos algebraicos, obtendrá :

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array} \tag{2.36}$$

- El producto vectorial es asociativo respecto a los escalares. Si m es un escalar, razonando análogamente a como lo hicimos en el producto escalar, podemos escribir :

$$\left(m\vec{a}\right)\times\vec{b} = m\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] \qquad (2.37)$$

- El producto vectorial es distributivo respecto a la suma , pudiendo escribirse :

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\times\vec{c}\right] \qquad (2.38)$$

Por razones de extensión omitimos su justificación, remitiendo al lector interesado a cualquier manual de álgebra vectorial.

2.8 Expresión analítica del producto vectorial

De la misma manera que hicimos en el producto escalar, vamos a obtener ahora una expresión analítica operativa para el producto vectorial.

Consideremos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de expresiones :

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i}+a_2\,\vec{j}+a_3\,\vec{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = b_1\,\vec{i}+b_2\,\vec{j}+b_3\,\vec{k} \qquad (2.39)$$

Su producto vectorial es :

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_1\,\vec{i}+a_2\,\vec{j}+a_3\,\vec{k}\right)\times\left(b_1\,\vec{i}+b_2\,\vec{j}+b_3\,\vec{k}\right) = a_1b_1\left[\vec{i}\times\vec{i}\right]+a_1b_2\left[\vec{i}\times\vec{j}\right]+$$

$$a_1b_3\left[\vec{i}\times\vec{k}\right]+a_2b_1\left[\vec{j}\times\vec{i}\right]+a_2b_2\left[\vec{j}\times\vec{j}\right]+a_2b_3\left[\vec{j}\times\vec{k}\right]+a_3b_1\left[\vec{k}\times\vec{i}\right]+$$

$$+a_3b_2\left[\vec{k}\times\vec{j}\right]+a_3b_3\left[\vec{k}\times\vec{k}\right] \qquad (2.40)$$

Los tres sumandos en que aparecen los unitarios multiplicados por sí mismo son nulos, como ya hemos visto. Sustituyendo los demás productos por su resultado, según la tabla anterior y ordenándolos de nuevo podemos escribir :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} \qquad (2.41)$$

Podemos escribir esta expresión de forma más sencilla, como un determinante, con los vectores unitarios en la primera fila, las componentes de $\vec{a}$ en la segunda y las de $\vec{b}$ en la tercera :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2.42)$$

Ejemplo:

Calculemos el producto vectorial de los vectores

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad y \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{k}$$

Formando el determinante tendremos :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

Consecuencia

Se denomina doble producto vectorial de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ al producto vectorial de $\vec{a}$ por el vector $[\vec{b} \times \vec{c}]$, es decir , a la expresión :

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] \qquad (2.43)$$

Si el lector desarrolla como ejercicio la expresión analítica de este producto , comenzando por la del segundo factor $[\vec{b} \times \vec{c}]$, comprobará con facilidad que se cumple :

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c} \qquad (2.44)$$

donde el doble producto vectorial queda expresado como diferencia de dos vectores proporcionales a los $\vec{b}$ y $\vec{c}$, obtenidos multiplicándolos por los números que representan los respectivos productos escalares. Esta expresión se conoce con el nombre de regla de la descomposición del doble producto vectorial.

2.9 Aplicaciones del producto vectorial

Al igual que hicimos con el producto escalar, veamos ahora algunas aplicaciones del producto vectorial.

- ***El módulo del producto vectorial representa un área***

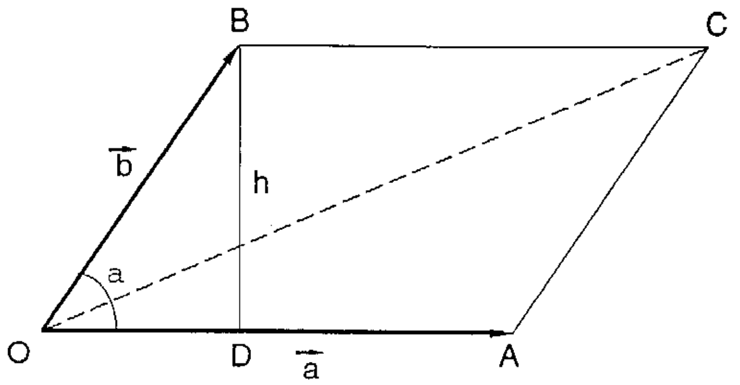


fig 2.7

El módulo del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ tiene por expresión :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \text{ sen } \alpha \qquad (2.45)$$

pero

$$|\vec{b}| \text{ sen } \alpha = h \qquad (2.46)$$

por tanto

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\; h = A_p \qquad (2.47)$$

donde A_p representa el área del paralelogramo $OACB$ formado con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por lados (figura 2.7).

El área A_t el triángulo OAC es la mitad del área del paralelogramo, por tanto :

$$A_t = \frac{1}{2}\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \tag{2.48}$$

De esta manera, dada una figura polígonal plana podemos triangularla y hallar su área sumando las áreas de todos los triángulos.

- ***Paralelismo de vectores***

Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la misma dirección y sentido. Su producto vectorial es nulo por tanto :

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)\vec{i} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\vec{j} +$$

$$+\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\vec{k} = \vec{0} \tag{2.49}$$

Pero si un vector es nulo, son cero sus tres componentes. Por consiguiente :

$$\begin{aligned} a_2 b_3 - a_3 b_2 &= 0 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 &= 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.50}$$

o lo que es igual :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \tag{2.51}$$

Condición que expresa el paralelismo de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo:

Intentemos obtener un vector $\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$ *de módulo* $|\vec{a}| = 6$ *y que sea paralelo al* $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ *de su mismo sentido.*

Expresaremos la proporcionalidad entre las componentes de $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$, *e igualaremos los cocientes a un número* λ *desconocido.*

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{1} = \frac{a_3}{2} = \lambda$$

De donde $a_1 = 2\lambda$, $a_2 = \lambda$ *y* $a_3 = 2\lambda$, *luego* $\vec{a} = 2\lambda\,\vec{i} + \lambda\,\vec{j} + 2\lambda\,\vec{k}$.

Haciendo que su módulo valga 6 *calcularemos el valor de* λ

$$|\vec{a}|^2 = 36 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 9\lambda^2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Por consiguiente

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

2.10 Producto mixto

Veamos en último lugar, para terminar nuestro recorrido por las operaciones algebraicas, el concepto de producto mixto.

El producto mixto de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es un escalar, un número, que representaremos así: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. Se define como el producto escalar de uno de ellos, $\vec{a}$, por el vector producto vectorial de los otros dos . Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left[\vec{b} \times \vec{c}\right] \tag{2.52}$$

2.11 Expresión analítica del producto mixto

De la misma forma que en los anteriores productos, busquemos una expresión del producto mixto en función de las componentes escalares de los tres vectores.

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k} \quad , \qquad \vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k} \quad ,$$

$$\vec{c} = c_1\,\vec{i} + c_2\,\vec{j} + c_3\,\vec{k} \tag{2.53}$$

Formemos el producto escalar sumando los productos de las componentes de $\vec{a}$ por las de $\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$. Pero estas últimas, según la expresión analítica del producto vectorial (epígrafe 8), son :

$$\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2 \qquad , \qquad \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$\left[\vec{b} \times \vec{c}\right]_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \tag{2.54}$$

Por consiguiente

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \tag{2.55}$$

que coincide con el desarrollo de un determinante de segundo orden, con las componentes de $\vec{a}$ en la primera fila, las de $\vec{b}$ en la segunda y las de $\vec{c}$ en la tercera, como el alumno puede comprobar fácilmente desarrollando por los elementos de la primera fila.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.56}$$

Ejemplo:

El lector debe calcular el valor de $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, *siendo* $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{k}$

La respuesta se obtiene calculando el valor del determinante :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3$$

2.12 Consecuencias de la definición de producto mixto

Las más útiles para nosotros son :

- Si son iguales dos de los tres vectores, el producto mixto es nulo. Sabemos por las propiedades de los determinantes, que cuando un determinante tiene dos filas iguales es nulo. Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{a},\vec{b}\right)=0 \quad , \quad \left(\vec{a},\vec{b},\vec{b}\right)=0 \quad , \quad \left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right)=0 \qquad (2.57)$$

- Si dos vectores son proporcionales, $\vec{a} = \lambda\, \vec{b}$, es decir tienen la misma dirección, el determinante tendrá dos filas proporcionales y también será nulo su valor.

- Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas, el determinante cambia de signo. Pero intercambiar dos filas quiere decir, que intercambiamos entre sí dos vectores.

Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right), \qquad \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$$
$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right) \qquad (2.58)$$

- Si el intercambio de filas se hace dos veces, el determinante no varía ya que al cambiar dos veces de signo queda como estaba. Así :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2.59)$$

Pasamos del primer determinante al segundo intercambiando primero la fila de $\vec{a}$ con la de $\vec{b}$, pasando ésta arriba. Después lo hacemos con las filas de $\vec{a}$ y $\vec{c}$, pasando la de $\vec{a}$ abajo. Y del segundo determinante al tercero mediante los mismos pasos . Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right) \qquad (2.60)$$

Es decir el producto mixto no varía al permutar circularmente los vectores.

- Los signos de los productos $(\cdot)$ y $(\times)$ pueden intercambiarse entre sí sin que varíe el producto mixto. En efecto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{c} \cdot \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} \tag{2.61}$$

puesto que el producto escalar es conmutativo. Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left[\vec{b} \times \vec{c}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} \tag{2.62}$$

2.13 Aplicaciones del producto mixto

- ***El producto mixto expresa un volumen***

Formemos el producto mixto $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c}$ (figura 2.8). Hemos dibujado el vector $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, que por ser un producto vectorial, es perpendicular al plano π que contiene a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El producto escalar de $\vec{c}$ por $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ lo

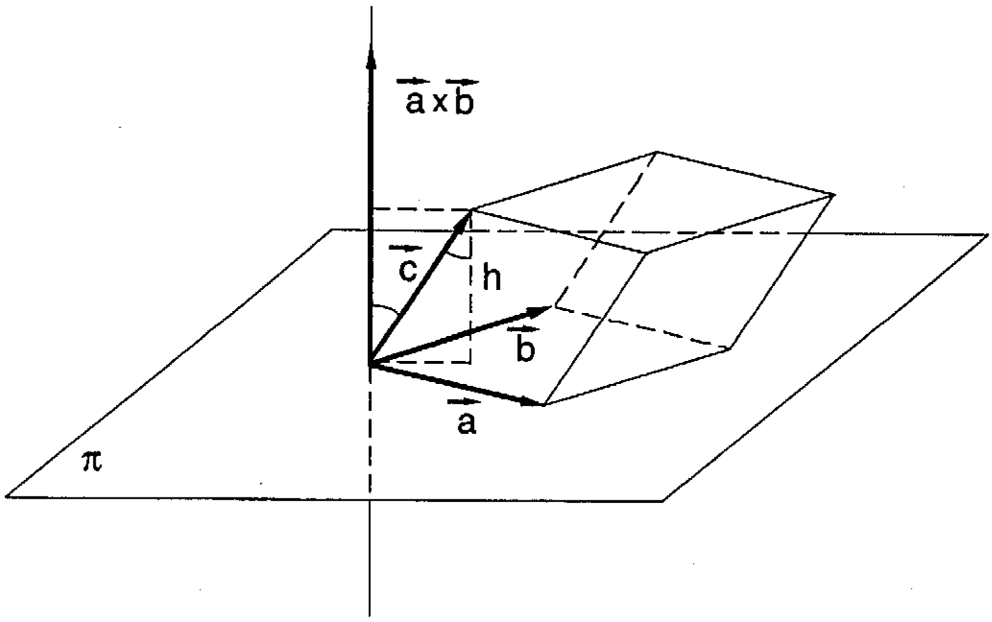


fig 2.8

calculamos como el producto del módulo de $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ por la proyección de $\vec{c}$ sobre él.

El módulo de $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ es el área S del paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$. La proyección de $\vec{c}$ sobre la dirección de $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ es la altura h del paralelepípedo construido con los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ por lados. Por tanto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = S\cdot h = V \tag{2.63}$$

es decir, el volumen de dicho paralelepípedo.

- ***Condición de coplanariedad de tres vectores***

Si tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ están contenidos en un mismo plano , la altura h del paralelepípedo es nula . Con otras palabras: $\vec{c}$ es perpendicular a $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, por estar en el mismo plano que $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y el producto escalar de ambos es nulo.

Por consiguiente expresaremos que tres vectores son coplanarios haciendo nulo su producto mixto.

Ejemplo :

Se quiere comprobar si los vectores $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k}$ *y* $\vec{c}=3\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$ *son coplanarios.*

Formemos su producto mixto :

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -30+36-48+42 = 0$$

Por tanto son coplanarios.

2.14 Resumen de las aplicaciones geométricas

Podemos resumir las aplicaciones vistas, según el tipo de producto, así :

PRODUCTO	Si es nulo, sin serlo los factores , expresa la	Interpretación Geométrica
ESCALAR	CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD	Dividido por el módulo de uno de los factores, es la proyección del otro sobre él.
VECTORIAL	CONDICIÓN DE PARALELISMO	Su módulo es el área del paralelogramo construido con los lados de los vectores factores
MIXTO	CONDICIÓN DE COPLANARIEDAD	Es el volumen del paralelepípedo construido con los lados de los vectores factores

PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN

Objetivo 2.I:

1. Se consideran los vectores siguientes:

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$b = 2\vec{i} + 6\vec{j} - k$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

¿Que expresiones de las siguientes son verdaderas (V) y cuáles falsas (F) ?

A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

B) $\vec{c} \cdot \vec{a} = -2$

C) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 14$

D) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$

2. Se dan los vectores:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3\vec{i}$$

Indiquese que expresiones son correctas (V) y cuáles no (F) :

A) $\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

B) $\vec{c} \times \vec{b} = 3\vec{j} + 3\vec{k}$

C) $\vec{c} \times \vec{a} = 6\vec{j}$

D) $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$

3. Tomando los vectores del item anterior, calcúlese el producto mixto $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Objetivo 2.II:

4. Los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k}$ y $b = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ verifican algunas de las afirmaciones siguientes (V) y otras no (F) :

A) Si el angulo que forman los vectores de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es α , se tiene: $\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{200}}$

B) La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ vale 6

C) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ es $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

D) Las proyecciones anteriores tienen que ser iguales.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos A, B y C. El valor de su área A_T se corresponde con algunas de las expresiones siguientes. Indíquese con cuáles.

A) $A_T = \left[\vec{AB} \times \vec{AC}\right]$

B) $A_T = \left[\vec{BC} \times \vec{BA}\right]$

C) $A_T = \dfrac{1}{2}\left[\vec{CA} \times \vec{CB}\right]$

D) $A_T = \dfrac{1}{2}\left[\vec{AB} \times \vec{AC}\right]$

6. Determínese el volumen V del paralelepípedo construido con lados los vectores $\vec{a} = 3\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Objetivo 2.III:

7. En un sistema cartesiano se tienen los vectores de expresiones analíticas:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

aplicados en el origen de coordenadas. Indíquese qué expresiones de las siguientes son verdaderas (V) y cuáles falsas (F):

A) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

B) $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanarios.

C) $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares.

D) $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos.

8. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores cuyos módulos no son nulos, ¿qué expresiones de las siguientes se cumplen (V) y cuáles no (F)?:

A) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, implica que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, implica que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, expresa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

D) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, expresa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

9. Si dos vectores tienen por expresiones analíticas:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = x\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$$

¿Qué valor debe tomar x para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares?

CLAVE	***DE RESPUESTAS***
1.	A - F B - V C -V D - F
2.	A - V B - V C - F D - F
3.	$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = -6$
4.	A - V B - F C - V D - F
5.	C y D
6.	$V = 3$
7.	A - F B - V C - V D - F
8.	A - V B - F C - V D - F
9.	$x = 4$

CAPITULO 4
MOMENTOS

Dado que los fenómenos físicos tienen lugar en nuestro espacio geométrico, tanto las magnitudes en sí como su posición relativa en el espacio, juegan un papel importante.

De este modo los procesos físicos pueden explicarse a partir de la configuración espacial que toman las diferentes magnitudes.

Resulta así imprescindible conocer esa configuración espacial. En realidad, bajo nuestro punto de vista, el espacio va más allá del puro concepto geométrico, convirtiéndose en el soporte de las magnitudes físicas.

OBJETIVOS:

4-I	Calcular el momento central de un vector.
4-II	Transformar la expresión de un momento al cambiar de centro.
4-III	Calcular el momento áxico de un vector.
4-IV	Calcular el momento de un par de vectores.

4.1 Momentos

En general, llamamos ***momento de una magnitud*** *al producto de su valor por una potencia de la distancia comprendida entre su punto de aplicación y un origen de referencia geométrico, previamente elegido.*

Precisamente el hecho de que uno de los factores que interviene sea una potencia de la distancia a un origen de referencia, determina su clasificación en momentos de primero, segundo y, en general, de enésimo orden.

Se denominan ***momentos de primer orden*** aquellos que están definidos como el producto de la distancia (potencia unidad) por el valor de la magnitud.

Son ***momentos de segundo orden*** aquellos que resultan del producto del valor de la magnitud por el cuadrado de la distancia.

Y, en general, el ***momento de orden n*** , es aquel que resulta de multiplicar el valor de la magnitud por la potencia n-ésima de la distancia.

De otra parte, puesto que las magnitudes físicas de las que se tomen momentos, pueden ser escalares o vectoriales, los momentos pueden ser de magnitudes escalares y de magnitudes vectoriales.

Por convenio el producto que define el momento de una magnitud vectorial es el producto vectorial, considerando la distancia como un vector.

Ejemplo de aplicación de ***momentos de magnitudes escalares*** lo tenemos en la *geometría de masas,* que tiene por objeto el conocimiento de la distribución de la masa de un sistema en el espacio geométrico. Se basa en los momentos de primer orden para la determinación del *centro de masas* y en los momentos de segundo orden o *momentos de inercia.*

Como *ejemplo* característico de ***momento de una magnitud vectorial*** tenemos el *momento cinético* que es pieza fundamental de la *dinámica.*

4.2 Momento de un vector respecto de un punto momento central

El momento $\vec{Q}$ de un vector $\vec{a}$ respecto de un punto P (fig. 4.1) se define como el vector producto vectorial del vector de posición $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$ del punto de aplicación A del vector $\vec{a}$, respecto de P, multiplicado por el propio vector $\vec{a}$. Es decir:

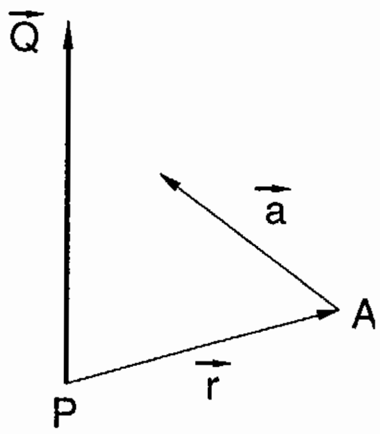


fig 4.1

$$\vec{Q} = \vec{r} \times \vec{a} \tag{4.1}$$

El vector $\vec{Q}$, que recibe el nombre de ***momento central,*** *queda definido como un vector localizado en el punto P, que llamaremos* ***centro de momentos.***

Al ser $\vec{Q}$ un producto vectorial, su dirección, sentido y módulo se definen como lo hicimos en el capitulo anterior.

En la figura 4.2 vemos cómo la dirección de $\vec{Q}$ es la perpendicular al plano

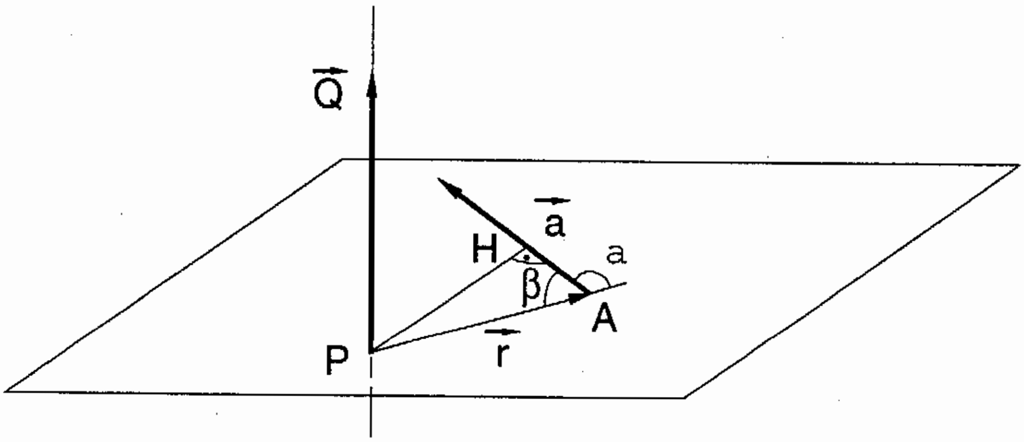


fig 4.2

definido por $\vec{r}$ y $\vec{a}$. El sentido es el de avance del sacacorchos normal al hacer girar la recta de $\vec{r}$, llevándola sobre la de $\vec{a}$, haciendo coincidir los sentidos positivos tomados en ambas.

El módulo de $\vec{Q}$ es:

$$\left|\vec{Q}\right| = |\vec{r}|\,|\vec{a}| \operatorname{sen} \alpha \tag{4.2}$$

El ángulo α puede sustituirse por β, puesto que los ángulos suplementarios tienen iguales sus senos: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ y como $\overline{PA}\operatorname{sen}\beta = \overline{PH}$, segmento definido por el centro de momentos P y el punto H pié de la perpendicular a la recta de $\vec{a}$ trazada desde P:

$$\left|\vec{Q}\right| = |\vec{a}||\vec{r}|\operatorname{sen}\beta = |\vec{a}|\,\overline{PH} \tag{4.3}$$

es decir, el módulo del momento es igual al producto del módulo del vector por la distancia del centro de momentos a la recta soporte del vector.

Las dimensiones físicas del momento dependen de las que tenga la magnitud vectorial $\vec{a}$. Las dimensiones de $\vec{Q}$ son las de $\vec{a}$ multiplicadas por una longitud L (dimensión de $\vec{r}$).

Ejemplo:

Calculemos la expresión analítica del momento respecto del punto P(1, 2, -1) del vector $\vec{a} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *aplicando en el punto A(2,4,1).*

Comenzaremos por determinar el vector $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$. *En el capitulo 2 vimos que un vector de origen P y extremo A, conocidos, puede escribirse siendo sus componentes escalares la diferencia entre las respectivas coordenadas de su extremo y de su origen.*

En nuestro caso, como $x_A = 2$ *y* $x_P = 1$ $\quad r_1 = x_A - x_P = 2 - 1 = 1$
y análogamente para las otras componentes

Por tanto:

$$\vec{r} = (2-1)\,\vec{i} + (4-2)\,\vec{j} + [1-(-1)]\,\vec{k} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

Pedimos al lector que proceda ahora a calcular el valor de $\vec{Q}$.

La solución obtenida debe ser:

$$\vec{Q} = \vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

4.3 Propiedades del momento central

Veamos ahora dos importantes propiedades del momento de un vector respecto de un punto:

• ***El momento central de vectores deslizantes***

Hasta ahora hemos supuesto que el vector $\vec{a}$ está aplicado en un punto fijo A, es decir: hemos considerado el vector como localizado en A.

Veamos qué ocurre si el vector es deslizante:

Supongamos que lo representamos en dos posiciones dentro de su recta soporte, como indica la figura 4.3, con orígenes en A y B.

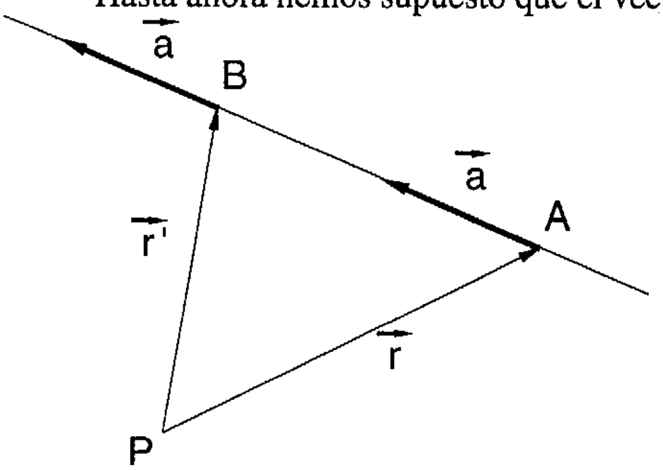


fig 4.3

El momento respecto de P del vector $\vec{a}$ con origen en A, vale:

$$\vec{Q} = \vec{r} \times \vec{a} = \overrightarrow{PA} \times \vec{a} \tag{4.4}$$

Si ahora lo tomamos con origen en B, su momento es:

$$\vec{Q}' = \vec{r}' \times \vec{a} = \overrightarrow{PB} \times \vec{a} \tag{4.5}$$

Pero como $\overrightarrow{PB}$ es la suma de los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{Q}' = \overrightarrow{PB} \times \vec{a} = \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) \times \vec{a} = \left[\overrightarrow{PA} \times \vec{a}\right] + \left[\overrightarrow{AB} \times \vec{a}\right] \tag{4.6}$$

El segundo sumando es nulo puesto que los dos vectores que lo forman, $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{a}$, tienen la misma dirección y su producto vectorial es cero.

Por tanto:

$$\vec{Q}' = \overrightarrow{PB} \times \vec{a} = \overrightarrow{PA} \times \vec{a} = \vec{Q} \tag{4.7}$$

Es decir: *el momento de un vector deslizante respecto de un punto es único y no depende de la posición del punto de aplicación del vector, siempre que se mantenga sobre su recta soporte.*

No podemos generalizar esta propiedad a los vectores libres. Si la recta soporte de un vector se acerca al punto P, haciendo menor su distancia al punto, el momento será menor en módulo. Y al contrario, si se aleja. Si, además, variamos el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{a}$, su normal cambia, y con ella la dirección de $\vec{Q}$.

Por consiguiente establecemos que *el concepto de momento central o momento respecto de un punto sólo es definible para vectores localizados y para vectores deslizantes.*

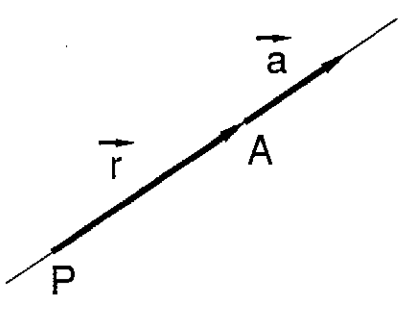


fig 4.4

- ***Momento central nulo.***

Si la recta soporte del vector $\vec{a}$ pasa por el centro de momentos P, el momento es nulo (figura 4.4). En efecto:

$$\vec{Q} = \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \tag{4.8}$$

tienen la misma dirección y su producto vectorial es nulo.

Con otras palabras: la distancia $\overline{PH}$ desde P hasta la recta soporte de $\vec{a}$ es nula y por tanto $\vec{Q}$ tiene módulo nulo.

Si $\vec{a}$ fuese deslizante otra forma de verlo será hacerlo deslizar hasta tomarlo con origen en P, con lo cual $\vec{r}$ sería un vector nulo.

4.4 Cambio del centro de momentos

Enfrentémonos con el siguiente problema:

Supongamos que conocemos el vector $\vec{a}$ pero no sabemos cuál es su recta soporte. Queremos saber si, conociendo el momento $\vec{Q}_1$ de $\vec{a}$ respecto de un punto P_1, podemos calcular su momento $\vec{Q}_2$ respecto de otro punto P_2.

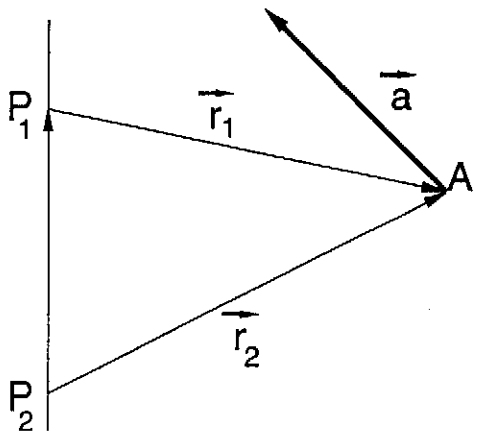


fig 4.5

Veamos la forma de proceder con ayuda de la figura 4.5.

El momento $\vec{Q}_1$ respecto de P_1 es:

$$\vec{Q}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{a} \tag{4.9}$$

y $\vec{Q}_2$ respecto de P_2:

$$\vec{Q}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{a} \tag{4.10}$$

pero $\vec{r}_2$ puede expresarse como suma de $\overrightarrow{P_2P_1}$ y $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2P_1} + \vec{r}_1 \tag{4.11}$$

Así:

$$\vec{Q}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{a} = \left(\overrightarrow{P_2P_1} + \vec{r}_1\right) \times \vec{a} = \left[\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}\right] + \left[\vec{r}_1 \times \vec{a}\right] \qquad (4.12)$$

Es decir:

$$\vec{Q}_2 = Q_1 + \left[\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}\right] \qquad (4.13)$$

El segundo sumando equivale al momento que obtendríamos en el punto nuevo P_2 del vector $\vec{a}$, si éste lo tuviéramos aplicado en P_1.

Consiste la solución del problema planteado en el cual se supone que desconocemos el punto A y la recta soporte de $\vec{a}$, en trazar $\vec{a}$ en el punto P_1, en el que previamente conocemos su momento $\vec{Q}_1$. Sucede, sin embargo, que el vector $\vec{a}$ no es libre y por tanto no puede ser aplicado fuera de su recta soporte. ¿Cómo expresar correctamente el resultado de la ecuación anterior?:

En rigor, debemos decir que trazamos en P_1 un vector equipolente del vector $\vec{a}$. Pues bien, hecho esto, el momento $\vec{Q}_2$ de $\vec{a}$ respecto de P_2 es la suma de $\vec{Q}_1$, (momento de $\vec{a}$ respecto de P_1) más el momento respecto de P_2 de un vector equipolente del $\vec{a}$, aplicado en P_1.

Ejemplo:

El vector $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ tiene respecto del punto P_1 (2, 1, 0) el momento $Q_1 = 3\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.

El lector debe calcular el momento $\vec{Q}_2$ de $\vec{a}$ respecto de P_2 (2, -1, 0) antes de recurrir a la solución que damos a continuación.

$$\vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 + \left[\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}\right]$$

siendo

$$\overrightarrow{P_2P_1} = (2-2)\,\vec{i} + [1-(-1)]\,\vec{j} + (0-0)\,\vec{k} = 2\,\vec{j}$$

y por tanto:

$$\vec{Q}_2 = (3\,\vec{i} + \vec{j} + 6\,\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (3-2)\,\vec{i} + \vec{j} + (6-4)\vec{k} = i + \vec{j} + 2\,\vec{k}$$

4.5 Teorema de Varignon

Para terminar el tema de momento central, vamos a ver este teorema que nos será de utilidad en capítulos posteriores.

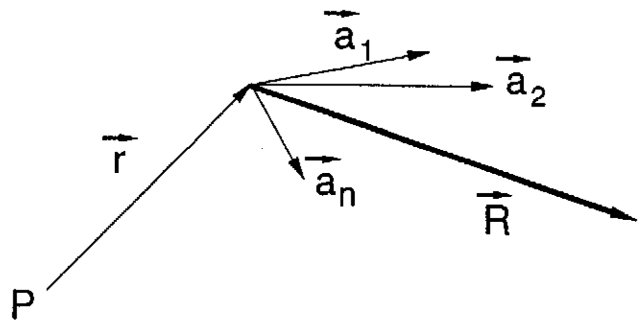


fig 4.6

Supongamos que tenemos n vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$,.......$\vec{a}_n$, concurrentes en el punto A, ya sea porque todos son vectores localizados en dicho punto, o porque son vectores deslizantes cuyas rectas soportes se cortan en A (figura 4.6).

Llamaremos $\vec{R}$ al vector suma de los n vectores dados.

Tomemos momentos de cada vector respecto de un punto P y una vez hecho, sumémoslos todos. Denominemos $\vec{Q}$ al vector resultante, suma de todos los momentos en P de los vectores dados. Su valor es:

$$\vec{Q} = [\vec{r}\times\vec{a}_1] + [\vec{r}\times\vec{a}_2] + \ldots\ldots\ldots + [\vec{r}\times\vec{a}_n] \qquad (4.14)$$

pero en función de la propiedad distributiva del producto vectorial, pondremos:

$$\vec{Q} = \vec{r} \times \left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots\ldots + \vec{a}_n \right) = \vec{r} \times \vec{R} \tag{4.15}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ***Teorema de Varignon*** y se enuncia así:

La resultante de los momentos respecto de un punto de varios vectores concurrentes es igual al momento respecto de dicho punto del vector resultante de los vectores considerados.

En el capitulo siguiente nos valdremos de este teorema para simplificar cálculos.

4.6 Momento respecto de un eje : Momento áxico

Hemos tomado hasta ahora como elemento geométrico de referencia un punto y así hemos aprendido a calcular los momentos centrales. Cambiamos de elemento de referencia, pasando de un punto a un eje, es decir a una recta orientada mediante un unitario $\vec{e}_E$

Se denomina ***momento áxico***, o *momento respecto de un eje, de un vector $\vec{a}$, a la proyección sobre dicho eje del momento de $\vec{a}$ respecto de un punto cualquiera de dicho eje.*

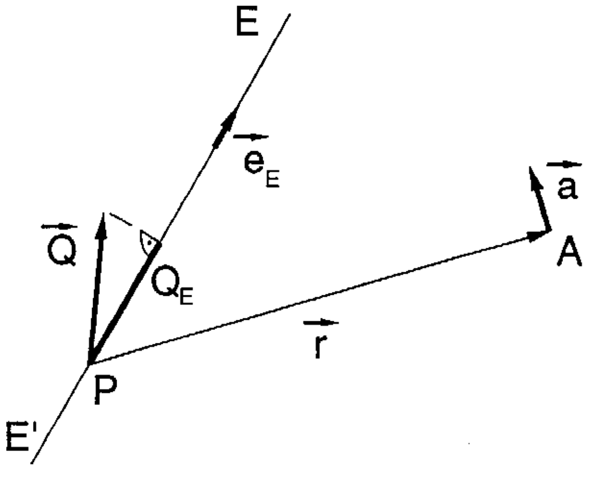


fig 4.7

En la figura 4.7 se ha representado el vector $\vec{a}$ y el eje EE'. El momento central de $\vec{a}$ respecto del punto P del eje es el vector $\vec{Q}$. El escalar Q_E proyección de $\vec{Q}$ sobre el eje EE', es el momento áxico.

Algunos autores definen el momento áxico como un vector contenido en el eje y con módulo Q_E.

Puesto que la dirección de este vector es siempre la del eje y por tanto conocida, preferimos definir el momento áxico como un escalar, cuyo cálculo analítico es más sencillo.

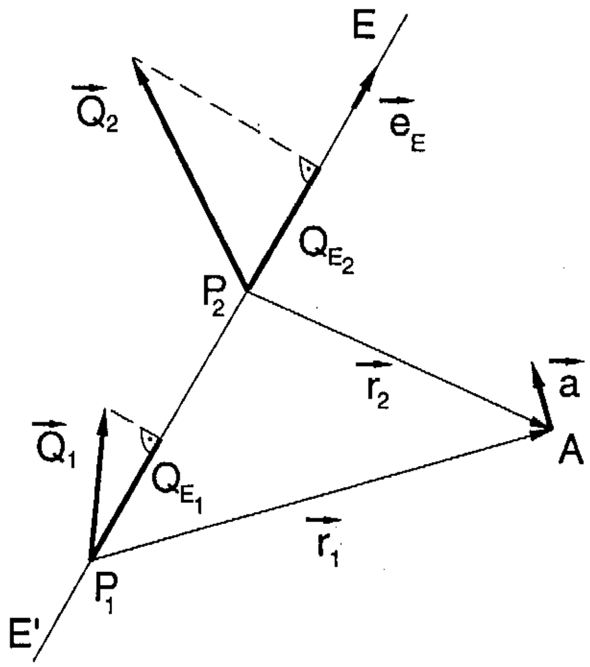


fig 4.8

Para que el valor de Q_E definido sea único, debemos comprobar que no depende del punto del eje que elijamos para determinar $\vec{Q}$, ya que en la definición hemos hablado de un punto cualquiera del eje.

En la figura 4.8 tomamos dos puntos P_1 y P_2 y llamamos $\vec{Q}_1$ y $\vec{Q}_2$ a los momentos centrales de $\vec{a}$ respecto de P_1 y P_2 respectivamente.

Para obtener Q_{E1} , proyección de $\vec{Q}_1$ sobre el eje EE', procederemos como vimos en el epígrafe 3.5 del capitulo anterior, es decir, calcularemos el producto escalar $\left(\vec{Q}_1 \cdot \vec{e}_E\right)$ donde $\vec{e}_E$ es un vector unitario contenido en el eje.

En efecto; el producto escalar es igual al módulo de $\vec{e}_E$, que es 1, por la proyección de $\vec{Q}_1$ sobre él, es decir, sobre el eje. Por tanto:

$$Q_{E1} = \vec{Q}_1 \cdot \vec{e}_E \tag{4.16}$$

Análogamente

$$Q_{E2} = \vec{Q}_2 \cdot \vec{e}_E \tag{4.17}$$

En el epígrafe 4.4 hemos aprendido a relacionar $\vec{Q}_1$ y $\vec{Q}_2$ por la ecuación de cambio de centro de momentos; así podemos escribir:

$$\vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 + \left[\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}\right] \tag{4.18}$$

y por tanto:

$$Q_{E2} = \vec{Q}_2 \cdot \vec{e}_E = \left(\vec{Q}_1 + \left[\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}\right]\right) \cdot \vec{e}_E = \left(\vec{Q}_1 \cdot \vec{e}_E\right) + \left(\left[\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}\right] \cdot \vec{e}_E\right) \tag{4.19}$$

El último sumando es nulo porque es un producto mixto en el que dos de los vectores, $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\vec{e}_E$. tienen la misma dirección.

Por consiguiente:

$$Q_{E2} = \vec{Q}_2 \cdot \vec{e}_E = \vec{Q}_1 \cdot \vec{e}_E = Q_{E1} \tag{4.20}$$

El momento áxico no depende del punto del eje que elijamos para tomar el momento respecto de él, para posteriormente proyectarlo sobre el eje.

Consecuencias:

• ***El momento áxico es nulo si la recta soporte del vector corta el eje.***

En efecto, tomando el punto P de corte de ambos como centro de momentos, $\vec{Q}$ es nulo por pasar la recta soporte del vector por P. Por tanto, la proyección de $\vec{Q}$ sobre el eje es nula.

• ***El momento áxico es nulo si la recta soporte del vector es paralela al eje.***

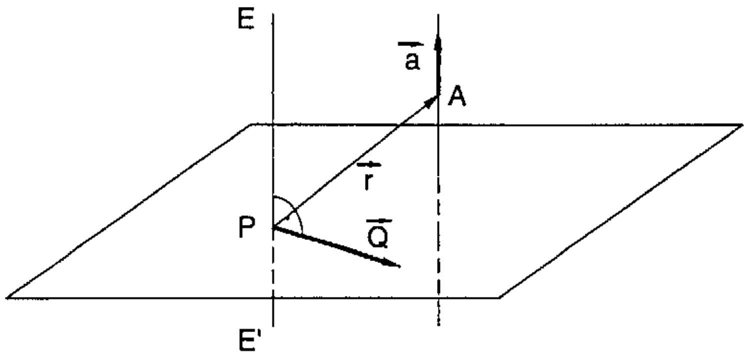
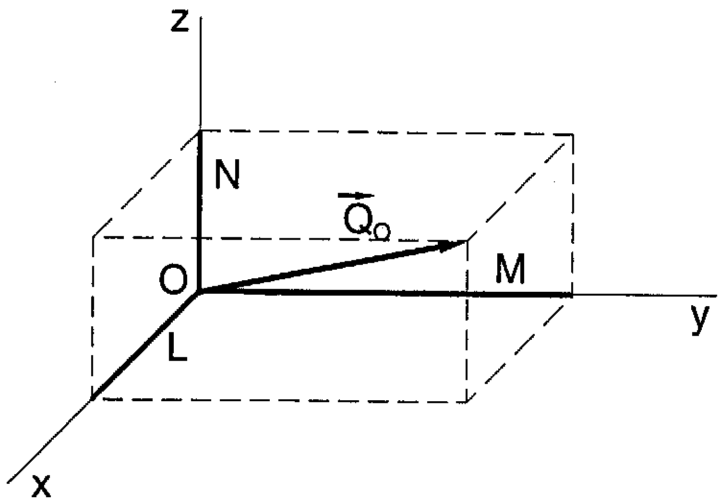


fig 4.9

En efecto, (figura 4.9) el momento $\vec{Q}$ respecto de un punto P del eje, al ser el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{a}$, es perpendicular a ambos. Por ser $\vec{Q}$ perpendicular a $\vec{a}$, como $\vec{a}$ es paralelo al eje, $\vec{Q}$ es perpendicular al eje, luego su proyección sobre él es nula. Es decir, el momento áxico es nulo.

• ***Los momentos áxicos respecto de los ejes de la base de referencia son las componentes escalares del momento respecto del origen.***



En la figura 4.10, $\vec{Q}_0$ es el momento de un vector $\vec{a}$ no representado en la figura, respecto del punto O, origen del sistema de referencia de ejes OX, OY, OZ.

Llamaremos L, M y N a las componentes escalares de $\vec{Q}_0$, de tal manera que :

fig 4.10

$$\vec{Q}_0 = L\,\vec{i} + M\,\vec{j} + N\,\vec{k} \tag{4.21}$$

Para calcular el momento áxico de $\vec{a}$ respecto del eje OX, tomaremos el momento respecto del punto O del eje. Si proyectamos $\vec{Q}_0$ sobre el primer eje de coordenadas, su proyección es L, y por tanto, el momento áxico de $\vec{a}$ respecto del eje OX.

Análogamente, como el punto O pertenece también a los ejes OY y OZ, al proyectar $\vec{Q}_0$ sobre ellos, obtendremos M y N, momentos áxicos de $\vec{a}$ respecto de los ejes de coordenadas segundo y tercero, respectivamente.

4.7 Expresión analítica del momento áxico

Calcularemos analíticamente el momento áxico como el producto mixto:

$$Q_E = [\vec{r} \times \vec{a}] \cdot \vec{e}_E = (\vec{r}, \vec{a}, \vec{e}_E) \tag{4.22}$$

Ejemplo:

Calculemos el momento del vector deslizante $\vec{a} = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{k}$ *, cuya recta soporte pasa por el punto* A(2,2,2)*, respecto del eje cuyas ecuaciones son:*

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-2}{1}$$

orientado en el sentido positivo de sus parámetros.

Elijamos un punto cualquiera P del eje. El más sencillo es el (2,3,2) tomando los numeradores de las ecuaciones del eje.

El vector de posición desde P hasta A es:

$$\vec{r} = \overrightarrow{PA} = (2-2)\,\vec{i} + (2-3)\,\vec{j} + (2-2)\,\vec{k} = -\,\vec{j}$$

El vector unitario sobre el eje lo podemos calcular, escribiendo un vector $\vec{v}$ *contenido en la recta, que tenga por componentes los parámetros directores 4, 8 y 1, tal como vimos en el capítulo 1.*

$$\vec{v} = 4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + \vec{k}$$

su módulo es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$$

Si dividimos $\vec{v}$ *por su módulo, obtendremos el unitario* $\vec{e}_E$*. Así:*

$$\vec{e}_E = \frac{4}{9}\,\vec{i} + \frac{8}{9}\,\vec{j} + \frac{1}{9}\,\vec{k}$$

Por consiguiente el momento áxico tiene el valor:

$$Q_E = \left(\vec{r},\vec{a},\vec{e}_E\right) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{16+2}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

4.8 Momento de un par de vectores

Vamos a detenernos en un caso especial de vectores que se nos presentará con mucha frecuencia.

Se denomina ***par de vectores*** a dos vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$, de la misma dirección, del mismo módulo, de sentidos contrarios y contenidos en rectas paralelas. (figura 4.11).

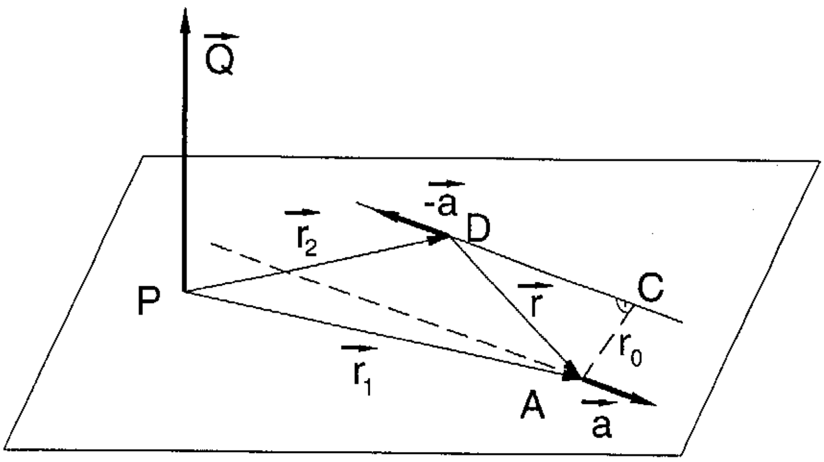


fig 4.11

*Llamamos **momento del par** $\vec{Q}$ a la suma de los momentos centrales de $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ respecto de un punto cualquiera.*

Calculémoslo tomando como centro el punto P.

$$\vec{Q} = \left[\vec{r}_1 \times \vec{a}\right] + \left[\vec{r}_2 \times (-\vec{a})\right] = \left[\vec{r}_1 \times \vec{a}\right] - \left[\vec{r}_2 \times \vec{a}\right] \tag{4.23}$$

y por la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\vec{Q} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} \tag{4.24}$$

El vector $\vec{r}$ no depende del punto P, que puede tomarse incluso fuera del plano del par, por tanto: *el vector momento del par $\vec{Q}$ es independiente del centro de momentos que elijamos, obteniendo el mismo valor en todos los puntos del espacio.*

De esta forma, al momento de un par de vectores se le atribuye el carácter de vector libre, aún siendo un vector momento, puesto que puede ser representado en cualquier punto.

Si tomamos como centro de momentos el punto C, el vector $-\vec{a}$ tiene momento nulo y podemos dar a $\vec{Q}$ la expresión:

$$\vec{Q} = \overrightarrow{CA} \times \vec{a} = \vec{r}_0 \times \vec{a} \tag{4.25}$$

de módulo

$$|\vec{Q}| = r_0 \, |\vec{a}| \tag{4.26}$$

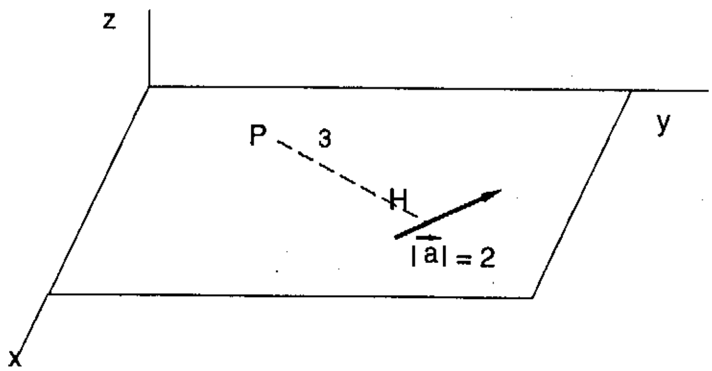
La distancia r_0 entre las dos rectas paralelas recibe el nombre de ***brazo del par***.

En los capítulos siguientes dedicados a los sistemas de vectores, veremos la utilidad del concepto de par de vectores.

PRUEBA DE AUTOEVALUACION

Objetivo 4.I:

1. Se tiene un vector deslizante $\vec{a}$ contenido en el plano XOY y se quiere determinar el momento $\vec{Q}$ de $\vec{a}$ respecto de un punto P del mismo plano. Se sabe que el módulo de $\vec{a}$ es 2 y que la distancia de P a la recta de $\vec{a}$ es igual a 3, como indica la figura. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F)?



A) El módulo de $\vec{Q}$ es 6.

B) $\vec{Q}$ es paralelo al eje OY.

C) El sentido de $\vec{Q}$ está indeterminado.

D) $\vec{Q}$ es vertical y su sentido es el positivo del eje OZ.

2. Conocido el vector deslizante $\vec{a} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 5\,\vec{k}$, siendo $A(1,0,0)$ un punto de su recta soporte, se ha calculado el momento $\vec{Q}$ de $\vec{a}$ respecto del punto $P(1,0,1)$. ¿Cuál es la expresión analítica de $\vec{Q}$?.

A) $\vec{Q} = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$

B) $\vec{Q} = \vec{i} - 2\,\vec{j}$

C) $\vec{Q} = -\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$

D) $\vec{Q} = \vec{i} + 2\,\vec{j}$

3. Calcúlese el momento respecto del origen de coordenadas del vector $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$, aplicado en el punto $A(4,0,4)$.

Objetivo 4.II:

4. El momento del vector $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ respecto del punto $P_1(4,4,4)$ es $\vec{Q}_1 = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{k}$. El momento de $\vec{a}$ respecto de $P_2(3,5,3)$ es:

A) $\vec{Q}_2 = 5\,\vec{i} - \vec{k}$

B) $\vec{Q}_2 = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{k}$

C) $\vec{Q}_2 = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$

D) $\vec{Q}_2 = \vec{i} - 5\,\vec{k}$

5. En el punto $A(3,2,0)$ se conoce el momento $\vec{Q}_A$ de un vector deslizante $\vec{v} = 2\,\vec{i}$. Se quiere determinar el momento de $\vec{v}$ respecto del punto $B(5,2,0)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

A) No se puede calcular $\vec{Q}_B$, porque B es el extremo del vector $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{i}$ equipolente de $\vec{v}$.

B) $\vec{Q}_B = \vec{0}$

C) $\vec{Q}_B = \vec{Q}_A$

D) Con los datos dados no se puede calcular $\vec{Q}_B$.

6. Calcúlese el momento respecto de $P(3,1,-2)$ del vector $\vec{v}$ anterior, si $\vec{Q}_A = 4\,\vec{k}$.

Objetivo 4.III:

7. El vector $\vec{a}$ tiene por expresión $\vec{a} = 5\,\vec{i}$ con su punto de aplicación en $A(1,1,0)$. Alguna de las expresiones siguientes, que relacionan su momento respecto del origen de coordenadas O y sus momentos áxicos L, M y N respecto de los ejes coordenados, son verdaderas (V) y otras falsas (F). Indíquese lo que proceda.

A) $L=0$, porque la recta soporte de $\vec{a}$ es paralela al eje OX.

B) $M=0$, porque la recta de $\vec{a}$ corta al eje OY.

C) $N=5$

D) El módulo de $\vec{Q}_0$ coincide con el valor absoluto de N porque L y M son nulos.

8. Un vector deslizante $\vec{a} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$, cuya recta soporte pasa por el punto $A(3,0,0)$, tiene un momento áxico Q_E respecto de un eje que pasa por el origen de coordenadas y cuya dirección está dada por el vector unitario $\vec{e}_E = \frac{3}{5}\,\vec{i} + \frac{4}{5}\,\vec{k}$.

¿Cuál es el valor de Q_E?

A) 12

B) -15

C) 0

D) -12

9. Determínese el momento áxico respecto del eje OX del vector $\vec{v} = 4\,\vec{i} - 9\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, cuya recta soporte pasa por $P(7,5,0)$.

Objetivo 4.IV:

10. Dos vectores deslizantes $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ tienen módulo igual a 3 y están contenidos en el plano XOY, siendo el momento resultante de ambos en O el vector $\vec{Q} = 12\,\vec{k}$. ¿Qué expresiones de las siguientes son verdaderas (V) y cuáles falsas (F)?

A) La recta soporte de ambos vectores es la misma.

B) El momento en el punto $P(3,4,0)$ es $\vec{Q} = 12\,\vec{k}$

C) La distancia entre las rectas de $\vec{a}$ y de $-\vec{a}$ es 4.

D) El momento resultante en un punto que esté fuera del plano XOY, no es conocido

11. En el punto $P_1(0,4,0)$ está aplicado el vector deslizante $\vec{v} = 3\,\vec{j}$, mientras que $-\vec{v} = -3\,\vec{j}$ lo está en P_2, punto del plano XOY. Si llamamos $\vec{Q}$ al momento resultante del par, ¿qué expresiones se cumplen (V) y cuáles no (F)?

A) Si su módulo no es nulo, $\vec{Q}$ es un vector vertical.

B) Si P_2 es el punto (2,4,0), el módulo de $\vec{Q}$ vale 6.

C) Si P_2 es $(-5,4,0)$, el sentido de $\vec{Q}$ es el positivo del eje OZ.

D) Si P_2 es $(0,2,0)$, el módulo de $\vec{Q}$ vale 3.

12. Calcúlese el momento del par formado por $\vec{a} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ y $-\vec{a}$, si la recta soporte de $\vec{a}$ pasa por el origen de coordenadas y la de $-\vec{a}$ por el punto $P(2,2,2)$.

CLAVE DE	*RESPUESTAS*
1.	A - V B - F C - F D - V
2.	B
3.	$\vec{Q} = -8\ \vec{j}$
4.	C
5.	C
6.	$\vec{Q}_P = 4\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$
7.	A - V B - V C - F D - V
8	A
9.	L = 25
10.	A - F B - V C - V D - F
11.	A - V B - V C - V D - F
12.	$\vec{Q} = 4\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$