Cuadrangulando polígonos

Gregorio Hernández Peñalver
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
gregorio@fi.upm.es

Abstract

In this paper we present some results about cuadrangulations of polygons and their applications to problems of guarding.

Dedicado a la memoria de D. José Javier Etayo que me enseñó nuevos caminos y nuevas metas en el campo geométrico

1. Introducción

Las aproximaciones discretas de superficies o volúmenes son necesarias para su tratamiento computacional. Los modelos de terrenos en un SIG, o modelos industriales en un sistema CAD/CAM, requieren que el dominio geométrico se divida en pequeñas piezas, los elementos finitos, que formen una malla (mesh). Trabajando sobre ella se obtienen buenas aproximaciones a los problemas planteados sobre las superficies o volúmenes originales.

Los elementos utilizados para las mallas son, generalmente, triángulos que dan lugar a triangulaciones de los objetos estudiados. Las triangulaciones de conjuntos (conjuntos de puntos, polígonos, familias de segmentos, etc.) han sido muy bien estudiadas en los últimos tiempos. Sin embargo, en algunas aplicaciones como por ejemplo en interpolación de datos dispersos o en problemas de análisis de elasticidad, los cuadriláteros (o cuadrángulos) constituyen una mejor elección como elementos finitos que los triángulos ([1], [6], [9]). Utilizaremos la terminología de “cuadrángulo” y “cuadrangulación” en lugar de sus equivalentes, “cuadrilátero” y “cuadrilaterización”, para extender los términos de triángulo y triangulación.

Hay una diferencia fundamental entre triangulación y cuadrangulación. Cualquier conjunto de puntos o cualquier polígono se pueden triangular, pero existen conjuntos de puntos y polígonos que no son cuadrangulables, no admiten

descomposición en cuadrángulos. En ese caso se deben añadir puntos adicionales, puntos de Steiner, para conseguir la cuadrangulación.

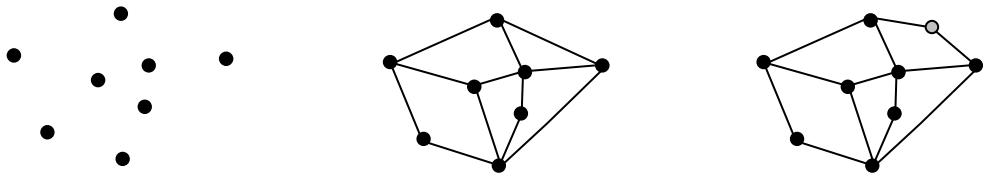

Figura 1. Un conjunto no cuadrangulable que lo es agregando un punto

Todo conjunto de puntos en el plano puede cuadrangularse con a lo sumo un único punto de Steiner (como en la figura 1), que es necesario sólo si el número de puntos en el cierre convexo es impar. Sin embargo, un polígono de n vértices, puede necesitar hasta $\lfloor n/3 \rfloor$ puntos de Steiner exteriores para obtener una cuadrangulación, (véase [3], [11]). En ambos casos los cuadrángulos resultantes no son convexos, en general. Ahora bien, para muchas aplicaciones se requiere que todos los cuadrángulos sean estrictamente convexos, es decir que todos sus ángulos sean menores de 180º, lo que requiere un estudio más profundo de la situación ([4])

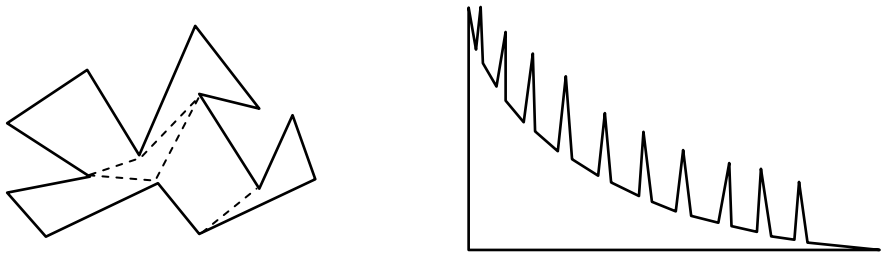

Figura 2. Un polígono cuadrangulable y otro no cuadrangulable que necesita $\lfloor n/3 \rfloor$ puntos de Steiner.

Las cuadrangulaciones de polígonos se han estudiado en Geometría Computacional en el contexto de los problemas de iluminación o vigilancia que se enmarcan en el campo del Problema de las Galerías de Arte, propuesto por Klee en 1973: *Determinar el mínimo número de puntos de un polígono suficientes para ver (iluminar) a todos los restantes*. Problema que se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal: ¿Cuántos guardias (o cámaras de vigilancia que cubran 360º) son suficientes para vigilar el interior de un polígono de n lados?

La respuesta a este problema fue obtenida por Chvátal en 1975, quien demostró que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes. En 1978, Fisk [5] dio una demostración concisa y elegante: *Triangúlese el polígono, coloréese con 3 colores el grafo de la triangulación y pónganse los guardias en los vértices coloreados con el color que menos veces aparezca.*

Se han estudiado muchas variantes de este problema de Galerías de Arte, según se puede comprobar en [10] y [12]. Una de las primeras concierne a los polígonos ortogonales, esto es, polígonos cuyos lados son paralelos a dos ejes ortogonales. En ellos la cuadrangulación convexa juega el papel de la triangulación en la demostración anterior.

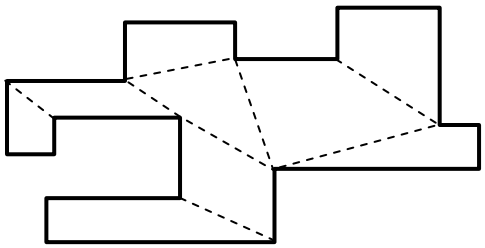

Figura 3. Una cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal

En este artículo presentaremos algunos resultados sobre Galerías de Arte ortogonales, uno en que la cuadrangulación convexa resuelve el problema y otro en que esta estrategia es insuficiente en su resolución.

2. Galerías de Arte ortogonales

Para vigilar una galería de arte ortogonal con n lados, $\lfloor n/4 \rfloor$ *guardias situados en los vértices son siempre suficientes. Existen salas que necesitan ese número de guardias.*

Demostración. (Kahn, Klawe y Kleitman, [7])

Consideremos un polígono ortogonal P de n vértices y observemos gráficamente los siguientes pasos:

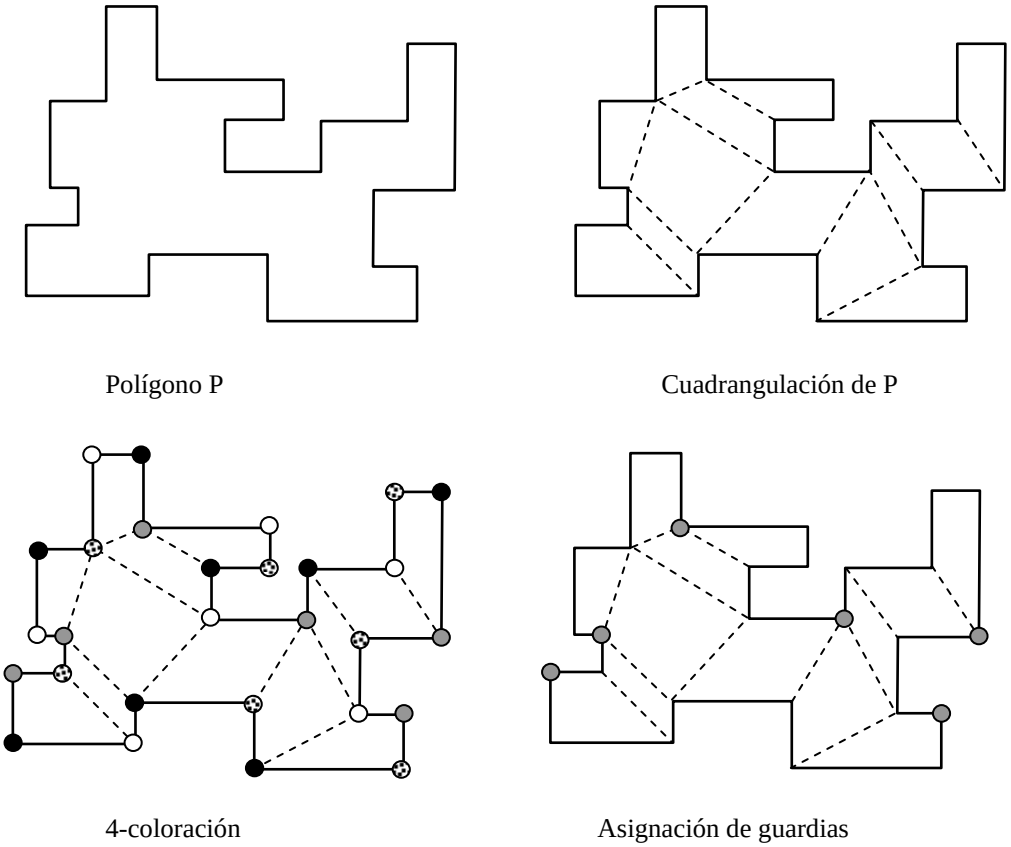

Figura 4. La demostración en cuatro imágenes

Y ahora pasemos a la explicación.

Primer paso. (Cuadrangulación)

Cuadrangulamos convexamente P, es decir, descomponemos P en cuadriláteros convexos cuya unión es P, con interiores disjuntos y cuyos vértices son vértices de P. Observamos que un guardia situado en cualquier vértice de un cuadrilátero convexo vigila completamente dicho cuadrilátero.

Segundo paso. (Coloración)

La cuadrangulación anterior Q es un grafo plano. El Teorema de los cuatro colores, probado en 1976 por Appel y Haken, asegura que todo grafo planar puede colorearse utilizando sólo cuatro colores. (Una coloración de un grafo es una asignación de colores a los vértices del grafo de modo que dos vértices adyacentes reciben diferente color). Pero ahora necesitamos además que en cada uno de los cuadriláteros aparezcan los cuatro colores. Añadimos al grafo Q las diagonales de cada uno de los cuadriláteros. Así construimos un grafo Q_2 que sigue siendo planar y, por tanto, se puede colorear con 4 colores. En esta 4-coloración de Q_2 (y de Q) ya tenemos un vértice de cada color en cada cuadrilátero.

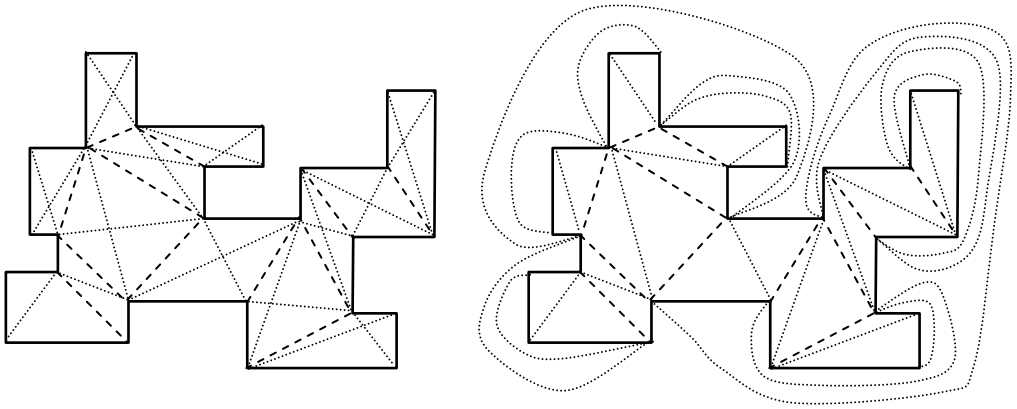

Figura 5. El grafo Q_2

Tercer paso. (Colocación de guardias)

Cada cuadrángulo de Q tiene un vértice de cada uno de los colores negro, rojo blanco y verde. Si colocamos un guardia en cada vértice negro, vigilarán todos los cuadrángulos y, por tanto, todo el polígono ortogonal. Lo mismo sucederá si colocamos guardias en todos los vértices rojos o en los blancos o en los verdes.

El polígono tiene n vértices y disponemos de cuatro colores. Por tanto, alguno de los cuatro colores, negro, rojo, blanco o verde se utiliza en, a lo más, $\lfloor n/4 \rfloor$ vértices. (Esto es una aplicación inmediata del Principio del palomar o de Dirichlet: Si cada color se utilizara en más de $\lfloor n/4 \rfloor$ vértices, sumando los vértices de cada color tendríamos más de n vértices). Basta pues, colocar los guardias en los vértices con el color menos utilizado para garantizar que $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal de n vértices.

Cuarto paso (Necesidad de los $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias)

Para comprobar que este número de guardias es a veces necesario, basta considerar el polígono *muralla* con **n=4k** vértices de la Figura 4. Es fácil observar que para vigilar este polígono se necesitan al menos k guardias, uno por cada almena de la *muralla*. □

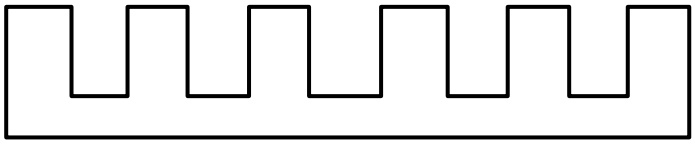

Figura 6. El polígono muralla necesita un guardia por cada almena.

¿Hemos terminado la demostración? En el primer paso comenzamos cuadrangulando convexamente el polígono ortogonal pero, ¿todo polígono ortogonal admite una cuadrangulación convexa? En el segundo paso decimos que el grafo Q_2 obtenido al agregar las diagonales a la cuadrangulación es un grafo 4-coloreable por ser planar. Justifiquemos ambas afirmaciones en las secciones siguientes.

3. Cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal

Triangular un polígono cualquiera es muy fácil, basta trazar diagonales hasta que todas las piezas de la descomposición sean triángulos. Y no importa la elección de diagonal que se trace en cada momento que no corte a las anteriores, siempre se podrá completar la triangulación. Esta facilidad y simplicidad de la triangulación no se extiende a la cuadrangulación. En la figura 3 ya se han mostrado polígonos no cuadrangulables que, obviamente, tampoco admiten una cuadrangulación convexa.

Ahora consideremos polígonos ortogonales. En primer lugar un par de observaciones:

1. Como dos triángulos que comparten un lado forman un cuadrilátero podría pensarse que agrupando los triángulos de dos en dos se puede conseguir la cuadrangulación convexa. Pero este procedimiento no sirve según se muestra en la figura 7.

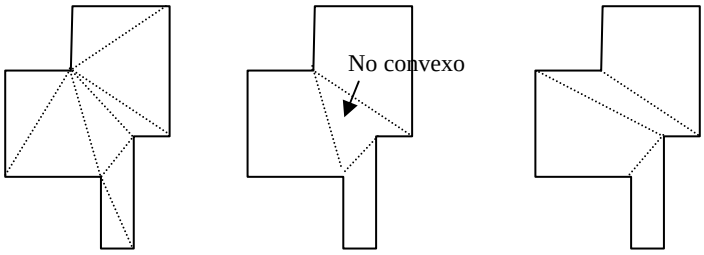

Figura 7. Triangulación y cuadrangulaciones (no convexa y convexa)

2. Debemos admitir cuadriláteros “degenerados”, bien con lados consecutivos alineados o con área cero, cuando el polígono inicial presente lados colineales (figura 8)

Figura 8. Cuadriláteros degenerados

Kahn, Klawe y Kleitman demostraron en 1983 que todo polígono ortogonal admite una cuadrangulación convexa, pero su demostración es existencial. La primera demostración constructiva se debe a Sack en 1984. Su algoritmo parte el polígono ortogonal en piezas monótonas que cuadrangula convexamente. Aquí vamos a presentar una demostración posterior de Lubiw en [8], también constructiva, que consigue una cuadrangulación convexa para polígonos ortogonales incluso aunque tengan agujeros.

El proceso de Lubiw consiste en ir extrayendo cuadriláteros convexos del polígono inicial. El problema es que así el polígono deja de ser ortogonal. La solución estriba en ampliar la clase de polígonos sobre la que actuamos.

3.1 Polígonos pseudoortogonales

Un polígono P es pseudoortogonal si cumple las siguientes condiciones:
1) Los lados son alternadamente horizontales y oblicuos (o verticales).
2) Todos los ángulos son menores o iguales a 270º
3) La *sombra* de cualquier lado oblicuo no contiene ningún vértice de P. (La sombra de un lado es su proyección vertical)

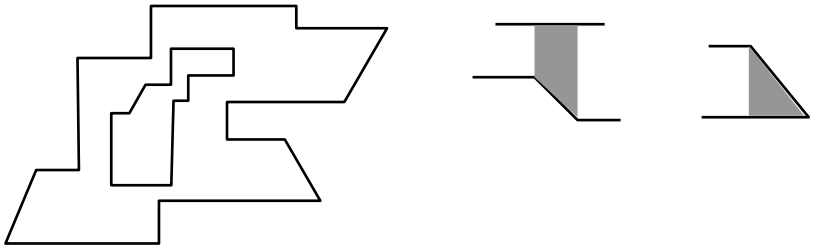

Figura 9. Polígono pseudoortogonal y sombra de un lado

Teorema (Lubiw, [8])
Todo polígono pseudoortogonal admite una cuadrangulación convexa.

Demostración:
La demostración es por inducción. Si el polígono tiene cuatro vértices, dos de los lados serán horizontales y el cuadrilátero es convexo.

Si el polígono P tiene más de cuatro se buscará un cuadrilátero convexo C, tal que P – C siga siendo polígono pseudoortogonal, al que se pueda aplicar la hipótesis de inducción y obtener así la cuadrangulación convexa de P.

Designemos por $<_x$ el orden de los vértices de P por su abscisa (y cuando son iguales por su ordenada). Los lados oblicuos (o verticales) pueden ser izquierdos (si el polígono P se encuentra a la derecha de la arista) o derechos (si P se encuentra a la izquierda). Llamamos *vecino derecho* de un vértice x al vértice z de P (si existe) tal que el segmento xz está contenido en P y z es el vértice de mínima abscisa mayor que la de x.

Es fácil comprobar que si ab es una arista izquierda con a $<_x$ b, entonces b siempre tiene un vecino derecho. Ahora ordenamos las aristas izquierdas por el orden $<_x$ de sus extremos derechos y elegimos la arista uv que sea la mayor en este orden. Si u $<_x$ v, y llamamos r al vecino derecho de v, la arista rs será una arista oblicua (o vertical) derecha. El cuadrilátero C buscado es "uvrs" (o uvsr si r $<_y$ s como en la figura 10)

Se debe comprobar que, efectivamente, C es convexo y que P – C sigue siendo un polígono pseudoortogonal, lo que puede verse en [8]. □

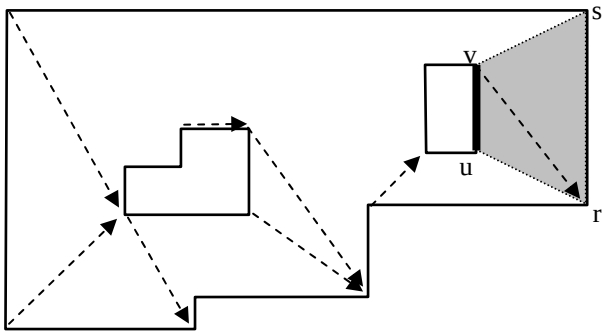

Figura 10. En trazo discontinuo la relación vecino derecho para algunos vértices. En negrita la arista izquierda que define el cuadrilátero C en gris.

Esta demostración de Lubiw permite construir efectivamente una cuadrangulación convexa de un polígono pseudoortogonal, eliminando los sucesivos cuadriláteros C a los polígonos pseudoortogonales que se van obteniendo en el proceso. En la figura 11, presentamos un ejemplo.

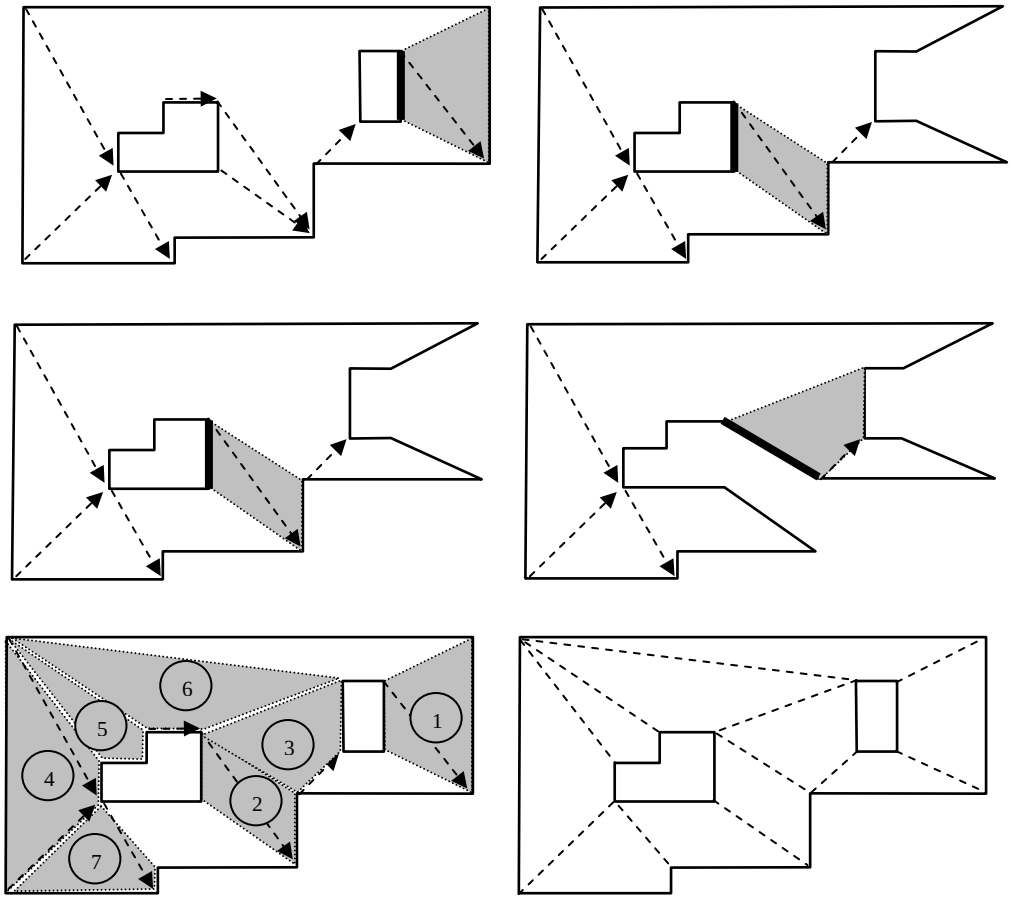

Figura 11. El proceso de eliminación de cuadriláteros y la cuadrangulación final

4. Coloración de la cuadrangulación convexa

El grafo de cualquier cuadrangulación convexa de un polígono al que se añaden las dos diagonales de cada uno de sus cuadriláteros es un grafo 4-coloreable.

Demostración:

Sea P un polígono y Q una cuadrangulación de P. Llamamos Q_2 al grafo que resulta al añadir a Q las diagonales de los cuadriláteros. Demostraremos que Q_2 es 4-coloreable sin recurrir al Teorema de los cuatro colores. Probaremos el resultado por inducción sobre q, el número de cuadriláteros de Q.

Si q=1, la cuadrangulación Q coincide con P y la 4-coloración es obvia.

Si q>1, se considera el árbol Q* dual del grafo plano Q. Una hoja de este árbol corresponde a un cuadrilátero de Q. Eliminamos de Q este cuadrilátero cortando por la diagonal d correspondiente. Por hipótesis de inducción el grafo Q' obtenido es 4-coloreable, y añadiendo de nuevo el cuadrilátero eliminado coloreamos los dos vértices que faltan con los dos colores no utilizados en los extremos de la diagonal d. Así tenemos una 4-coloración en el grafo Q_2. □

5. La cuadrangulación en otros problemas de vigilancia

La cuadrangulación de polígonos ortogonales no es la herramienta adecuada para resolver otros problemas de vigilancia. Por ejemplo la vigilancia con guardias móviles abiertos. Ahora los guardias patrullan por segmentos que unen vértices del polígono, es decir, por lados o diagonales del polígono pero sin alcanzar los extremos.

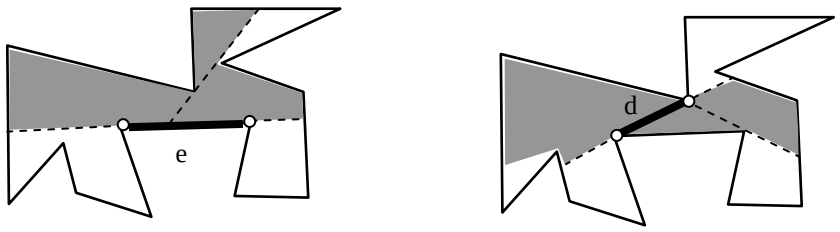

Figura 12. Zona visible desde un guardia-lado y un guardia-diagonal (abiertos)

Esta variante de vigilancia se ha empezado a estudiar en 2011 con relación a problemas de iluminación en poliedros. ([13])

Si atacamos este problema con las mismas ideas que la vigilancia desde vértices, necesitamos cuadrangular y vigilar cada uno de los cuadriláteros resultantes. Hay que observar que, con el nuevo tipo de vigilancia, un guardia

móvil abierto sólo cubre los cuadriláteros de los que forma parte como lado, del mismo modo que en la sección 2 un guardia situado en un vértice sólo vigilaba los cuadriláteros incidentes en dicho vértice.

Para la vigilancia desde vértices el problema combinatorio sobre polígonos ortogonales, vigilar los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación, tiene la misma solución que el problema geométrico, vigilar el polígono ortogonal.

Llamamos *g(n)* al mínimo número de guardias que vigilan cualquier polígono ortogonal de n vértices. Y $g^c(n)$ mínimo número de guardias que vigilan todos los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación de un polígono ortogonal de n vértices

En la sección 2 probamos que:

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq g(n) \leq g^c(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

donde la primera desigualdad se debe al ejemplo del polígono muralla, la segunda es obvia y la última es la demostración efectuada. Por tanto,

$$g(n) = g^c(n)$$

Sin embargo, la vigilancia con guardias móviles abiertos presenta distintas soluciones desde los puntos de vista geométrico y combinatorio. Desde el punto de vista combinatorio y utilizando un argumento sobre coloración de grafos, se demuestra en [2] que $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ guardias-móviles abiertos son suficientes, y a veces necesarios, para vigilar todos los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal de n lados. En la figura 13 se presenta un ejemplo de cuadrangulación de un polígono ortogonal que necesita tan elevado número de guardias-móviles abiertos (combinatorios), aunque basta un único guardia situado en una diagonal que una los dos extremos del polígono para vigilarlo.

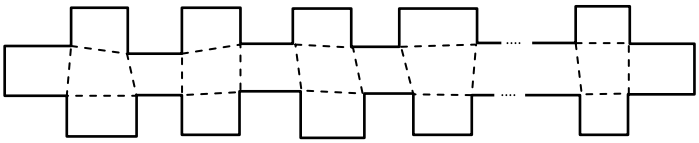

Figura 13. Una cuadrangulación de un polígono ortogonal que necesita $\lfloor (3n-4)/8 \rfloor$ guardias-móviles abiertos (combinatorios)

La solución desde el punto de vista geométrico requiere menor número de guardias, que además se pueden ubicar sólo en lados del polígono.

Teorema (Bajuelos et al., [2])

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ *guardias-lado abiertos y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias.*

Demostración:

En un polígono ortogonal hay cuatro tipos de lados, N, S, E y O, según la posición relativa del interior del polígono (debajo, arriba, izquierda o derecha).

Los lados (abiertos) de cualquiera de los tipos, por ejemplo N, cubren todos los puntos del polígono, porque dado un punto x de P, trazando una vertical hacia arriba encontraremos siempre una arista tipo N. Eligiendo el tipo menos frecuente tenemos que $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias siempre son suficientes.

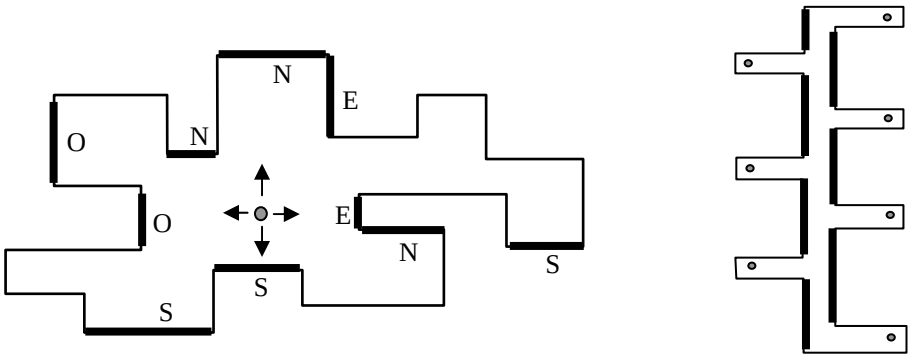

Figura 14. Guardias-lado abiertos. Cotas superior (izda.) e inferior (dcha.)

La necesidad de $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias viene dada por el ejemplo de la figura 14 (derecha). Cada uno de los puntos grises necesita un guardia-lado (abierto) diferente para quedar vigilado. Así se necesitan al menos $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado (abiertos) para cubrir el polígono. Por ejemplo, los lados marcados en negrita. □

Referencias

[1] D. Allman: "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", Int. J. Num. Methods Eng., 26, pp.717-730, 1988.

[2] A. Bajuelos, S. Canales, G. Hernández, A. Martins, I. Matos: "Some results about open edge guarding of simple polygons", preprint, 2012.

[3] P. Bose, G. Toussaint: "Characterizing and efficiently computing quadrangulations of planar point sets", Comp. Aided Geometric Design, 14, pp. 763-785, 1997

[4] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, V. Sacristán: "Small strictly convex quadrilateral meshes of point sets", Algorítmica, 38, pp. 317-339, 2004.

[5] F. Fisk: "A Short Proof of Chvátal Watchman Theorem", Journal of Combinatorial Theory, serie B, 24, pp. 374, (1978)

[6] B. Johnston, J. Sullivan, A. Kwasnik: "Automatic conversion of triangular meshes to quadrilateral elements", Int. J. Num. Methods Eng., 31 (1), pp.67-84, 1991

[7] J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman: "Traditional galleries require fewer watchmen", SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 4, pp. 194-206, 1983

[8] A. Lubiw: "Descomposing polygonal regions into convex quadrilaterals", Proc. 1st ACM Symp. Computational Geometry, pp. 97-106, 1985

[9] M. Müller-Hannemann, K. Weihe: "Quadrangular refinements of polygons with an application to finite-element meshes", Proc. of the 13th ACM Symp. Comput. Geom., pp. 193-202, 1997.

[10] J. O'Rourke: "Art Gallery: Theorems and Algorithms", Oxford Univ. Press, 1987.

[11] G. Toussaint: "Quadrangulations of planar sets", Proc. of WADS, pp. 218-227, LNCS 1272, Springer, 1995.

[12] J. Urrutia: "Art Gallery and Illumination Problems", en "Handbook on Computational Geometry", Elsevier (J.R. Sack and J. Urrutia eds.) 1999.

[13] G. Viglietta: "Searching polyhedra by rotating half-planes", arXiv e-prints 1104.4137, 2011.