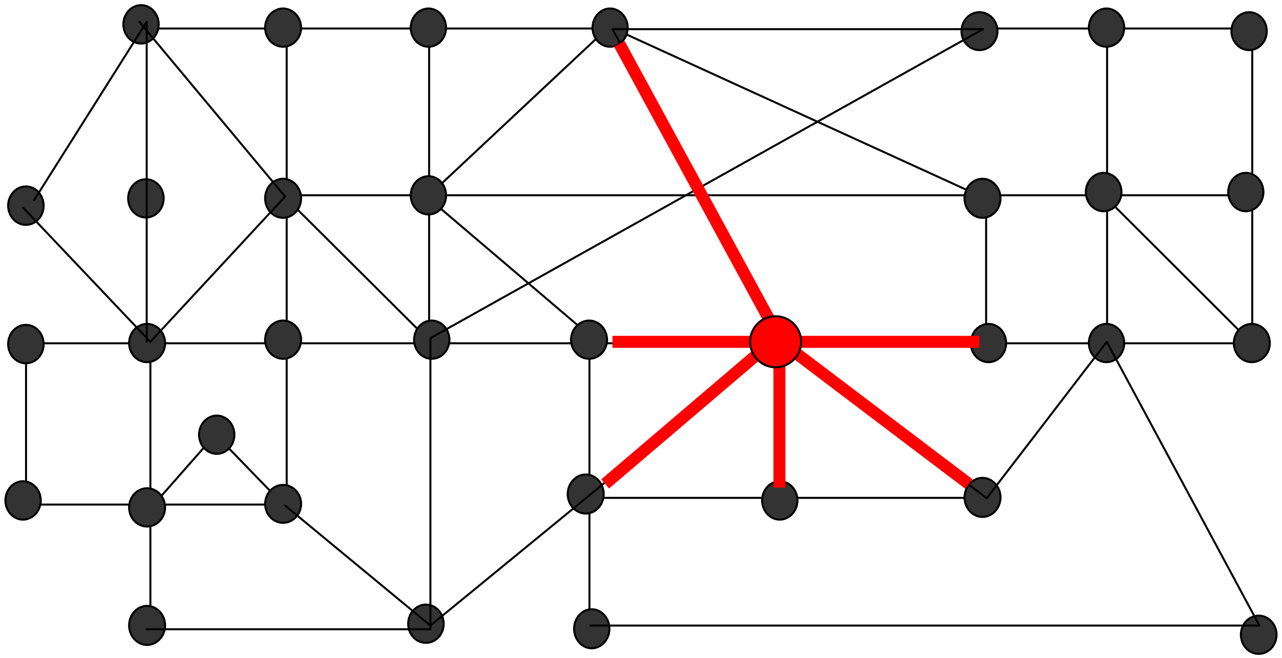
Algoritmos aproximados
Vertex Cover Problem

Gregorio Hernández Peñalver

UPM

Matemática Discreta II



Una cámara vigila (desde un vértice) todas las aristas incidentes)
Vigilar todas las aristas del grafo equivale a recubrir todas las aristas desde los vértices

VERTEX COVER

Recubrimiento por vértices (VERTEX COVER)

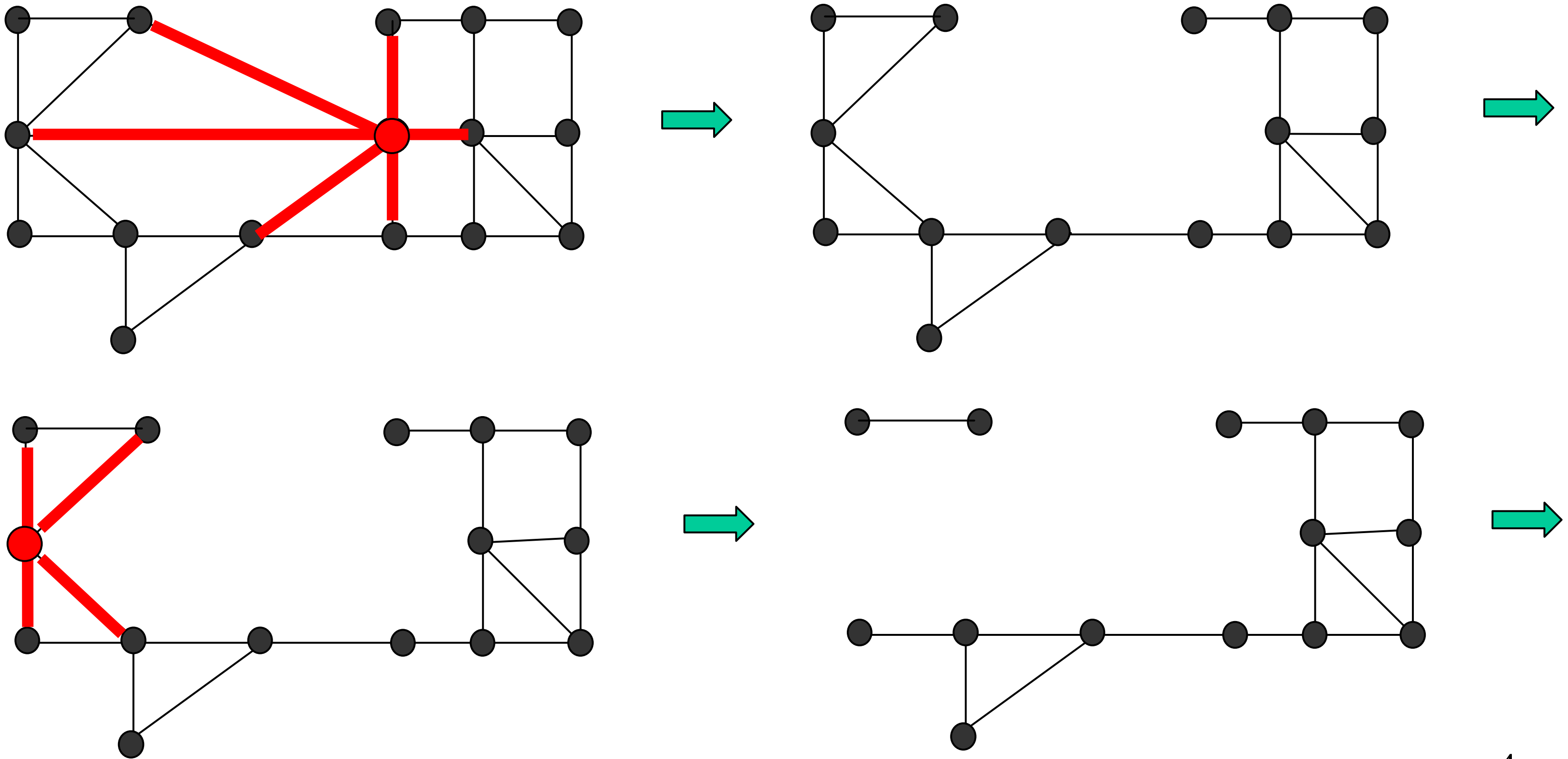
Dado un grafo G=(V,A), hallar $C \subset V$ de cardinal mínimo tal que para toda arista uv de A, o bien $u \in C$, o bien $v \in C$

Este problema es NP-completo

Se necesitan soluciones "buenas", aunque no sean óptimas

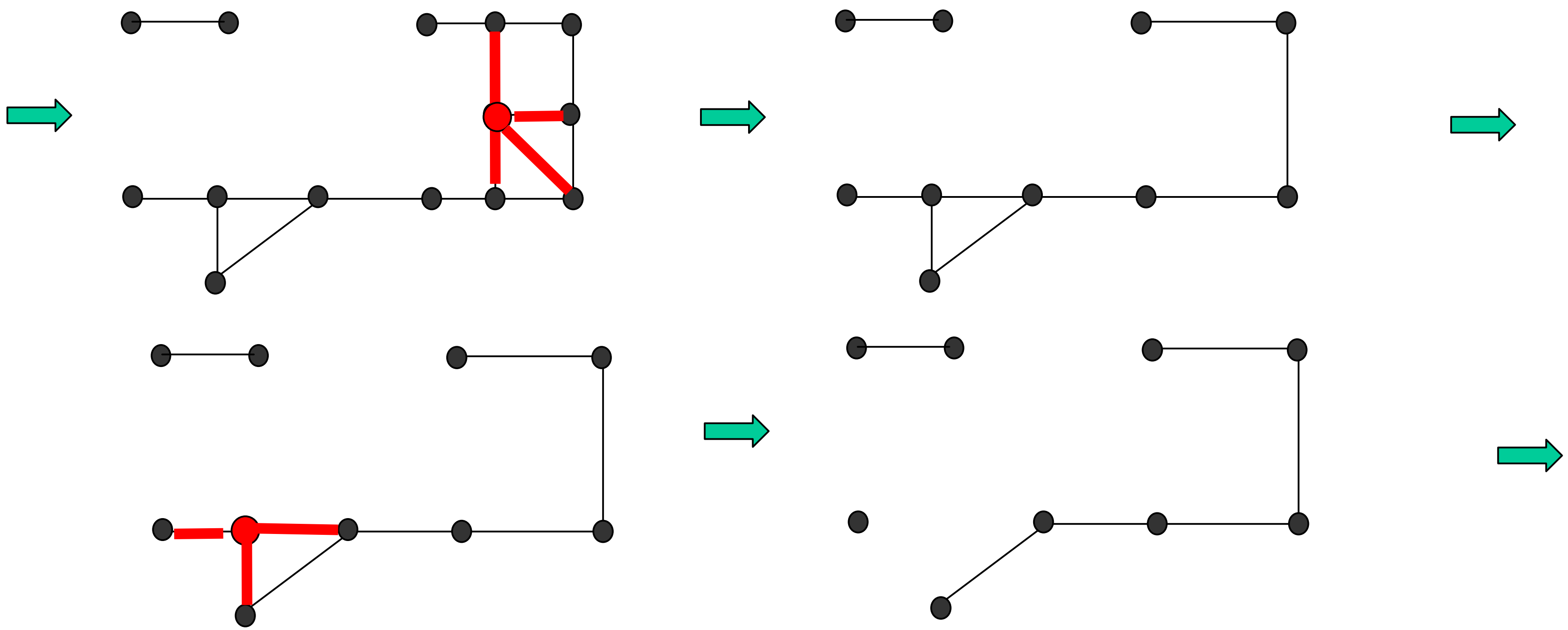
Heurística voraz

1. Elegir v de grado máximo. Añadir v a C
   Borrar el vértice v en el grafo G
2. Repetir el paso anterior hasta que no queden aristas



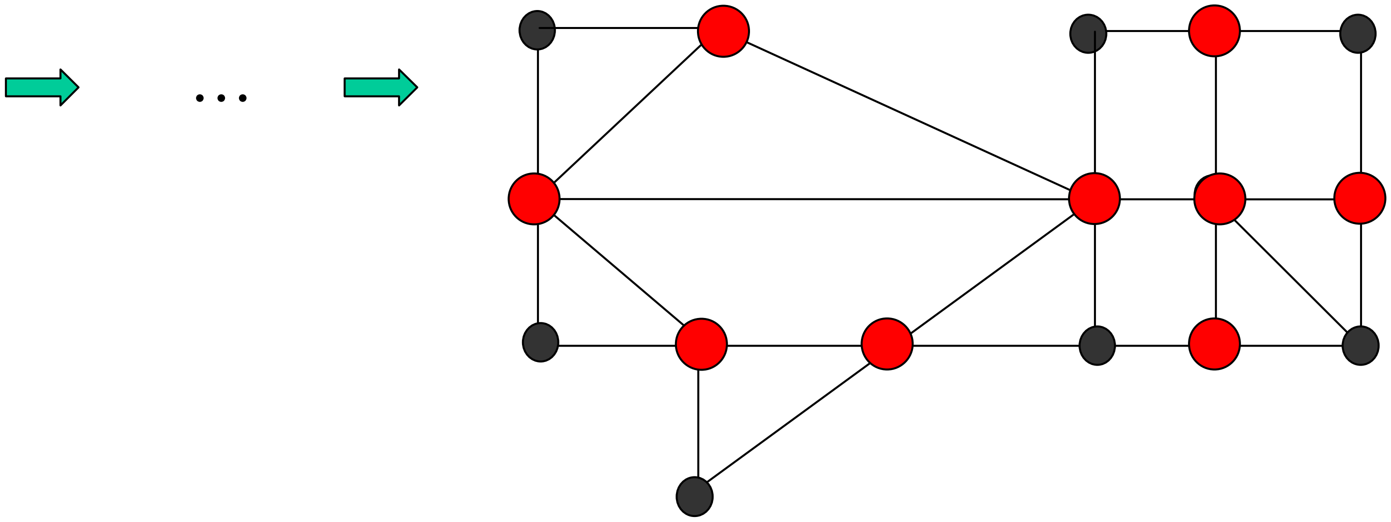
Heurística voraz

1. Elegir v de grado máximo. Añadir v a C
   Borrar el vértice v en el grafo G
2. Repetir el paso anterior hasta que no queden aristas



Heurística voraz

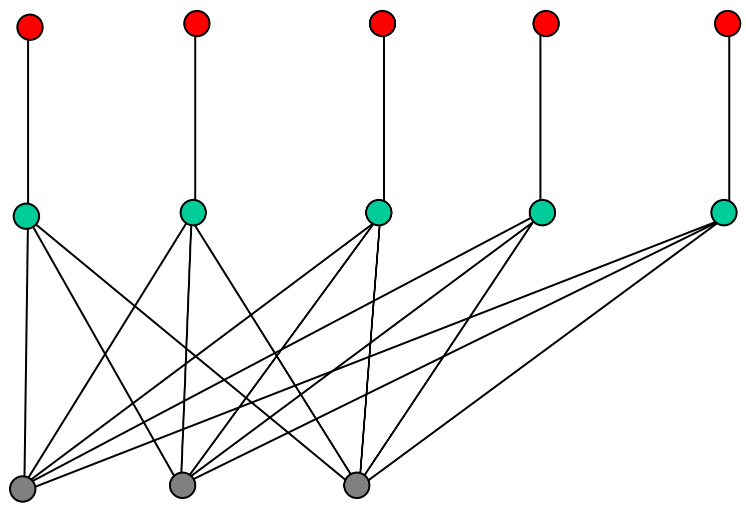
1. Elegir v de grado máximo. Añadir v a C
   Borrar el vértice v en el grafo G
2. Repetir el paso anterior hasta que no queden aristas



Heurística voraz

1. Elegir v de grado máximo. Añadir v a C
   Borrar el vértice v en el grafo G
2. Repetir el paso anterior hasta que no queden aristas

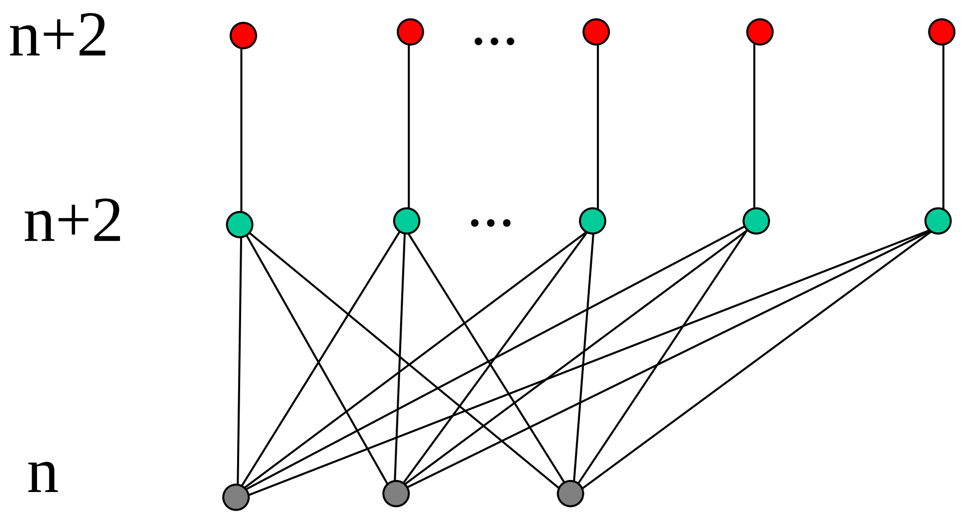
Esta estrategia puede comportarse mal.
Sólo se puede garantizar que el cardinal de la solución obtenida es a lo sumo O(log n) veces el óptimo



Algoritmo |C|=8
óptimo |C*|=5

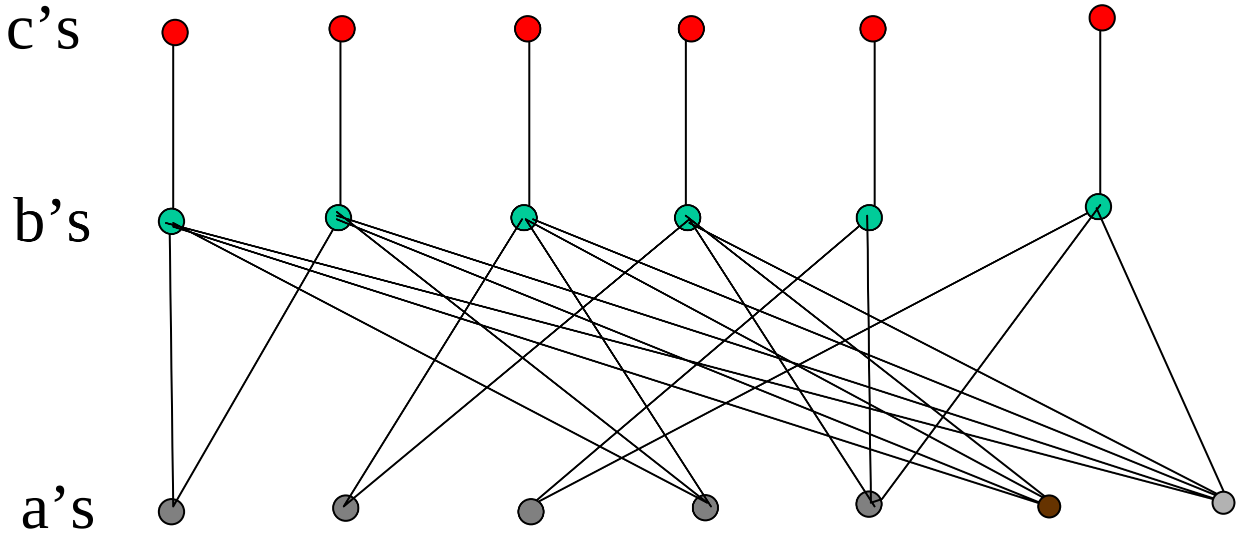
Heurística voraz

1. Elegir v de grado máximo. Añadir v a C
   Borrar el vértice v en el grafo G
2. Repetir el paso anterior hasta que no queden aristas



Algoritmo $|C| = 2n+2$

Óptimo $|C^*| = n+2$



Algoritmo a’s + b’s

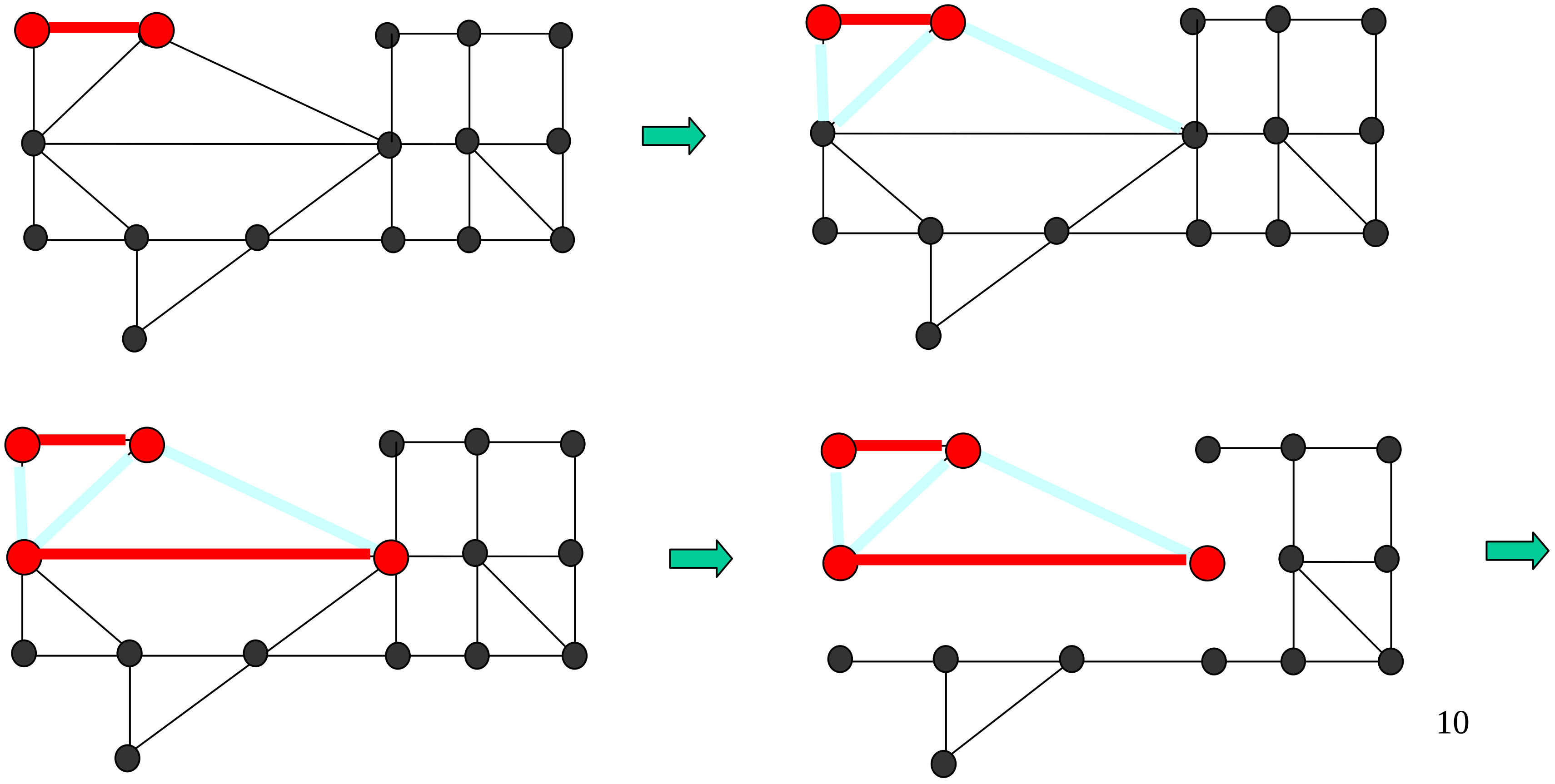
t(n)+n

$$t(n) = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots = \sum_{j=2}^{n} \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$$

$$\frac{|C|}{|C^*|} = \frac{t(n)+n}{n} \approx \log n$$

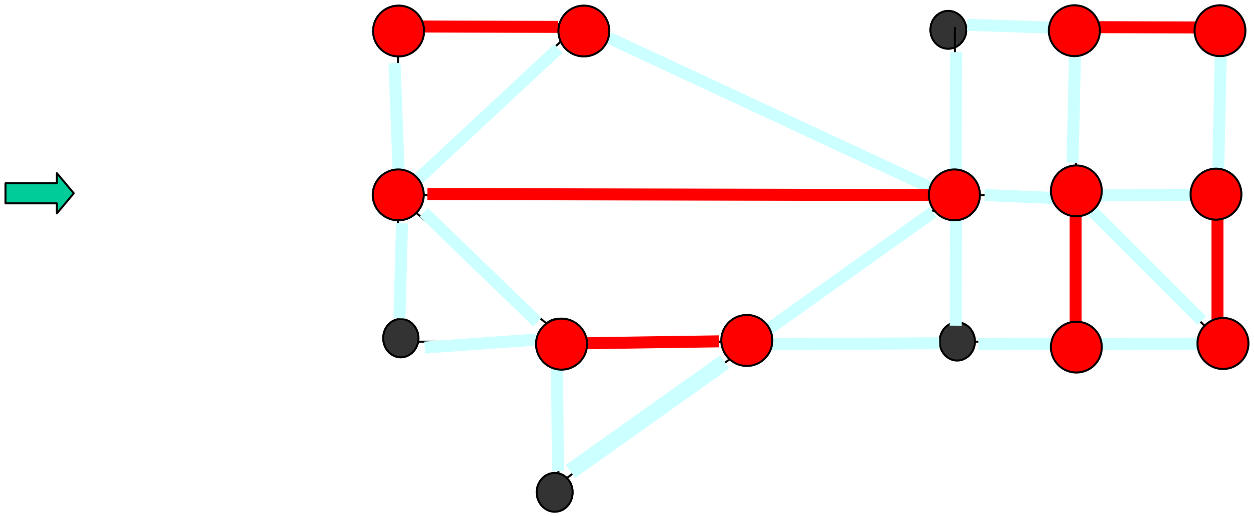
Segunda Heurística

1. Elegir una arista uv de G. Añadir a C sus dos extremos u y v
   Borrar de G los vértices u y v
2. Repetir el paso anterior mientras queden aristas en el grafo



Segunda Heurística

1. Elegir una arista uv de G. Añadir a C sus dos extremos u y v
   Borrar de G los vértices u y v
2. Repetir el paso anterior mientras queden aristas en el grafo



Segunda Heurística

1. Elegir una arista uv de G. Añadir a C sus dos extremos u y v
   Borrar de G los vértices u y v
2. Repetir el paso anterior mientras queden aristas en el grafo

Sea C el recubrimiento obtenido en el algoritmo y C* el óptimo, es decir, con menor cardinal.
Todas las aristas elegidas en la construcción de C están cubiertas también por el recubrimiento óptimo C*, luego tienen un extremo en los vértices de C*.
Las aristas elegidas NO tienen ningún vértice común.
Por tanto,

$$|C^*| \geq \frac{1}{2}|C|$$

Es decir $|C| \leq 2|C^*|$

Esta estrategia es una 2-aproximación