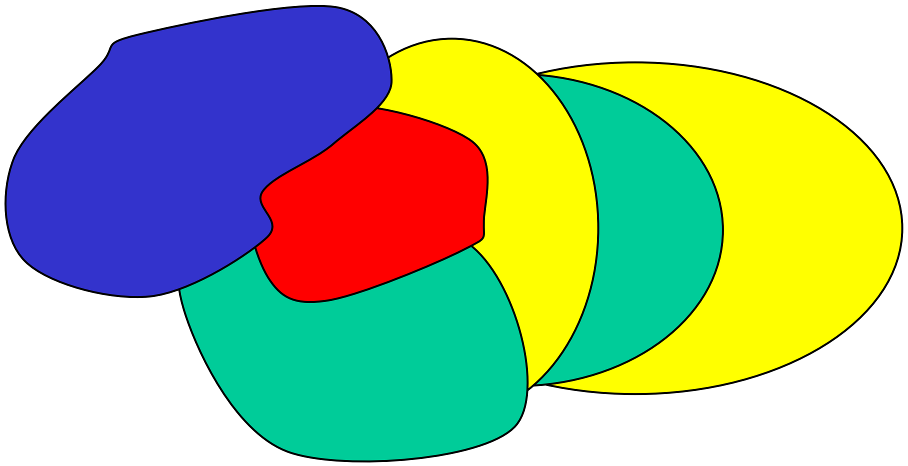
Teorema de los 4 colores

Gregorio Hernández Peñalver

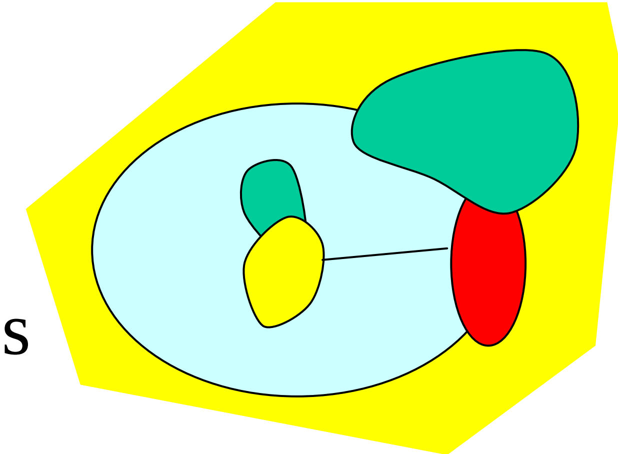
Matemática Discreta II

El Problema de los cuatro colores

¿Se pueden colorear las regiones de cualquier mapa en el plano con sólo cuatro colores, de forma que regiones adyacentes reciban diferente color?

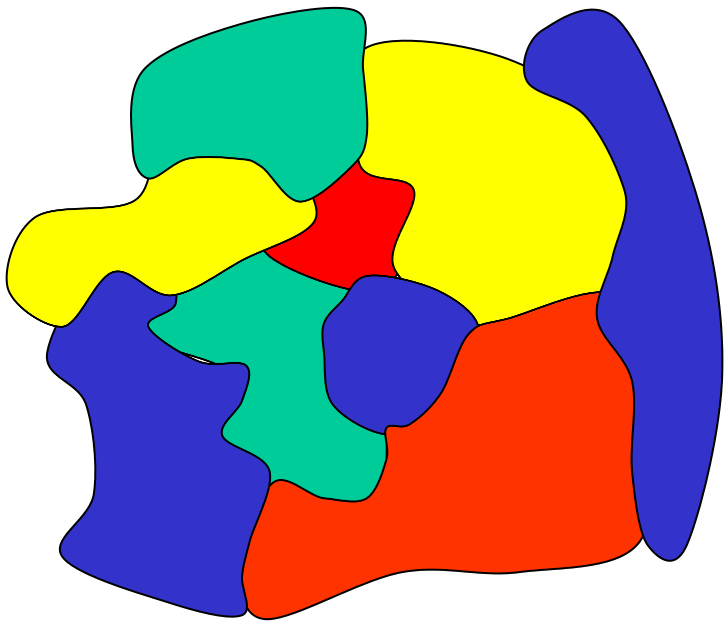


Mapa: Grafo plano conexo y sin puentes

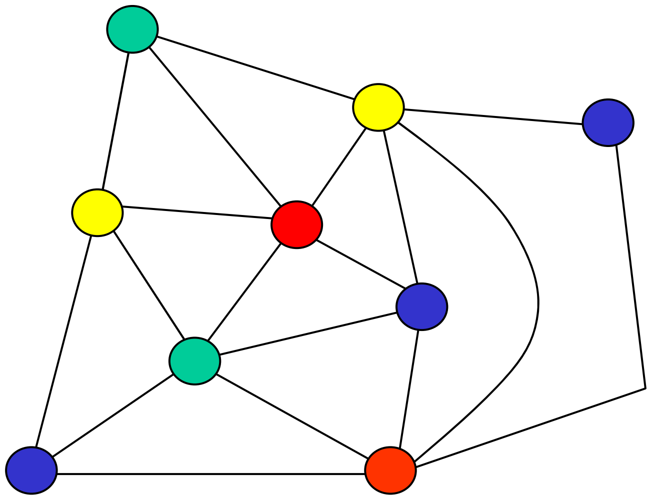


Pasemos el problema a grafos

M mapa



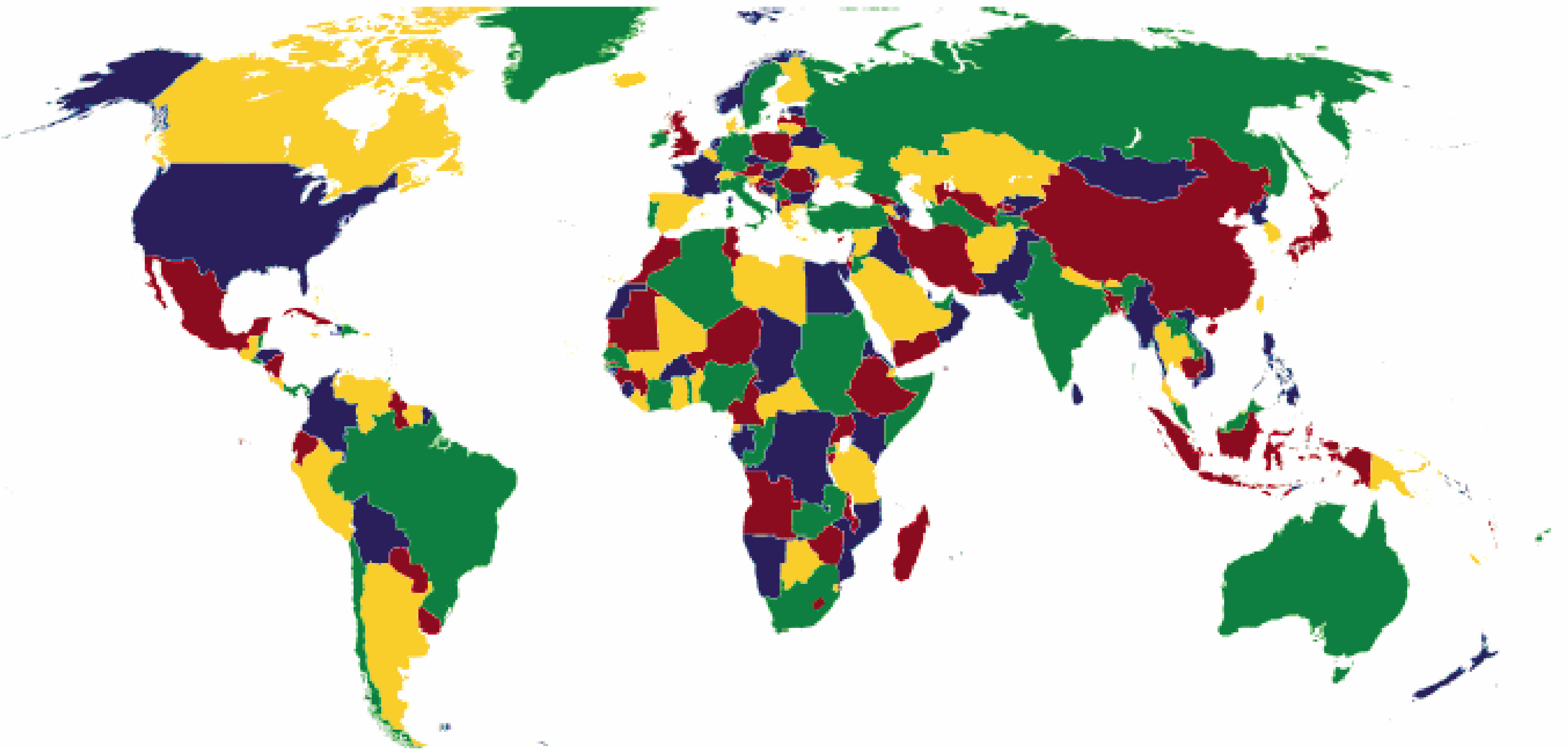
G(M) grafo dual
(grafo plano)



M es k-coloreable $\Leftrightarrow$ G(M) es k-coloreable

Teorema de los cuatro colores

Todo grafo planar es 4-coloreable



Teorema de los cuatro colores

Todo grafo planar es 4-coloreable

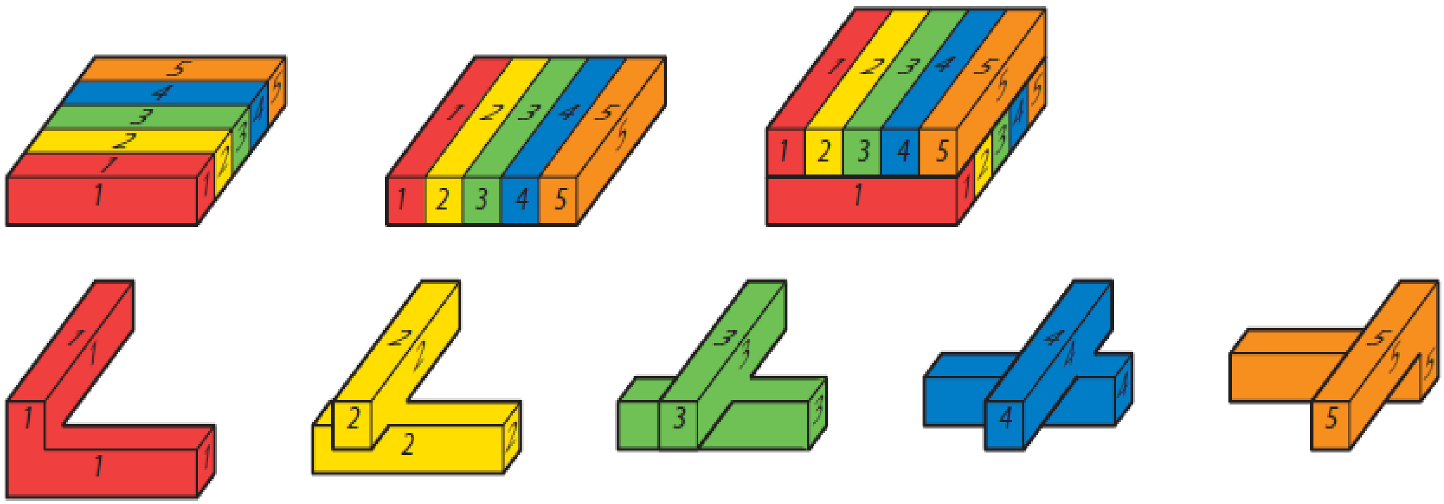
- Francis Guthrie, 1850
- Augustus de Morgan, 1852, 1860
- Alfred Kempe, 1879 Amer. J. Math
- Percy Heawood, 1890, “Teorema de los cinco colores”

- 1976 Appel, Haken
  Demostración con ayuda de ordenadores (1476 casos críticos)
- 1997 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas,
  Simplificación de la demostración (633 casos)
- 2005 Demostración formalizada en Coq por Gonthier y Werner

No se puede extender a R^3

Países tridimensionales

Tietze: n países pueden necesitar n colores



Teorema de los seis colores

Todo grafo planar es 6-coloreable

Dem.

Por inducción sobre n, número de vértices

Paso base) Cualquier grafo con $n \leq 6$ admite una 6-coloración

Paso inducción) Supongamos que todos los grafos planares con $n - 1$ vértices admiten una 6-coloración

Sea G un grafo planar de n vértices.
G contiene un vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Por (HI) $G - \{v\}$ admite una 6-coloración. Como en los vecinos de v se utilizan a lo sumo 5 colores, queda un color libre para una 6-coloración de G

Teorema de los cinco colores

Todo grafo planar es 5-coloreable

Dem. (Heawood, 1890)

Por inducción sobre n, número de vértices

Paso base) Cualquier grafo con $n \leq 5$ admite una 5-coloración

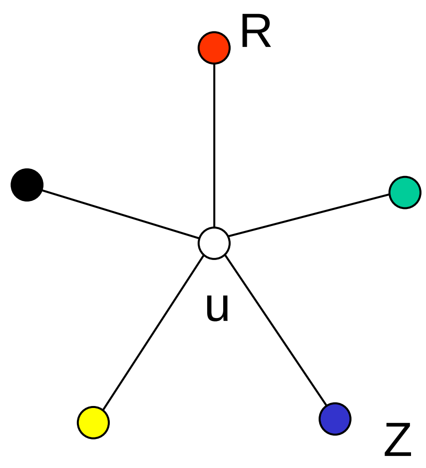
Paso inducción) Supongamos que todos los grafos planares con $n - 1$ vértices admiten una 5-coloración

Sea G un grafo planar de n vértices.
G contiene un vértice u tal que $d(u) \leq 5$. Por (HI) $G - \{u\}$ admite una 5-coloración. Si en los vecinos de u se utilizan a lo sumo 4 colores, queda un color libre para una 5-coloración de G

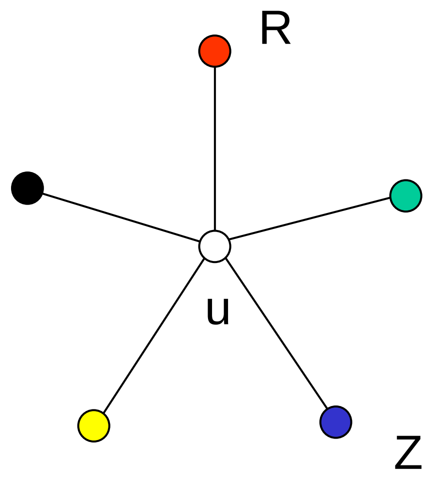
Teorema de los cinco colores

Todo grafo planar es 5-coloreable

Si en los vecinos de v se utilizan los 5 colores consideramos el subgrafo rojo-azul $G_{R,Z}$, generado por los vértices con color rojo o azul

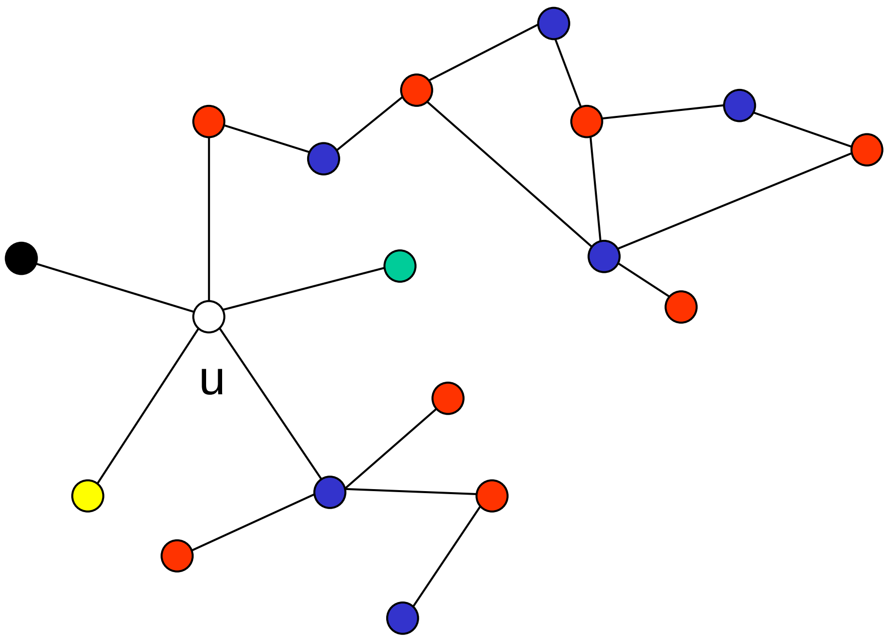


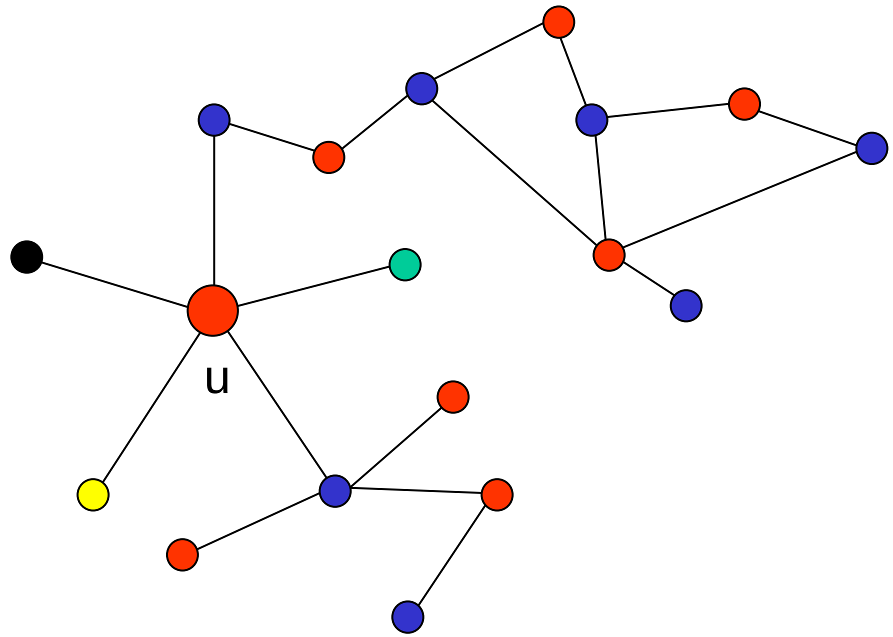
Teorema de los cinco colores



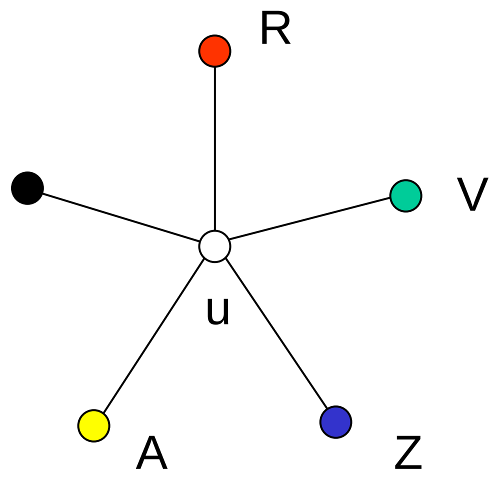
Todo grafo planar es 5-coloreable

Si no hay camino R-Z intercambiamos colores en la componente conexa de R. Y queda libre el color rojo para u



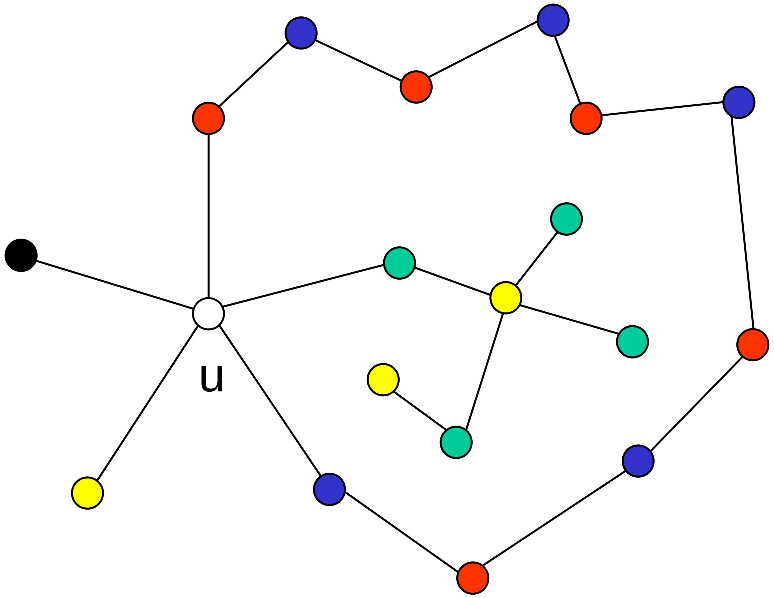


Teorema de los cinco colores



Todo grafo planar es 5-coloreable

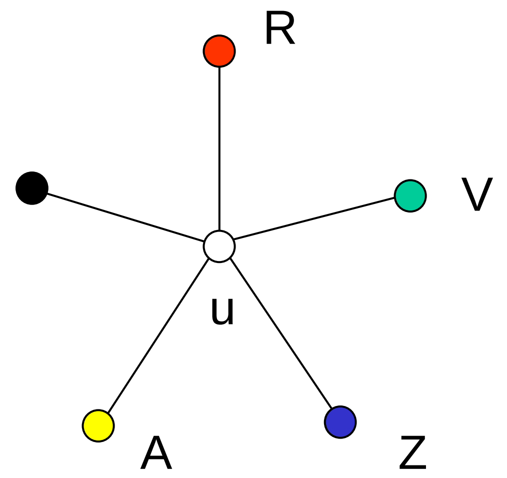
Si hay camino R-Z, se considera el subgrafo generado por los vértices verdes y amarillos.



La componente conexa que contiene al vértice V no puede alcanzar al vértice A, por la planaridad

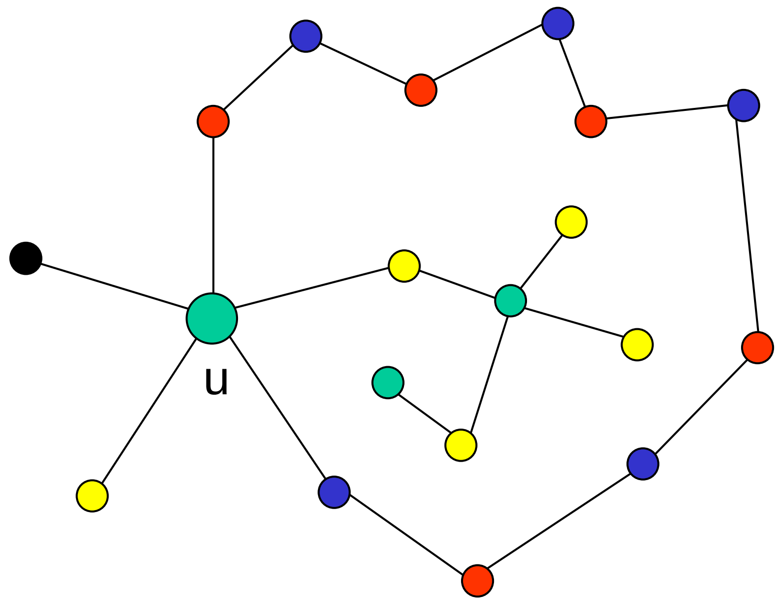
Intercambiamos los colores verde y amarillo en esa componente

Teorema de los cinco colores



Todo grafo planar es 5-coloreable

Si hay camino R-Z, se considera el subgrafo generado por los vértices verdes y amarillos.



La componente conexa que contiene al vértice V no puede alcanzar al vértice A, por la planaridad

Intercambiamos los colores verde y amarillo en esa componente

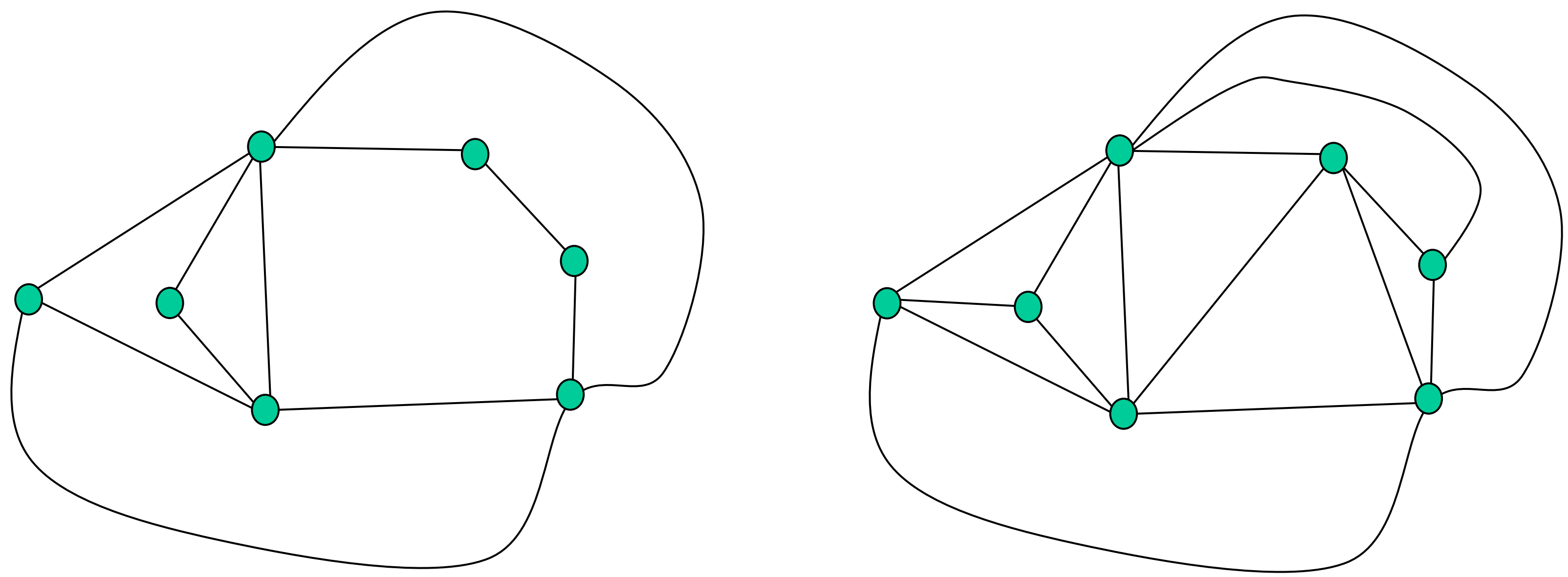
Queda libre el color verde para u

G es 5-coloreable

Teorema de los cuatro colores

Todo grafo planar es 4-coloreable

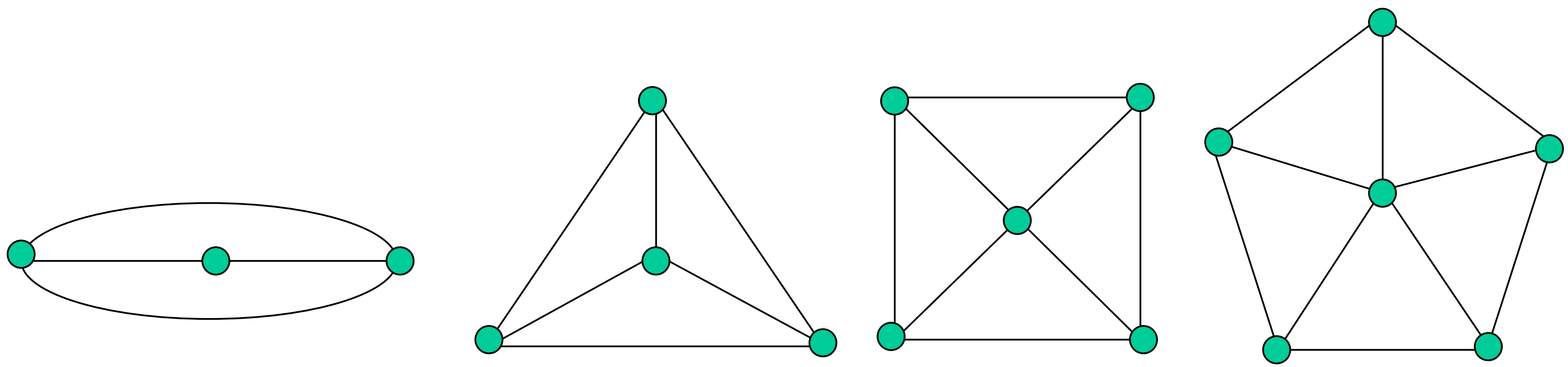
- G maximal planar



Teorema de los cuatro colores

Todo grafo planar es 4-coloreable

- G contiene un vértice v tal que d(v) ≤ 5
- G contiene una de las siguientes configuraciones



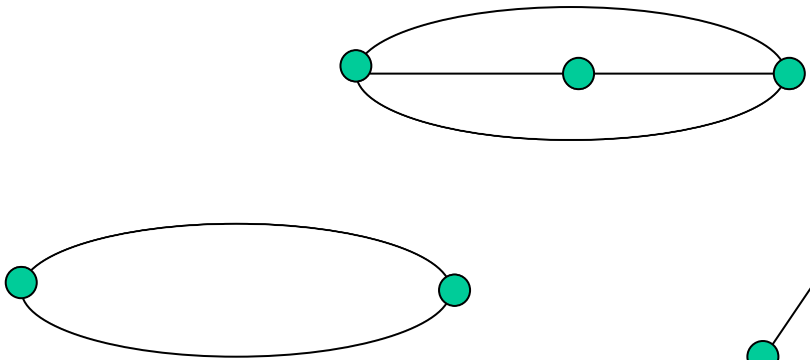
(a) (b) (c) (d)

La “prueba” de Kempe

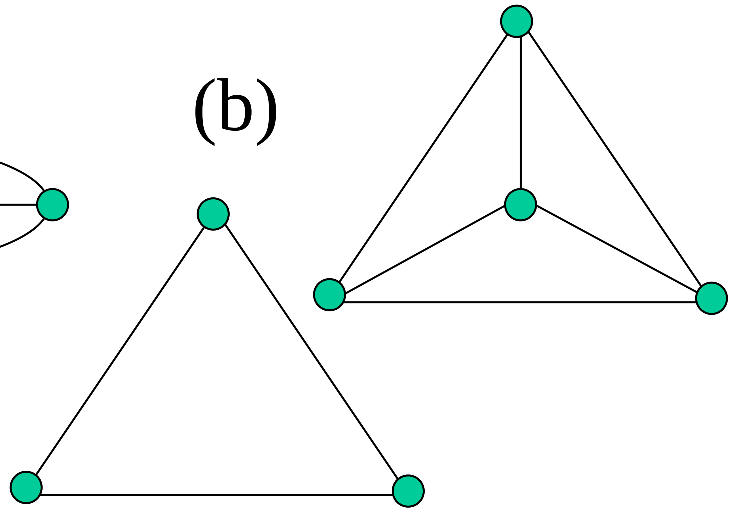
- Supongamos que existe un contraejemplo al Teorema. Tomamos un contraejemplo mínimo que sea triangulación G. es decir, G no es 4-coloreable, pero G – {v} es 4-coloreable para todo $v \in V(G)$
- Si G contiene las configuraciones (a) ó (b)

Contradicción!!

(a)

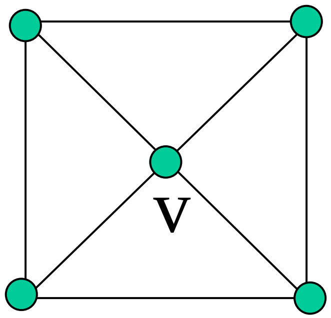


(b)

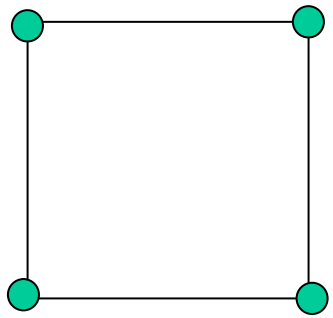


La “prueba” de Kempe

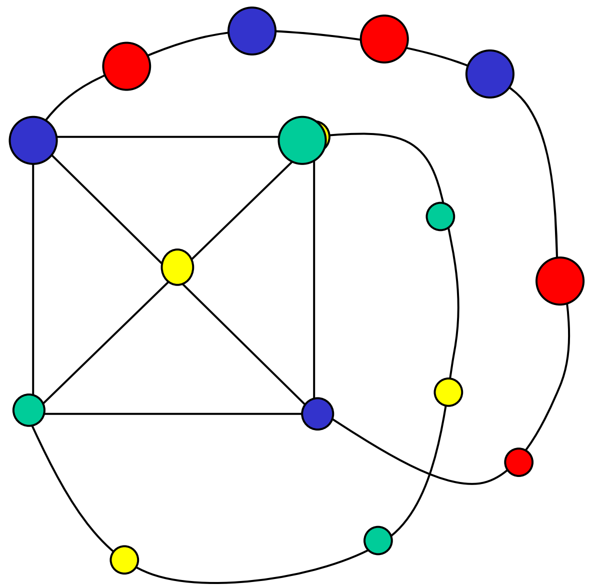
- Si G contiene la configuración (c)



G



G-{v}



Subgrafo Rojo-aZul G(R,Z)

Cadena de Kempe rojo-azul

Color libre (amarillo) para v

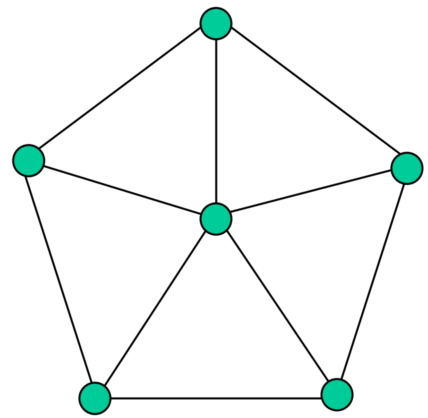
contradicción

La "prueba" de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

ERROR

descubierto por Heawood en 1890

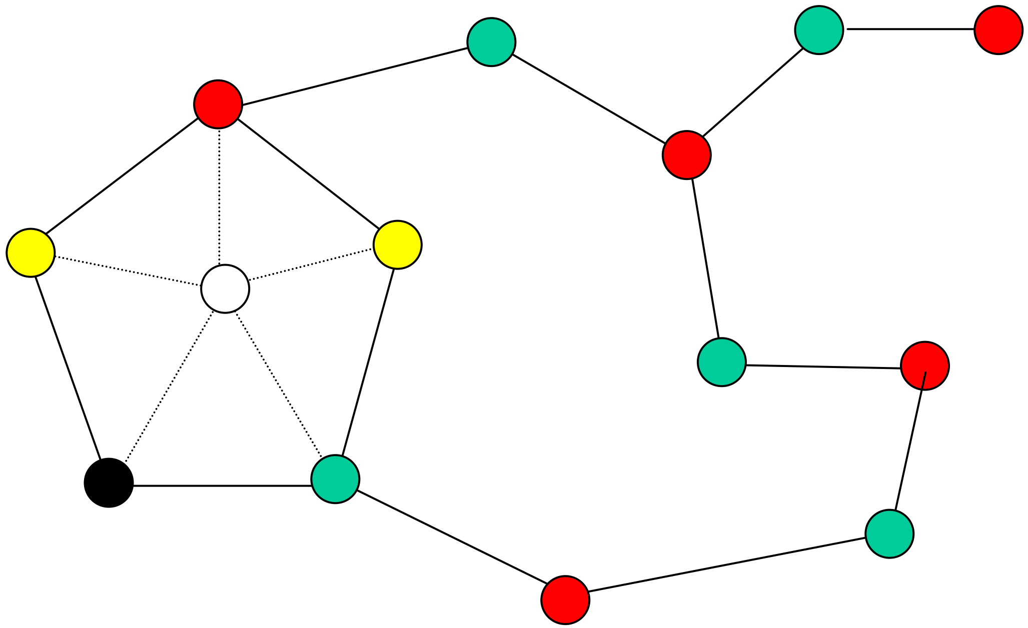


(d)

La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

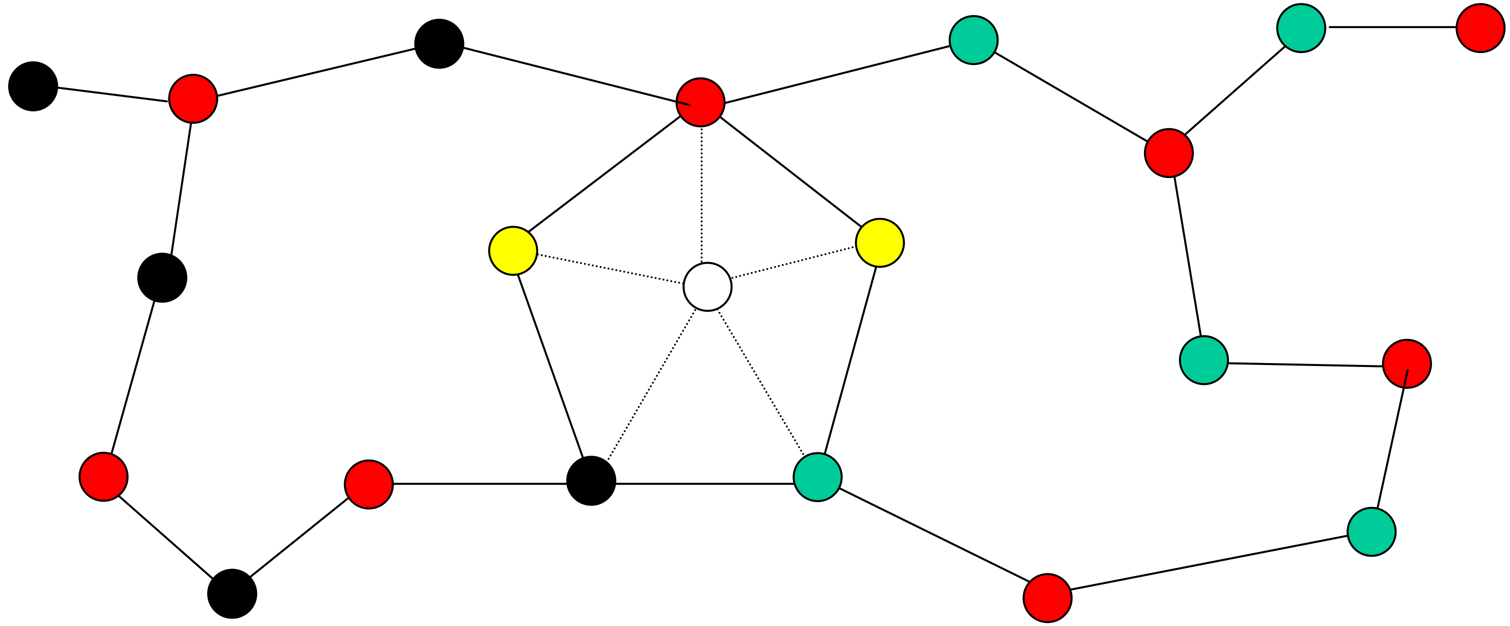
Subgrafo R-V



La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

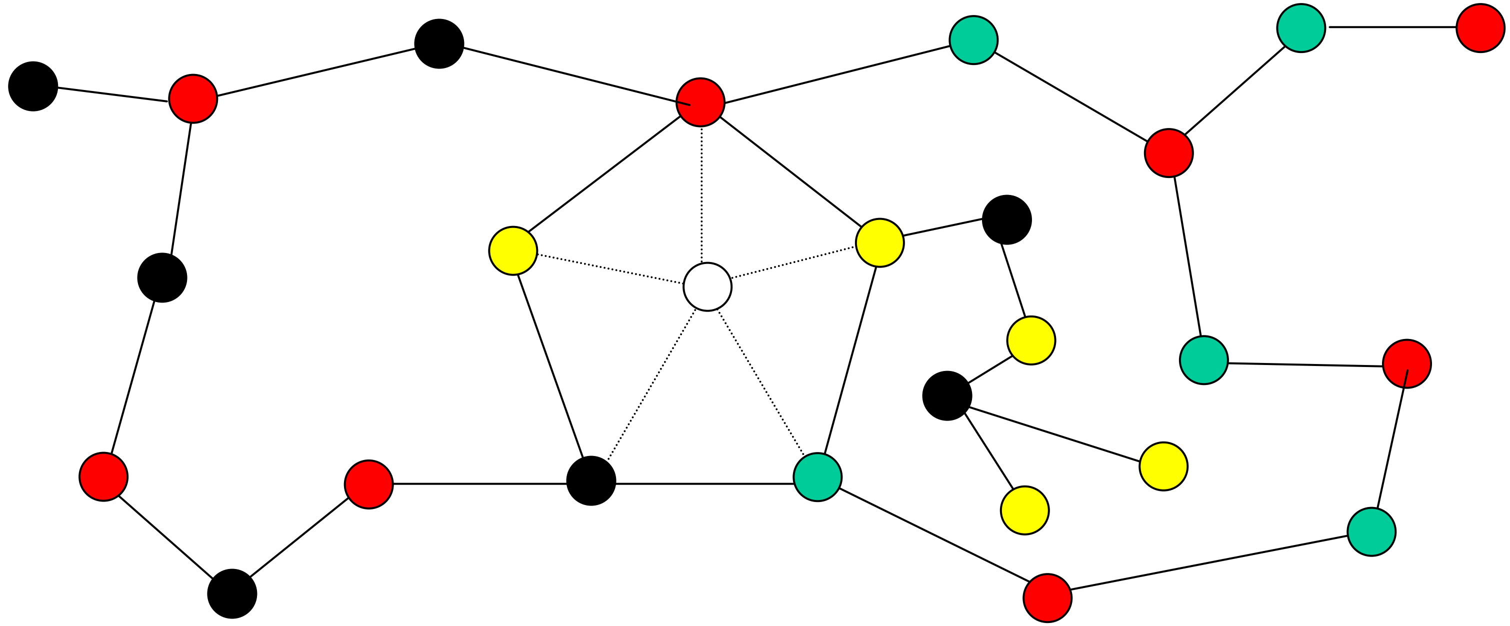
Subgrafo R-N



La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

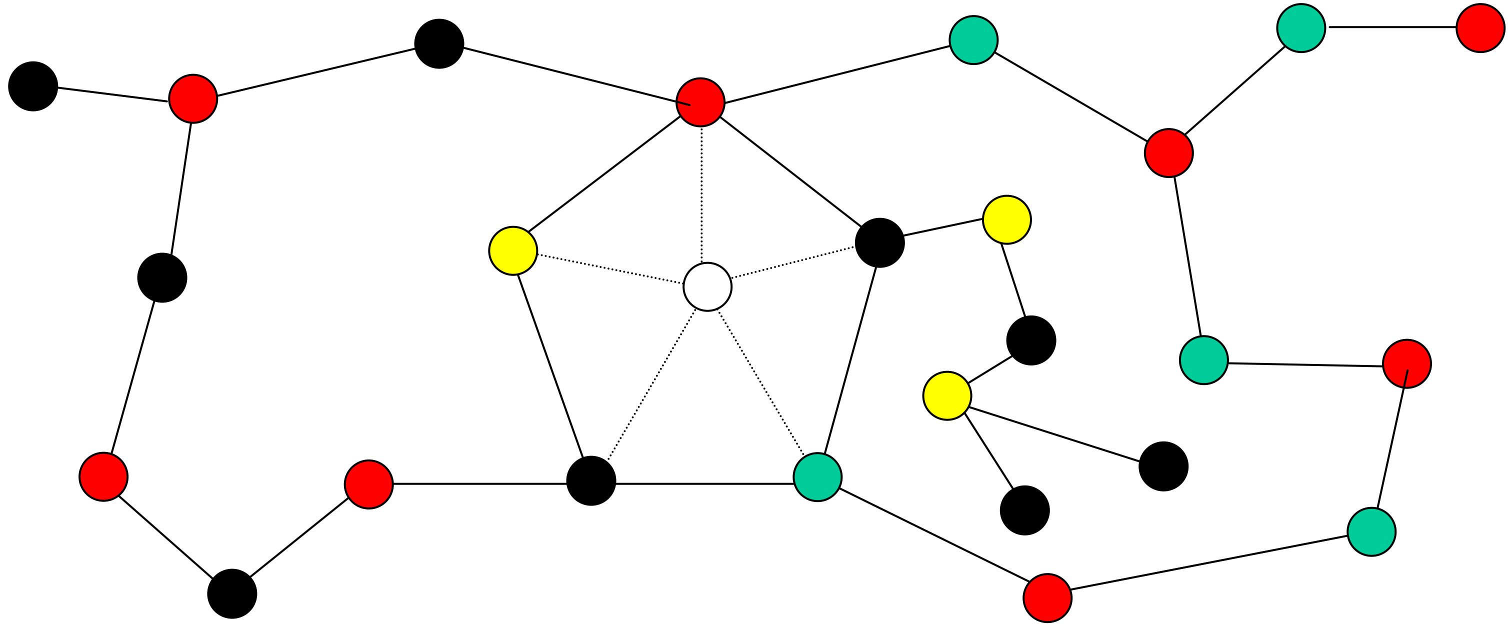
Subgrafo A-N



La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

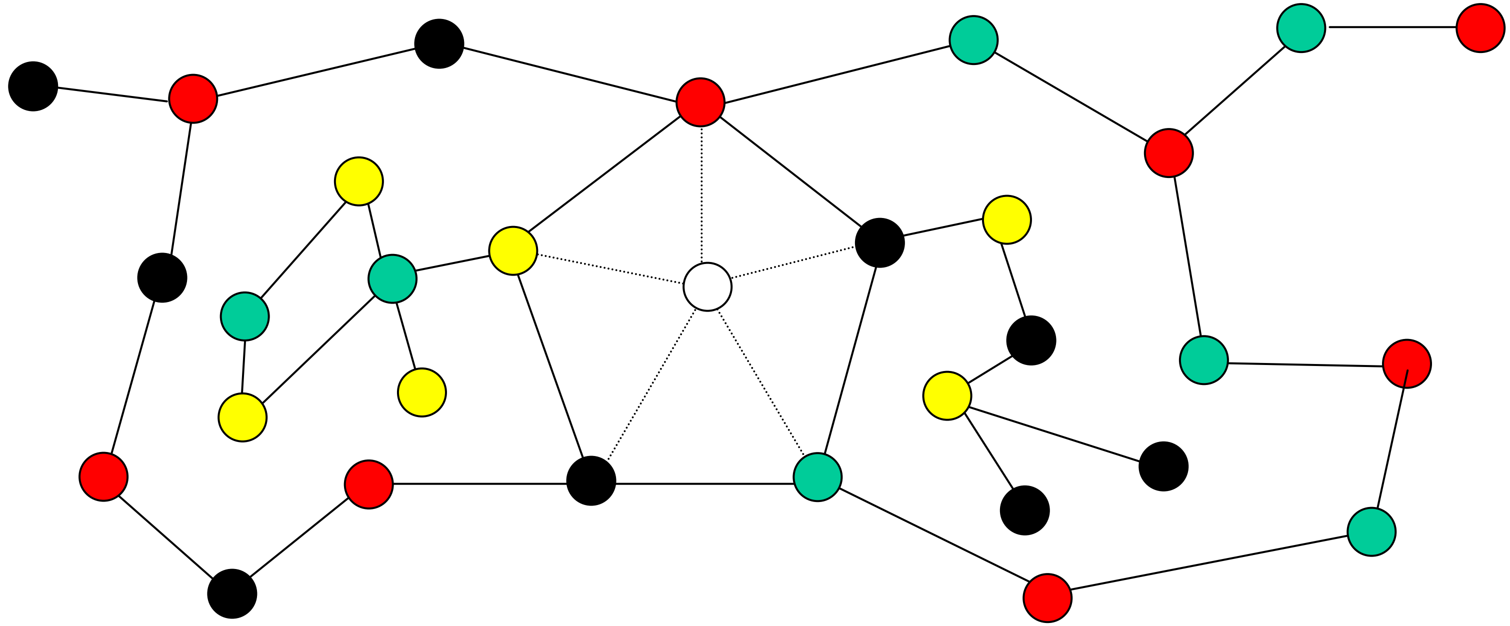
Subgrafo A-N



La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

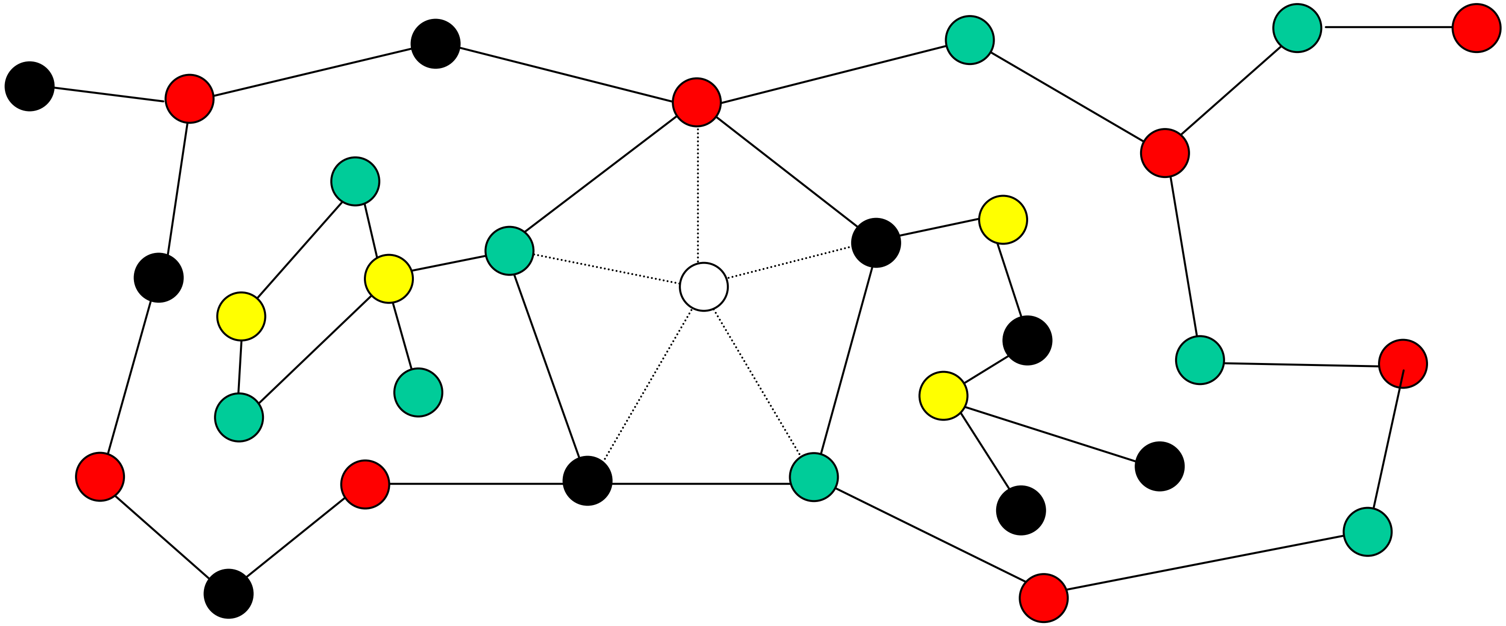
Subgrafo A-V



La "prueba" de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

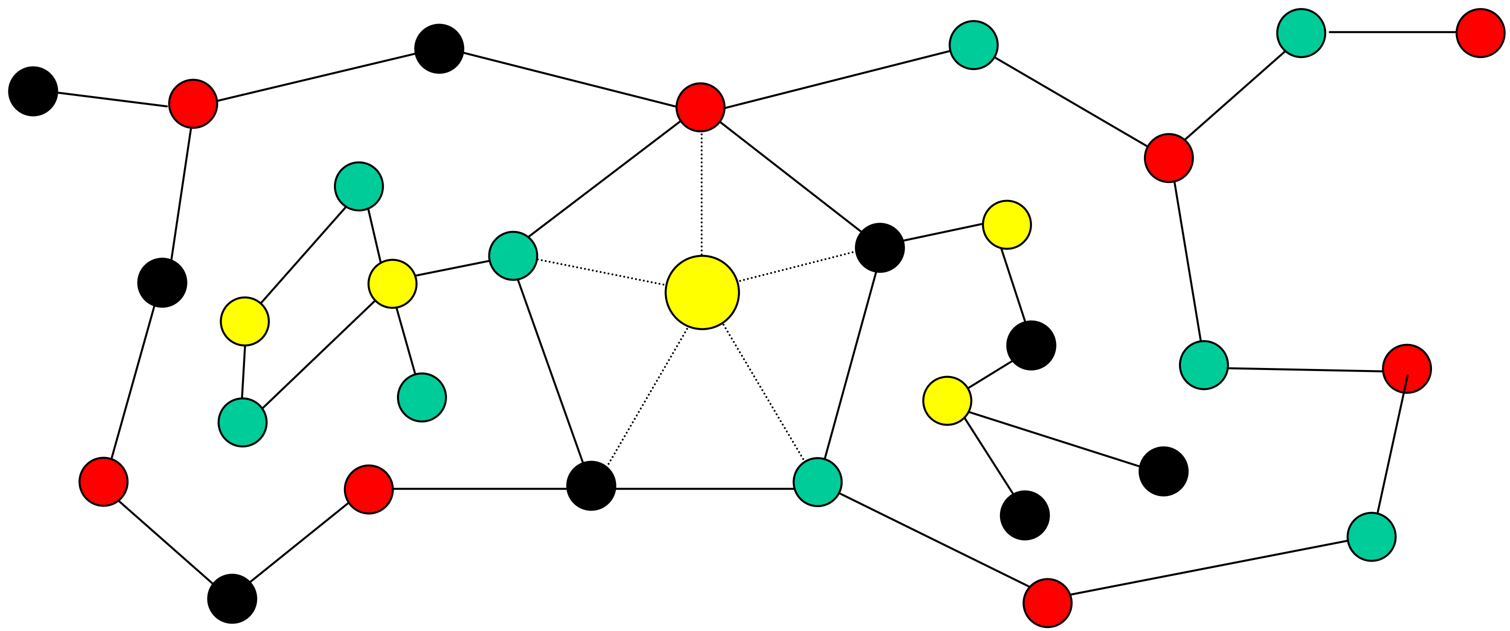
Subgrafo A-V Intercambio de colores

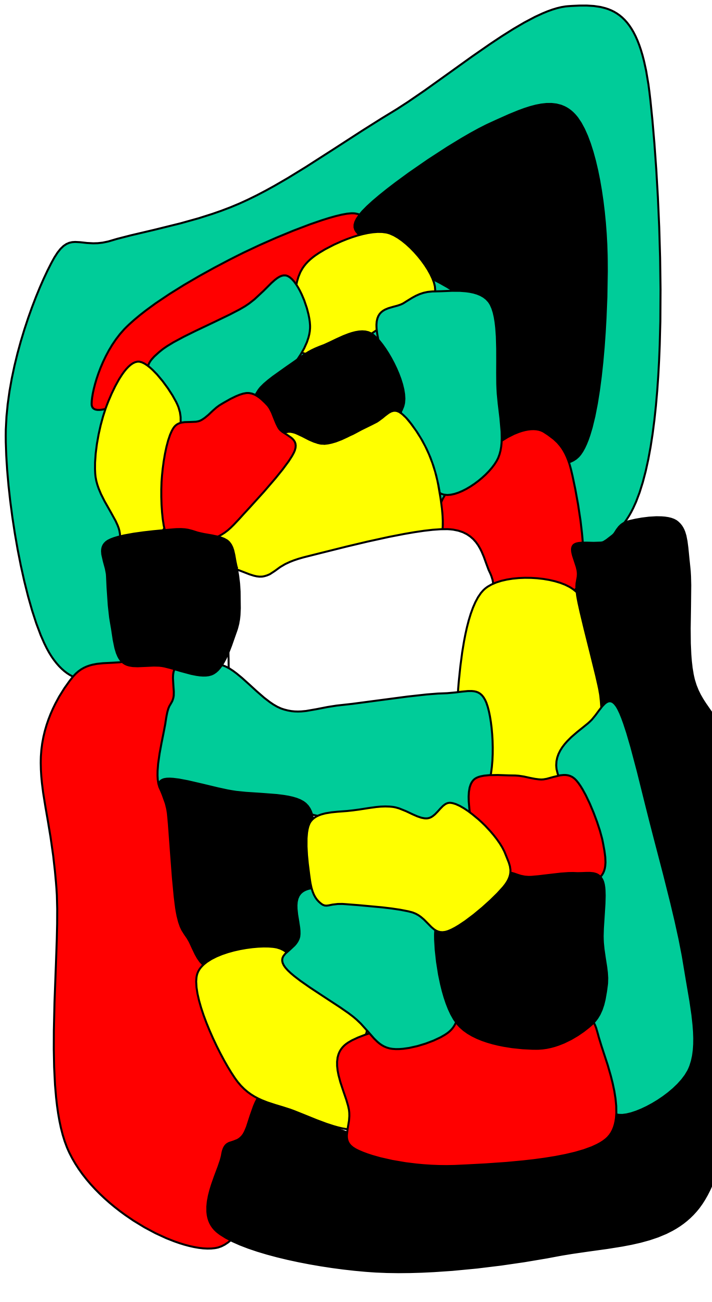


La “prueba” de Kempe

- Si G contiene la configuración (d)

¡CUATRO colores bastan para el grafo G!

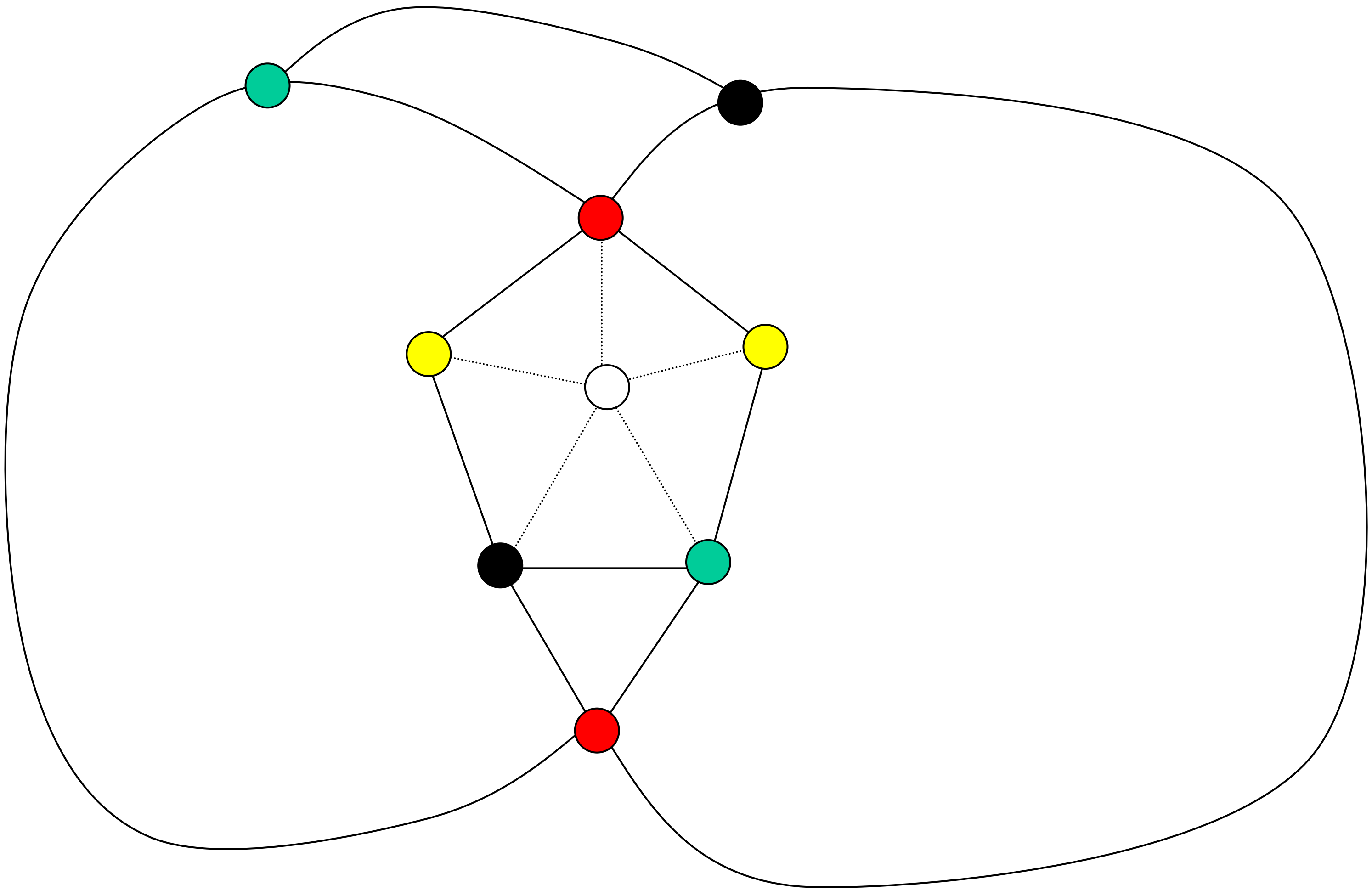




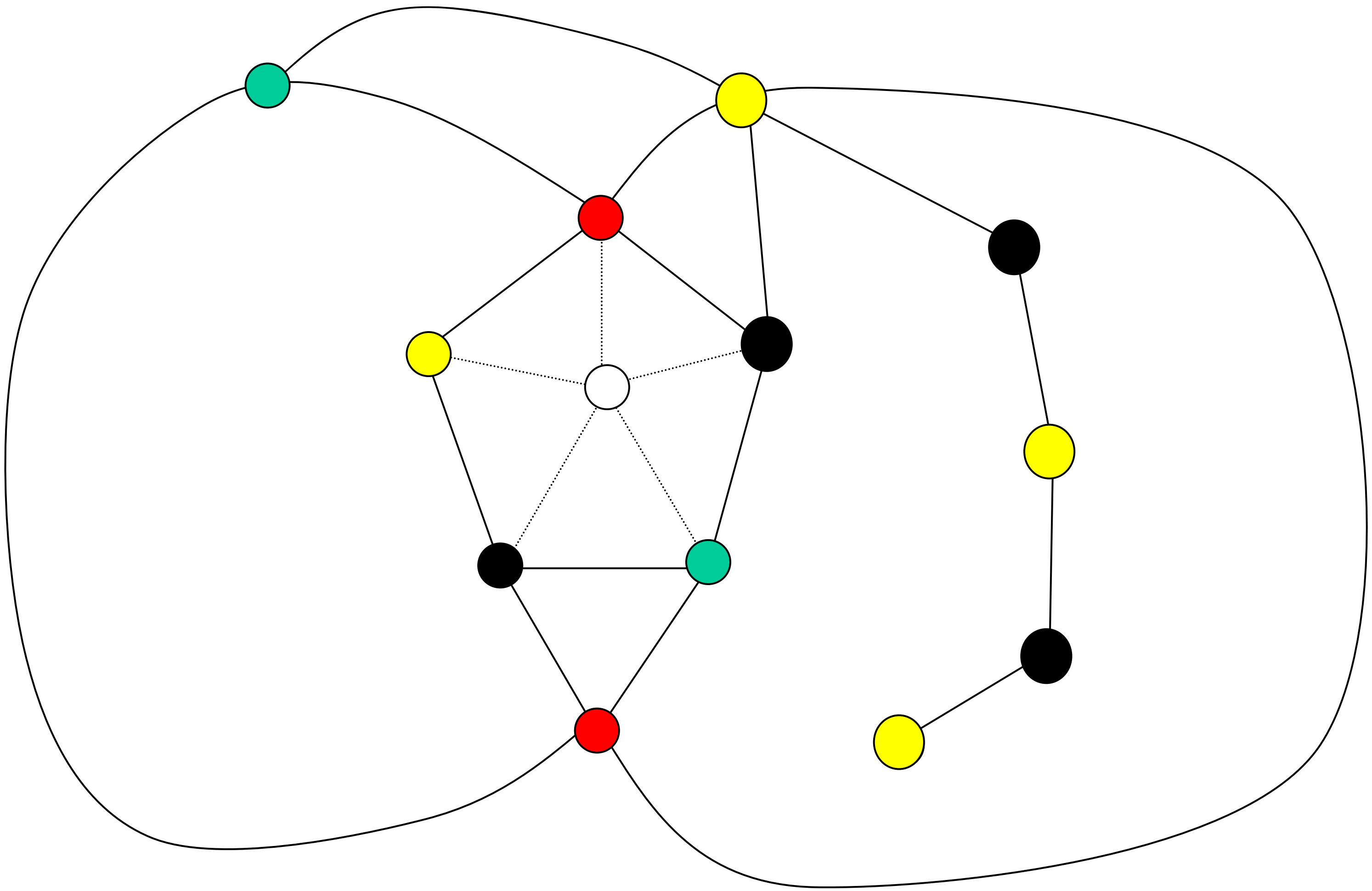
Mapa de Heawood

(1890)

El “error” de Kempe

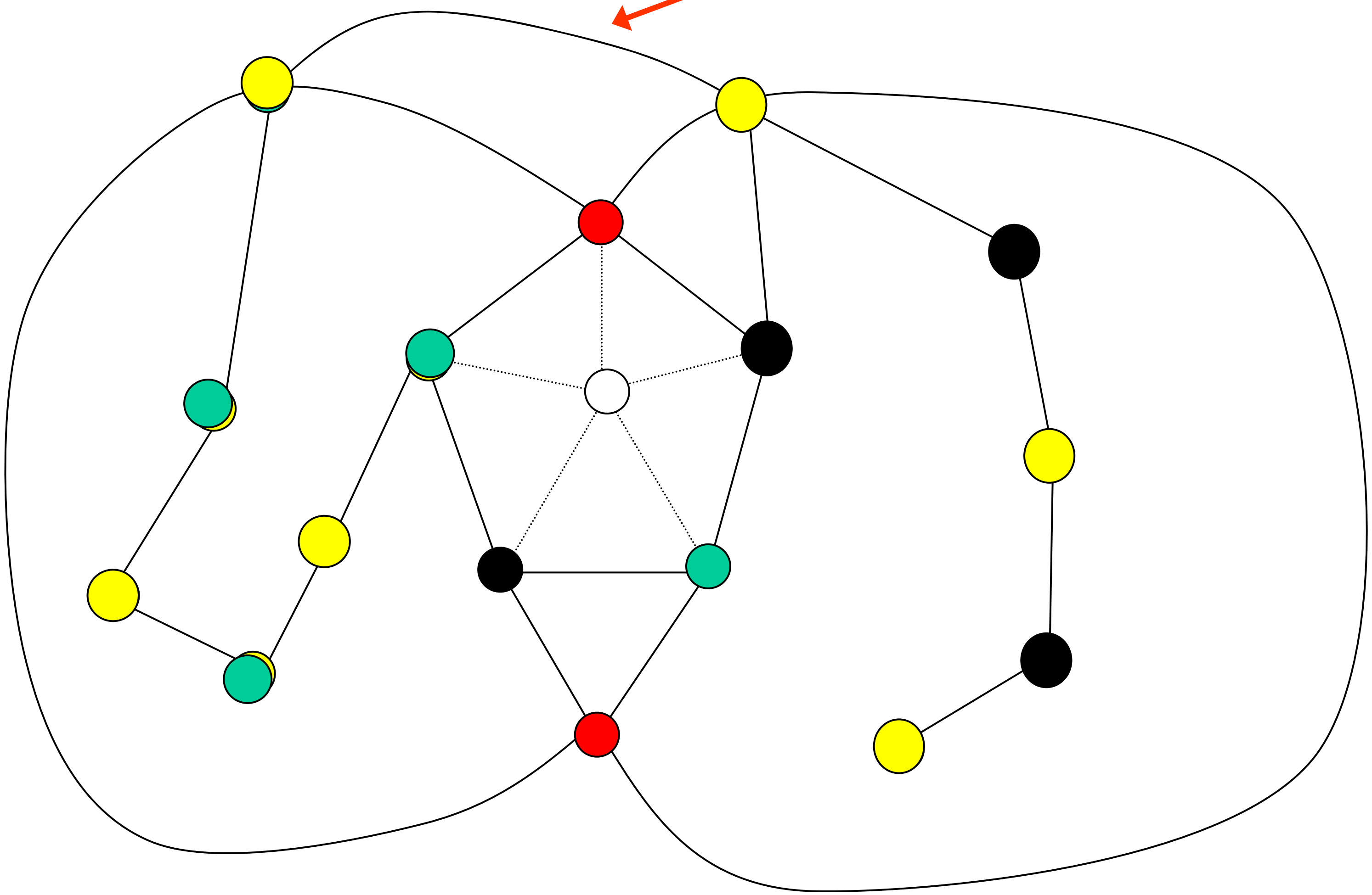


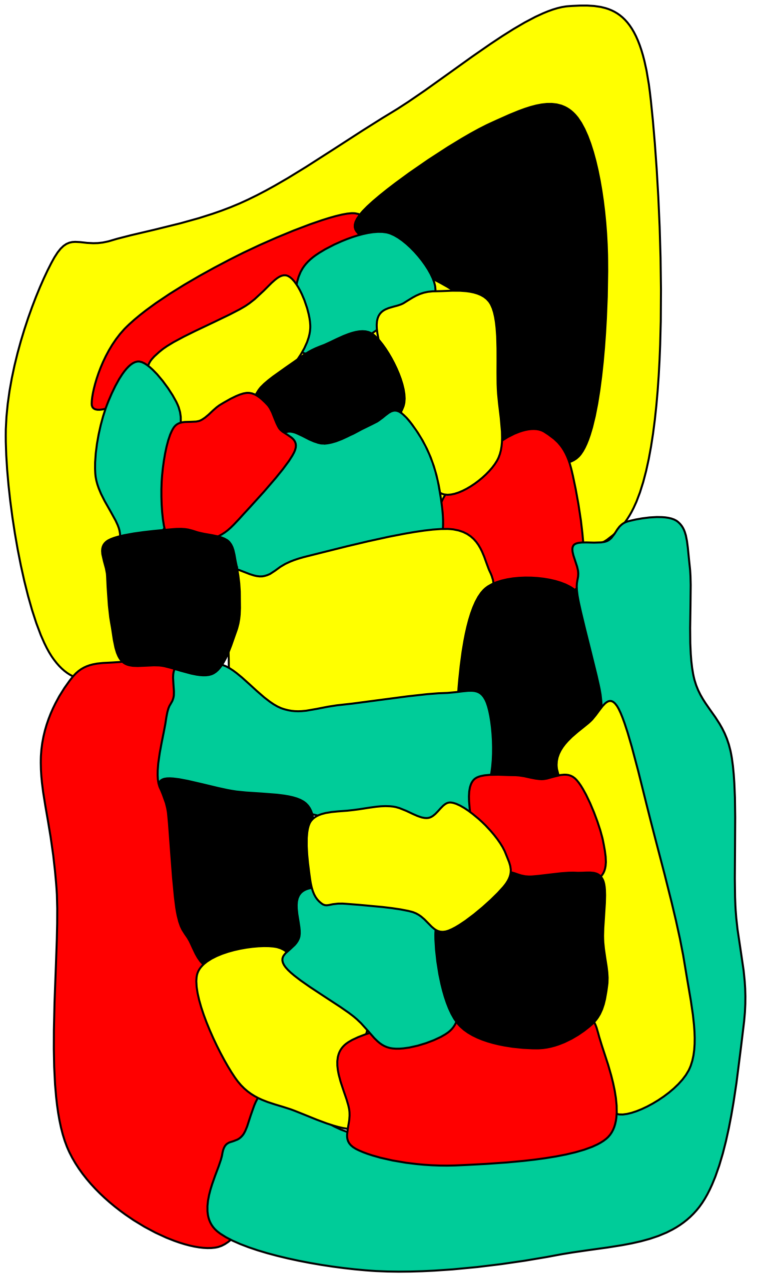
El “error” de Kempe



El “error” de Kempe

Arista con sus dos extremos del mismo color !!





Mapa de Heawood

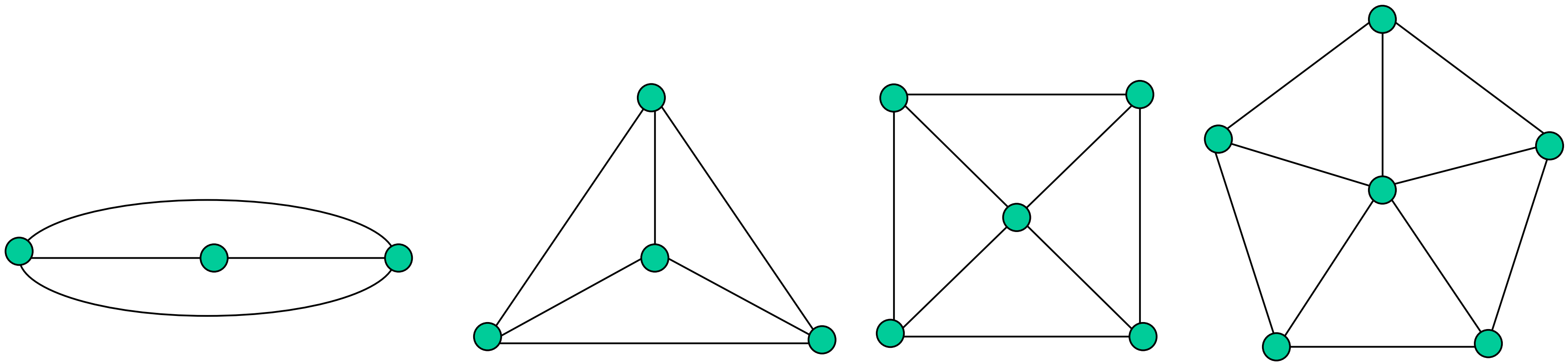
(1890)

con 4 colores

Teorema de los cuatro colores

Ideas de Kempe

- Mapas normales (Triangulaciones planas)
- Cadenas de Kempe
- Probar 4CT comprobando que la existencia de un contraejemplo mínimo lleva a contradicción
- Conjunto INEVITABLE de configuraciones



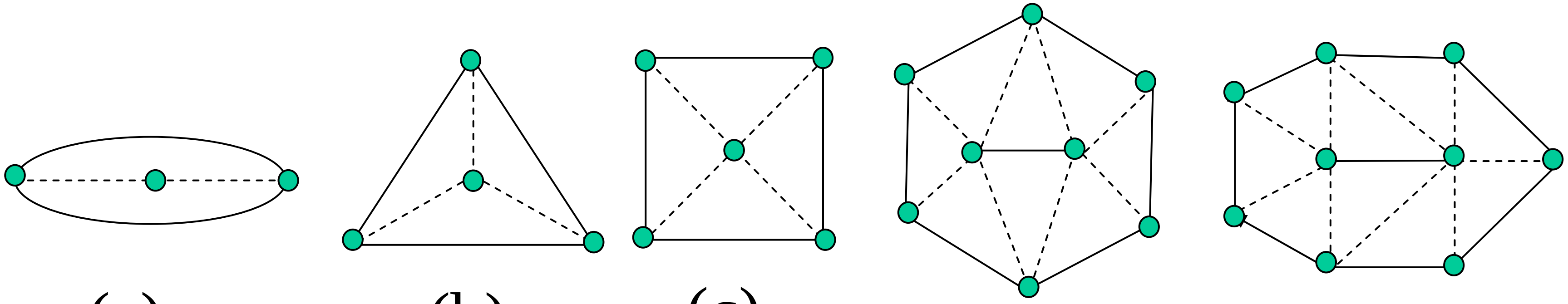
(a) (b) (c) (d)

Kempe intentó probar que cada una de estas configuraciones no puede aparecer en un contraejemplo mínimo. Falló con (d)

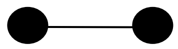
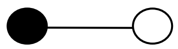
Una configuración es REDUCIBLE si no puede aparecer en un contraejemplo mínimo.

Probar el Teorema de los cuatro colores consiste en hallar un conjunto INEVITABLE de configuraciones REDUCIBLES

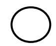
Otro conjunto inevitable

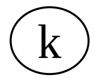


(a) (b) (c)

Notación {  ,  }

 grado 5

 grado 6

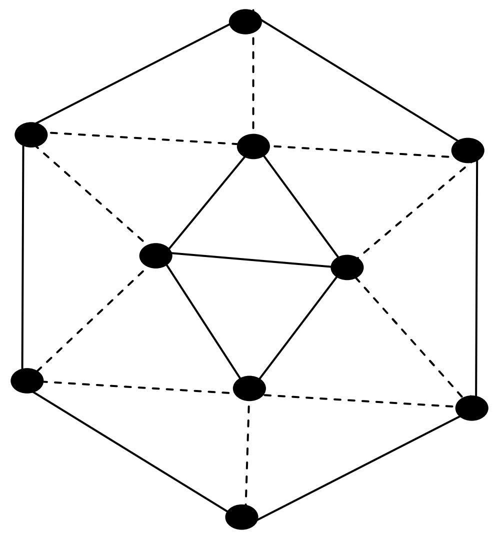


grado k

Una configuración reducible

El diamante de Birkhoff (1913)

4CT es cierto si n<37

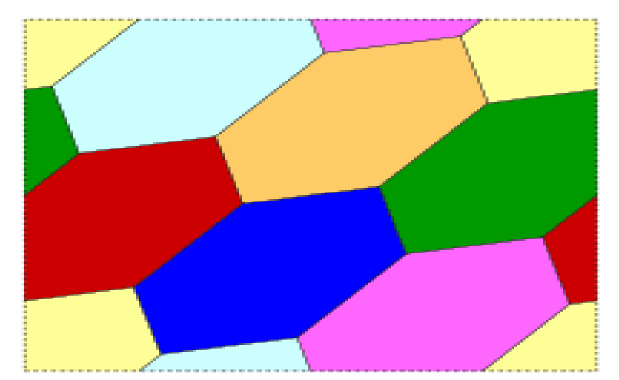


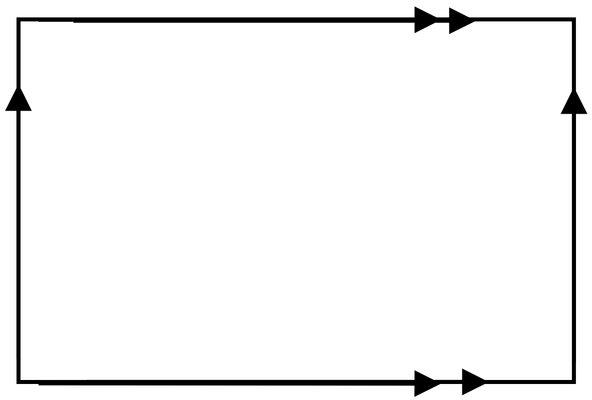
- Entre 1960 y 1970 Heesch desarrolla las técnicas para probar inevitabilidad y reducibilidad.
- Un anillo de tamaño 13 tiene 66430 4-coloraciones distintas. Para probar su reducibilidad debemos usar CADA una de ellas para producir una 4-coloración del grafo total
- En 1976 Appel y Haken terminan, con ayuda del ordenador, el análisis exhaustivo de la reducibilidad de un conjunto de 1936 configuraciones todas ellas con anillo de tamaño ≤ 14
- Robertson et al. (1997) rebajan a 633 configuraciones y simplifican las reglas de descarga (32 en vez de +300). Algoritmo $O(n^2)$

GRAFOS SOBRE OTRAS SUPERFICIES

Un grafo sin cortes sobre el toro, ¿cuántos colores necesita?

Todo mapa sobre el toro se puede colorear con 7 colores. Y existen mapas que necesitan 7 colores.



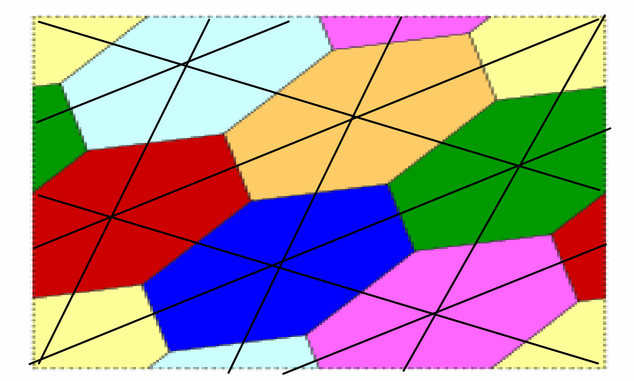


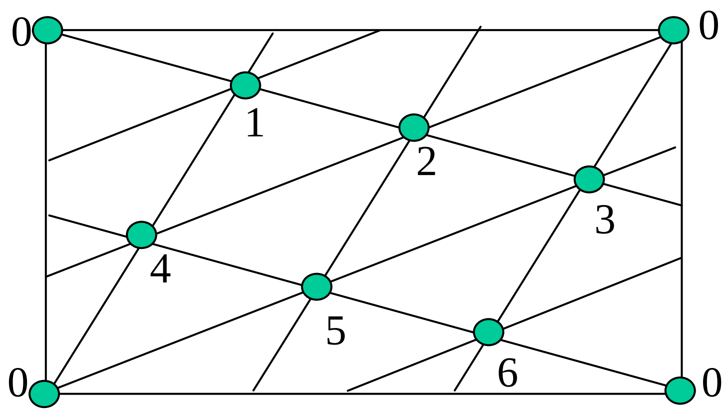
Heawood, 1890

GRAFOS SOBRE OTRAS SUPERFICIES

Un grafo sin cortes sobre el toro, ¿cuántos colores necesita?

Todo mapa sobre el toro se puede colorear con 7 colores. Y existen mapas que necesitan 7 colores.



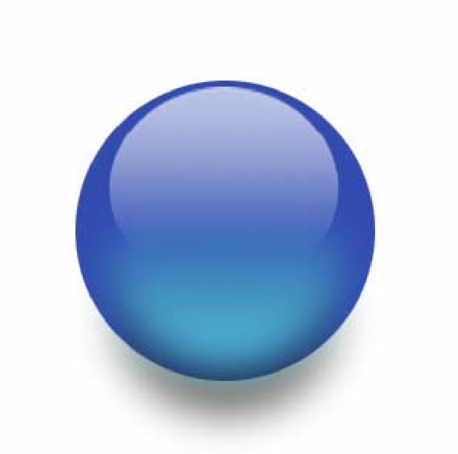


Heawood, 1890

GRAFOS SOBRE OTRAS SUPERFICIES

Teorema de Heawood

Todo mapa representado sobre una superficie orientable de género g>0 se puede colorear con $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ colores



Género 0

Género 1

Género 2

Género 3

El Teorema de los cuatro colores en la RED

- Una serie de cuatro artículos de Marta Macho en Cuaderno de Cultura Científica (Matemocion)
  https://culturacientifica.com/2017/04/26/teorema-los-cuatro-colores-1-una-historia-comienza-1852/ (este es el enlace al primero)
- Un poco de historia
  http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
- Una excelente página con un resumen de la demostración de Robertson, Sanders, Seymour y Thomas de 1996
  http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html