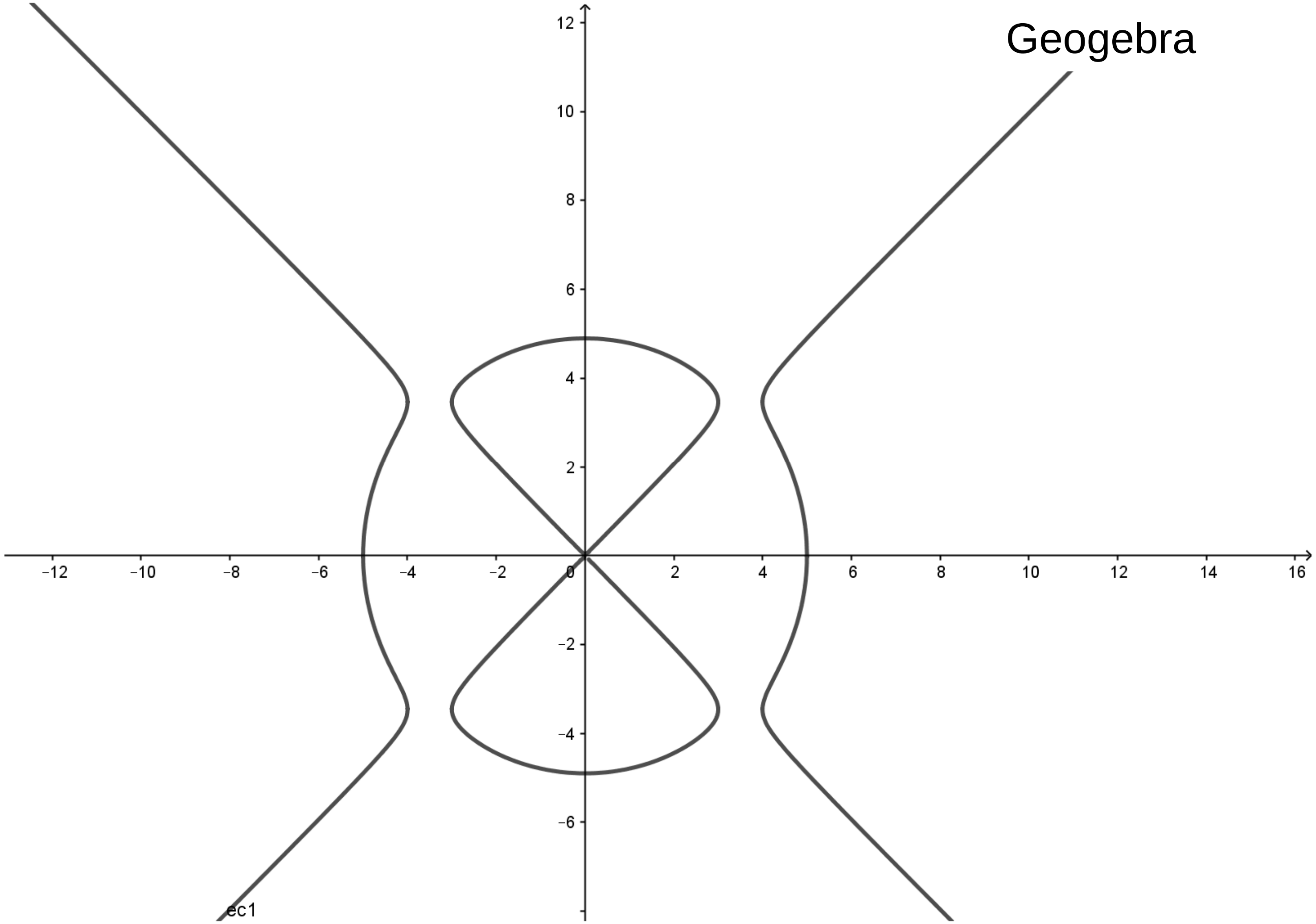
Representación de curvas algebraicas planas

$F(x, y) = 0$

Polinomio en x, y

$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$



Geogebra

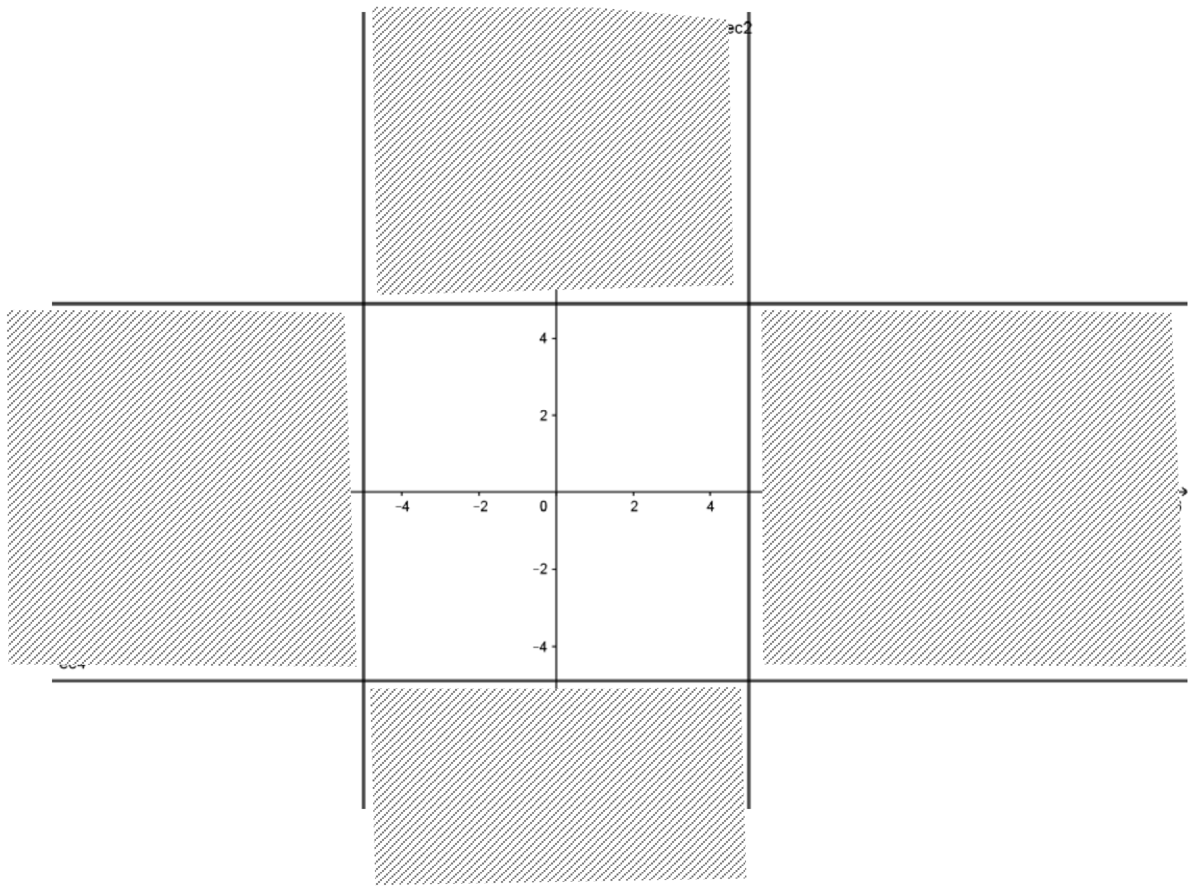
$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

1. Simetrías

2. Regiones

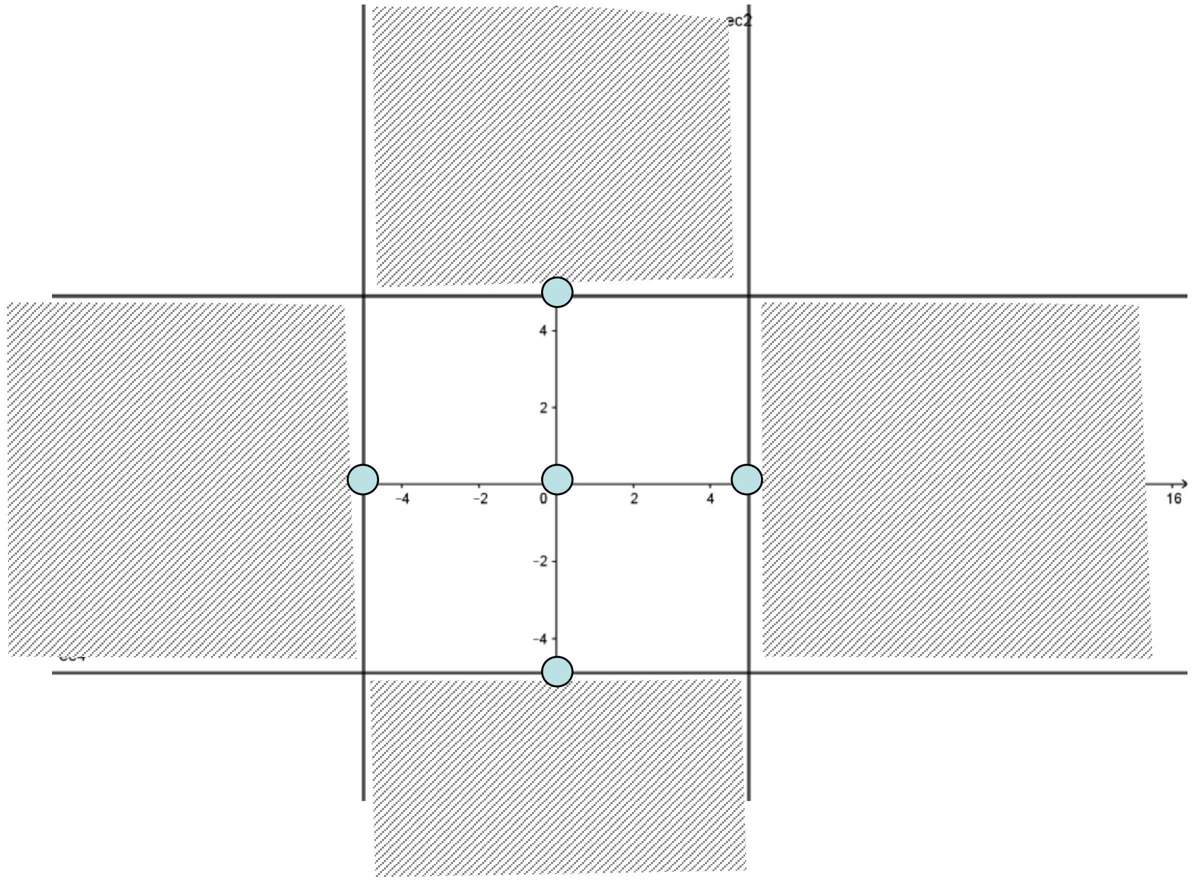
$$Y^2(Y^2 - 24) = X^2(X^2 - 25)$$

$$Y^2(Y+2\sqrt{6})(Y - 2\sqrt{6}) = X^2(X + 5)(X - 5)$$



$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

1. Simetrías
2. Regiones
3. Cortes con los ejes



$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$

4. Tangentes. Puntos singulares

La tangente a a la curva C de ecuación F(x,y) = 0 en P =(a,b) es

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (y-b) = 0$$

Si las derivadas parciales se anulan en P=(a,b) $\rightarrow$ P es punto singular

P múltiple de orden r si las derivadas hasta el orden r – 1 son nulas

$$\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)_P (x-a)^r + \cdots + \binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P (x-a)^{r-i}(y-b)^i + \cdots + \left(\frac{\partial^r F}{\partial y^r}\right)_P (y-b)^r = 0$$

Ecuación conjunta de las r tangentes a C en P

Si P =(0,0) F(x,y) = f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + … + f_r(x,y)

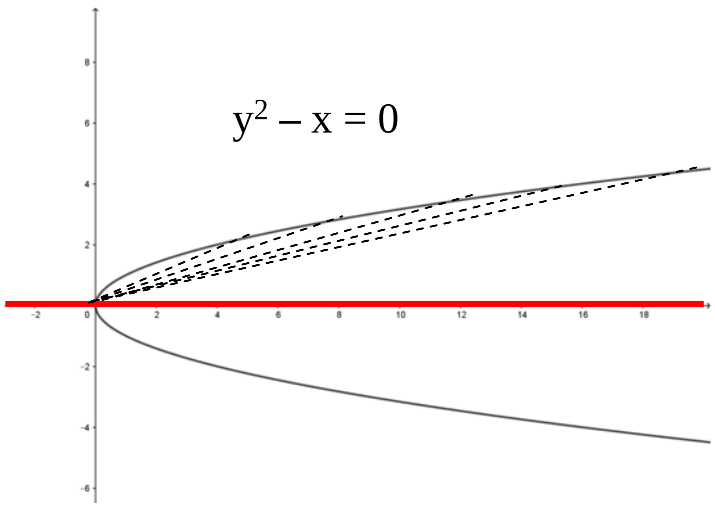
$\boxed{\text{La ecuación de las r tangentes en (0,0) es } f_r(x,y) = 0}$

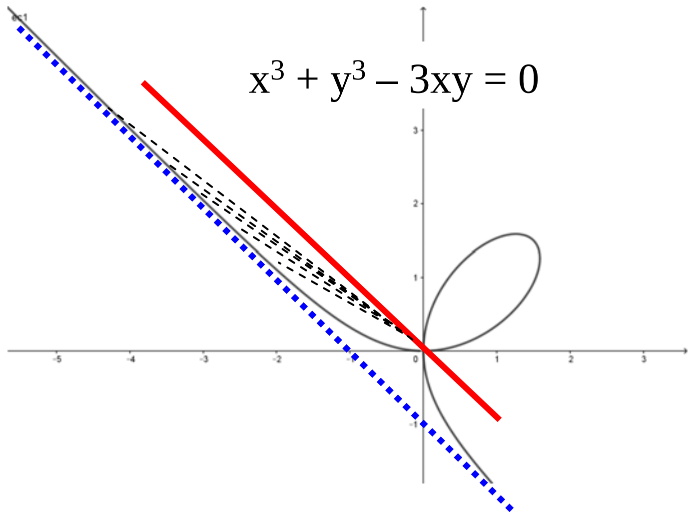
$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

5. Ramas infinitas. Asíntotas. Ramas parabólicas

Dirección asintótica de C

Es una **dirección** D_r tal que r es el límite de las rectas determinadas por (0,0) y (x,y) cuando (x,y) se mueve por la curva de forma que $(x,y) \to \infty$





Si **s** es una recta de D_r tal que lim dist(P,C) = 0
diremos que s es **asíntota** de C

Si no existe s tal que lim dist(P,C) = 0 entonces decimos que C tiene una **rama parabólica** en la dirección D_r

$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

5. Ramas infinitas. Asíntotas. Ramas parabólicas

Asíntotas paralelas a los ejes

Si ordenamos en potencias de y $\quad F(x,y) = x^p g_0(y) + x^{p-1} g_1(y) + \ldots + g_p(y) = 0$

$$\boxed{y = b \quad \text{es asíntota de C} \quad \Leftrightarrow \quad g_0(b) = 0}$$

Análogamente si $\quad F(x,y) = y^q h_0(x) + y^{q-1} h_1(x) + \ldots + h_q(x) = 0$

$$\boxed{x = a \quad \text{es asíntota de C} \quad \Leftrightarrow \quad h_0(a) = 0}$$

$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$

5. Ramas infinitas. Asíntotas. Ramas parabólicas

Direcciones asintóticas de C

La ecuación conjunta de de todas las direcciones asintóticas de C es

$$f_n(x,y) = 0$$

$$\boxed{y = ax \text{ es dirección asintótica} \quad \Leftrightarrow \quad f_n(1,a) = 0}$$

Para calcular b tal que la recta y = ax + b "se aproxima" a C

$$bf'_n(1,a) + f_{n-1}(1,a) = 0$$

Si esta ecuación NO tiene solución hay rama parabólica en la dirección y = ax

Si esta ecuación es idénticamente nula se calcula b en

$$\frac{1}{2}b^2 f''_n(1,a) + bf'_{n-1}(1,a) + f_{n-2}(1,a) = 0$$

$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

6. Información adicional

Puntos de tangencia vertical u horizontal
Puntos de inflexión
Puntos de corte con las asíntotas (si existen)

$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$

7. Paso al plano proyectivo

Homogeneizamos la ecuación de la curva C: $F(x, y) = 0$

$x = x_1/x_0 \quad y = x_2/x_0$ (tomando $x_0 = 0$ como recta del infinito)

La ecuación homogénea de C es $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

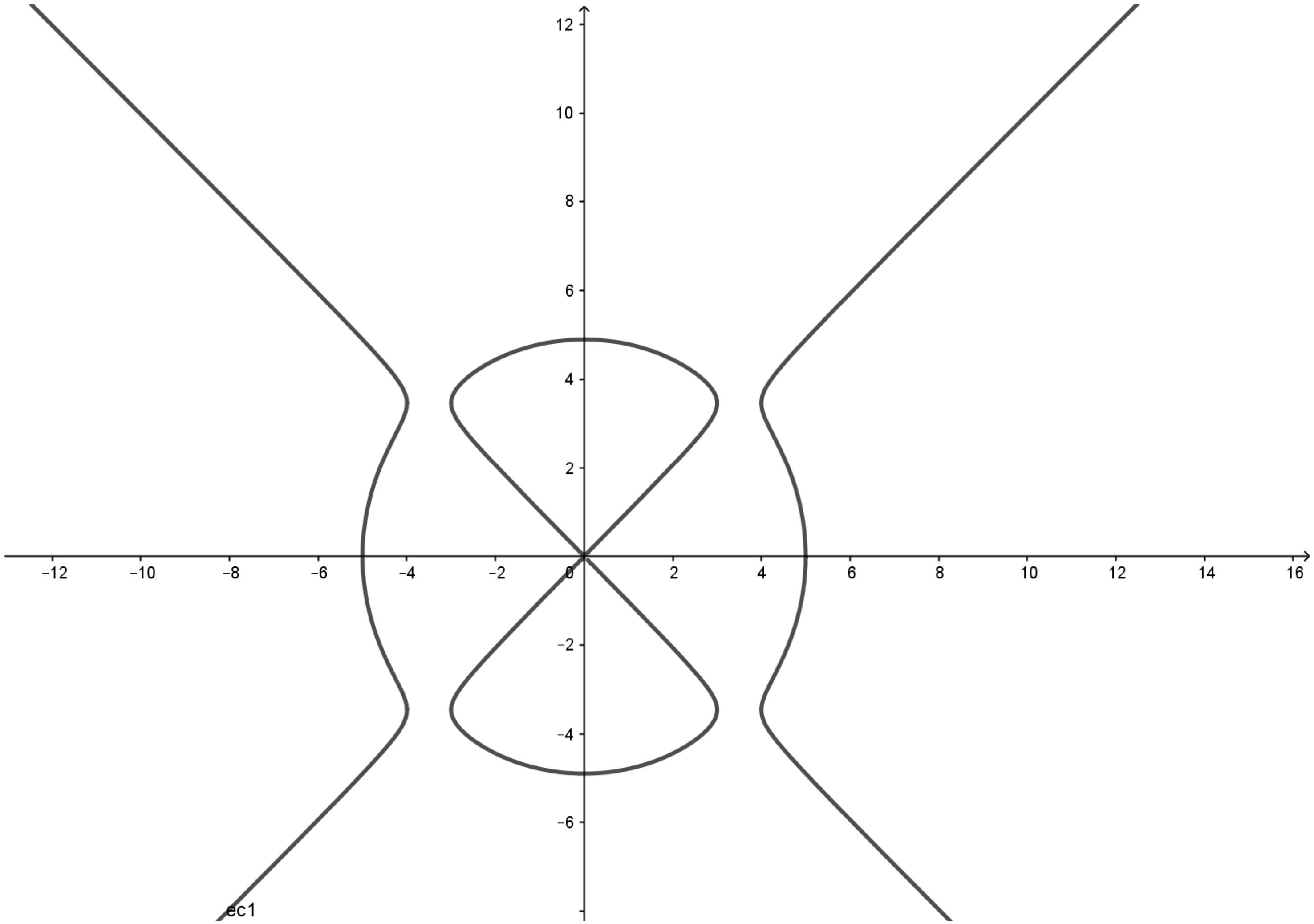
Las asíntotas de C son las tangentes a C en los puntos del infinito $C \cap (x_0 = 0)$

Si la tangente a C en uno de esos puntos $(0, b, -a)$ es la recta $x_0 = 0$, entonces C tiene una rama parabólica en la dirección de la recta que pasa por $(1,0,0)$ y $(0, b, -a)$, es decir en la dirección $ax + by = 0$

La recta tangente a $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ en el punto $P = (p_0,p_1,p_2)$ es:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_P x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P x_2 = 0$$

$$Y^4 - X^4 - 24Y^2 + 25X^2 = 0$$



$$X_2^4 - X_1^4 - 24X_0^2X_2^2 + 25X_0^2X_1^2 = 0$$