NÚMEROS DE CATALAN

Gregorio Hernández Peñalver

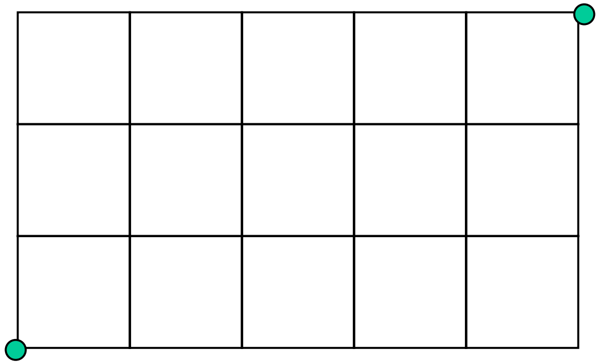
UPM

Matemática Discreta II

(MI)

Números de Catalan

B(5,3)



A(0,0)

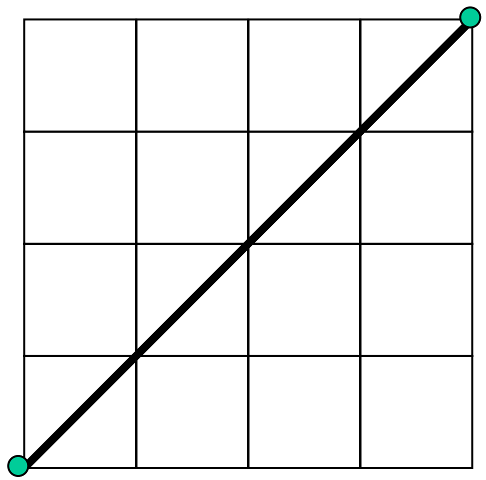
Rutas en una cuadrícula

Rutas N-E de A a B hay $\binom{8}{3}$

Rutas N-E desde A(0,0) hasta B(m,n)

$$\binom{m+n}{n}$$

B(n,n)

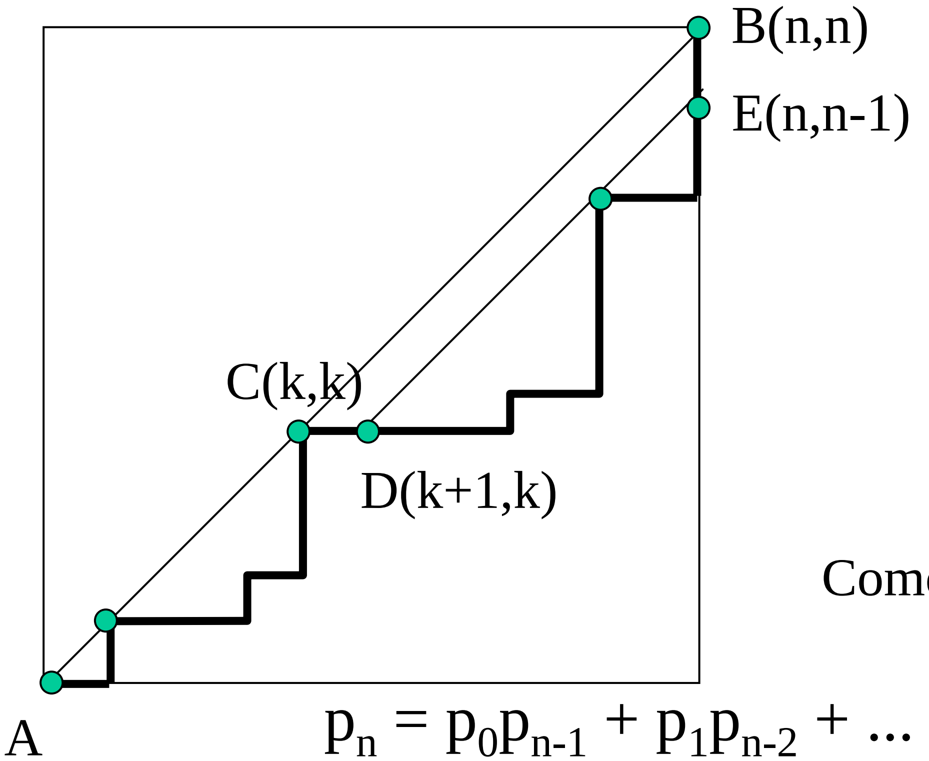


A(0,0)

Rutas A-B sin sobrepasar la diagonal

$p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=5$, ... , $p_n=?$

Números de Catalan



C último punto en la diagonal

Ruta A-B es A-C-D-E-B

Rutas A-C p_k

Rutas D-E p_{n-k-1}

Rutas A-B con C último punto hay $p_k \, p_{n-k-1}$

Como k toma los valores 0,1, 2, ... , n-1

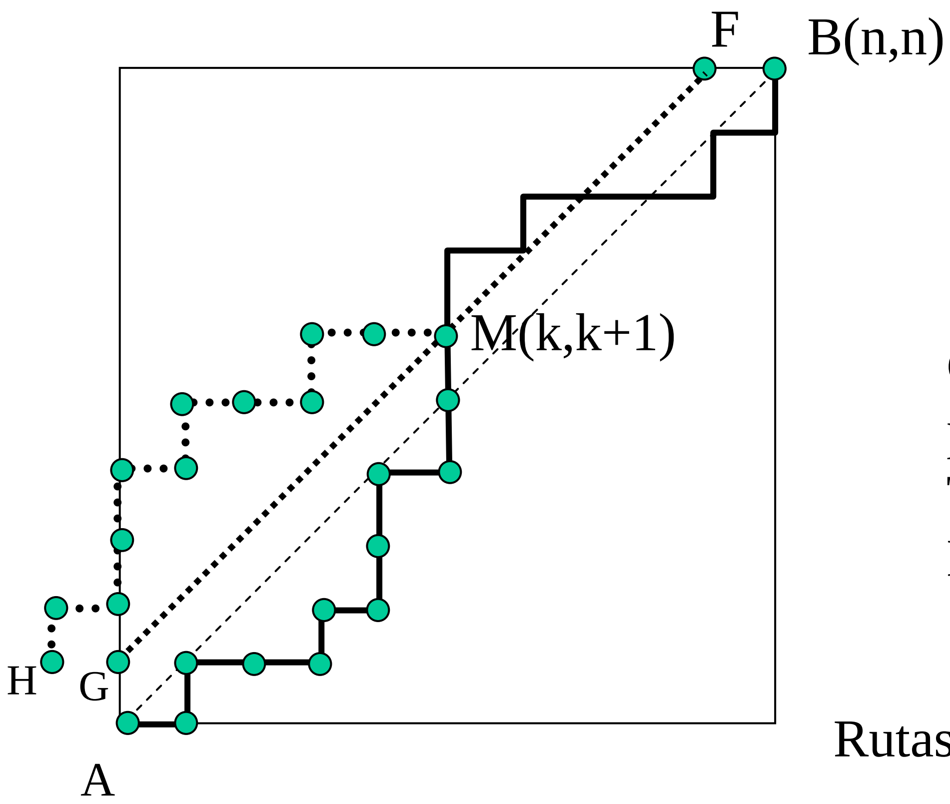
$$p_n = p_0 p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \dots + p_{n-1} p_0 \qquad (\text{con } p_0 = 1)$$

relación de recurrencia NO lineal

La solución es: $$p_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad \text{para } n \geq 0$$

Números de Catalan 1, 1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, ...

Números de Catalan



Rutas totales A-B $\binom{2n}{n}$

Rutas “malas” ?

M primer punto encima diagonal

Cambiamos la parte de ruta “mala” A-M por su simétrica respecto de GF

Tenemos así ruta Norte-Este desde H(-1,1) hasta B(n,n)

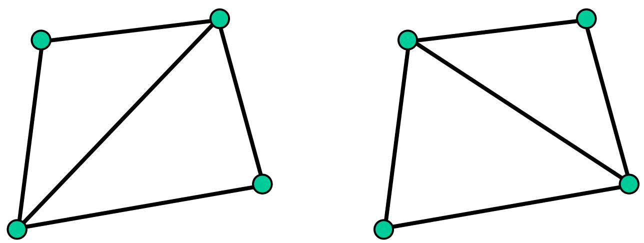
Rutas malas $\binom{n+1+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$

Rutas bajo la diagonal $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

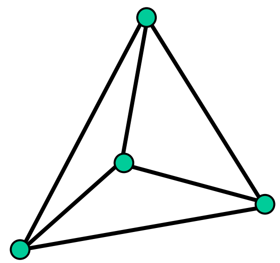
Triangulaciones

Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

n=4



2 formas



sólo una

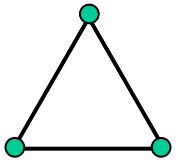
.... depende de la posición relativa de los puntos !

Triangulaciones

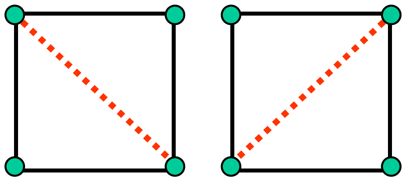
Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

Sólo hay respuesta exacta cuando los puntos son los vértices de un polígono convexo

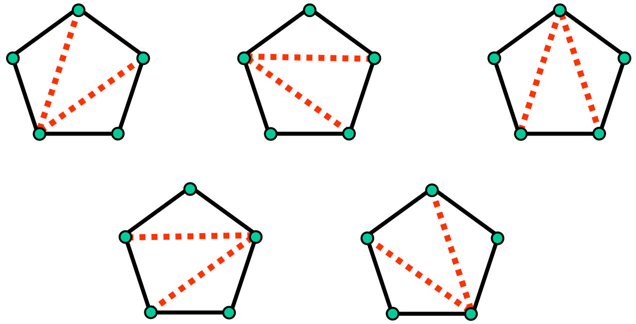
$t_3 = 1$



$t_4 = 2$



$t_5 = 5$



Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas podemos triangular S?

Sólo hay respuesta exacta cuando los puntos son los vértices de un polígono convexo

$$t_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} \approx 4^n \frac{1}{n^{3/2}}$$

$t_3 = 1$ $t_4 = 2$ $t_5 = 5$

1, 2, 5, 14, 42, 132, ... Números de Catalan

$$c_n = t_{n+2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

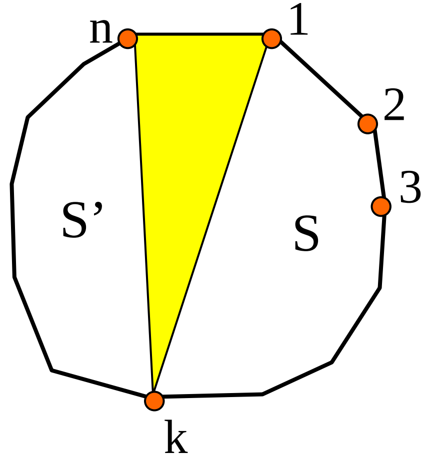
Números de Catalan

1,1,2,5,14,42,132,429,... números de Catalan $\quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

1,1,2,3,5,8,13,21,34, ... números de Fibonacci

Fibonacci $\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_1 = 1,\ F_2 = 1$

Triangulaciones $\quad t_n = t_2\, t_{n-1} + t_3\, t_{n-2} + \ldots + t_k t_{n-k-1} \ldots + t_{n-1}\, t_2 \qquad (t_2=1)$



S polígono de k vértices
S' polígono de $n-k-1$ vértices

Utilizando el triángulo $\{1kn\}$
hay $t_k \cdot t_{n-k-1}$ triangulaciones

Números de Catalan

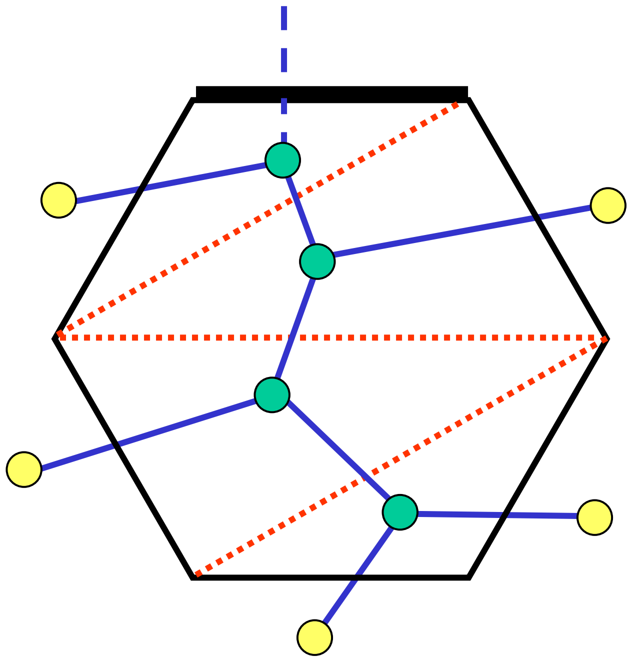
1,1,2,5,14,42,132,429,... números de Catalan $\quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

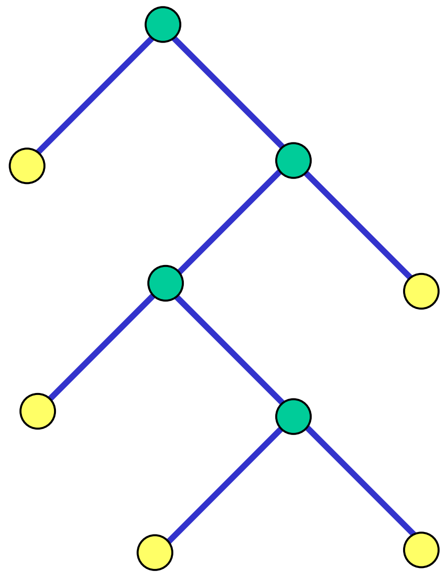
1,1,2,3,5,8,13,21,34, ... números de Fibonacci

- Triangulaciones de un polígono convexo de n+2 vértices
- Árboles planos binarios con n+1 hojas
- Formas de colocar paréntesis en un producto de n+1 factores
- Caminos monótonos en una malla desde (0,0) a (n,n) sin sobrepasar la diagonal
- ....
- .... hasta 61 estructuras

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

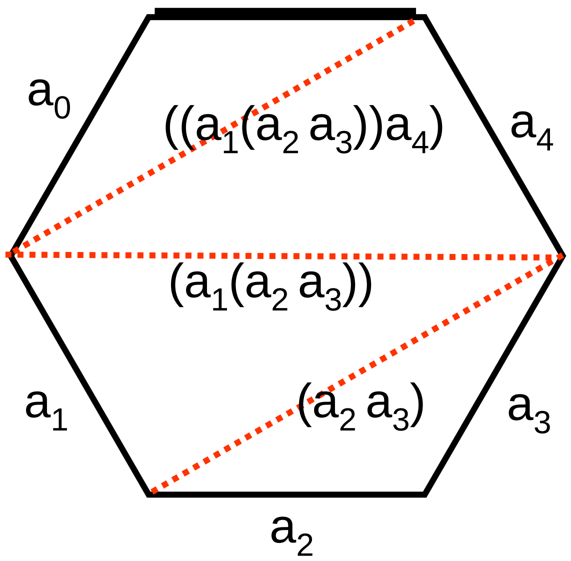




Árbol plano binario con n+1 hojas

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

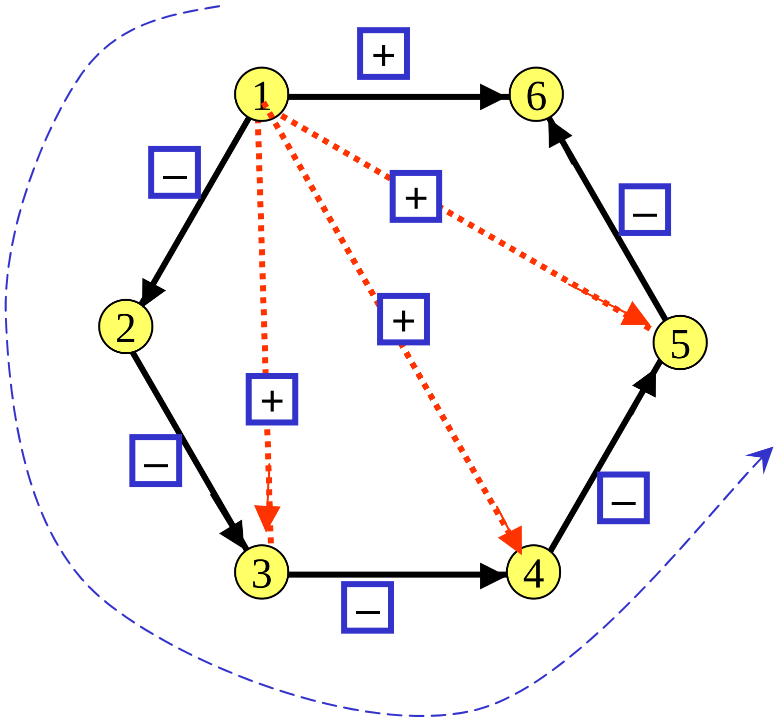


$(a_0((a_1(a_2\ a_3))\ a_4))$

Paréntesis para n+1 factores

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

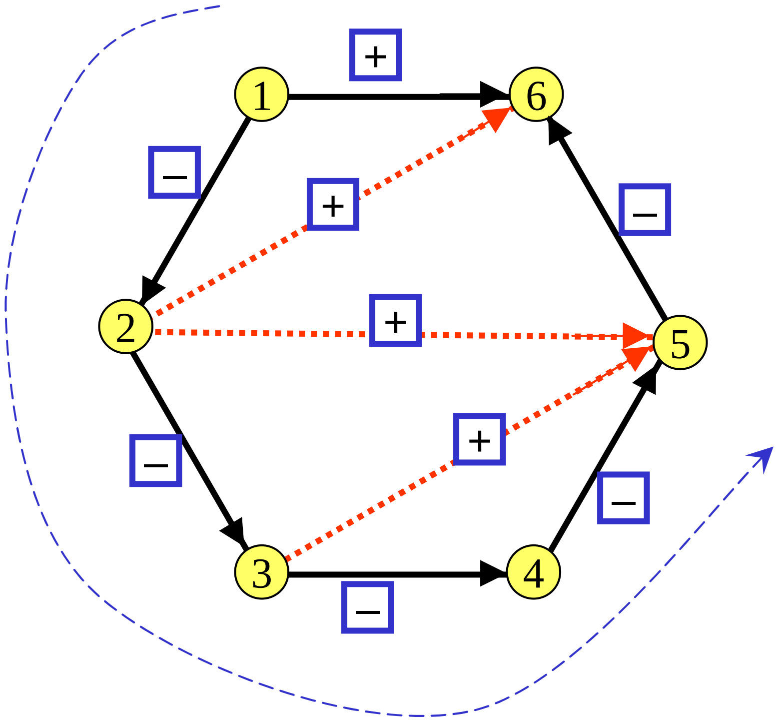


$+ + + + - - - -$

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

Números de Catalan

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices



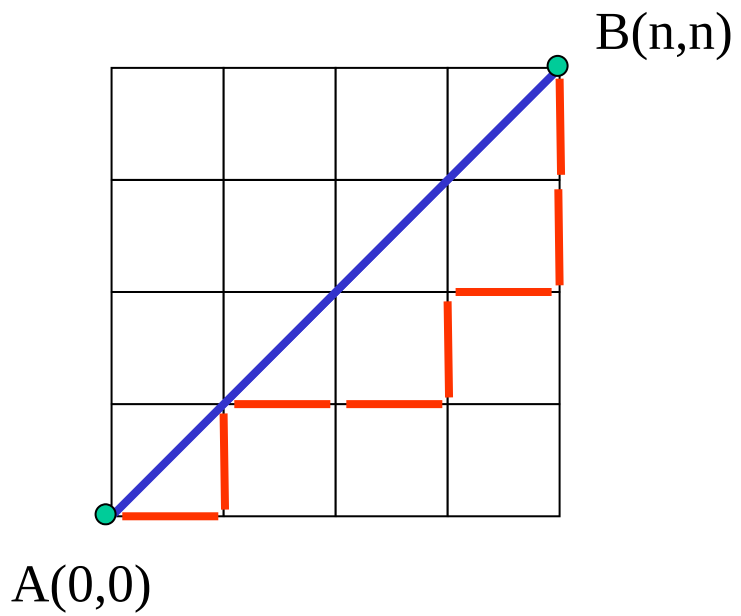
$+ - + + - + - -$

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

Números de Catalan

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

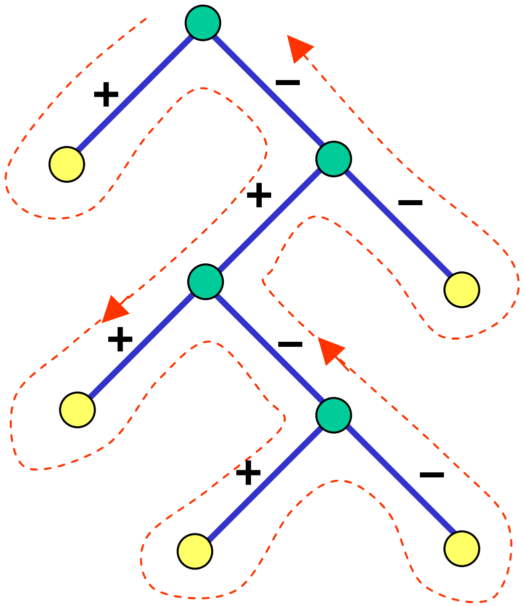
$+ - + + - + - -$



Caminos en la cuadrícula n×n de A
hasta B sin sobrepasar la diagonal

Números de Catalan

Árbol plano binario con n+1 hojas



+ – + + – + – –

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

Números de Catalan

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

$$+ + + + - - - -$$

$$((((a_0 a_1) a_2) a_3) a_4)$$

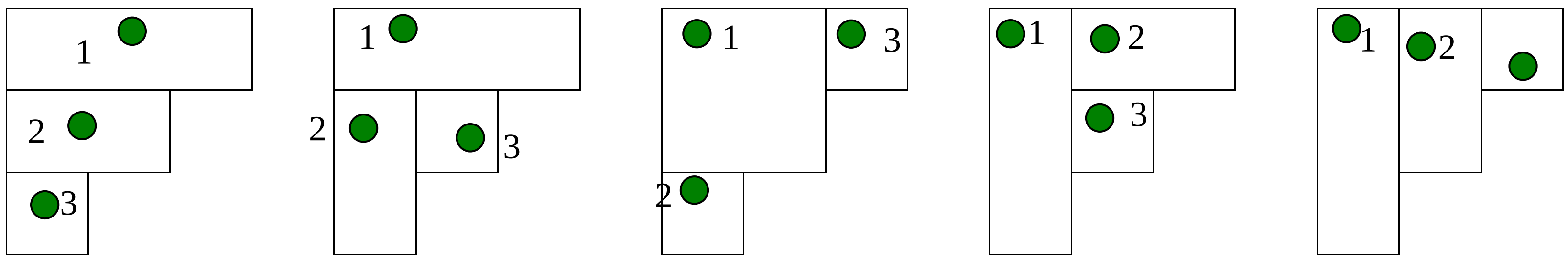
Paréntesis para n+1 factores

Signo + $\rightarrow$ abrir paréntesis (
Signo – $\rightarrow$ poner un factor

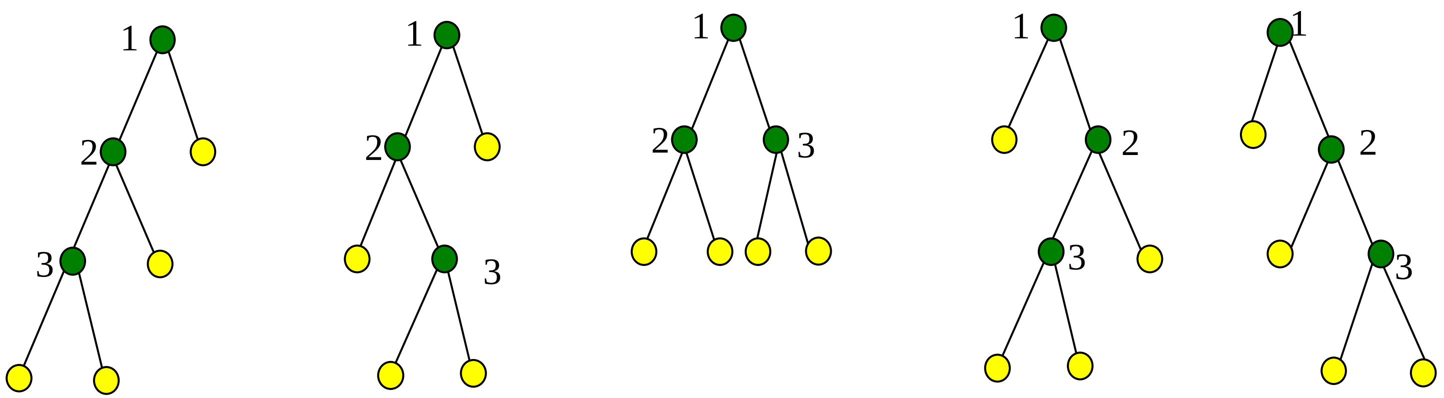
Números de Catalan

Escaleras de altura n formadas con n rectángulos

Una figura con forma de escalera de altura n se embaldosa con n rectángulos. El número de formas de realizarlo es C_n

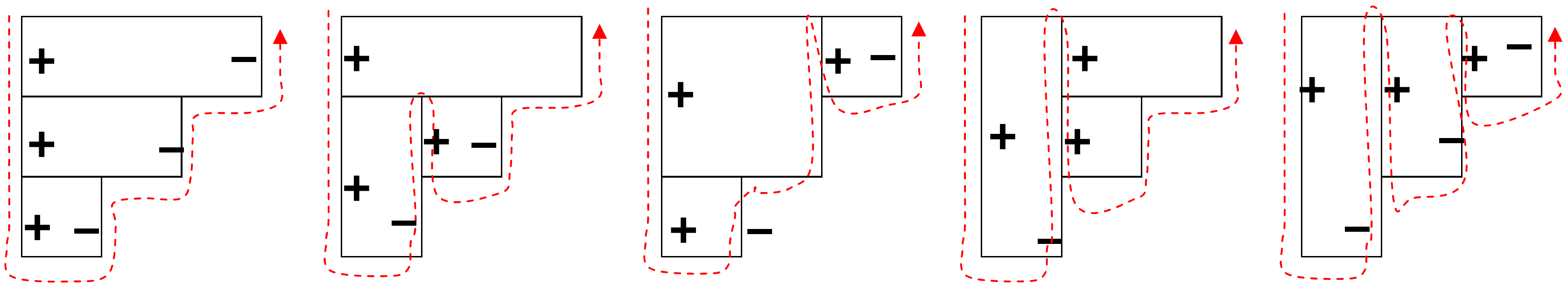


Árbol plano binario con n+1 hojas



Números de Catalan

Escaleras de altura n formadas con n rectángulos

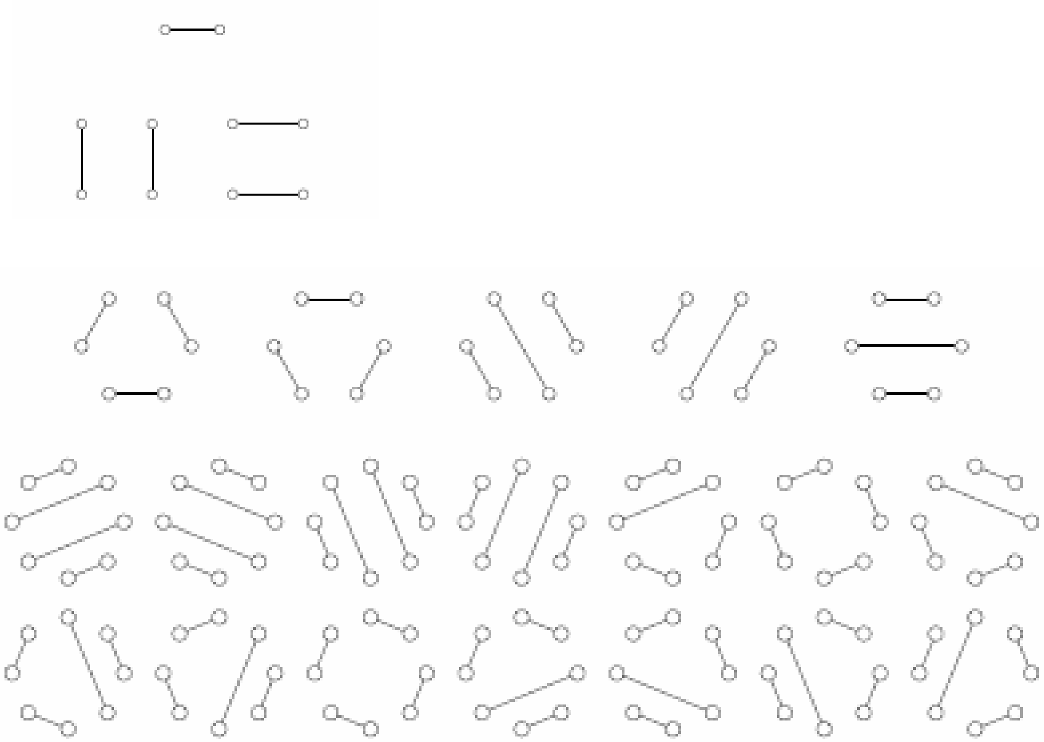


+++ – – –   ++ – + – –   ++ – – + –   + – ++ – –   + – + – + –

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

Números de Catalan

En una circunferencia hay 2n puntos. Se dibujan n cuerdas entre ellos sin cortes. ¿De cuántas formas se puede hacer?
2n personas en una mesa circular. Se saludan sin cruzarse las manos



n=1 — 1

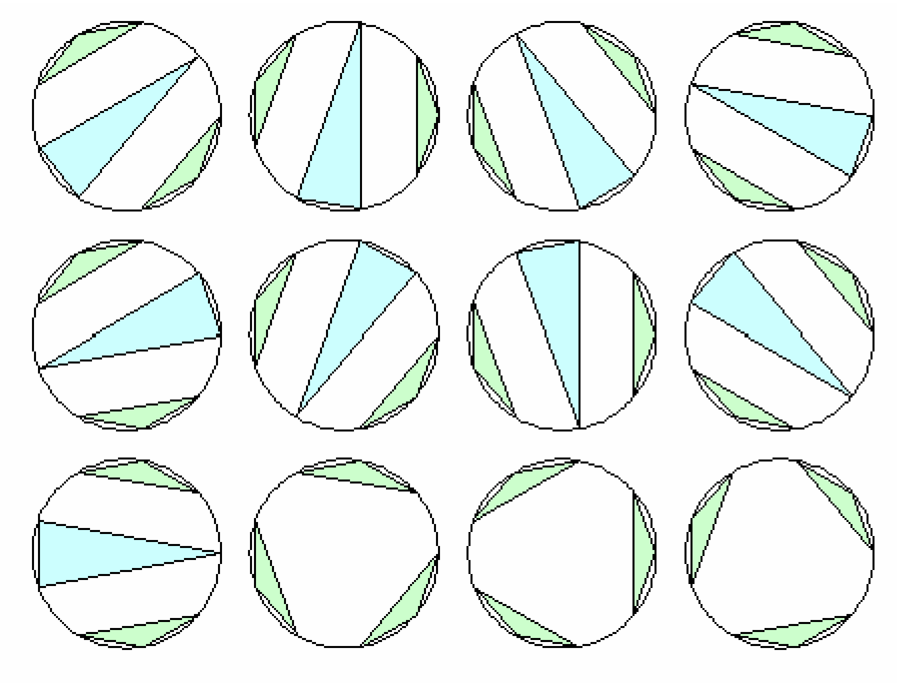
n=2 — 2

n=3 — 5

n=4 — 14

Números de Catalan

¿De cuántas formas pueden dibujarse n triángulos sin solaparse entre 3n puntos en una circunferencia?



Más información en
http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_numbers
y las referencias que ahí se indican