Universidad Politécnica
de Madrid

MATROIDES

y
Optimización combinatoria

Gregorio Hernández
UPM

MATROIDES

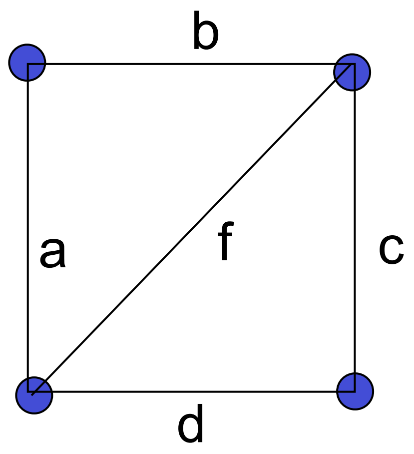
1935 WHITNEY (unifica Álgebra Lineal y Grafos)
"On the abstract properties of linear dependence"

1936 MACLANE (visión geométrica)
"Some interpretations of abstract linear dependance
in terms of projective geometries"

1967 MIRSKY, PERFECT (relación con transversalidad)
Applications of the notion of independence to problems of
combinatorial analysis

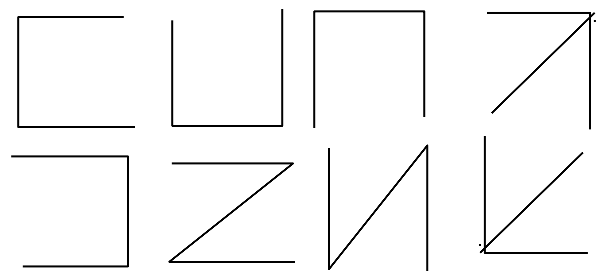
MATROIDES (a partir de un grafo)

Dado G = (V, A) grafo, **M(G)** es la matroide definida sobre A cuyos conjuntos independientes son los subgrafos acíclicos



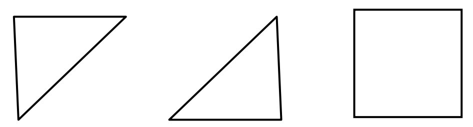
$M(K_4 - e)$

F = {conjuntos de aristas que no contienen un ciclo}



Las **bases** son los árboles generadores del grafo G

Los **circuitos** son los ciclos de G



M(G) es **simple** si el grafo G es simple

MATROIDES (a partir de una matriz)

Dada una matriz A, **M[A]** es la matroide cuyo conjunto base S son los vectores-columna de A y cuyos conjuntos independientes son los conjuntos de vectores-columna de A que son linealmente independientes.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Etiquetamos las columnas con S = {1,2,3,4,5,6,7}

F consta de los subconjuntos de S – {7} con a lo sumo tres elementos, excepto {1,2,4}, {2,3,5}, {2,3,6} y los que contengan {5,6}

Bases de M[A] {1,2,3}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,3,4}, …

Circuitos de M[A] {7}, {5,6}, {1,2,4}, {2,3,5}, {2,3,6}

M[A] es simple si …

MATROIDES (axiomas de independencia)

Una **matroide** M es un par (S,F) donde S es un conjunto finito y F una familia de subconjuntos de S, llamados conjuntos **independientes**, tales que:

(**I1**) $\emptyset \in F$

(**I2**) Si $A \in F$ y $B \subset A$, entonces $B \in F$ *(sistema hereditario)*

(**I3**) Si $X, Y \in F$, $|Y| > |X|$ entonces existe $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\} \in F$ *(prop. de aumento)*

Base en M, subconjunto independiente maximal
Circuito en M, subconjunto dependiente minimal

Matroide **simple**
En F están TODOS los subconjuntos de tamaño 1 y 2 de S

Un problema de Optimización Combinatoria

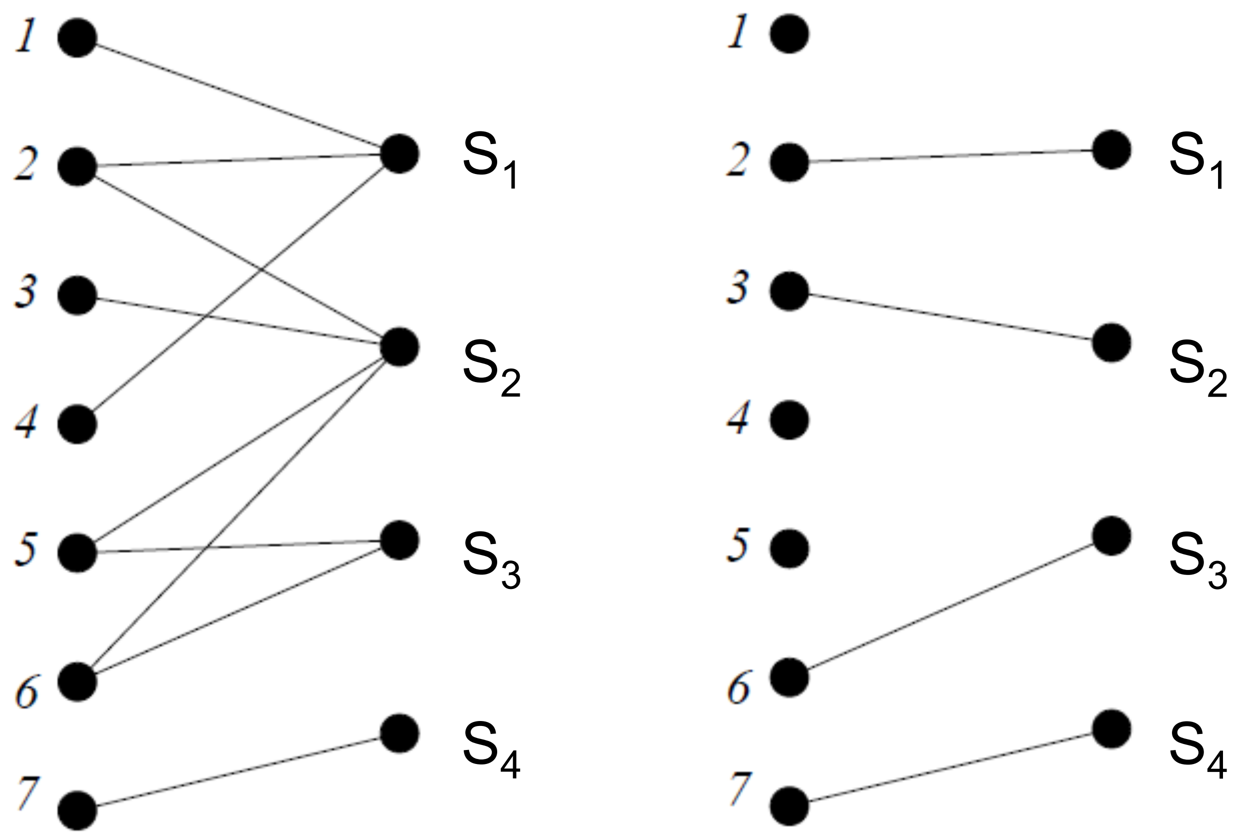
Un supervisor tiene m trabajos J_1, J_2, … J_m a realizar por un trabajador durante un día. Dispone de n empleados 1, 2, …, n cada uno de los cuales está cualificado para realizar algunos de ellos.
El supervisor desea conocer cuál es el máximo número de trabajos que se pueden realizar en un día.

Veremos que este número es el rango de cierta matroide

Sea E conjunto finito, $T = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ familia $S_i \subseteq E$
Por ejemplo, T = ({1,2,4}, {1,2,3,5,6}, {5,6}, {7})
Una **transversal parcial** (o sistema de representantes distintos, SDR) de T es un conjunto de k elementos distintos de E, uno de cada uno de los subconjuntos S_j.
Si k = m la transversal parcial se llama **transversal**

En el ejemplo, {2,3,6,7} es una transversal porque 2, 3, 6 y 7 están en S_1, S_2, S_3 y S_4, respectivamente

MATROIDES TRANSVERSALES



La transversal {2,3,6,7} es un emparejamiento en el grafo bipartido asociado al par (E, T)

MATROIDES TRANSVERSALES

Teorema

Sea E conjunto finito, T = (S_1, S_2, ... , S_m) familia $S_i \subseteq E$

Sea F la familia de todas las transversales parciales de T. Entonces (E, F) es una matroide

Es decir, las transversales parciales son los conjuntos independientes de una matroide, que designamos por **M[T]**

Las bases son las transversales parciales maximales de T

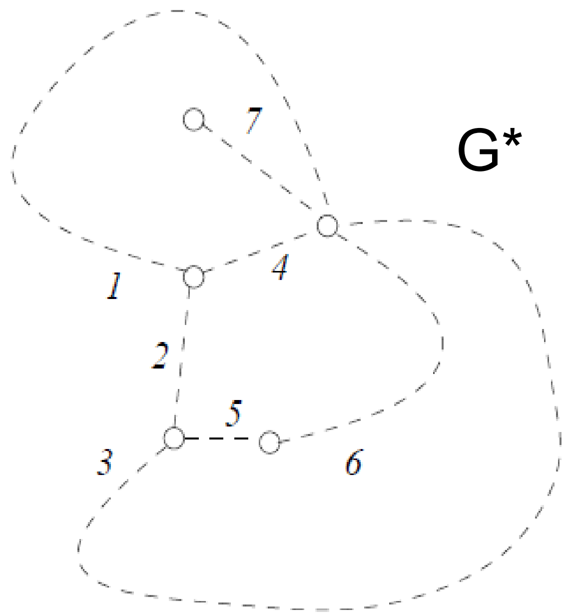
Los circuitos son los conjuntos minimales que no son transversales parciales

Una matroide es **transversal** si es isomorfa a M[T] para alguna familia T de un conjunto finito E

MATROIDES TRANSVERSALES

T = ({1,2,4}, {1,2,3,5,6}, {5,6}, {7})

La matroide transversal M[T] es isomorfa a la matroide M(G*) de ciclos de G*

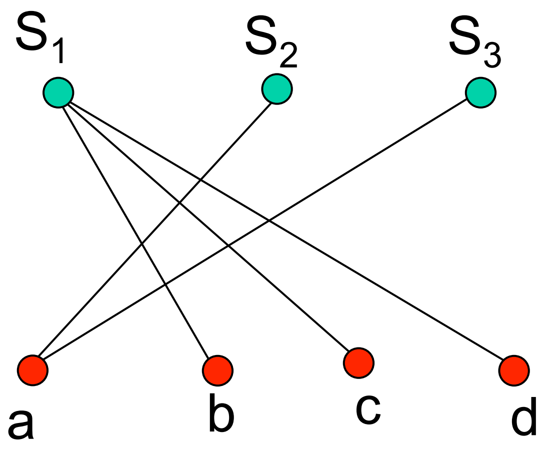


Para comprobarlo basta observar que (las listas de aristas de) los árboles generadores de G* coinciden con la lista de las transversales de T

MATROIDES TRANSVERSALES

$E = \{a,b,c,d\}$, $T = (S_1, S_2, S_3)$, $S_1 = \{b,c,d\}$, $S_2 = S_3 = \{a\}$

Transversales parciales $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$



Las transversales parciales son emparejamientos en el grafo bipartido (E, T)

MATROIDES TRANSVERSALES

- Hay, relativamente, pocas matroides transversales
- Toda matroide uniforme es transversal

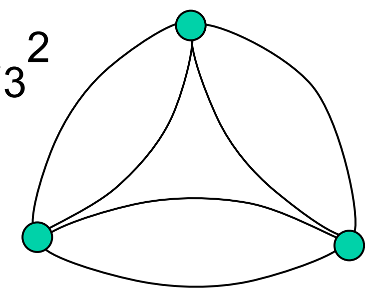
$U_{2,4}$ rango 2 Bases $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

$E = \{1,2,3,4\}$ $T = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Se comprueba que $M[T] \approx U_{2,4}$

- Las matroides gráficas $M(C_n^2)$ y $M(K_4)$ no son transversales

C_3^2



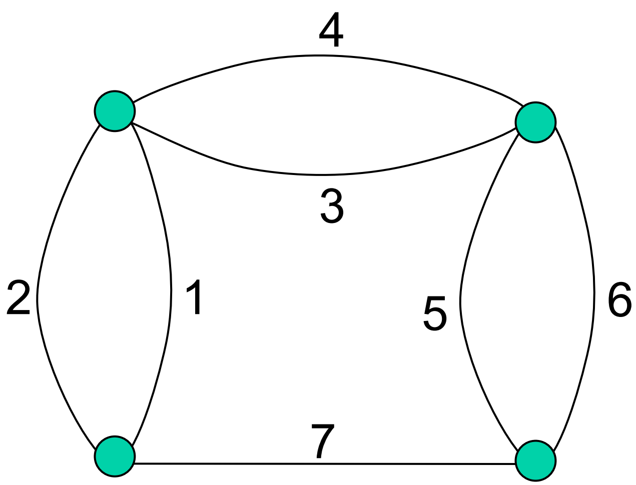
La matroide de ciclos de un grafo G es transversal $\Leftrightarrow$ G no tiene a K_4 ni a C_n^2 como minors

MATROIDES TRANSVERSALES

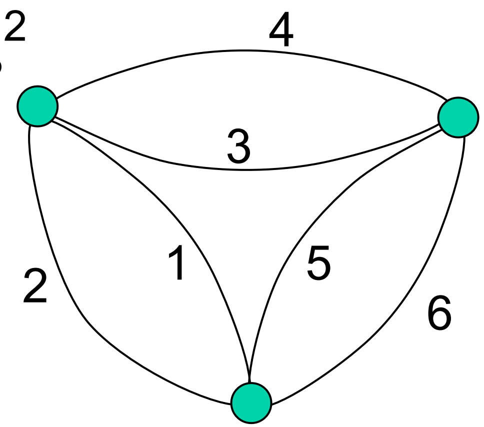
• La clase de matroides transversales NO es cerrada para la contracción

La matroide M(G) sí es transversal, pero si contraemos la arista 7, la matroide $M(G)/7 \approx C_3^2$ NO es transversal

G

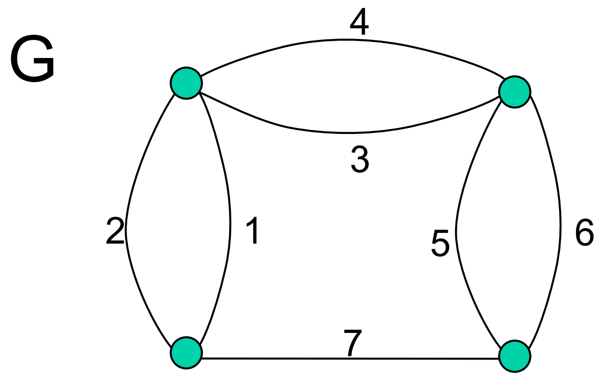


C_3^2

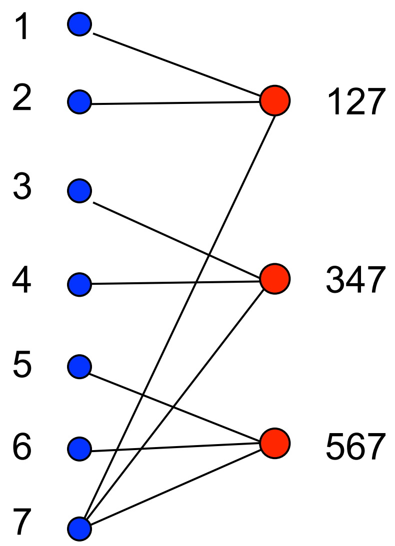


MATROIDES TRANSVERSALES

La matroide M(G) sí es transversal



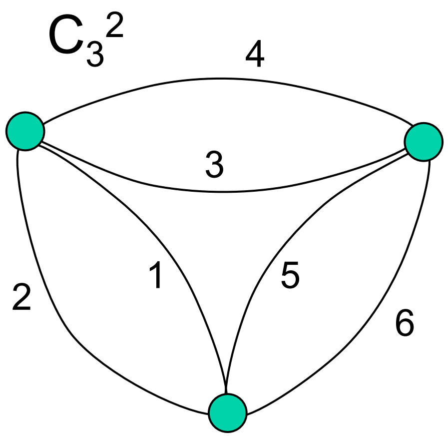
E = {1,2,3,4,5,6,7}
T = {{1,2,7}, {3,4,7}, {5,6,7}}
Comprobemos que M[T] ≈ M(G) viendo que bases en M[T] ↔ bases en M(G)



Las bases en M(G) son (las aristas de) los árboles generadores de G.
Por ejemplo, 137, 145, 146, 157, …
Y cada uno corresponde a una transversal de T

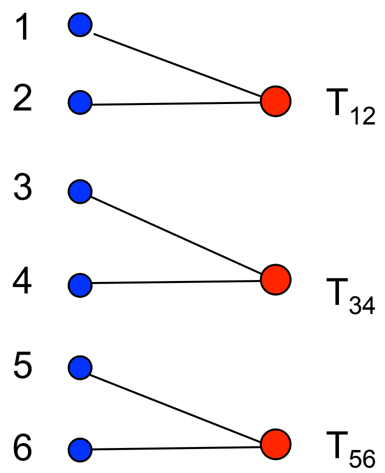
MATROIDES TRANSVERSALES

La matroide $M(C_3^2)$ NO es transversal



Si fuera transversal existiría T tal que $M[T] \approx M(C_3^2)$ sobre $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Los conjuntos de cardinal uno y dos son independientes en M(G) salvo {1,2}, {3,4} y {5,6}

Por tanto, cada uno de ellos sólo aparece en un único miembro de T.
Los denominamos T_{12}, T_{34} y T_{56}



Además {1,3}, {1,5} y {3,5} son independientes en M(G) luego $T_{12} \neq T_{34} \neq T_{56}$

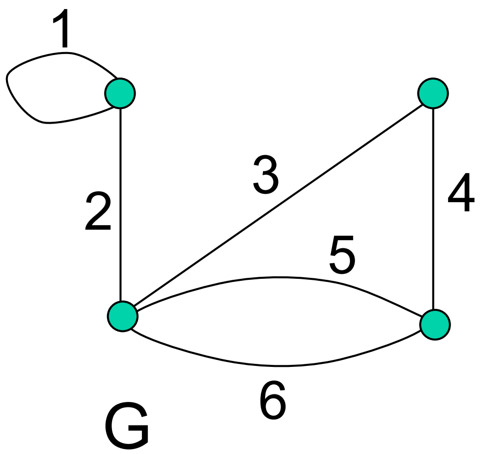
Así {1,3,5} es una transversal parcial en M[T], independiente en M[T], pero es un **ciclo** en M(G) ¡contradicción!

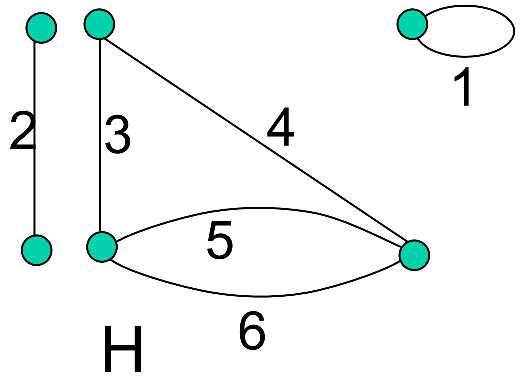
Una matroide gráfica, binaria, regular y transversal

M matroide sobre S = {1,2,3,4,5,6}

Circuitos de M {{1},{5,6},{3,4,5},{3,4,6}}

Bases de M {{2,3,4},{2,3,5},{2,3,6},{2,4,5},{2,4,6}}





$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

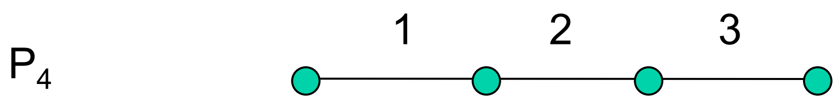
M = M(G) = M(H) = M[A] = M(T)

T = {{2},{3,4},{4,5,6}}

MATROIDES TRANSVERSALES y EMPAREJAMIENTOS

Toda transversal es un emparejamiento, pero los emparejamientos de un grafo NO siempre originan una matroide

Consideremos el grafo P_4 con aristas etiquetadas 1, 2, 3



No se verifica la propiedad de aumento **(I3)**
Tomando X = {2}, Y = {1,3} no se puede aumentar el conjunto X

Teorema
Si G es un grafo y F la familia de subconjuntos X de V(G) tales que G tiene un emparejamiento cuyos extremos contienen a X, entonces (V(G), F) es una matroide

Toda matroide transversal es isomorfa a una matroide de este tipo

Teoremas tipo Hall

Sea E conjunto, T = $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ familia $S_i \subseteq E$

Teorema de Hall

T posee una transversal si y sólo si, para cada J $\subseteq \{1,2,\ldots,m\}$

$$\left| \bigcup_{i \in J} S_i \right| \geq |J|$$

Teorema de Rado (1942)

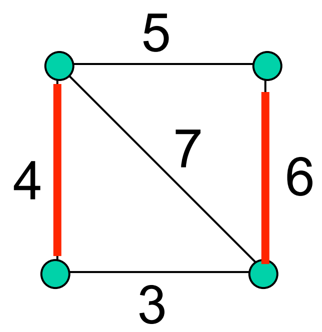
Si M es una matroide sobre E, entonces T tiene una transversal que es independiente en M si y sólo si, para cada J $\subseteq \{1,2,\ldots,m\}$

$$r\left(\bigcup_{i \in J} S_i \right) \geq |J|$$

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

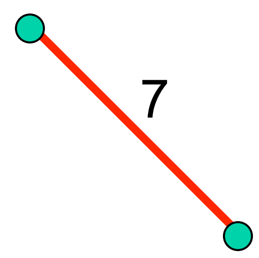
Heurística voraz en optimización
Estrategia local que encuentra un óptimo global

- Algoritmo de Kruskal para obtener MST
- Los algoritmos voraces no siempre funcionan



Emparejamiento de peso máximo

Algoritmo voraz



Emparejamiento de peso máximo

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

$M = (S,F)$ matroide con peso $w(e) \geq 0$ en cada elemento $e \in S$

Problema: Obtener el conjunto independiente de máximo peso

Algoritmo voraz: Elegir sucesivamente el elemento de mayor peso que, con los ya elegidos, forme un conjunto independiente

1. Empezamos con $B = \emptyset$
2. Mientras exista $e \notin B$ tal que $B \cup \{e\} \in F$, elegir el elemento e tal que $w(e)$ máximo, y reemplazar B por $B \cup \{e\}$

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

Lema

El conjunto B obtenido al aplicar el algoritmo voraz a una matroide M, es un conjunto independiente de peso máximo y una base de M de peso máximo

Dem.:
Como los pesos son positivos, un conjunto independiente de máximo peso será una base de M.
Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ (los elementos en el orden elegido por el algoritmo)
$D = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ otro conjunto independiente maximal de M, también ordenado por el peso de sus elementos. Tanto B como D son maximales, luego sus cardinales son iguales.
Demostraremos que $w(e_i) \geq w(f_i)$ para todo índice i
Supongamos que no es así y que k + 1 es el menor índice para el que $w(e_{k+1}) < w(f_{k+1})$

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

Lema

El conjunto B obtenido al aplicar el algoritmo voraz a una matroide M, es un conjunto independiente de peso máximo y una base de M de peso máximo

Dem.:
Consideramos $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, $Y = \{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$
Como $|Y| = |X| + 1$ la condición (I3) implica que existe $f_j \in Y$ tal que $X \cup \{f_j\}$ es independiente.
Pero $w(f_j) \geq w(f_{k+1}) > w(e_{k+1})$
Luego el algoritmo voraz debería haber elegido f_j en lugar de e_{k+1}
Contradicción.
Por tanto, $w(e_i) \geq w(f_i)$ para todo i
Y así $w(B) \geq w(D)$ para cualquier D independiente maximal

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

Teorema de Rado (1957)

Las matroides son los sistemas hereditarios (M, S) para los que el algoritmo voraz siempre funciona, es decir, para cualquier función peso definida sobre S el algoritmo voraz obtiene un conjunto independiente de máximo peso

Sea F una familia de subconjuntos de un conjunto finito S.
Entonces M = (S,F) es una matroide $\Leftrightarrow$ F satisface las condiciones

(**I1**) $\emptyset \in F$

(**I2**) Si $A \in F$ y $B \subset A$, entonces $B \in F$ (sistema hereditario)

(**GA**) para función peso real y positiva w sobre S, el **Algoritmo Voraz** obtiene un elemento de F de peso máximo

MATROIDES y ALGORITMO VORAZ

Falta solo probar que si F satisface (I1), (I2) y (GA) entonces también satisface (I3), es decir,

Si X, Y independientes $k=|X| < |Y| = k+1$, entonces existe $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\}$ es independiente

Supongamos que no existe tal elemento z, entonces se define un peso así:

$$\begin{cases} w(e) = k+2 & \text{si} \quad e \in X \\ w(e) = k+1 & \text{si} \quad e \in Y - X \\ w(e) = 0 & \text{si} \quad e \notin X \cup Y \end{cases}$$

Algoritmo voraz: elige los elementos de peso k+2 y no puede añadir ninguno más porque el conjunto NO sería independiente. Peso total $k(k+2)$

Estrategia óptima: elige los k+1 elementos de Y (de peso k+1)

Peso total $(k+1)^2$ ¡mayor que el obtenido en el algoritmo voraz!

LENGUAJE DE MATROIDES

extiende, simplifica y unifica resultados de:

- grafos
- configuraciones de puntos
- conjuntos de vectores
- transversalidad
- retículos geométricos
- extensiones de cuerpos

BIBLIOGRAFÍA

- G. Gordon, J. McNulty: **Matroids. A Geometric Introduction**, Cambridge University Press, 2012
- J. Oxley, "*What is a matroid?*", (2014) https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf
- J. Oxley, **Matroid Theory**, (2ª ed.) Oxford University Press, 2011
- D. Welsh, "*Matroids and their applications*", in ***Select Topics in Graph Theory***, L. Beineke, R. Wilson (eds.), Academic Press, 1988
- R. J. Wilson, "*An Introduction to matroid theory*", Amer. Math. Monthly, (1973) 500-525.