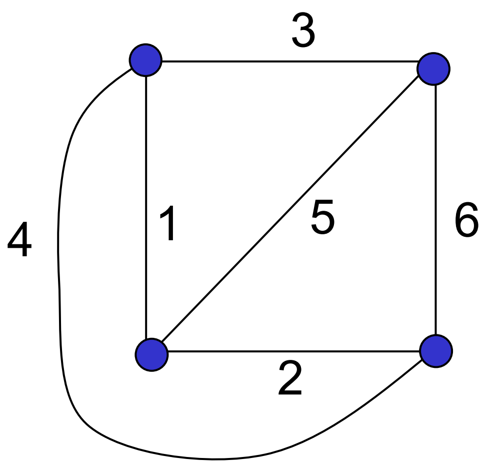
Universidad Politécnica
de Madrid

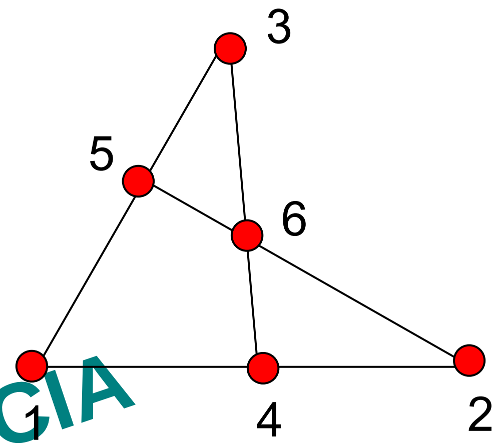
MATROIDES

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria

Objetos distintos ¿distintos?





INDEPENDENCIA

Las aristas de un grafo

Configuración de puntos en el plano

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vectores-columna de una matriz

Conjuntos abiertos en espacio euclídeo

↓ eliminando distancias

Topología conjuntista

Independencia lineal en espacio vectorial

↓ eliminando vectores

MATROIDES

MATROIDES

1935 WHITNEY (unifica Álgebra Lineal y Grafos)
"On the abstract properties of linear dependence"

1936 MACLANE (visión geométrica)
"Some interpretations of abstract linear dependance in terms of projective geometries"

1959-60 TUTTE (matroides gráficas)

Independencia en espacios vectoriales

Sea $S \subset V$ espacio vectorial, X, Y conjuntos linealmente independientes de S con $|X| < |Y|$, entonces existe $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\}$ es linealmente independiente

Independencia en las aristas de grafos

Sean G = (V, A) un grafo, X, Y conjuntos de aristas acíclicos con $|X| < |Y|$, entonces existe una arista $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\}$ es acíclico

Independencia en espacios vectoriales

Sea $S \subset V$ espacio vectorial, X, Y conjuntos linealmente independientes de S con $|X| = k$, $|Y| > k$, entonces existe $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\}$ es linealmente independiente

Dem.

Sea $W = L(X \cup Y)$, $\dim(W) \geq k + 1$

Supongamos que $X \cup \{z\}$ es linealmente dependiente $\forall\, z \in Y - X$

Entonces $W \subset L(X)$ luego $\dim(W) = k$

Independencia en las aristas de grafos

Sean $G = (V, A)$ un grafo, X, Y conjuntos acíclicos de aristas con $|X| = k$, $|Y| > k$, entonces existe una arista $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\}$ es acíclico

Dem.

El subgrafo $G(X)$, generado por X, es un bosque con $n - k$ componentes conexas.

$G(Y)$ es un bosque, que no es subgrafo de $G(X)$, y tiene una arista z con extremo en distintas componentes de $G(X)$.

Por tanto, $X \cup \{z\}$ es acíclico

MATROIDES (axiomas de independencia)

Una **matroide** M es un par (S,F) donde S es un conjunto finito y F una familia de subconjuntos de S, llamados conjuntos **independientes**, tales que:

(**I1**) $\emptyset \in F$

(**I2**) Si $A \in F$ y $B \subset A$, entonces $B \in F$ *(sistema hereditario)*

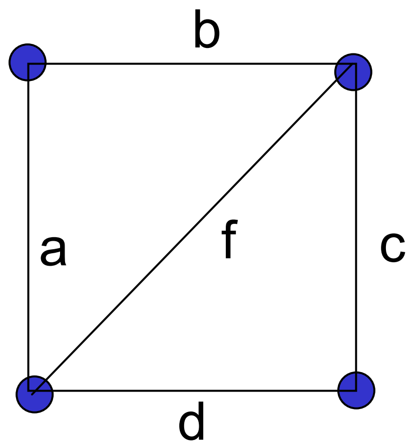
(**I3**) Si $X, Y \in F$, $|Y| > |X|$ entonces existe $z \in Y - X$ tal que $X \cup \{z\} \in F$ *(prop. de aumento)*

Base en M, subconjunto independiente maximal
Circuito en M, subconjunto dependiente minimal

Matroide **simple**
En F están TODOS los subconjuntos de tamaño 1 y 2 de S

MATROIDES (a partir de un grafo)

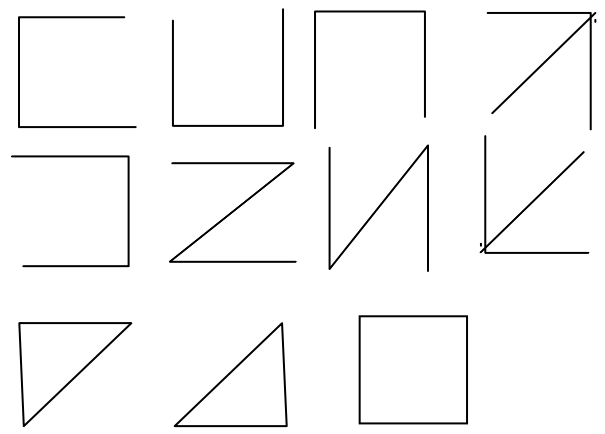
Dado G = (V, A) grafo, **M(G)** es la matroide definida sobre A cuyos conjuntos independientes son los subgrafos acíclicos



M(K_4 - e)

F = {conjuntos de aristas que no contienen un ciclo}

Las **bases** son los árboles generadores del grafo G



Los **circuitos** son los ciclos de G

M(G) es **simple** si el grafo G es simple

MATROIDES (a partir de una matriz)

Dada una matriz A, **M[A]** es la matroide cuyo conjunto base S son los vectores-columna de A y cuyos conjuntos independientes son los conjuntos de vectores-columna de A que son linealmente independientes.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
A = & \multicolumn{7}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Etiquetamos las columnas con
S = {1,2,3,4,5,6,7}

F consta de los subconjuntos de S – {7} con a lo sumo tres elementos, excepto {1,2,4}, {2,3,5}, {2,3,6} y los que contengan {5,6}

Bases de M[A] {1,2,3}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,3,4}, …
Circuitos de M[A] {7}, {5,6}, {1,2,4}, {2,3,5}, {2,3,6}

M[A] es simple si …

MATROIDES (bases y rango)

Base en M=(S,F), subconjunto independiente maximal

Todas las **bases** de una matroide tienen el mismo cardinal

Dem.: Si B, B' son dos bases con $|B| > |B'|$ entonces por (I3) existe $z \in B - B'$ con $B' \cup \{z\}$ independiente con lo que B' no sería maximal !!

Rango

$\text{rang}(X) = \text{máx}\ \{|Z| \ /\ Z \subseteq X \text{ y } Z \text{ es conjunto independiente}\}$

$\text{rang}(M) = \text{rang}(S) = |B|$ con B base de la matroide

$\text{rang}(M(K_4 - e)) = 3$

Si G es grafo conexo de n vértices, entonces $\text{rang}(M(G)) = n - 1$

Si A es una matriz entonces $\text{rang}(M[A]) = \text{rang}(A)$

MATROIDES (a partir de subconjuntos)

Matroides **UNIFORMES**

S conjunto de cardinal n, F la colección de subconjuntos de cardinal ≤ k

(S,F) es una matroide, que se designa por $\mathbf{U_{k,n}}$

Si S = {1,2} tenemos 4 matroides "no isomorfas" sobre S

$F_1 = \{\emptyset\}$, $F_2 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $F_3 = \{\emptyset, \{2\}\}$, $F_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, $F_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

La segunda y tercera tienen la misma "estructura". Existe una biyección de S que conserva conjuntos independientes

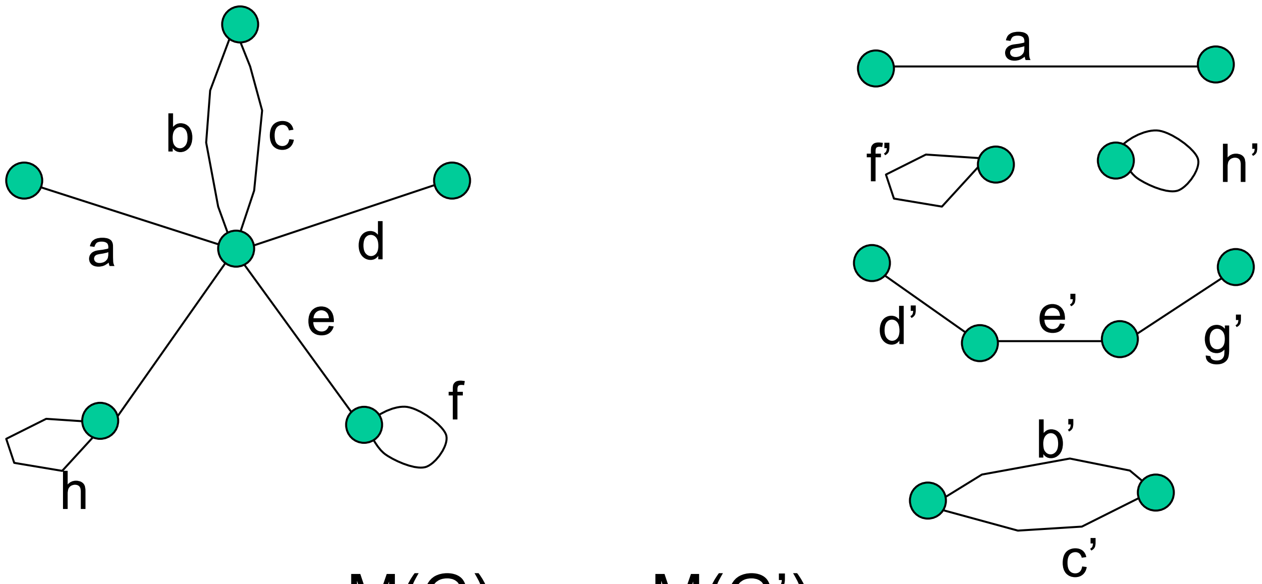
¿Cuántas matroides no isomorfas hay sobre S = {1,2,3}?

Bases de $U_{k,n}$ Subconjuntos de tamaño k

Circuitos Subconjuntos de tamaño k + 1

ISOMORFISMO DE MATROIDES

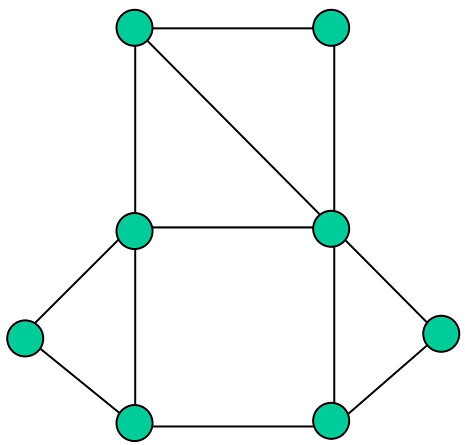
Dos matroides M y M’ (sobre los conjuntos S y S’) son isomorfas si existe una biyección entre S y S’ que conserva la independencia

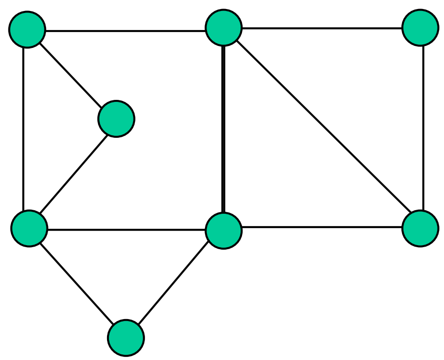


$M(G) \approx M(G')$

ISOMORFISMO DE MATROIDES

Dos matroides M y M’ (sobre los conjuntos S y S’) son isomorfas si existe una biyección entre S y S’ que conserva la independencia





$$M(G) \approx M(G')$$

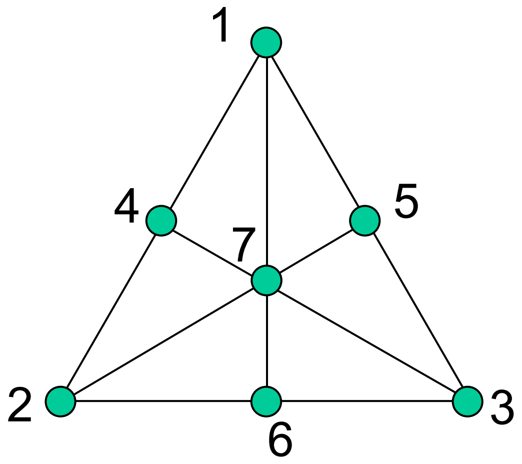
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Sea $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ conjunto de puntos del plano
$F = \{X \subseteq S \; / \; |X| \leq 3$ y X no contiene 3 puntos alineados$\}$

$M = (S,F)$ es una matroide

Los conjuntos dependientes son los formados por 3 puntos alineados y los de cardinal > 3
rang(M) = 3

GEOMETRÍA COMBINATORIA



REPRESENTACIÓN MATRICIAL

$$
\begin{array}{cc}
A_7 = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}
\end{array}
$$

Las columnas son rectas vectoriales en V espacio vectorial de dim 3 sobre el cuerpo $\mathbf{Z}_3$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Se parte de una matriz A (r,n) de rango r, escrita en la forma $[I_r \mid D]$ y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$

En la matriz A NO hay columnas repetidas ni columnas de ceros.

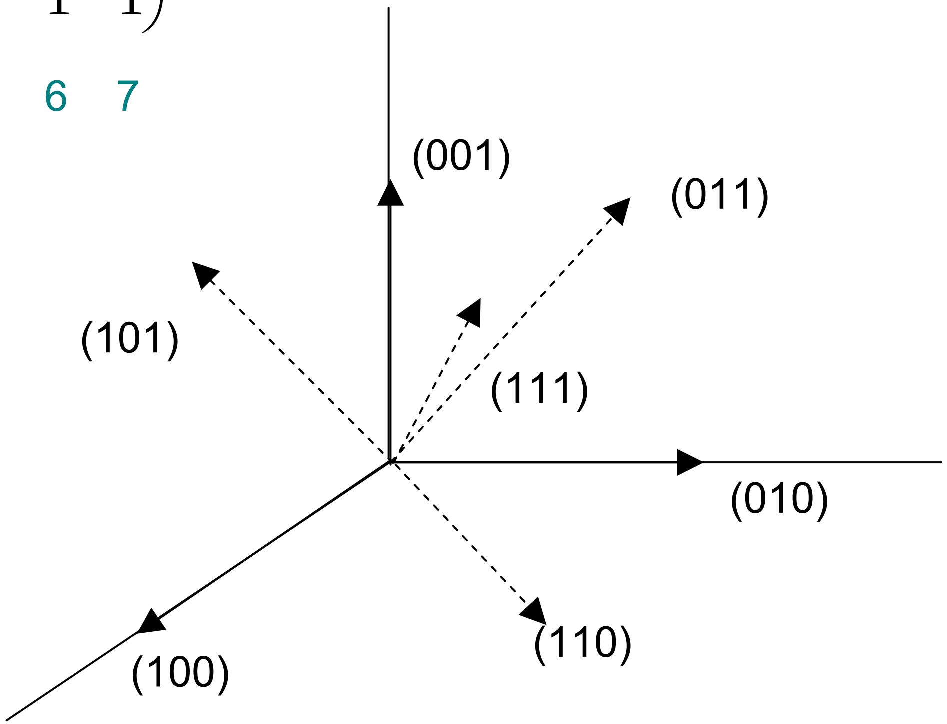
Así M[A] es una matroide simple o **GEOMETRÍA COMBINATORIA** (cada par de puntos es independiente y "genera" una recta)

Cada columna en A corresponde a una recta vectorial de V(r, $\mathbb{K}$), espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión r. Luego cada columna "es" un punto en el espacio proyectivo sobre $\mathbb{K}$ de dimensión r – 1

$$
\begin{array}{c}
A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\qquad\quad 1 \quad\; 2 \quad\; 3 \quad\;\; 4 \quad\; 5 \quad\; 6 \quad\; 7
\end{array}
$$

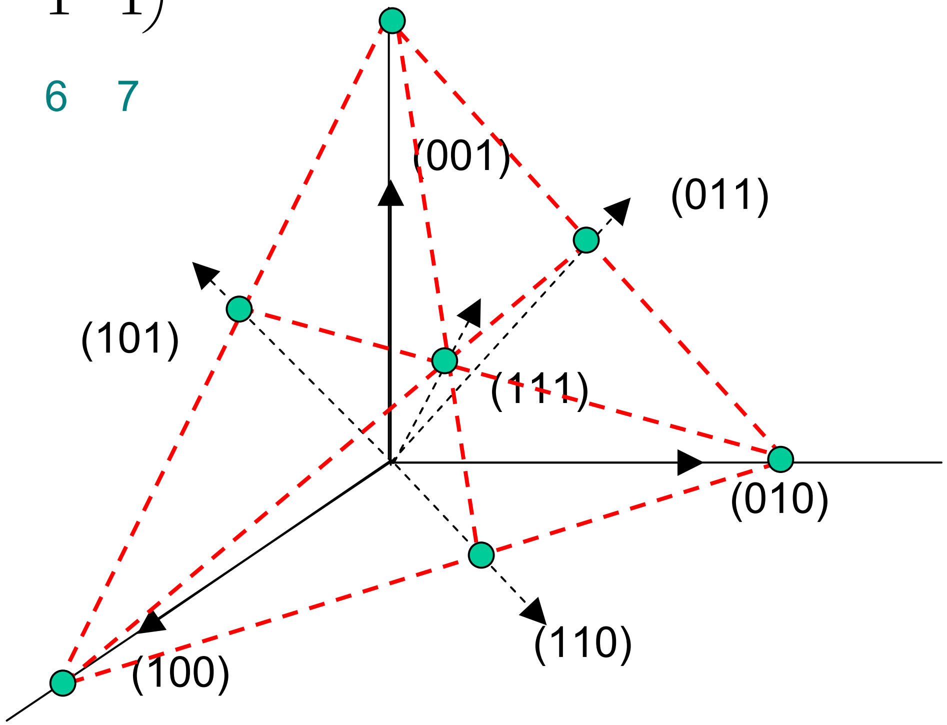
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

$$
\begin{array}{cc}
A_7 = & \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}
\end{array}
$$



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

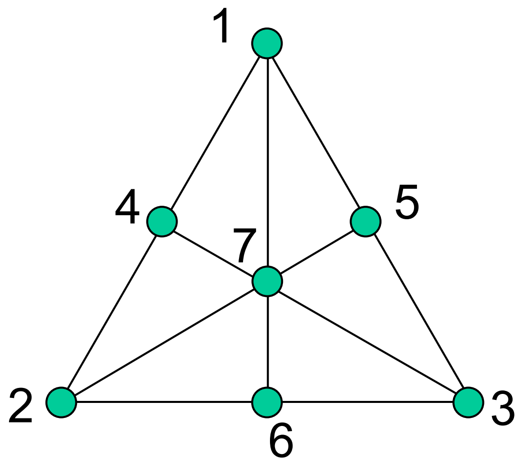
$$A_7 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \end{array}$$



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

$$
\begin{array}{c}
A_7 = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc} \quad 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}
\end{array}
$$

sobre $\mathbf{Z}_3$

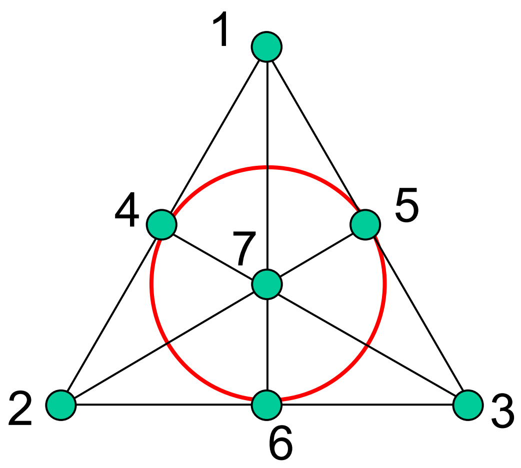


Matroide de no-FANO $\mathbf{F}_7^-$

$$
\begin{array}{c}
A_7 = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc} \quad 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}
\end{array}
$$

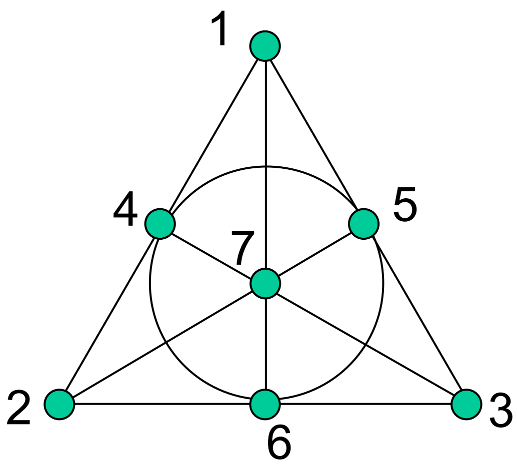
sobre $\mathbf{Z}_2$

Ahora las columnas 4, 5 y 6 son linealmente dependientes.
Forman un circuito, ¡están alineados!



Matroide de FANO $\mathbf{F}_7$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Matroide de FANO $\mathbf{F}_7$

Esta configuración de 7 puntos y 7 rectas se denomina plano proyectivo de Fano, PG(2,2)

Plano proyectivo finito de orden q

q^2+q+1 puntos, q^2+q+1 rectas

cada punto en q+1 rectas
cada recta con q+1 puntos

cada par de puntos en una recta
cada par de rectas un punto común

La matroide de Fano, $\mathbf{F}_7$
es el plano proyectivo de orden 2

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

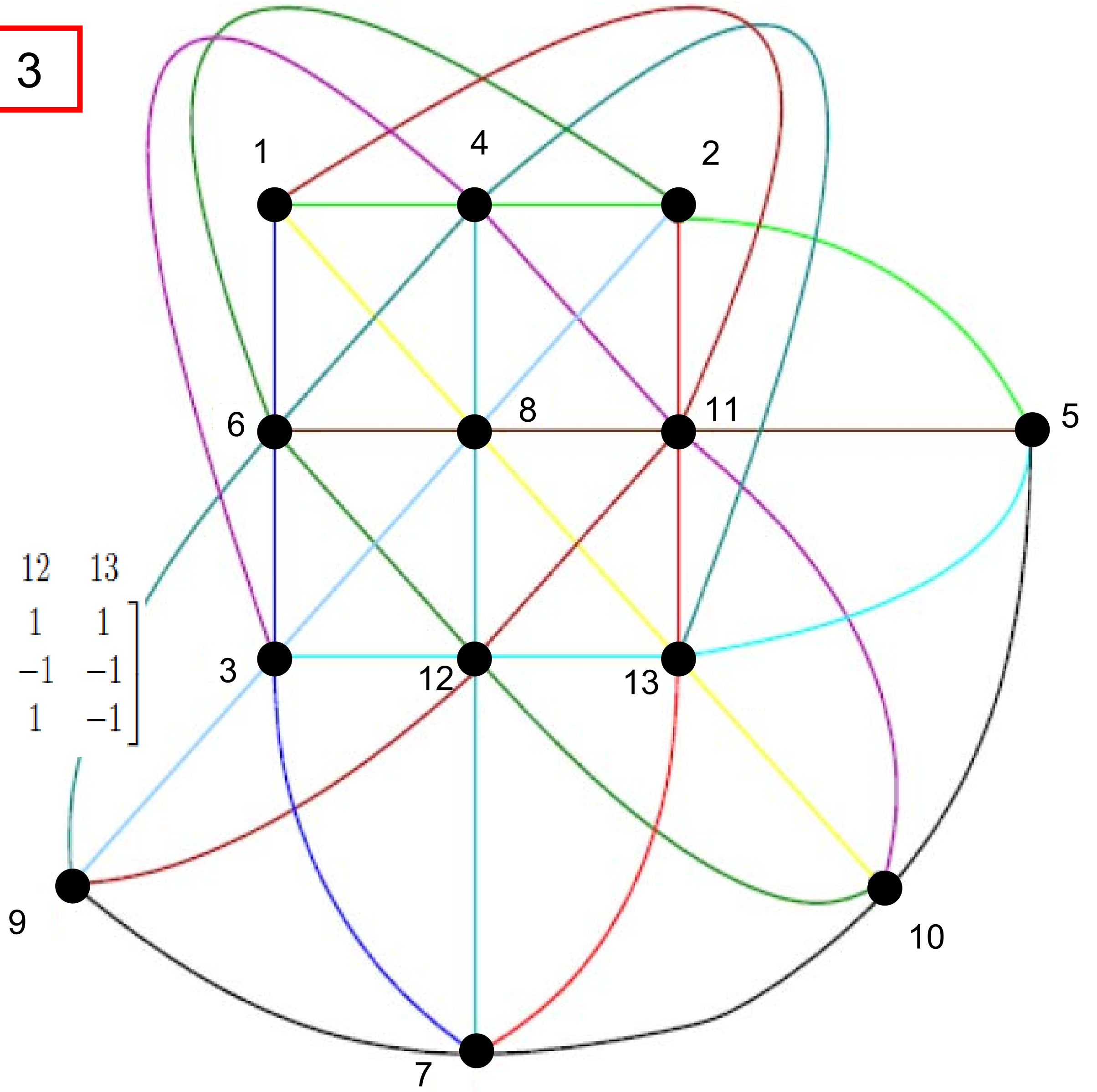
Plano proyectivo de orden 3

Matroide sobre S,
conjunto de 13 puntos,
con 13 “rectas”

PG(2,3)

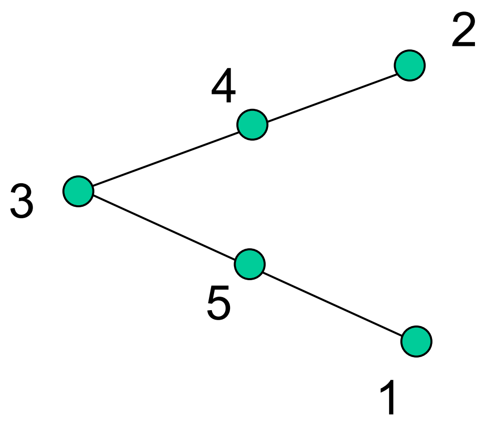
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc:cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc:cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}$$

(sobre $\mathbf{Z}_3$)

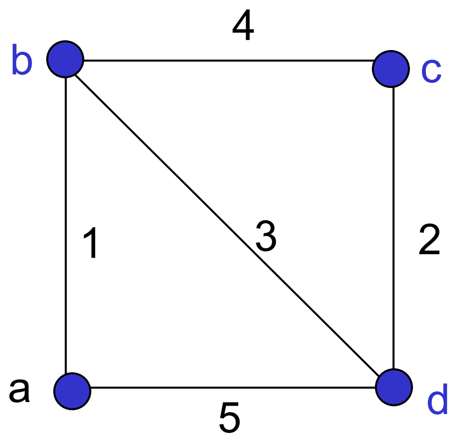


INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Los diagramas anteriores se llaman representaciones geométricas de las matroides.



Este diagrama es la representación geométrica de la matroide M(G)



$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \end{array}$$

?? $\longleftrightarrow$

Matriz de incidencia

$$A_G = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} & \end{array}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Representación geométrica de la matroide $M(K_4 - e)$

Matriz de coordenadas

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

??

Matriz de incidencia

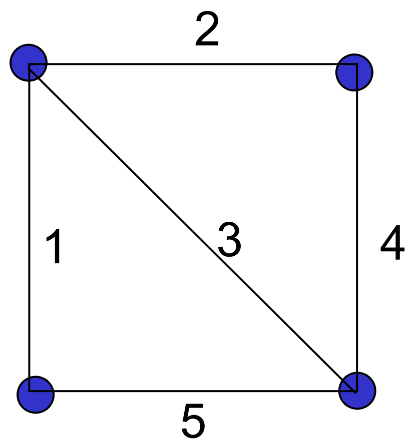
$$A_G = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

A_G tiene rango 3, si borramos la primera fila
y reordenamos columnas obtenemos la matriz A

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

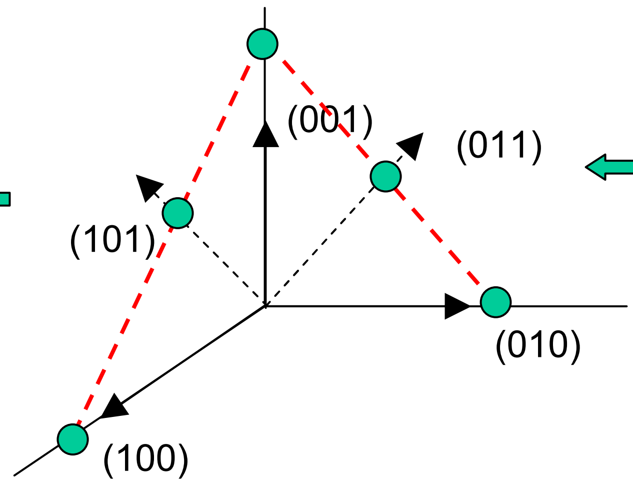
K_4 - arista

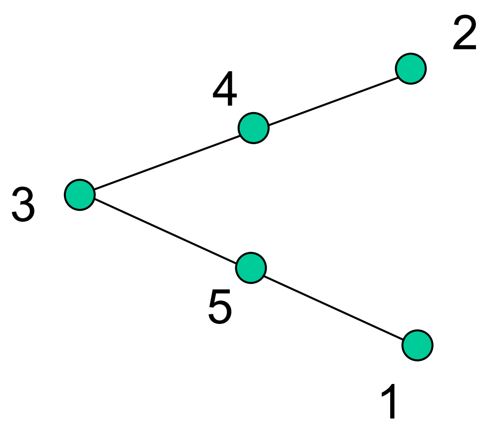


S = {1,2,3,4,5}
Conjuntos independientes, todos los de tamaño a lo sumo 3 salvo 135 y 234

Matriz incidencia

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array}\end{array}$$



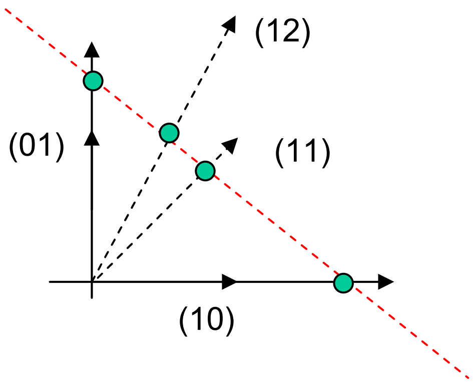


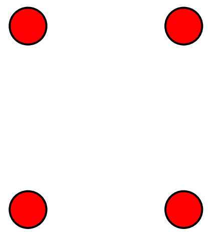
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Representación geométrica de las matroides **uniformes**
S conjunto de cardinal n, F la colección de subconjuntos de cardinal ≤ k
(S,F) es una matroide, que se designa por **$U_{k,n}$**

$U_{2,4}$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$





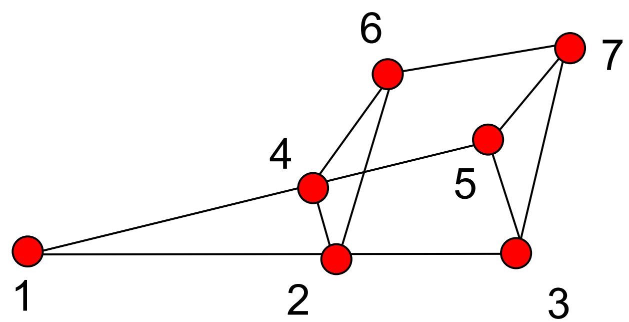
$U_{3,4}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

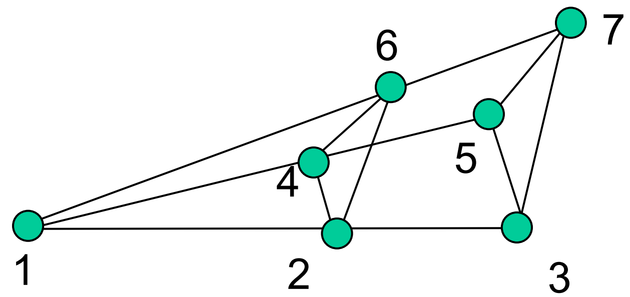
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Una configuración geométrica "no matroide"

Consideramos el conjunto de puntos S = {1,2,3,4,5,6,7}
Puntos alineados 123, 145
Puntos coplanares 12345, 12367, 14567
Conjuntos independientes: los restantes de tamaño < 6
Estas condiciones **NO** representan una matroide sobre S



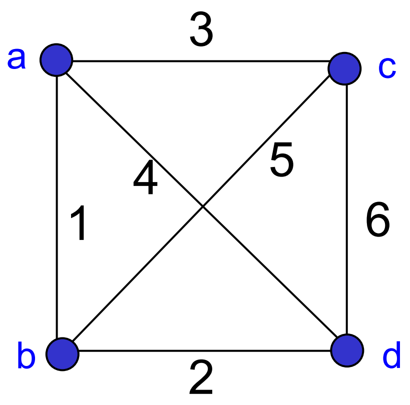
Los conjuntos independientes
X = {167}, Y = {3567}
no verifican la condición (I3)

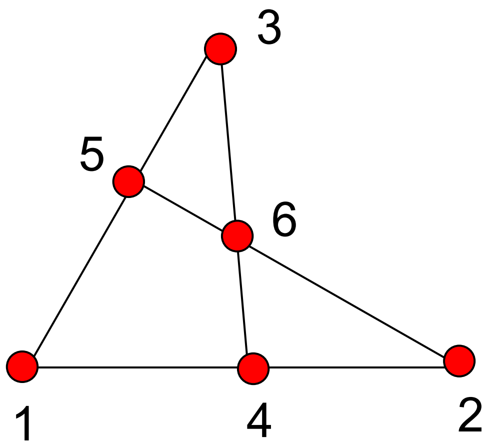


Esta configuración SÍ es matroide

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Representación geométrica de la matroide $M(K_4)$

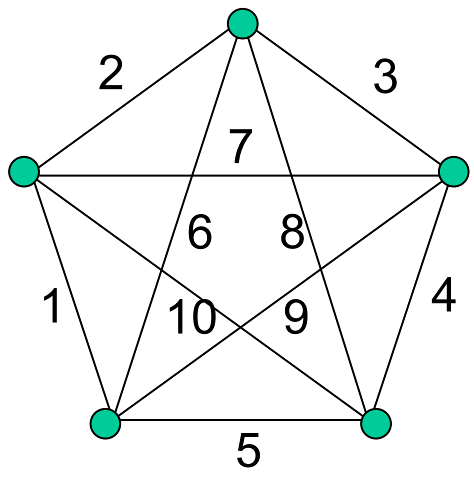


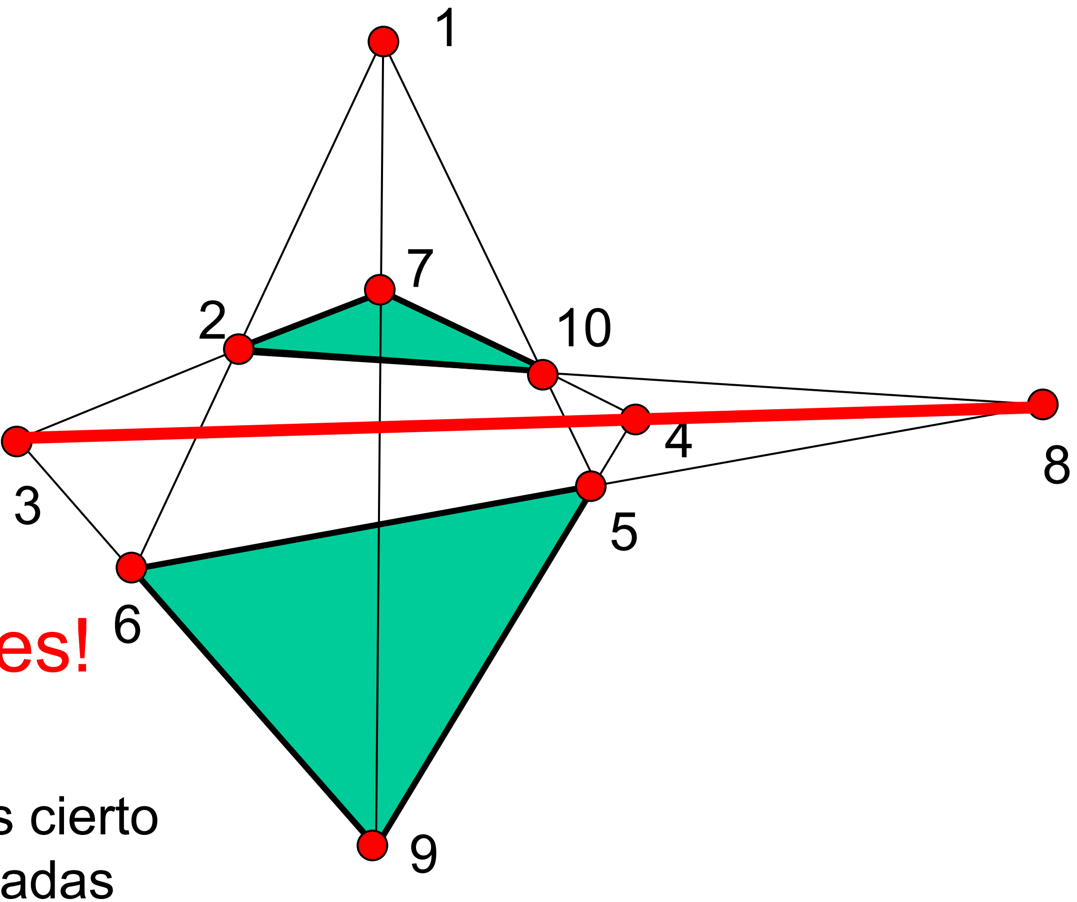


Los ciclos minimales (circuitos) en K_4 corresponden a puntos alineados

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Representación geométrica de la matroide $M(K_5)$





¡Desargues!

El teorema de Desargues es cierto
si se pueden tomar coordenadas
sobre un anillo de división

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Saunders MacLane

Una matroide puede representarse por una figura esquemática formada por puntos, rectas y planos, definiendo las incidencias de una forma combinatoria (sin tener en cuenta la realidad de las figuras)

GEOMETRÍA COMBINATORIA

Geometría de rango 1	1 punto
Geometría de rango 2	1 recta con n puntos
Geometría de rango 3	Colección de puntos y rectas satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) Dos puntos pertenecen a una recta
(2) Cada recta contiene al menos a dos puntos distintos
(3) Ninguna recta contiene todos los puntos
(4) Hay al menos dos puntos

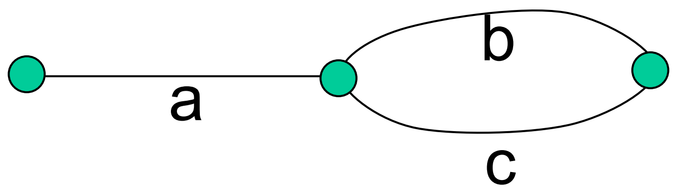
MATROIDE GRÁFICA

Dado G = (V, A) grafo, **M(G)** es la matroide definida sobre A cuyos conjuntos independientes son los subgrafos acíclicos.
M(G) matroide de ciclos de G

Una matroide M es **gráfica** si es isomorfa a M(G) para algún grafo G

Ejemplo de matroide gráfica   S = {a,b,c}
Conjuntos independientes F = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}}

M = (S,F) es gráfica



Si G es simple, la matroide M(G) es simple

MATROIDE VECTORIAL (REPRESENTABLE)

Dada una matriz A sobre un cuerpo K, S el conjunto de columnas de A y F la familia de subconjuntos J de S tales que los vectores-columna correspondientes son linealmente independientes sobre K
La matroide (S,F) se indica por **M[A]**

Una matroide M es **representable sobre** K si es isomorfa a M[A] para alguna matriz A sobre el cuerpo K

Una matroide es binaria si es representable sobre $\mathbf{Z}_2$
Una matroide es ternaria si es representable sobre $\mathbf{Z}_3$
Una matroide es regular si es representable sobre cualquier cuerpo

¿Existen matroides no representables?
Conjetura de Whitney: “Casi todas las matroides son NO representables

Una MATROIDE no BINARIA

La matroide uniforme $U_{2,4}$ NO es binaria (representable sobre $\mathbf{Z}_2$)

Dem.:
(S,F) donde $S = \{1,2,3,4\}$ $F = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34\}$
rang($U_{2,4}$) = 2
Si $U_{2,4}$ fuese representable sobre una matriz A entonces el espacio vectorial L(columnas de A) tendría dimensión 2

Un e.v. E de dimensión 2 sobre $\mathbf{Z}_2$ tiene 4 elementos {0, u, v, u+v} de los ¡que hay sólo 3 no nulos!
Así la matriz A solo puede tener las columnas $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Luego la matriz A NO puede tener las 4 columnas no nulas que se necesitan para el isomorfismo con $U_{2,4}$
(las correspondientes a los elementos independientes 1, 2, 3 y 4 de $U_{2,4}$)

Una MATROIDE no BINARIA

La matriz uniforme $U_{2,4}$ NO es binaria (representable sobre $\mathbf{Z}_2$)

La matriz uniforme $U_{2,4}$ SÍ es ternaria (representable sobre $\mathbf{Z}_3$)

En $\mathbf{Z}_3$ tenemos tres elementos 0, 1 y – 1

La matriz $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ representa $U_{2,4}$ sobre $\mathbf{Z}_3$

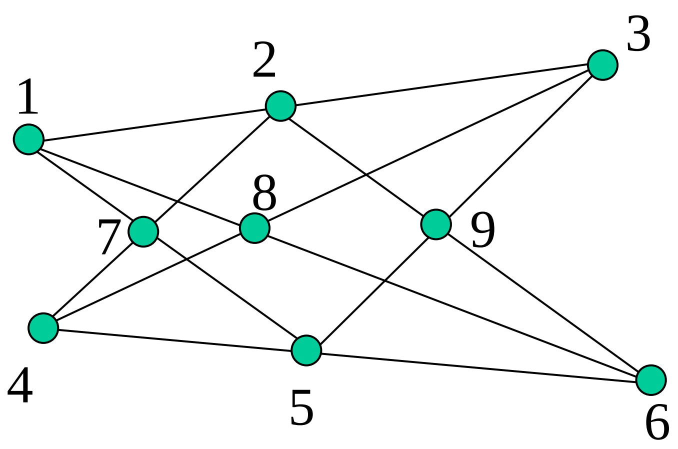
pues dos columnas cualesquiera de A son linealmente independientes

$U_{2,4}$

Matroides NO representables

¿Existen matroides NO representables sobre ningún cuerpo?

M matroide sobre S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Bases, los subconjuntos de cardinal 3 excepto
{123, 168, 157, 247, 269, 348, 359, 456}



Configuración de Pappus
..... menos la recta 789

Matroide no-PAPPUS

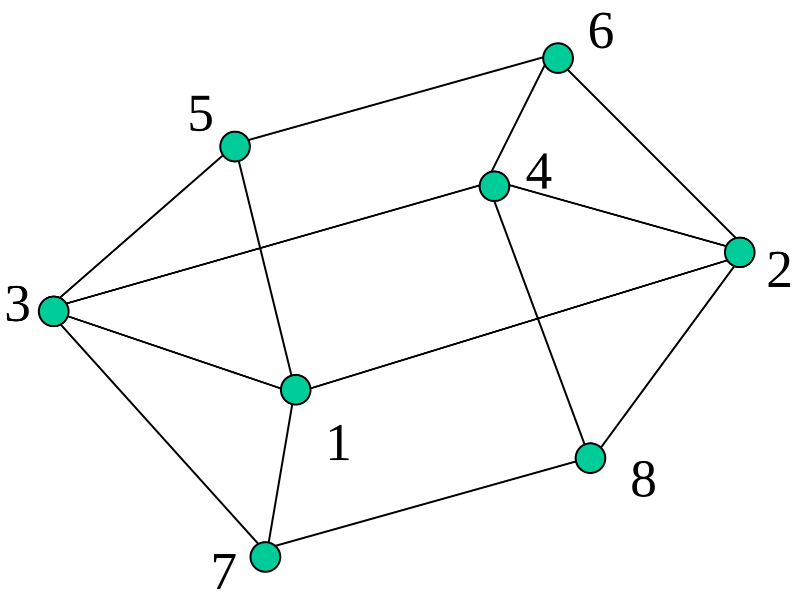
El teorema de Pappus es cierto si se pueden tomar coordenadas sobre K
(cuerpo conmutativo)

Esta matroide NO es representable sobre ningún cuerpo

Matroides NO representables

La matroide NO representable mínima

M matroide sobre   sobre S = {1,2,3,4,5,6,7,8}
Bases,   los subconjuntos de cardinal 4 excepto
{1234, 1256, 1278, 3456, 3478}



Esta matroide NO es representable sobre ningún cuerpo

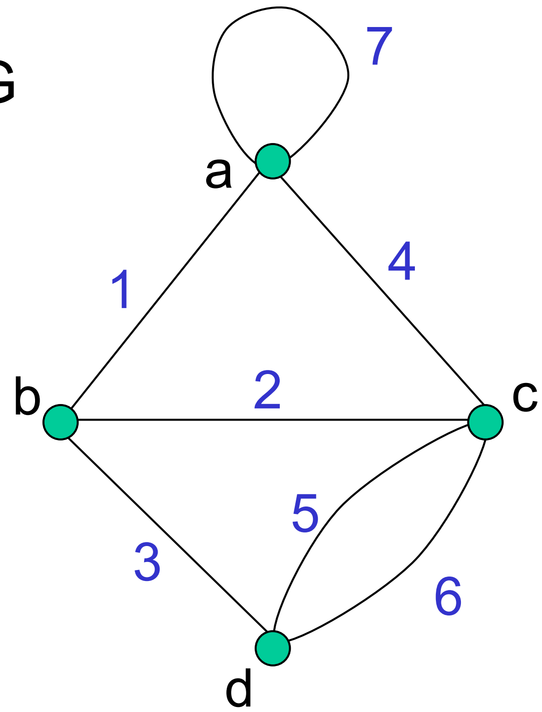
Matroide de Vámos V_8

Las matroides gráficas SON binarias

Si G es un grafo, la matroide de ciclos M(G) es binaria

Si A_G es la matriz de incidencia de G, considerando sus vectores columna sobre $\mathbf{Z}_2$ resulta que $M(G) \approx M[A_G]$

G



A_G

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Las matroides gráficas SON binarias

Si G es un grafo, la matroide de ciclos M(G) es binaria

Si A_G es la matriz de incidencia de G, considerando sus vectores columna sobre $\mathbf{Z}_2$ resulta que $M(G) \approx M[A_G]$

Dem.: Si X es un conjunto de columnas de A_G veremos que
X es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ X contiene las aristas de un ciclo en G

$\Leftarrow$) Si X contiene las aristas de un ciclo C,
o bien C es un bucle y habrá en X una columna de ceros,
o bien cada vértice de C aparece en dos aristas y la suma (módulo 2) de las columnas de C es el vector cero

$\Rightarrow$) Si X es linealmente dependiente elegimos D linealmente dependiente y minimal.
Si D contiene una columna de ceros entonces D contiene un bucle.
Si no es así, la suma (módulo 2) de las columnas en D es el vector cero. Cada vértice en D está en al menos dos aristas de D luego D contiene un ciclo.
(Recordemos que si en un grafo todos los vértices tienen grado al menos 2, entonces contiene algún ciclo)

Las matroides gráficas SON binarias

Si G es un grafo, la matroide de ciclos M(G) es binaria

Si A_G es la matriz de incidencia de G, considerando sus vectores columna sobre $\mathbf{Z}_2$ resulta que $M(G) \approx M[A_G]$

Corolario: Hay matroides NO gráficas
(La matroide $U_{2,4}$ NO es binaria)

Ejercicio: Sea A'_G la matriz que se obtiene de A_G al reemplazar el segundo 1 en cada columna no nula por – 1. Demostrar que $M[A'_G]$ representa a M(G) sobre cualquier cuerpo.

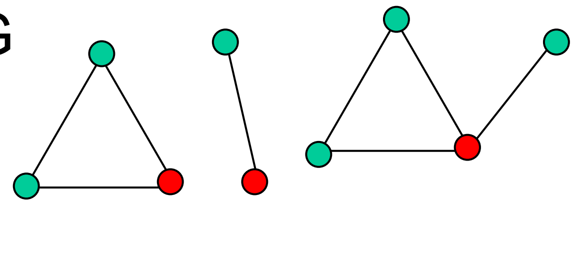
Matroides isomorfas

Grafos NO isomorfos pueden tener matroides SÍ isomorfas

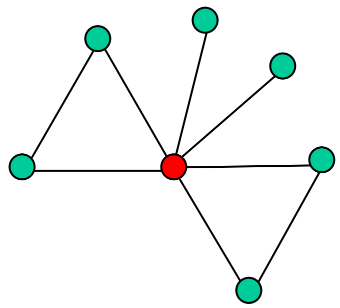
En la transparencia 14 tenemos un ejemplo

Construcción general

G



G’



$M(G) \approx M(G')$

Número de matroides no isomorfas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
matroids	1	2	4	8	17	38	98	306	1724
binary matroids	1	2	4	8	16	32	68	148	342

$$b(n) \sim \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2$$

Número de subespacios vectoriales de dimensión k en un e. v. de dim n sobre $\mathbf{Z}_2$

MATROIDES (axiomas de bases)

Una **matroide** M es un conjunto finito S y una familia B de subconjuntos de S, llamados **bases**, tales que:

(**B1**) B es no vacía

(**B2**) Si B_1, B_2 son bases, $x \in B_1$, entonces existe $z \in B_2$ tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{z\}$ es una base (*prop. de intercambio*)

Dos bases tienen el mismo cardinal, rango(M)
Los conjuntos independientes son los contenidos en las bases

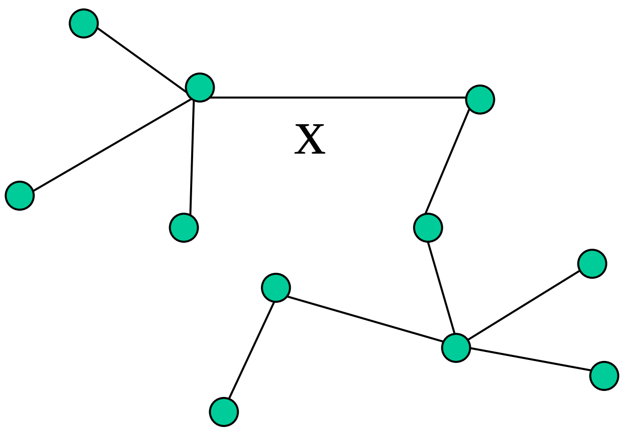
MATROIDES (axiomas de bases)

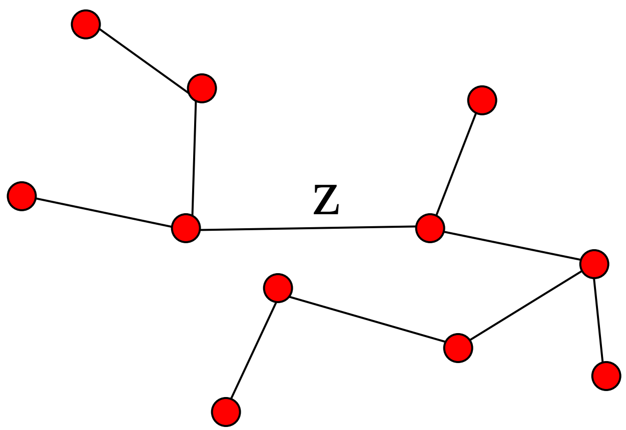
M(G) verifica los axiomas de base

(Caso G conexo)

Si B_1 es base, es árbol generador. Así $B_1 - x$ tiene dos componentes conexas.

Como B_2 es árbol generador, existe una arista z tal que $B_1 - x + z$ sigue siendo árbol generador, es decir, base





MATROIDES (axiomas de circuitos)

Una **matroide** M es un conjunto finito S y una familia C de subconjuntos de S, llamados **circuitos**, tales que:

(**C1**) El conjunto vacío no está en C

(**C2**) Si C_1, C_2 son circuitos , entonces $C_1 \not\subset C_2$ *(sistema hereditario)*

(**C3**) Si C_1, C_2 son circuitos, $x \in C_1 \cap C_2$, entonces $C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ contiene un circuito (*prop. de eliminación*)

Los conjuntos independientes son los que no contienen circuitos

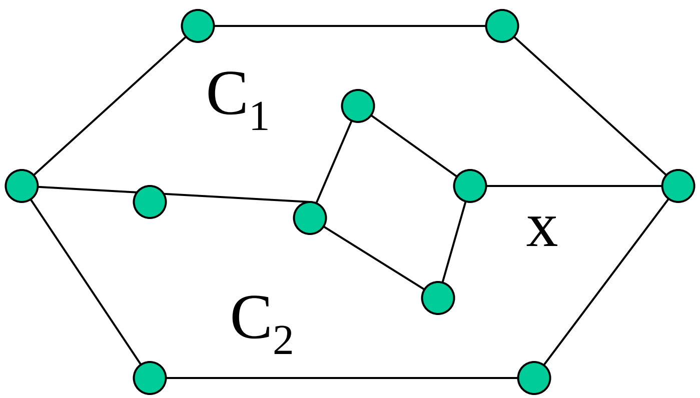
Rango y circuitos

Si C circuito, $\text{rang}(C) = |C| - 1$ $\qquad |C| \leq \text{rang}(S) + 1$

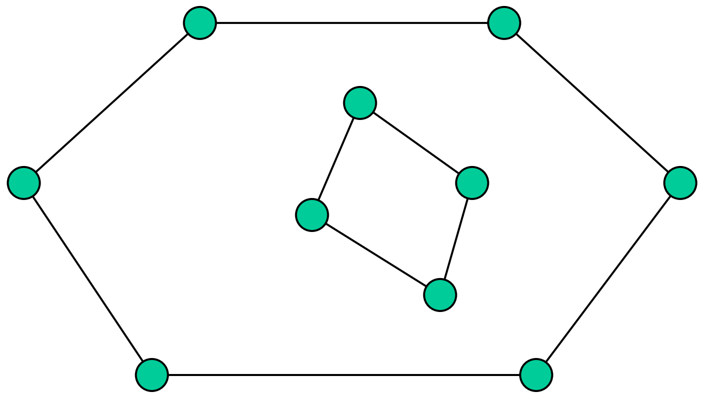
MATROIDES (axiomas de circuitos)

M(G) verifica los axiomas de circuitos

Ahora los circuitos son los ciclos de G.
Si C_1 y C_2 son ciclos, entonces $C_1 \Delta C_2$ tiene todos sus vértices pares, luego contiene un ciclo, es decir, un circuito



$C_1 \Delta C_2$

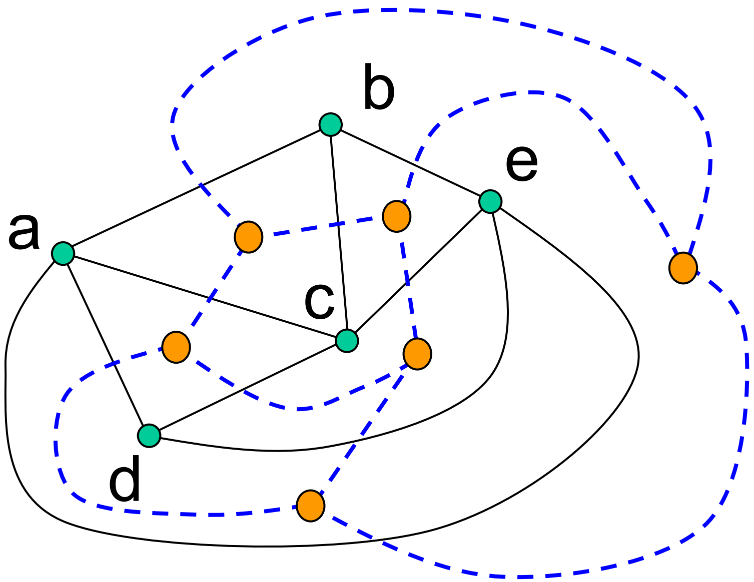


$C_1 \cup C_2 \setminus \{x\} \supseteq C_1 \Delta C_2$

DUALIDAD en GRAFOS

DUAL GEOMÉTRICO DE UN GRAFO PLANO

G = (V,A) grafo plano con su inmersión (G,Γ)

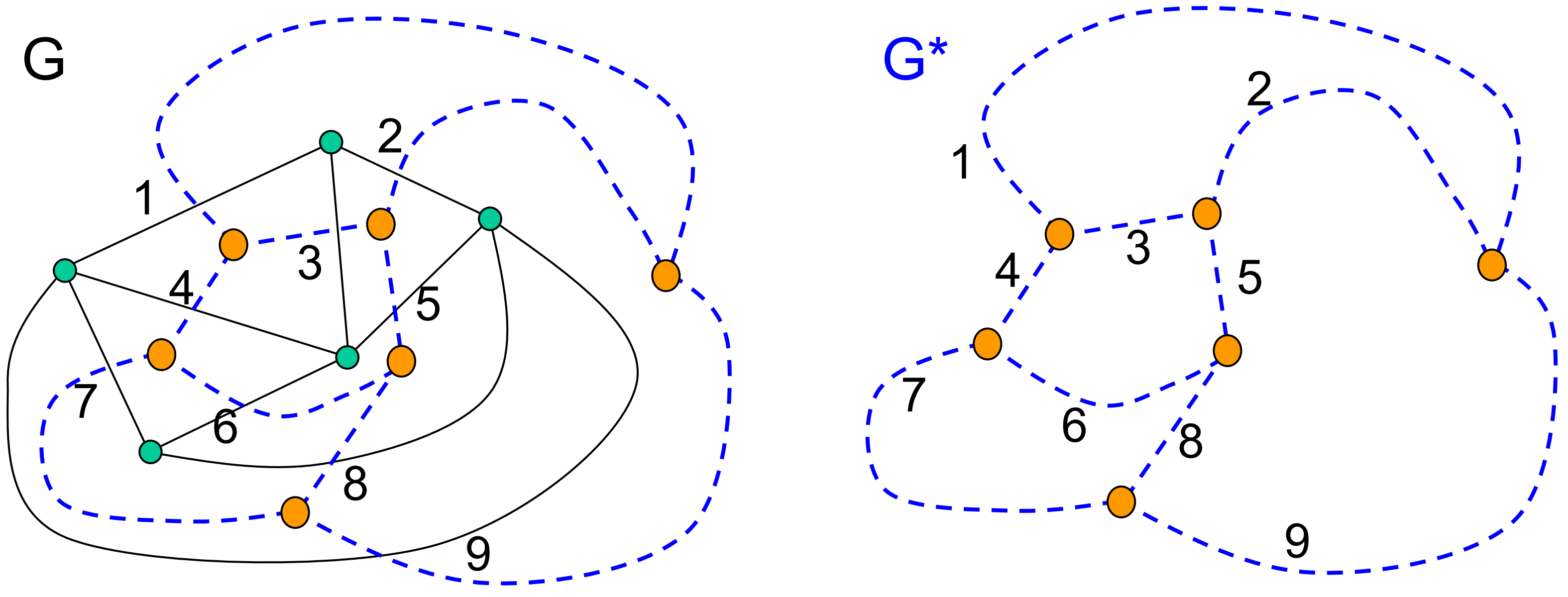


DUAL DE G es G* = (V*, A*)

- V* es el conjunto de caras de (G, Γ)
- Cada arista de G define una arista en G*

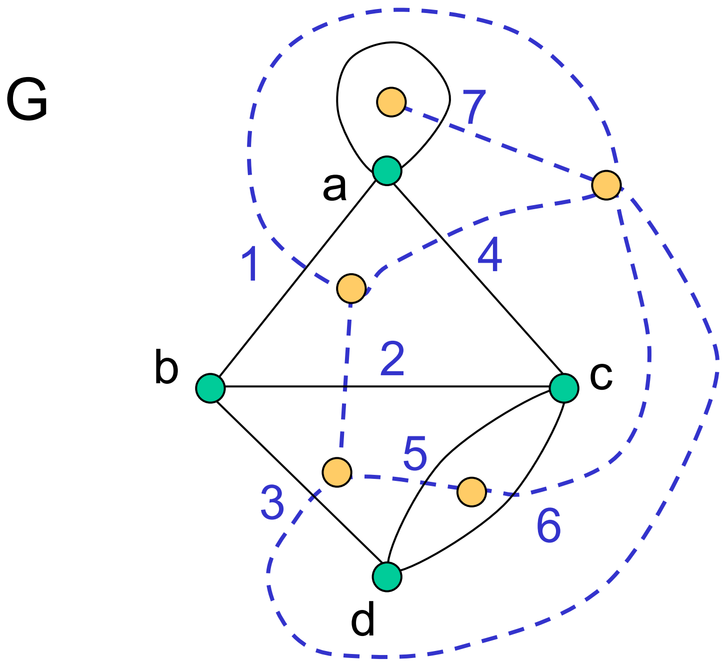
DUALIDAD en GRAFOS

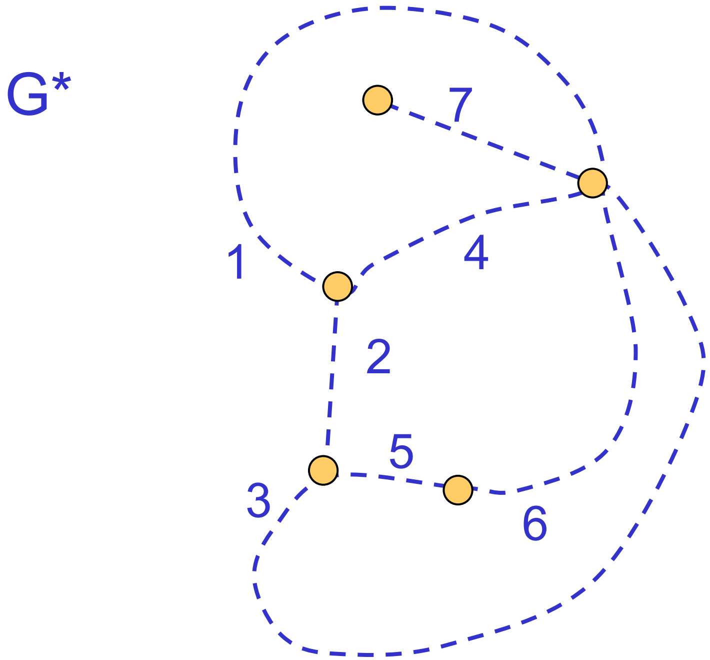
DUAL GEOMÉTRICO DE UN GRAFO PLANO



Los conjuntos de aristas de G y G* son el mismo

DUALIDAD en GRAFOS



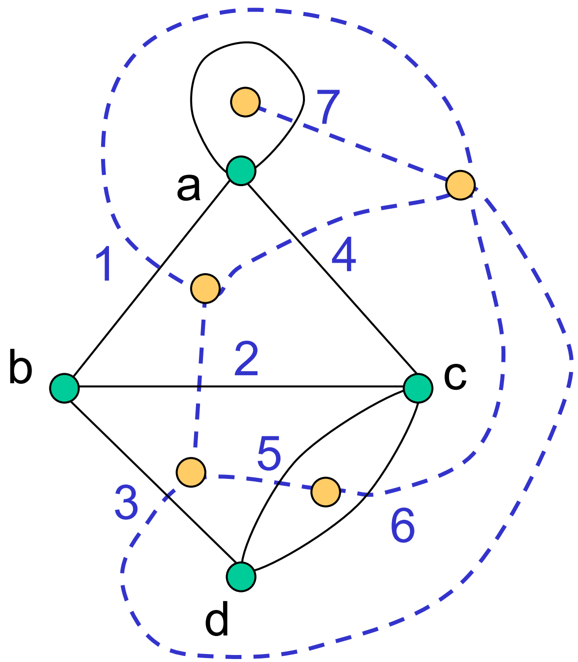


Los conjuntos de aristas de G y G* son el mismo.
Los circuitos de la matroide de ciclos M(G*) son
{{1,4}, {1,2,3}, {2,3,4}, {3,5,6}, {1,2,5,6}, {2,4,5,6}}

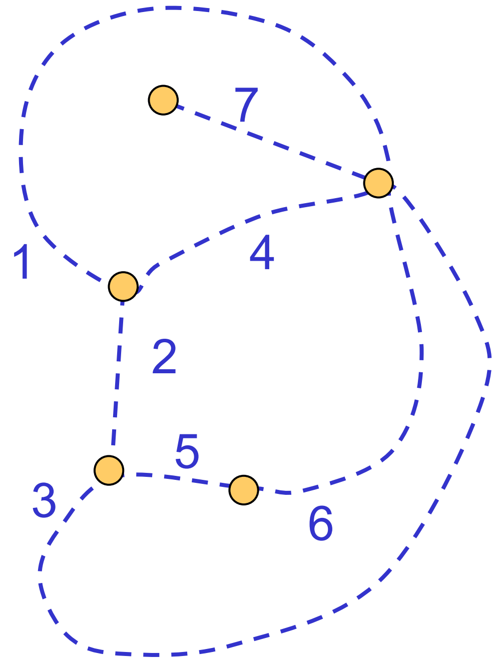
¿A qué corresponden en el grafo original G?

DUALIDAD en GRAFOS

G



G*



Los circuitos de la matroide de ciclos M(G*) son
{{1,4}, {1,2,3}, {2,3,4}, {3,5,6}, {1,2,5,6}, {2,4,5,6}}
¿A qué corresponden en el grafo original G?

Son los conjuntos-corte (de aristas) minimales en G

DUALIDAD en GRAFOS

DUAL ABSTRACTO DE UN GRAFO

$G^* = (V^*, A^*)$ es un dual abstracto de $G = (V, A)$ si existe una biyección $f: A \to A^*$ tal que para todo C, conjunto de aristas en G se cumple que:

C es un ciclo en G $\Leftrightarrow$ f(C) es un conjunto corte en G^*

Caracterización de Whitney

Un grafo G es planar $\Leftrightarrow$ G posee un dual abstracto

DUALIDAD en MATROIDES

Teorema

Sea G = (V,A) un grafo. Los conjuntos-corte minimales de G constituyen el conjunto de circuitos de una matroide sobre A

Conjuntos-corte minimales $\leftrightarrow$ "bonds"

Esta matroide se designa por **M*(G)** y es la **dual** de la matroide M(G), matroide de ciclos de G

Una matroide es cográfica si es isomorfa a la matroide de "bonds" de un grafo

Observación: Los árboles generadores de G* son los complementos de los árboles generadores de G

Esta observación permite definir la matroide dual de cualquier matroide M

DUALIDAD en MATROIDES

Si M es una matroide sobre S, su dual M* es la matroide sobre S cuyas bases son {S – B / B es base de M}

Las bases, circuitos de M* se llaman cobases, cocircuitos de M

rang(M) + rang(M*) = |S|

MATROIDE	DUAL
M(G) G plano	$M^*(G) \approx M(G^*)$, G^* dual de G
$U_{k,n}$	$U^*_{k,n} \approx U_{n-k,n}$
M[A] $A = [I_k \mid D]$	M^* matriz $[-D^T \mid I_{n-k}]$

(*) Las operaciones elementales en una matriz NO cambian la matroide

DUALIDAD en MATROIDES (Un juego)

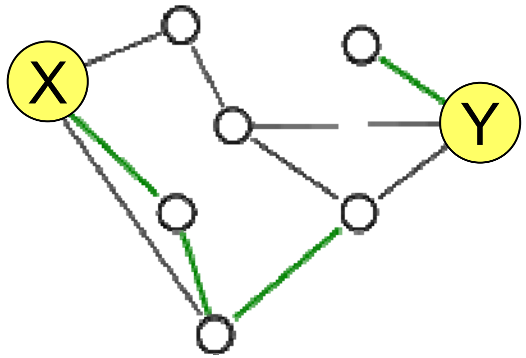
Juego de dos personas B y C

Sea M matroide sobre S. Dos jugadores B y C eligen alternativamente elementos de S. El objetivo de B es conseguir una base de M, el de C evitarlo. Es decir, elegir TODOS los elementos de un cocircuito de M.

¿Cuándo B tiene una estrategia ganadora?

Este juego es una variante del “switching game” de Shannon
https://en.wikipedia.org/wiki/Shannon_switching_game

Un grafo conexo G, dos nodos X e Y. Dos jugadores Short y Cut que eligen alternativamente una arista de G. Cut elimina una arista en su turno y Short la colorea. Si Cut consigue separar X de Y gana. Y si Short consigue un camino coloreado de X a Y gana.



DUALIDAD en MATROIDES (Un juego)

Juego de dos personas **B** (base) y **C** (cocircuito)

Teorema

En una matroide M = (S,F) son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(1) Comienza el jugador C y B tiene estrategia ganadora

(2) M tiene dos bases disjuntas

(3) Para todo $X \subset S$, $|X| \geq 2(\text{rang}(M) - \text{rang}(M - X))$

Si el juego se realiza en una matroide gráfica M(G) con G grafo conexo,
B quiere construir una base (árbol generador) y C un cocircuito (corte minimal)

Si el juego es sobre redes de comunicación el objetivo de C es separar la red en piezas no conectadas mientras B refuerza aristas para prevenir su destrucción.

DUALIDAD en MATROIDES (Un juego)

Juego en un grafo conexo

Corolario

En un grafo conexo G son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(1) Comienza el jugador C y B tiene estrategia ganadora

(2) El grafo G tiene dos árboles generadores disjuntos

(3) Para cualquier partición Π de V(G) el número de aristas que unen vértices en diferentes partes de Π es al menos 2 ($|\Pi| - 1$)

Demostraremos que (2) $\Rightarrow$ (1) describiendo una estrategia ganadora para B cuando G tiene dos árboles generadores disjuntos T_1 y T_2

Supongamos que C elige una arista c_1 en T_1 (si la elige fuera de los T's, mejor para B)

Consideramos $T_1 - c_1$ y T_2 son independientes en M(G). $|T_2| = |T_1 - c_1| + 1$

Aplicamos la condición (**I3**), y así existe $b_1 \in T_2 - (T_1 - c_1)$ tal que

$T_1 - c_1 + b_1$ es independiente. El jugador B elige la arista b_1

Ahora $T_1 - c_1 + b_1$ y T_2 son independientes y ambos contienen a b_1

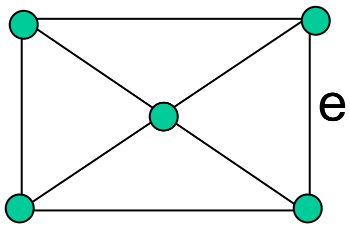
Luego $T_1 - c_1$ y $T_2 - b_1$ son árboles generadores disjuntos en el grafo $(G - c_1)\bullet b_1$

Continuando esta estrategia, B gana el juego

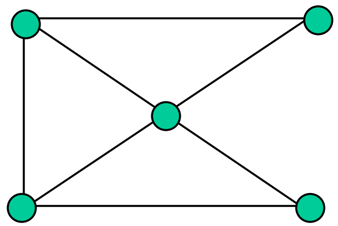
contracción

Operaciones en GRAFOS (MINOR)

En grafos

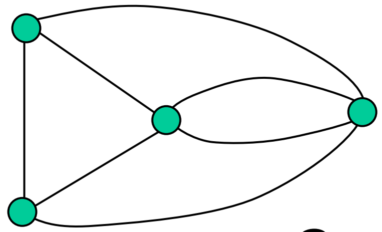


ELIMINACIÓN



G – e

CONTRACCIÓN



G•e

Un grafo H es un "**minor**" del grafo G si puede obtenerse desde G eliminando aristas y contrayendo aristas

Teoremas de estructura en GRAFOS

Teorema de Kuratowski

Un grafo G es planar $\Leftrightarrow$ G no contiene subgrafos homeomorfos a K_5 o a $K_{3,3}$

Los grafos G y H son homeomorfos si uno se puede obtener del otro añadiendo y suprimiendo vértices de grados dos.

Orden topológico en grafos

$H \leq_T G$ si H es homemorfo a un subgrafo de G.

Se dice que H es subgrafo topológico de G

El teorema dice que K_5 y $K_{3,3}$ son los únicos dos grafos no planares minimales (en el orden topológico)

¿Qué sucede en otras superficies?

Teoremas de estructura en GRAFOS

Conjetura (Erdös, König)
Para cualquier superficie S, el conjunto T(S) de subgrafos topológicos minimales prohibidos para la clase de grafos que pueden trazarse en S sin cortes es FINITO

Los grafos de T(S) se llaman irreducibles, pues no se pueden dibujar sobre S pero sí cualquiera de sus subgrafos

Glover, Huneke y Wang (1979) encontraron 103 grafos irreducibles en el plano proyectivo. En 1980 Archdeacon demostró que la lista estaba completa

$T(\mathbb{R}^2) = T(S^2) = \{K_5, K_{3,3}\}$ $|T(\mathbb{P}^2)| = 103$

Teorema (Archdeacon, Huneke, 1989)
T(S) es finito para toda superficie no orientable

Teoremas de estructura en GRAFOS

Teorema de Wagner

Un grafo G es planar $\Leftrightarrow$ G no tiene ni a K_5 ni a $K_{3,3}$ como "**minor**"

Un grafo es un bosque $\Leftrightarrow$ no tiene a K_3 como "minor"

Orden minor en grafos

$H \leq_M G$ si H es minor de G.

Si G se puede dibujar en una superficie S y H es minor de G entonces H también se puede dibujar en S (sin cortes)

El teorema dice que K_5 y $K_{3,3}$ son los únicos dos grafos no planares minimales (en el orden minor)

¿Qué sucede en otras superficies?

Teoremas de estructura en GRAFOS

Conjetura (Wagner)

Para cualquier superficie S, el conjunto M(S) de "minors" prohibidos para la clase de grafos que pueden trazarse en S sin cortes es FINITO.

$M(\mathbb{R}^2) = M(S^2) = \{K_5, K_{3,3}\}$

$|M(\mathbb{P}^2)| = 35$ Archdeacon, 1980

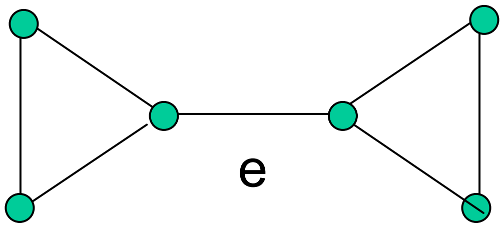
Homeomorfismo VERSUS Minor

1. Si H es un subgrafo topológico de G (homeomorfo a un subgrafo) entonces H es minor de G

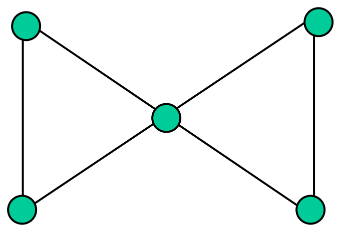
(basta contraer las aristas con extremo en los vértices de grado 2)

2. Si H es minor de G entonces no siempre H es subgrafo topológico de G

G



H = G•e



Teoremas de estructura en GRAFOS

Teorema (Robertson, Seymour, 1990)
Para cualquier superficie S, el conjunto M(S) de “minors” prohibidos para la clase de grafos que pueden trazarse en S sin cortes es FINITO

Para cualquier superficie S, T(S) es finito $\Leftrightarrow$ M(S) es finito

¿Qué sucede en el toro?

Bodendiek y Wagner (1989) T(toro) es finito pero muy elevado

Últimos datos de 2018 (Myrvold y Woodcock)
$|T(\text{toro})| \geq 250815$
$|M(\text{toro})| \geq 17523$

(Búsqueda exhaustiva para n < 13 y programas informáticos)

Teoremas de estructura en GRAFOS

Teorema (Mohar, 1999)
Para cada superficie S existe un algoritmo lineal que, dado un grafo G, o bien halla una inmersión de G en S, o bien encuentra un subgrafo de G que es subdivisión de un grafo irreducible sobre S.

Graph Minor Theorem (Robertson, Seymour, 2004)
En cualquier conjunto infinito de grafos siempre hay dos tales que uno es isomorfo a un “minor” del otro.

Teorema (Robertson, Seymour, 2004)
Si S es un conjunto de grafos “minor-cerrado” entonces existe un conjunto **finito** M de grafos tal que $G \in S \Leftrightarrow$ ningún grafo en M es “minor” de G.

Operaciones en MATROIDES (MINOR)

$M = (S, F)$

ELIMINACIÓN	Conjunto base	Independientes
$M \setminus e$	$S - \{e\}$	$F' = \{J \subseteq S - \{e\}: J \in F\}$
CONTRACCIÓN		
M / e	$S - \{e\}$	$F'' = \{J \subseteq S - \{e\}: J \cup \{e\} \in F\}$

(si e es un bucle, es decir, {e} circuito, entonces $M/e = M \setminus e$)

Operaciones en MATROIDES (MINOR)

En matroides uniformes

$U_{k,n} \setminus e = U_{k,\, n-1}$ si $k \neq n$
$U_{k,n} / e = U_{k-1,\, n-1}$ si $k \neq 0$

En matroides representables

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M[A] \ 3 = M[matriz A – columna 3]

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M[A] / e

Si $e \in$ base

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M[A] / e = M[A’]

Operaciones en MATROIDES (MINOR)

En representación gráfica

3 = (001)

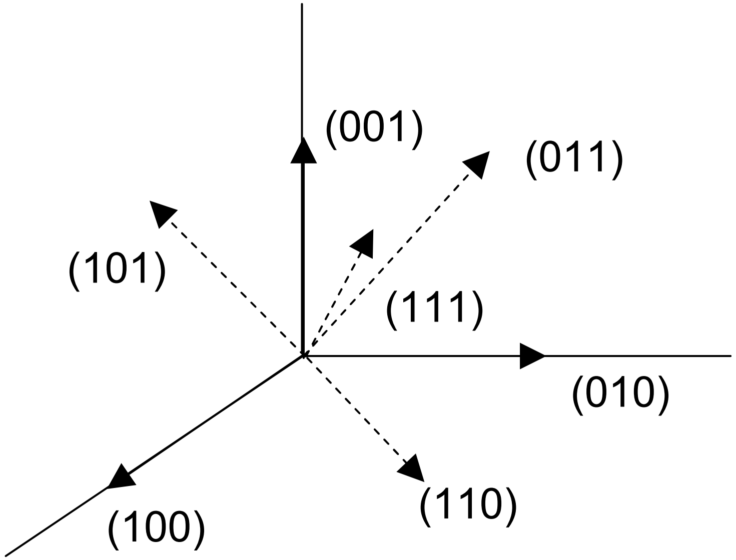
Eliminación M \ 3

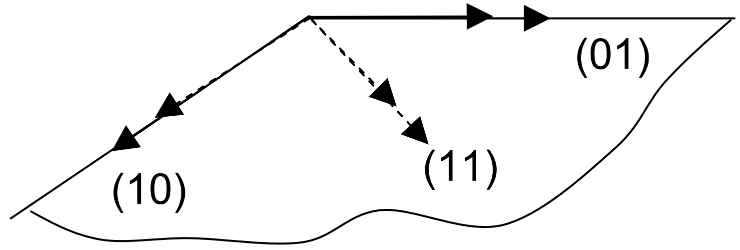
Se elimina el vector (001)

Contracción M / 3

Proyección ortogonal
en la dirección de (001)

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





Operaciones en MATROIDES (MINOR)

Eliminación y contracción son operaciones duales

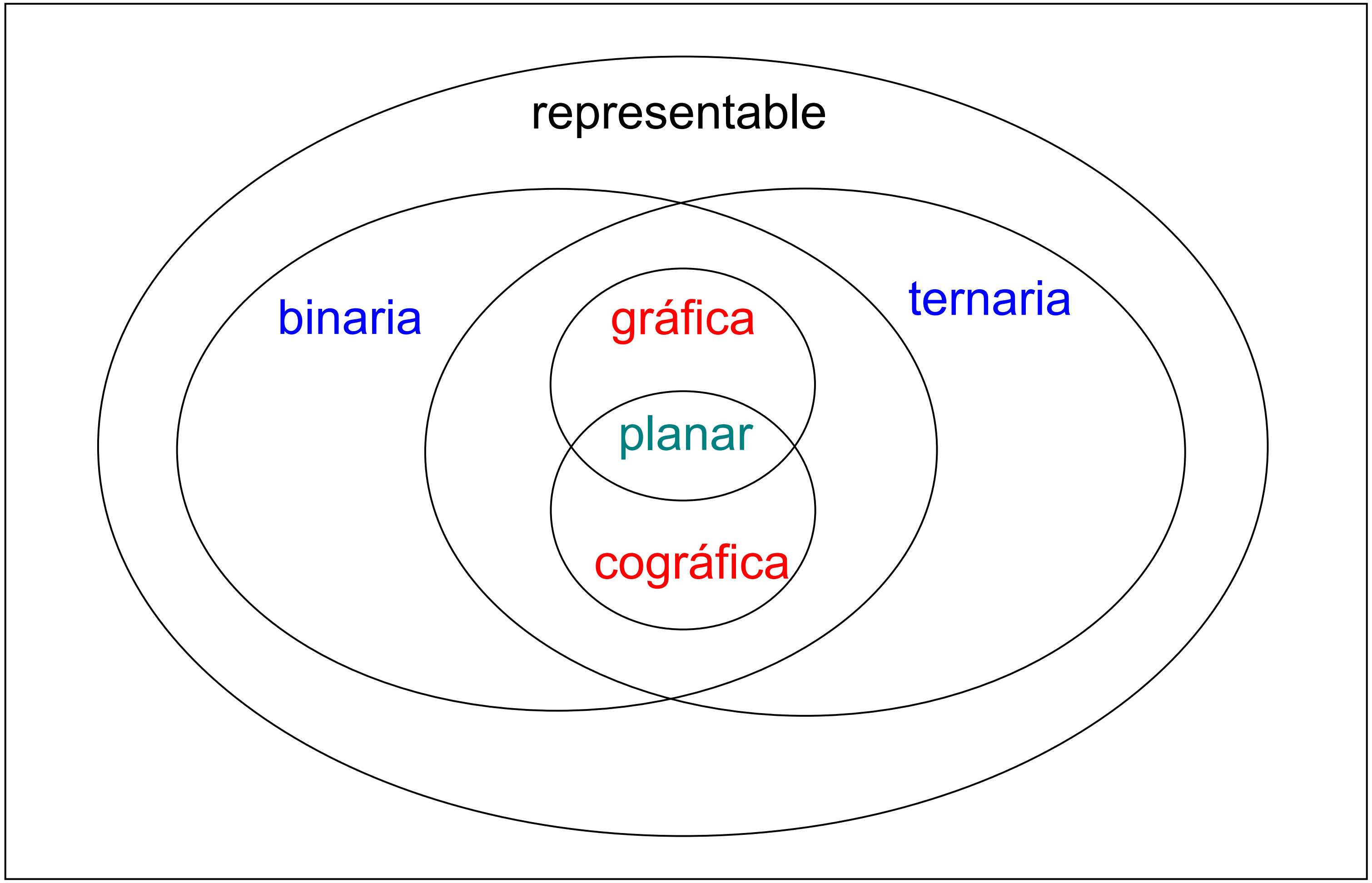
$(M \setminus e)^* = M^* / e$ $\qquad$ $(M / e)^* = M^* \setminus e$

N es "**minor**" de M si se obtiene por contracciones y eliminaciones sucesivas de elementos de S $\qquad$ **M > N**

Las clases de matroides uniformes, gráficas, cográficas y representables son cerradas respecto a eliminación y contracción

¿Hay minors prohibidos para estas clases de matroides?

Clases de MATROIDES



Caracterización de MATROIDES

Matroides **binarias** (Tutte, 1958)

M es binaria $\Leftrightarrow$ $U_{2,4}$ no es minor de M

Matroides **ternarias** (Bixby, Seymour, 1975)

M es binaria $\Leftrightarrow$ Ninguna de las siguientes matroides es minor de M
$U_{2,5}$, $U_{3,5}$, F_7, F^*_7

Matroides **gráficas** (Tutte, 1959)

M es gráfica $\Leftrightarrow$ Ninguna de las siguientes matroides es minor de M
$U_{2,4}$, $M^*(K_5)$, $M^*(K_{3,3})$, F_7, F^*_7

Teoremas de estructura en MATROIDES

Conjetura (Rota, 1971)

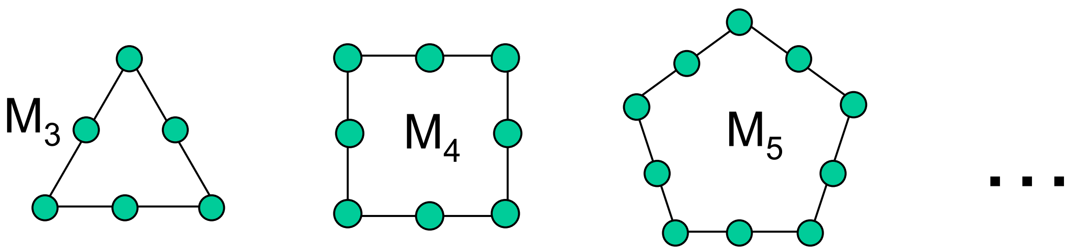
Para cada cuerpo finito K, la familia de minors excluidos para la clase de matroides **representables** sobre K es **FINITA**

Demostrada en 2014 por Geelen, Gerards y Whittle

Para todos los cuerpos infinitos, el conjunto de minors excluidos para la representabilidad sobre ese cuerpo es INFINITO

El **Graph Minor Theorem** es falso en matroides

La sucesión de matroides de la figura (todas de rango 3), M_3, M_4, M_5, …
Ninguna de estas matroides es isomorfa a un "minor" de otra



(la contracción disminuye el rango)

BIBLIOGRAFÍA

- G. Gordon, J. McNulty: **Matroids. A Geometric Introduction**, Cambridge University Press, 2012
- J. Oxley, "*What is a matroid?*", (2014) https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf
- J. Oxley, **Matroid Theory***,* (2ª ed.) Oxford University Press, 2011
- D. Welsh, "*Matroids and their applications*", in ***Select Topics in Graph Theory***, L. Beineke, R. Wilson (eds.), Academic Press, 1988
- R. J. Wilson, "*An Introduction to matroid theory",* Amer. Math. Monthly, (1973) 500-525.