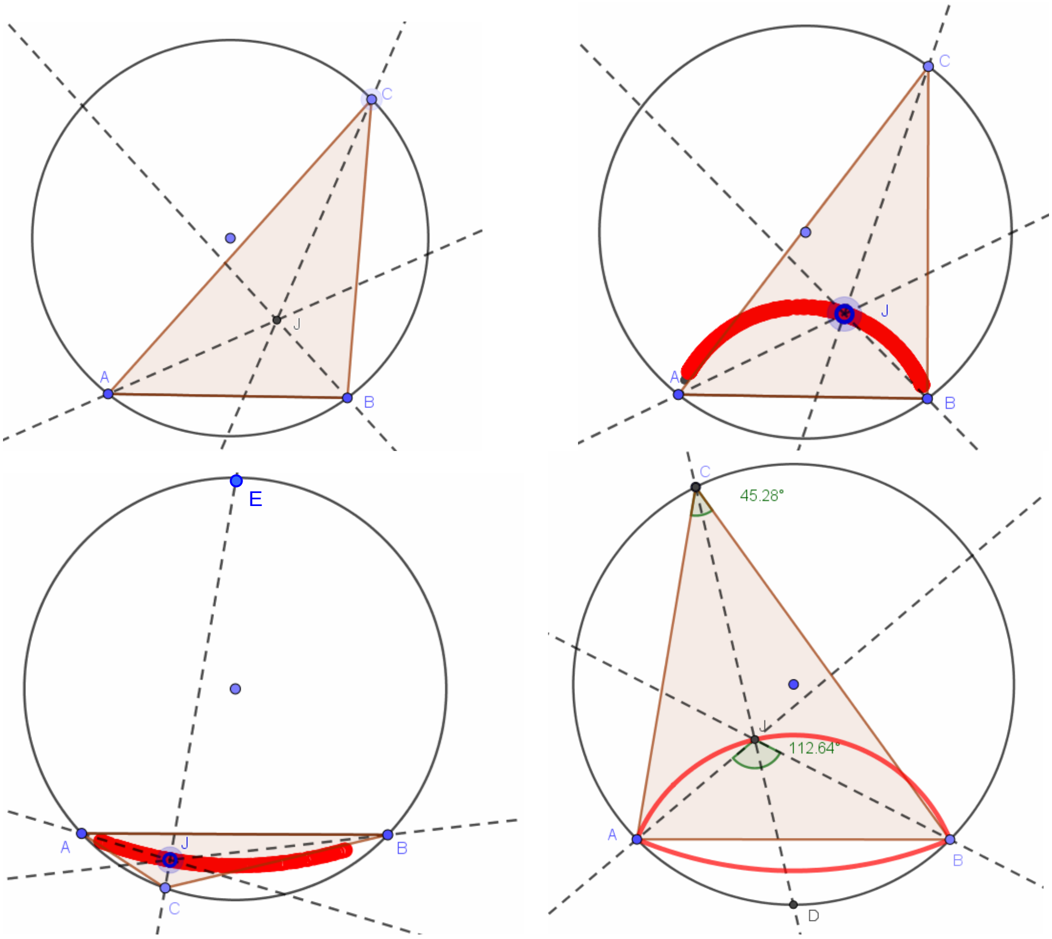
LUGARES GEOMÉTRICOS

1. **Incentros de triángulos inscritos en una circunferencia con un lado fijo.**
   Se considera una circunferencia que pasa por dos puntos A y B. El punto C se mueve por la circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los **incentros** de los triángulos ABC.



Desde el incentro J se ve el segmento AB con un ángulo 90º +C/2, porque midiendo en el triángulo AJB tenemos que el ángulo en J es

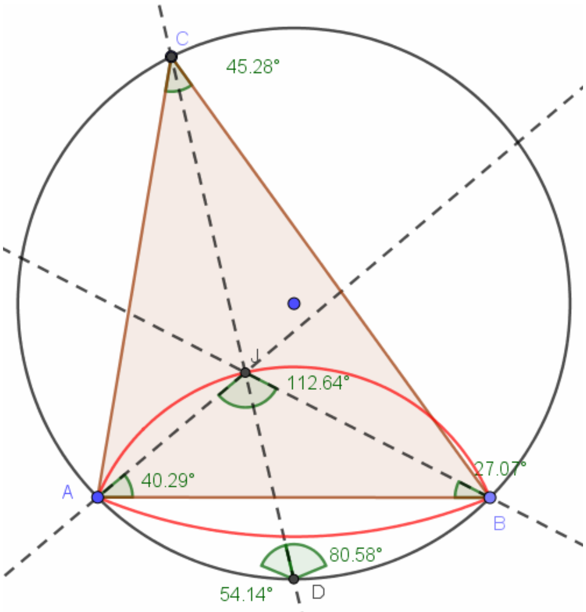
$$180^\circ - \frac{1}{2}(A + B) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - C) = 90^\circ + \frac{1}{2}C$$

Por tanto, el lugar geométrico que describen los incentros es el arco capaz del segmento AB con dicho ángulo.

En la figura 2, correspondiente al triángulo ABC (orientado positivamente), este arco tiene centro en D, punto medio del arco AB. Mientras que en la figura 3, correspondiente a la orientación negativa de ABC, el arco tiene centro en E (punto medio del arco BA)

Justificamos de dos formas distintas que el arco capaz tiene centro en D.

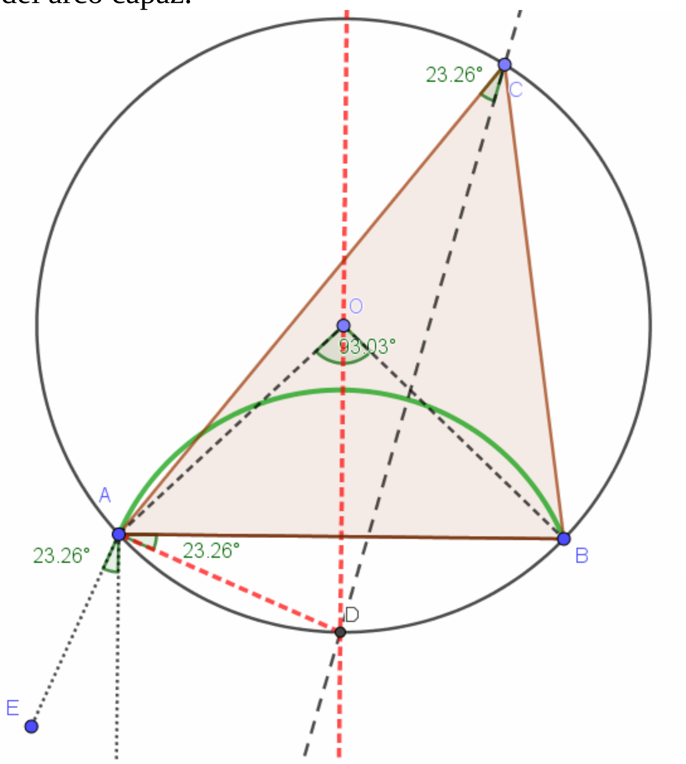
En primer lugar observando que:



ADJ = ABC = 2 ABJ
BDJ = BAC = 2 BAJ

Luego la circunferencia determinada por A, B y J debe tener centro en D (porque un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco correspondiente y esto solo es cierto en una circunferencia)

Otra forma de justificar que D es el centro del lugar geométrico es por la construcción del arco capaz.



Sobre el segmento AB se coloca el ángulo BAE = 90º + C/2

Se trazan la mediatriz de AB y la perpendicular a AE por el punto A.
El punto de corte es el centro del arco capaz.
Este punto es D porque BAD = C/2   y así el segmento AD es perpendicular a AE