Universidad Politécnica
de Madrid

HIPERGRAFOS

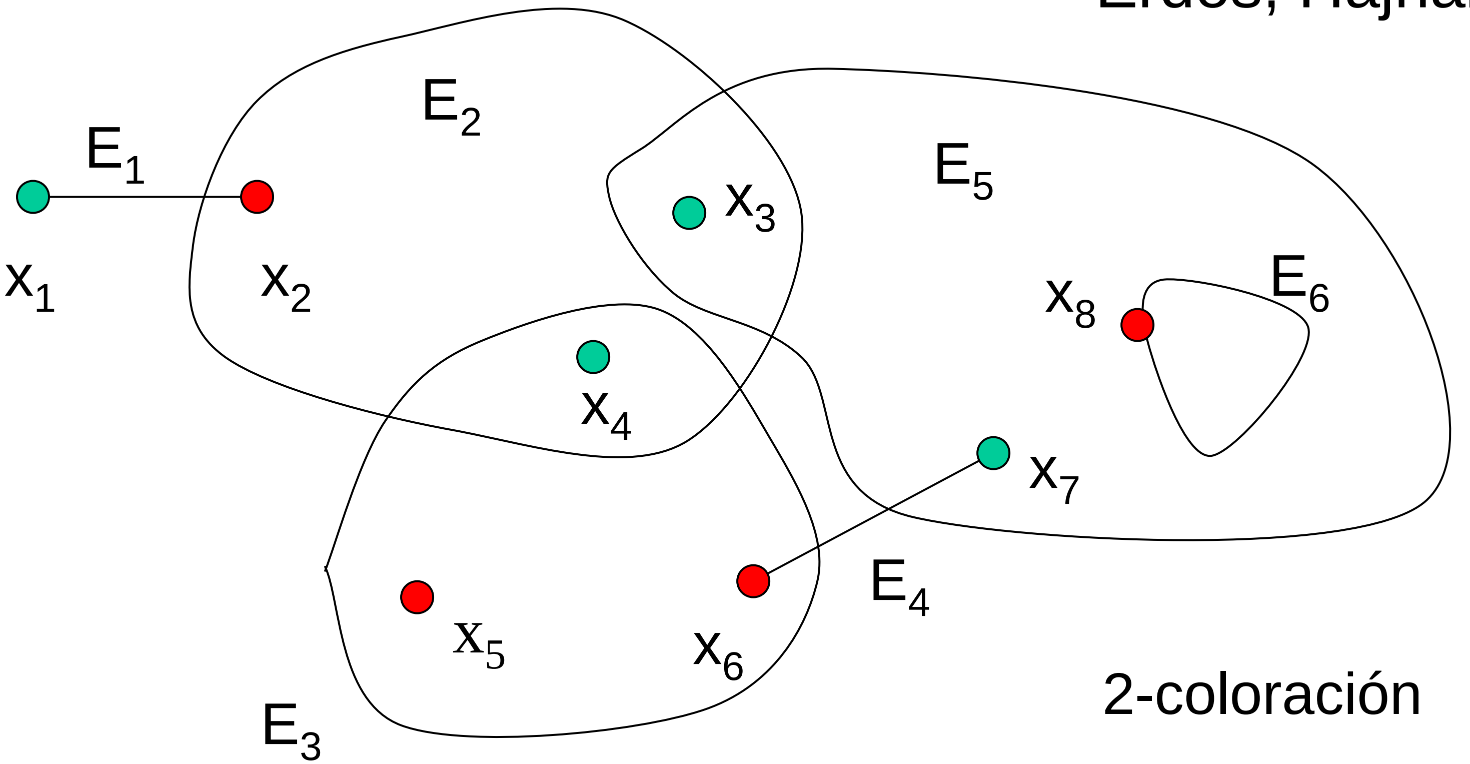
Coloración y 2-coloración

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria

Coloración de hipergrafos

Erdös, Hajnal (1966)



2-coloración

Coloreamos los vértices, SIN aristas monocromáticas

Coloración de hipergrafos

Número cromático

$\chi(H)$ = mínimo número de colores para colorear los vértices de H de modo que no haya aristas monocromáticas

Conjunto estable en H

$S \subset X$ es un conjunto estable si no contiene ninguna hiperarista

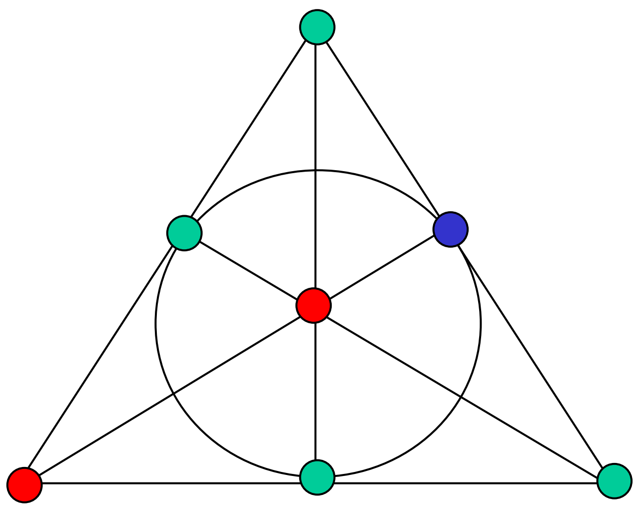
estable $\leftrightarrow$ clase de color

(en grafos) independiente $\leftrightarrow$ clase de color

$\alpha(H)$ = máx. cardinal de un conjunto estable

Coloración de hipergrafos

Plano proyectivo finito de orden q



q^2+q+1 puntos, q^2+q+1 rectas

cada punto en q+1 rectas
cada recta con q+1 puntos

cada par de puntos en una recta
cada par de rectas un punto común

$\chi(H(2)) = 3$

$\alpha(H(2)) = 4$

Hipergrafo (q+1)-uniforme (q+1)-regular

Coloración de hipergrafos

1) Si H es hipergrafo de orden n, entonces

$$\chi(H)\,\alpha(H) \geq n \qquad\qquad \chi(H) + \alpha(H) \leq n+1$$

Dem.:

Si $\chi(H) = q$ tomamos una q-coloración $X = S_1 \cup \ldots \cup S_q$ donde cada S_i es estable

$$\text{Así} \qquad n = \Sigma\,|S_i| \leq q\,\alpha = \chi\,\alpha$$

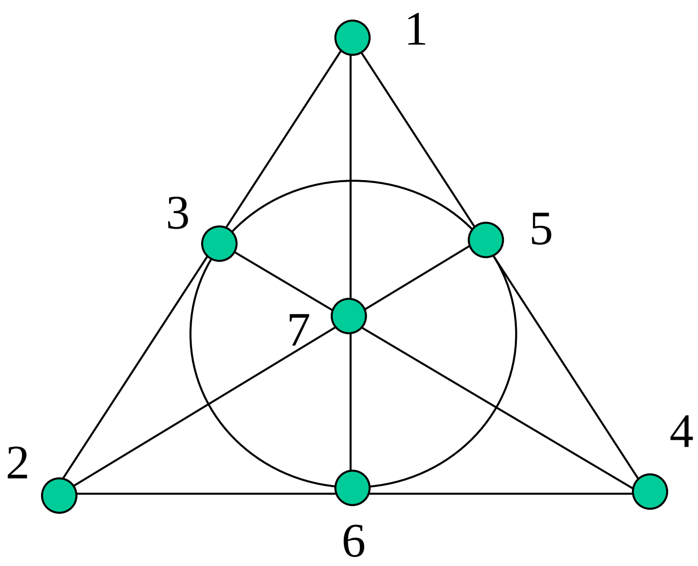
Sea S estable y máximo, $|S| = \alpha$, cada elemento de S se colorea con el color 1 y los restantes vértices con los $n - \alpha$ colores restantes

$$\chi \leq (n - \alpha) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \chi + \alpha \leq n + 1$$

Sistemas de Steiner

Una familia F de k-subconjuntos de X, |X| = n tal que cada r-subconjunto de X está contenido en un elemento de F, se llama un sistema de Steiner S(r, k, n)

Sistema triple de Steiner S(2, 3, n) STS(n)



X = {1,2,3,4,5,6,7}
F = {123,145,167,246,257,347,356}

χ(STS(7)) = 3

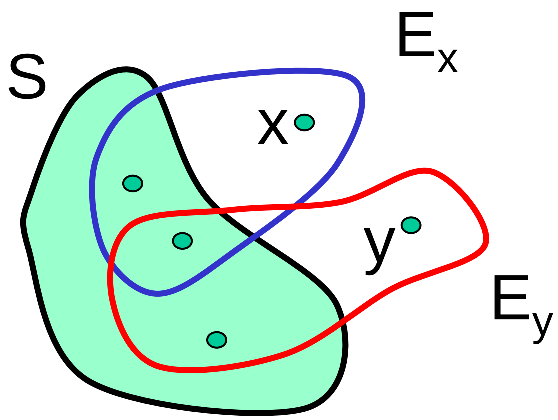
Coloración de hipergrafos

2) Si H es 3-uniforme de orden n y $|E_i \cap E_j| \leq 1$, entonces cada conjunto estable y maximal S cumple que $|S| \geq \sqrt{2n}$

Dem.

Si S estable y maximal, |S|= s, entonces $\forall x \in X - S$ existe una hiperarista E_x tal que $E_x - \{x\} \subset S$.
Como H lineal, los conjuntos $E_x \cap S$ tienen cardinal 2 y son distintos dos a dos

$$|X - S| = n - s \leq \binom{s}{2} \quad \Rightarrow \quad s \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$$



Coloración de hipergrafos

3) Si H es hipergrafo lineal y sin bucles entonces

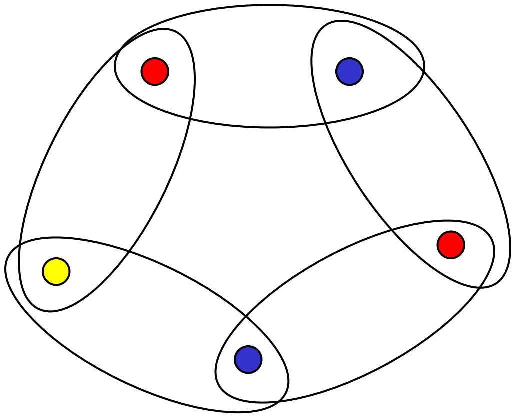
$$\chi(H) \leq \Delta(H) \quad \text{salvo si}$$

i) $\Delta(H) = 2$ y una componente conexa es un ciclo impar

ii) $\Delta(H) > 2$ y una componente conexa es un grafo completo de orden $\Delta(H) + 1$

Lepp, Gardner, 1973

En estos casos $\chi(H) = \Delta(H) + 1$



2-coloración de hipergrafos

Teorema (Karp, 1972)
3C (en grafos) es un problema NP-completo

Teorema (Linial, Tarsi, 1985)
2C (en hipergrafos) es un problema NP-completo

- 2C es un problema NP
- SAT $\propto$ 2C

2-coloración de hipergrafos

2C es un problema de la clase NP

- Algoritmo polinómico no determinista
  - Para cada instancia I, un certificado C(I)
  - En tiempo polinómico se comprueba si C(I) nos da la respuesta SÍ o NO
- Dado un hipergrafo H, ¿es 2-coloreable?
  - I describe el hipergrafo
  - C(I) es una asignación de colores

    $V(H) \rightarrow \{1,2\}$
  - Se comprueba si C(I) es una 2-coloración válida (las aristas no son monocromáticas, O(qn))

2-coloración de hipergrafos

$\boxed{SAT \propto 2C}$

- El problema A es *polinómicamente reducible* a B si existe T, algoritmo polinómico, que convierte cada instancia I de A en una instancia T(I) tal que:

La respuesta a I es SÍ $\Leftrightarrow$ La respuesta a T(I) es SÍ

- Consideremos una instancia de SAT con variables $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y cláusulas $C = \{C_1, \ldots, C_p\}$ y construimos un hipergrafo H tal que:

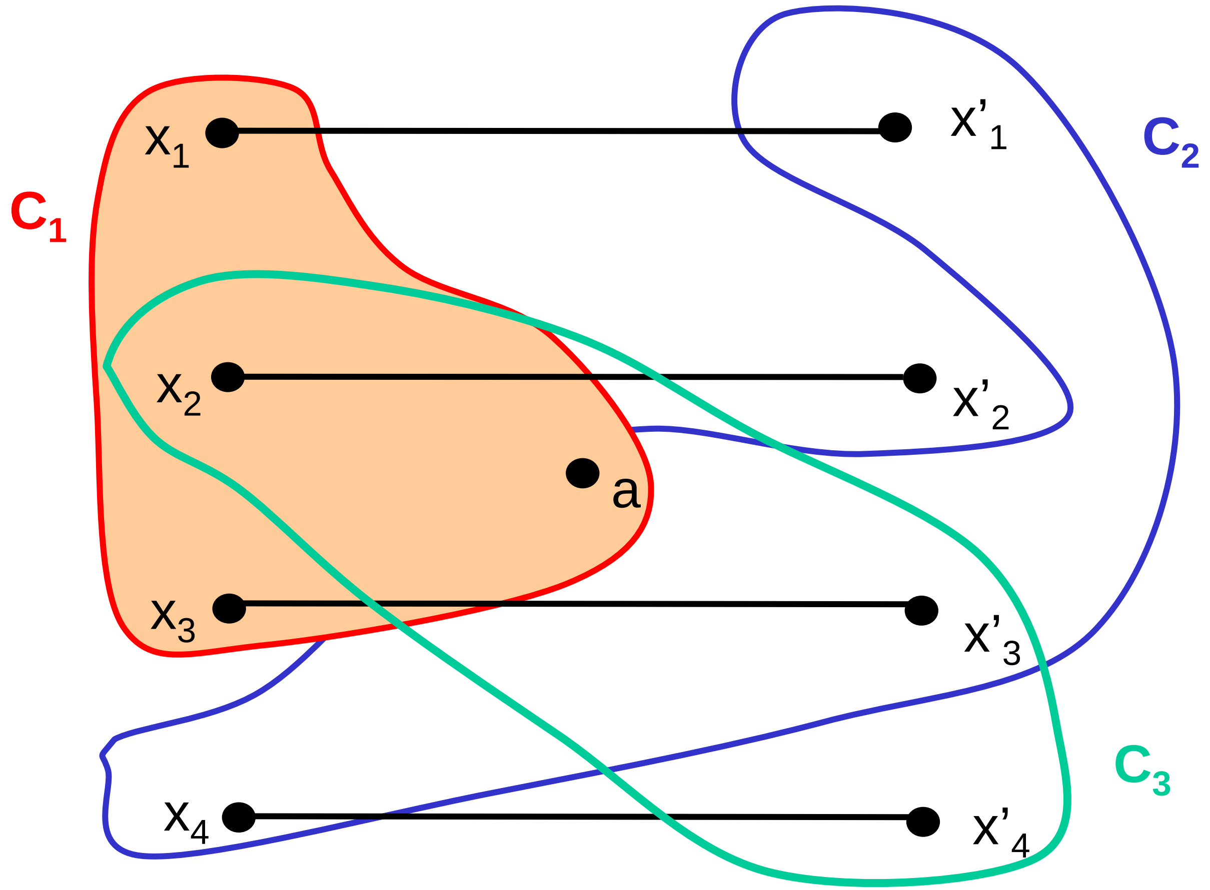
H es 2-coloreable $\Leftrightarrow$ la instancia se satisface

2-coloración de hipergrafos

SAT $\propto$ 2C

$$F = (x_1+x_2+x_3)(x'_1+x'_3+x_4)(x_2+x'_3+x'_4)$$

$H = (V, E)$



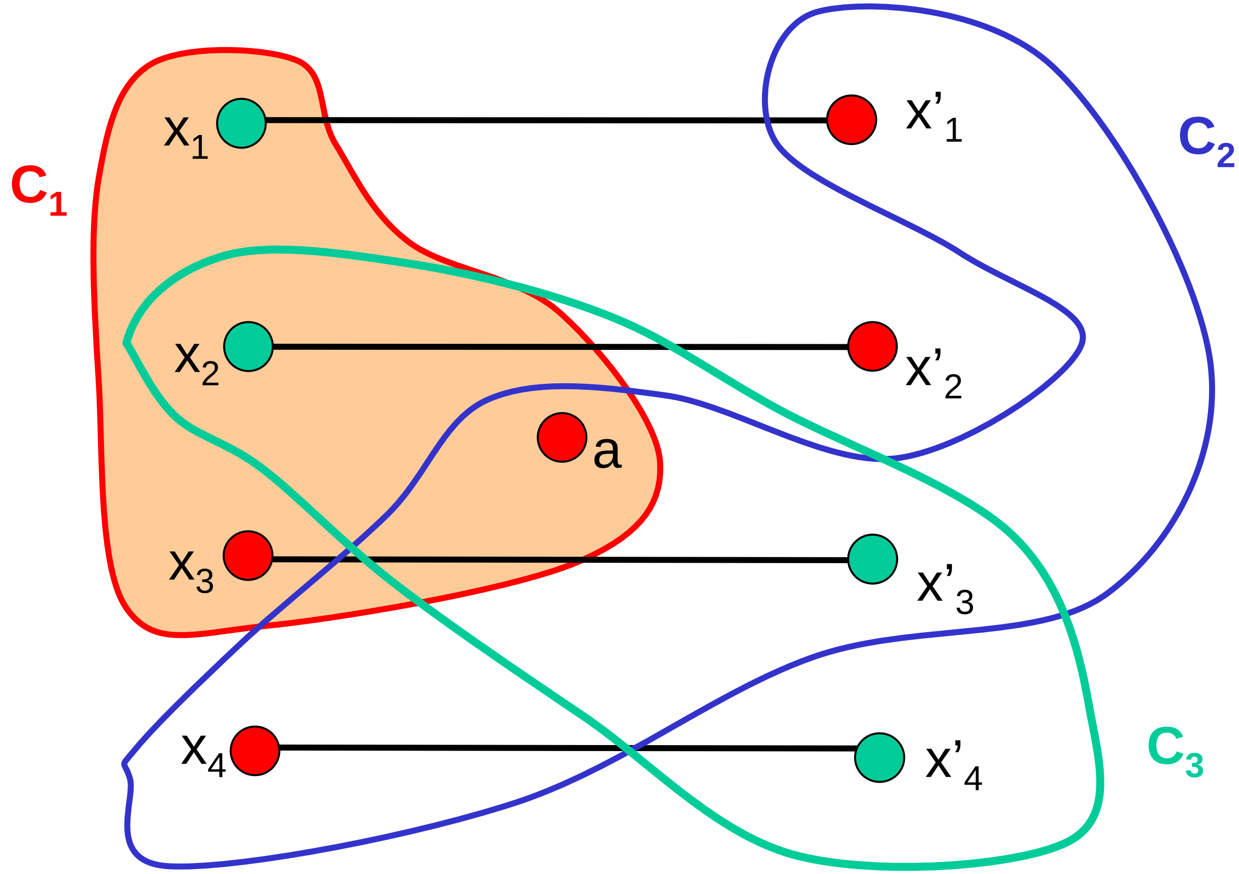
2-coloración de hipergrafos

SAT $\propto$ 2C

$$F = (x_1+x_2+x_3)(x'_1+x'_3+x_4)(x_2+x'_3+x'_4)$$

$H = (V, E)$

Si F se satisface ……



2-coloración de hipergrafos

SAT $\propto$ 2C

1) Si F se satisface con una asignación de verdad T construimos una 2-coloración de H así:

- Si x_i verdad $\Rightarrow$ x_i color 1, x'_i color 0
- Si x_i falso $\Rightarrow$ x_i color 0, x'_i color 1
- a color 0

Como todas las cláusulas se satisfacen, cada arista C_k recibe los colores 0 y 1. Lo mismo que las aristas $x_j x'_j$

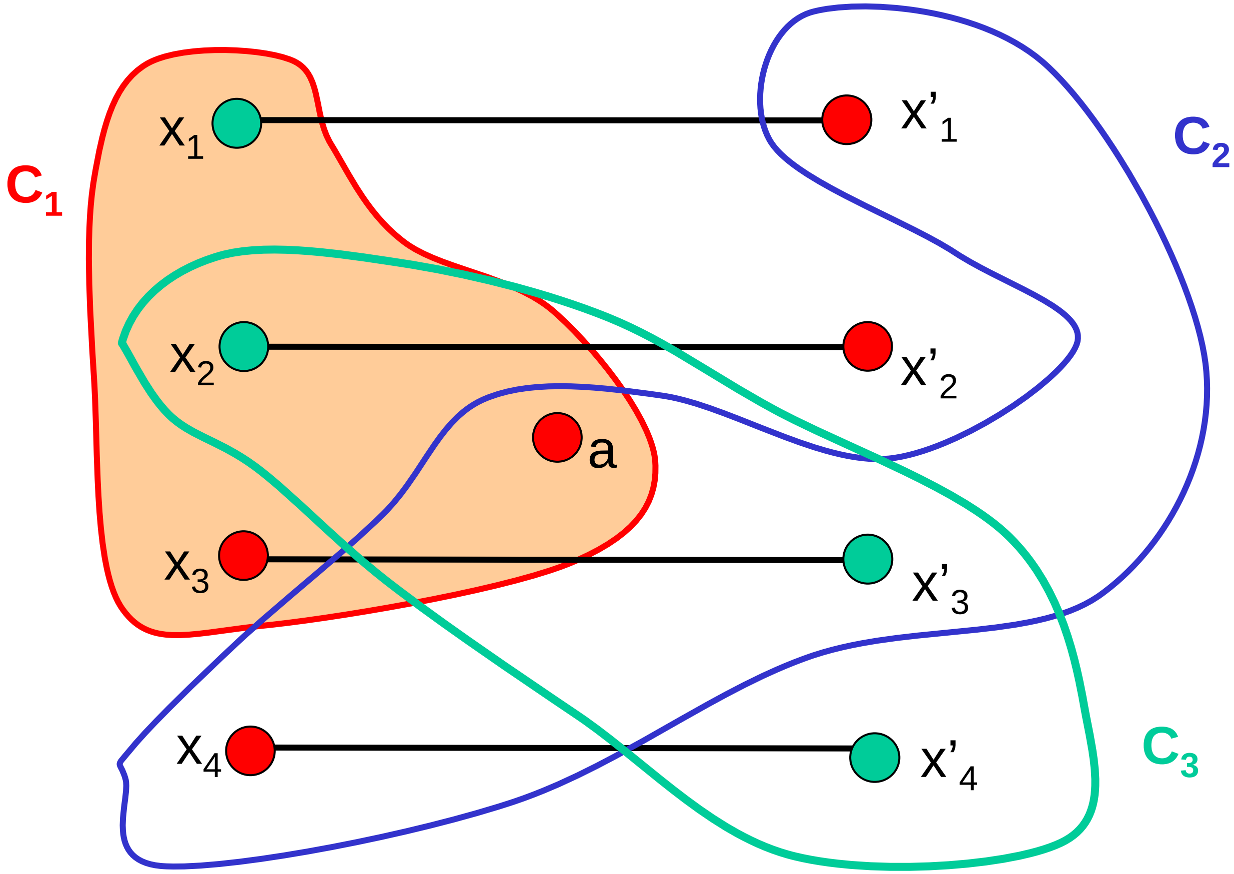
2-coloración de hipergrafos

SAT $\propto$ 2C

$$F = (x_1+x_2+x_3)(x'_1+x'_3+x_4)(x_2+x'_3+x'_4)$$

$H = (V, E)$

Si H es 2-coloreable ….



2-coloración de hipergrafos

SAT $\propto$ 2C

2) Si H es 2-coloreable, renombrando los colores podemos suponer que color(a)=0.

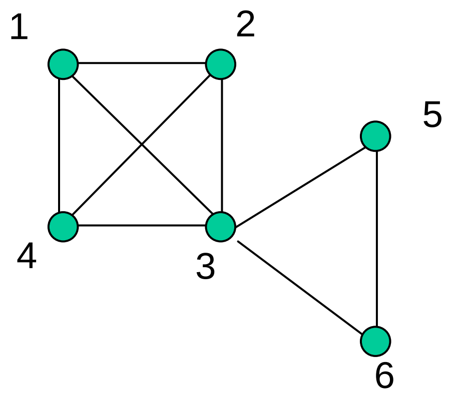
Así cada variable tiene una literal con 0 y otra con 1, y construimos una asignación de verdad en la que

$$x_j \text{ es verdad} \Leftrightarrow \text{recibe el color 1}$$

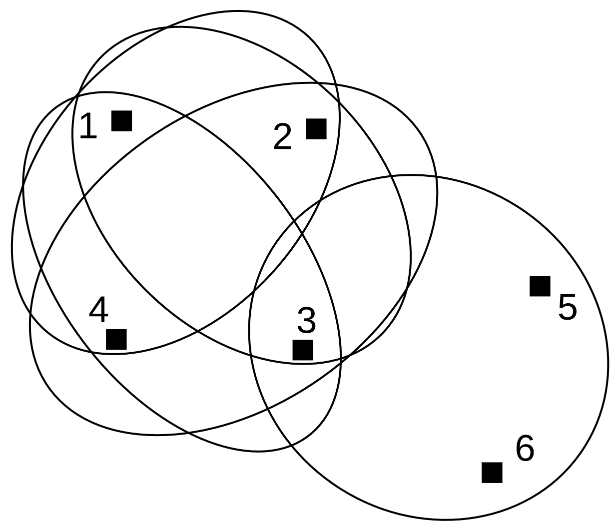
Como en cada arista C_k hay vértices de color 1, resulta que todas las cláusulas se satisfacen y, por tanto, también la fórmula F

2-coloración de hipergrafos

Dado G = (V,A) grafo, se construye un hipergrafo H(G) =(V,E) en el que las hiperaristas corresponden a los ciclos impares minimales de G



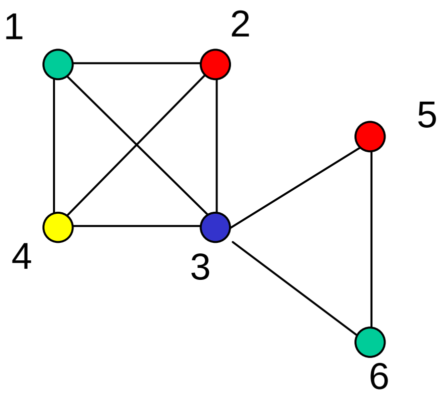
G



H(G)

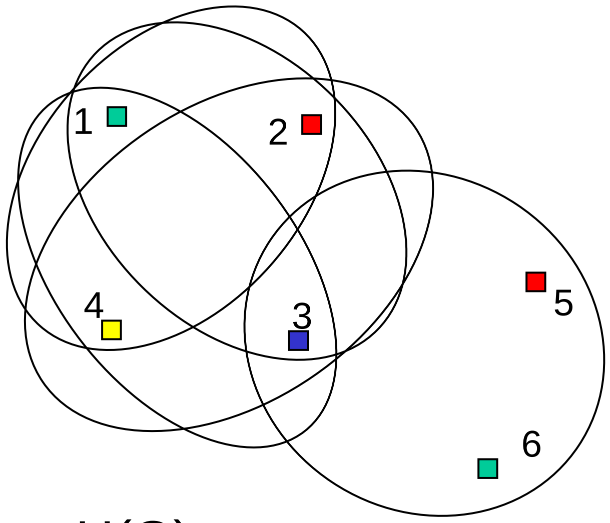
2-coloración de hipergrafos

Dado G = (V,A) grafo, se construye un hipergrafo H(G) =(V,E) en el que las hiperaristas corresponden a los ciclos impares minimales de G



G

4 colores



H(G)

V,A --- R,Z es bicoloración de H

2-coloración de hipergrafos

Teorema (Stein, Woodall, 1972)

G es 4-coloreable $\Leftrightarrow$ H(G) es 2-coloreable

Dem.: Si G es 4-coloreable con colores V,A,R,Z entonces $X = V \cup A$, $Y = R \cup Z$ es una 2-coloración de H(G) porque ni X ni Y contienen ciclos impares

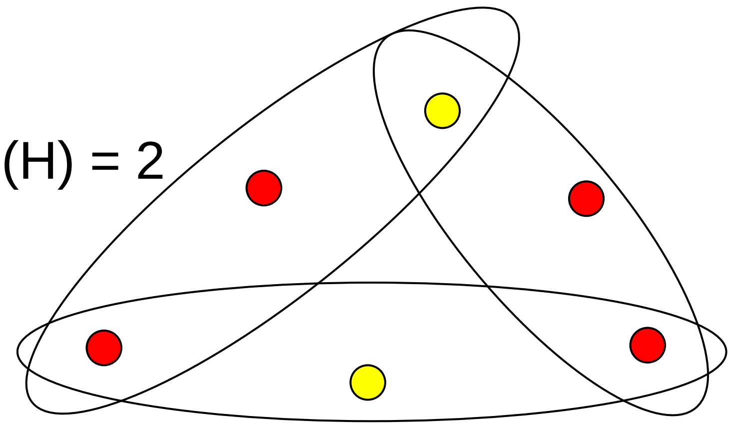
Si H(G) es una 2-coloración con colores X e Y entonces los subgrafos inducidos G_X y G_Y no tienen ciclos impares (pues en otro caso X o Y contendrían hiperaristas)
Así G_X y G_Y son bipartidos, es decir 2-coloreables. Por tanto tendremos una 4-coloración de G

Coloración fuerte de hipergrafos

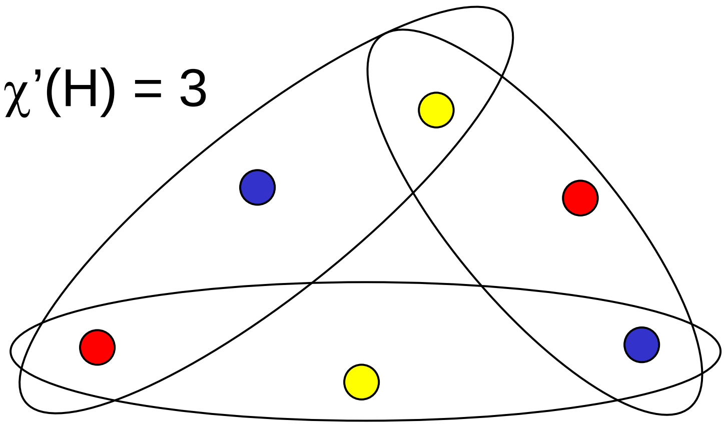
Coloración en la que cada color NO aparece dos veces en la misma hiperarista

El número mínimo de colores se indica por $\chi'(H)$

$\chi(H) = 2$



$\chi'(H) = 3$



Propiedades:

$\chi'(H) \geq \chi(H)$

$\chi'(H) \geq r(H)$

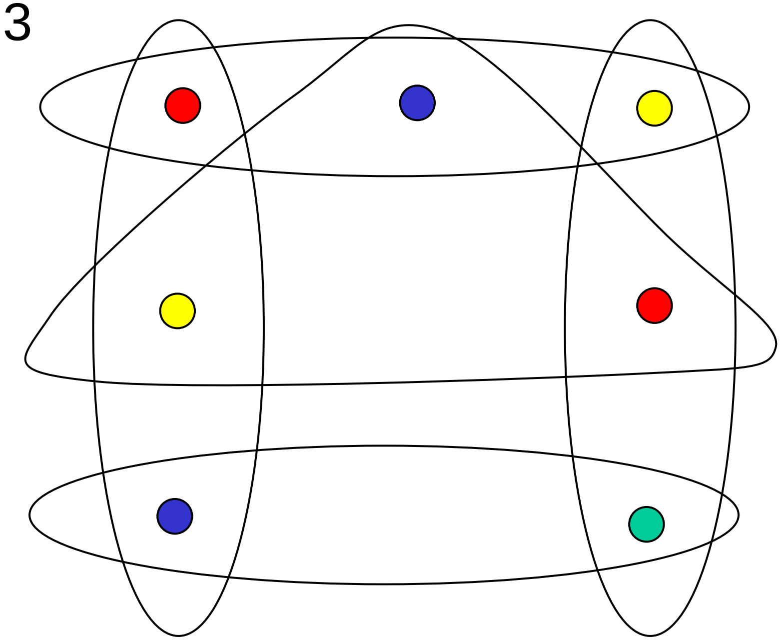
$\chi'(H)$ es el número cromático del grafo $[H]_2$

Coloración fuerte de hipergrafos

Coloración en la que cada color NO aparece dos veces en la misma hiperarista

El número mínimo de colores se indica por $\chi'(H)$

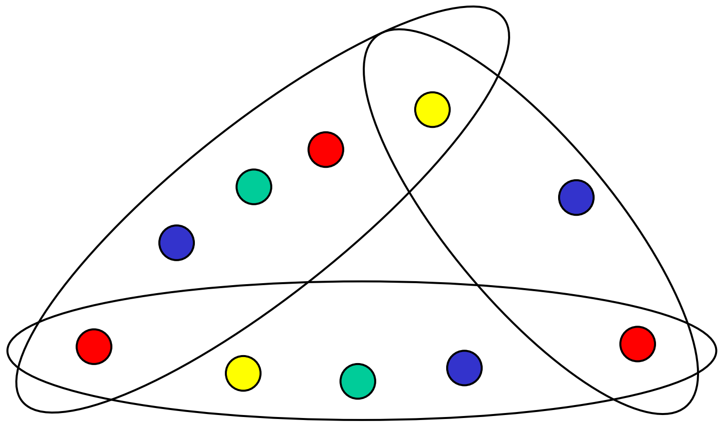
$\chi'(H) = 4 > \text{rang}(H) = 3$



Coloración buena de hipergrafos

Una k-coloración buena (good k-coloration) de un hipergrafo H = (V, E) es una partición de V en k partes $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ tal que cada hiperarista E_j contiene el mayor número posible de colores distintos, es decir, $\min\{k,|E_j|\}$

Si $k \geq \text{rang}(H)$ toda k-coloración buena es fuerte



Una 4-coloración buena

Coloración buena de hipergrafos

Red de transmisores para telefonía móvil

Hipergrafo $H = (V, E)$
Vértices: los transmisores
Hiperaristas: conjuntos maximales de transmisores que, dos a dos, originan interferencias

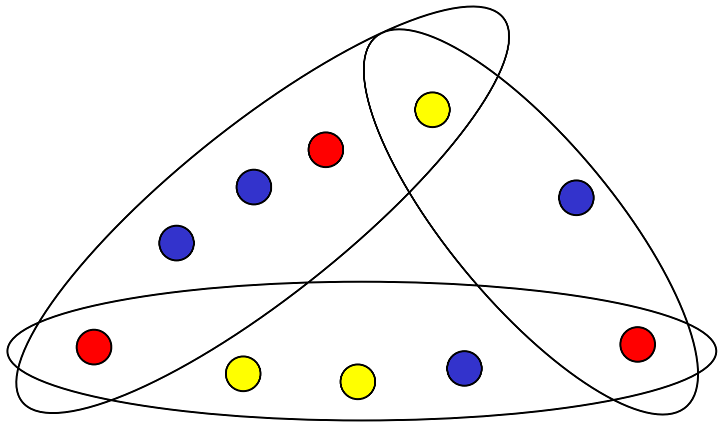
Frecuencia = color

Una buena k-coloración nos da el número mínimo de frecuencias k que necesitamos para que no haya interferencias

Aquí $k \geq \text{rang}(H)$ y la coloración también es fuerte

Coloración equitativa de hipergrafos

Una k-coloración equitativa de un hipergrafo H = (V, E) es una partición de V en k partes $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ tal que en cada hiperarista E_j cada color aparece el mismo número de veces, salvo una unidad si k no es divisor de $|E_j|$



3-coloración equitativa

Juegos e hipergrafos

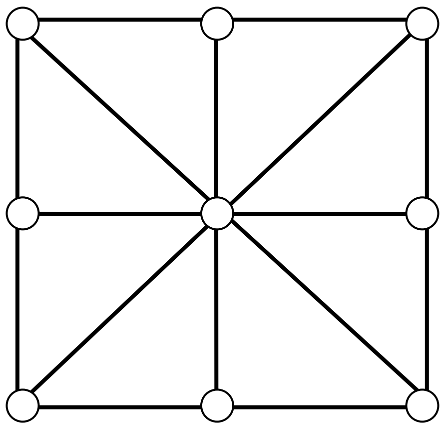
Un juego posicional, POS(H), sobre un hipergrafo finito H es un juego de dos jugadores, en el que los jugadores, alternadamente seleccionan los vértices de H. El objetivo de cada jugador es marcar todos los vértices de alguna arista de H

¿Estrategia para que el segundo jugador empate?

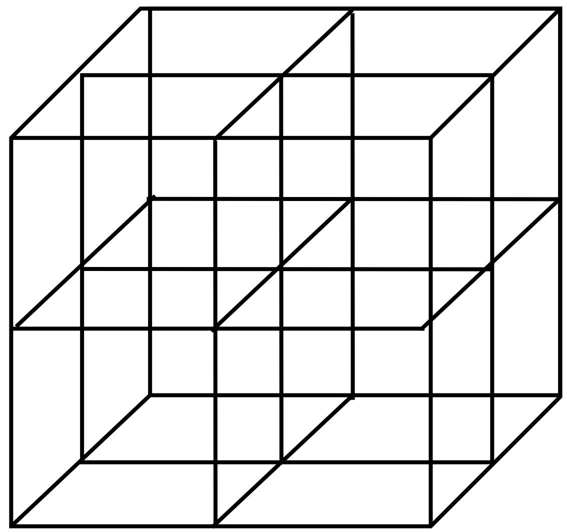
Una condición necesaria para la existencia de esta estrategia es que H admita una 2-coloración equitativa
(2-coloración para evitar aristas monocromáticas y equitativa por los turnos de los jugadores)

TIC-TAC-TOE

El tablero de juego es el hipergrafo C(k,n)
Vértices: Puntos del retículo n-dimensional con coordenadas enteras 1,2,…,k $|V| = k^n$
Hiperaristas: k puntos alineados



C(3,2)



C(3,3)

TIC-TAC-TOE

El tablero de juego es el hipergrafo C(k,n)
Vértices: Los puntos de $[k]^n$ (puntos del retículo n-dimensional con coordenadas enteras 1,2,…,k) $|V| = k^n$
Hiperaristas: k puntos alineados

¿Para qué valores de (k,n)

- C(k,n) tiene una 2-coloración?
- C(k,n) tiene una 2-coloración equitativa?
- El segundo jugador tiene estrategia de empate?

TIC-TAC-TOE

Teorema (Hales-Jewett, 1963)

Si k,r $\in$ **N** existe un entero HJ(r,k) tal que si $n \geq$ HJ(r,k) y se colorean con r colores los puntos de $[k]^n$, entonces $[k]^n$ contiene al menos una recta (combinatoria) monocromática

Los objetos en dimensión alta NO pueden ser completamente aleatorios, siempre presentan alguna estructura de tipo combinatorio

Si $n \geq$ HJ(2,k) siempre existe una recta monocromática en $[k]^n$

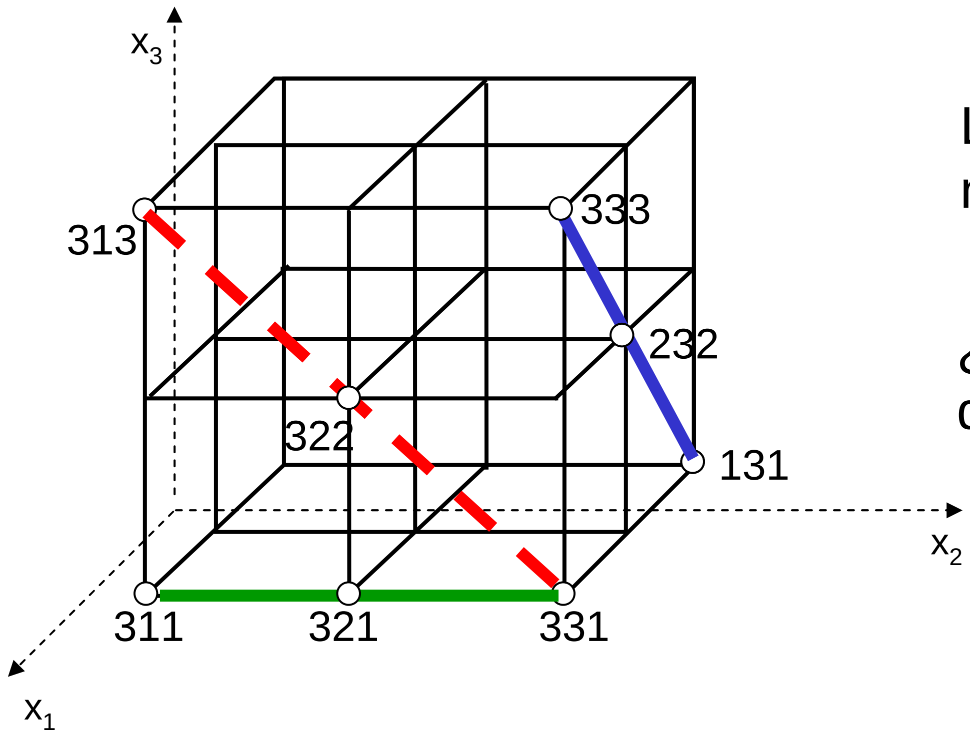
En el juego Tic-Tac-Toe de dos jugadores en dimensión suficientemente alta el primer jugador SIEMPRE gana (tiene estrategia ganadora)

TIC-TAC-TOE

Rectas combinatorias sobre {1,2,3}

La raíz $\tau = (3,*,1)$ define la recta combinatoria 311, 321, 331

La raíz $\tau = (*,3,*)$ define la recta combinatoria 131, 232, 333



La recta geométrica roja
no es una recta combinatoria

¿Hay rectas geométricas en C(3,2)
que no son combinatorias?

TIC-TAC-TOE

Teorema (Hales-Jewett, 1963)

Si $k,r \in \mathbf{N}$ existe un entero HJ(k,r) tal que si $n \geq$ HJ(k,r) y se colorean con r colores los puntos de $[k]^n$, entonces $[k]^n$ contiene al menos una recta (combinatoria) monocromática

HJ(k,1) = 1

HJ(2,r) = r

HJ(2,2) = 2

HJ(3,2) = 4

En dimensión 4 el empate es imposible. Pero en n = 3 el primer jugador tiene también estrategia ganadora

HJ(4,2) > 11

HJ(5,2) > 59

TIC-TAC-TOE

Teorema (Hales-Jewett, 1963)

Si $k,r \in \mathbf{N}$ existe un entero HJ(k,r) tal que si $n \geq HJ(k,r)$ y se colorean con r colores los puntos de $[k]^n$, entonces $[k]^n$ contiene al menos una recta (combinatoria) monocromática

Teorema (Van der Waerden)

Dados $k,r \in \mathbf{N}$ existe $m = W(k,r)$ tal que en cualquier r-coloración de $\{1,2,3,\dots,m\}$ existe una progresión aritmética monocromática de k términos

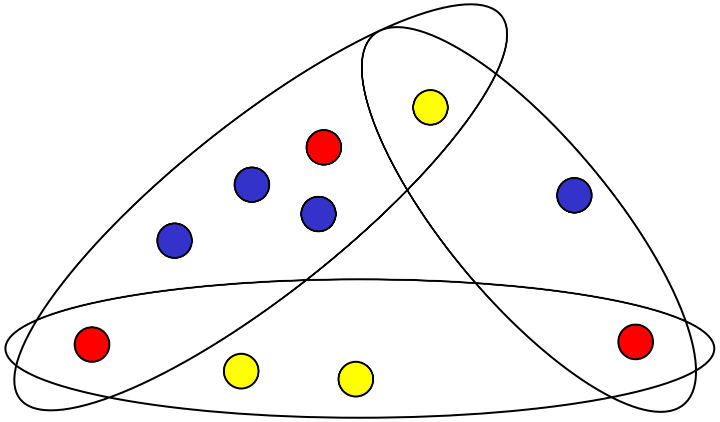
$\{1, 2, \dots, a, a + 1, \dots, a + d, \dots, a + 2d, \dots, a + (k-1)d, \dots, m\}$

Teorema

Dado un espacio topológico finito X y $r \in \mathbf{N}$ existe otro espacio topológico finito Y tal que en cualquier r-coloración de Y se encuentra una copia monocromática de X (homeomorfa a X)

Coloración uniforme de hipergrafos

Una k-coloración uniforme de un hipergrafo H = (V, E) de orden n es una partición de V en k partes $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ tal que en el número de vértices de cada color es el mismo, salvo una unidad si k no divide a n



3-coloración uniforme

Coloración **uniforme** de hipergrafos

Example A airplane manufacturer has p days to construct a plane. If it exceeds these p days, it pays a fine for each extra day. The construction of the plane can be decomposed into n tasks:

$$V = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}.$$

One task can be done in a day and a task is made by a workshop. Some employees can make a set of tasks:

$$e_1 \subseteq \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\},$$

some others can make a set of tasks:

$$e_2 \subseteq \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

and so on with $\cup_i e_i = V$.
So we have a hypergraph on V without isolated vertex.

Coloración uniforme de hipergrafos

- Is it possible to construct this plane with just q workshops in the required times?

Obviously we must have the necessary condition $q.p \geq n$ which leads to $p \geq \lceil \frac{n}{q} \rceil$. This condition is sufficient if the hypergraph has a strong uniform q-coloring $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ where the color C_i stand for the set of tasks which is done the day i, we have:

(i) $|C_i \cap e_j| \leq 1,\ j = 1, 2, 3, \ldots, m$

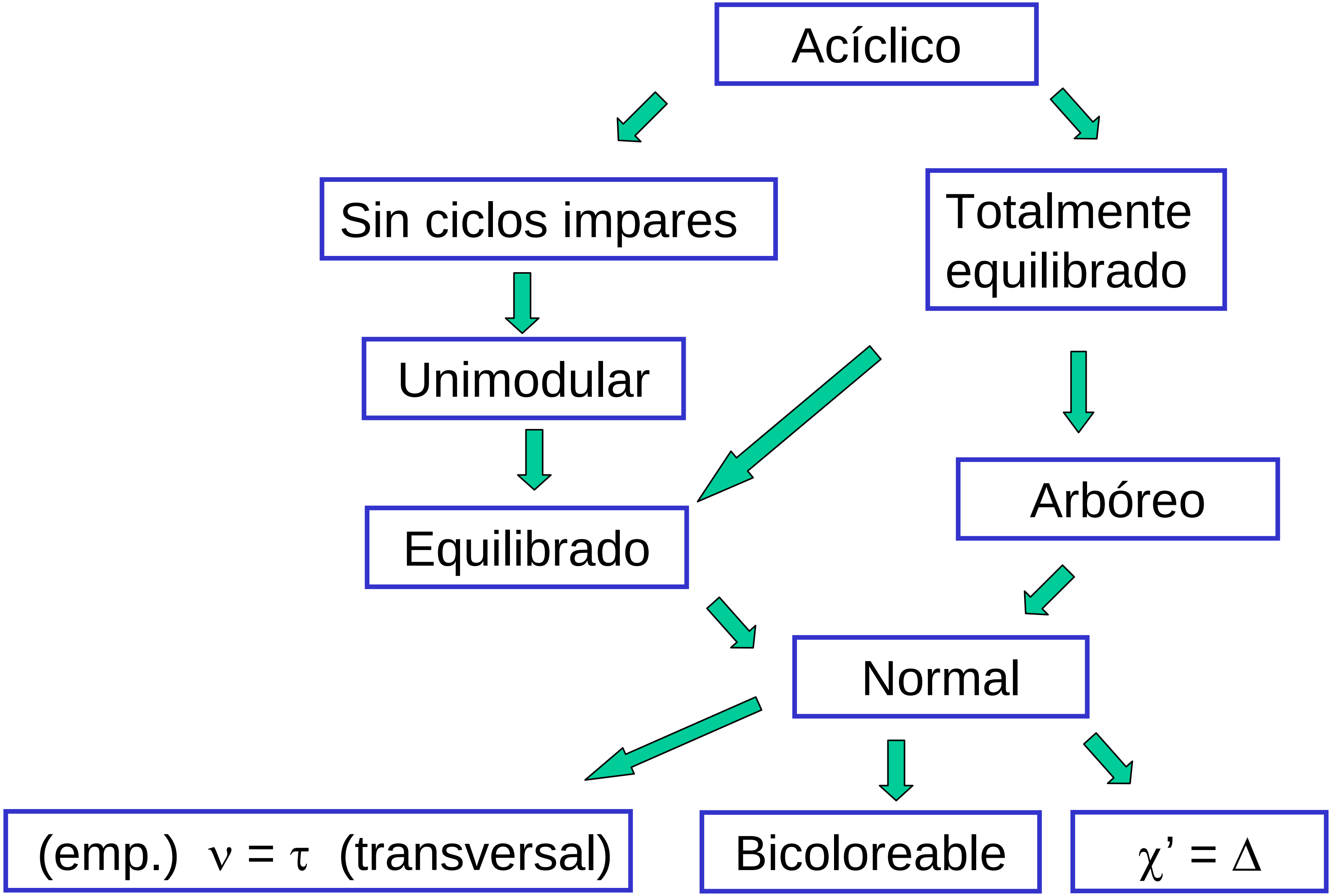
(ii) $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor \leq |C_i| \leq \lceil \frac{n}{q} \rceil \leq p$

Grafos bipartidos

- no tienen ciclos impares
- son 2-coloreables
- Teorema de König $\beta = \alpha'$

  mín(recubrimiento) = máx(emparejamiento)
- Índice cromático $\chi' = \Delta$ (grado máximo)

Hipergrafos



Hipergrafos arbóreos

H = (V, E) es **arbóreo** si existe un árbol T, cuyo conjunto de vértices es el de H y tal que cada hiperarista de H induce un subárbol de T

Un hipergrafo arbóreo es una familia de subconjutos conexos en un árbol.

Aparecen en problemas de localización de genes en las moléculas de ADN, árboles filogenéticos,…

Se usan en bases de datos relacionales para organizar los sistemas de recuperación de la información

Bibliografía

- C. Berge, ***Hypergraphs: Combinatorics of finite sets***, North Holland, 1989.
- C. Berge, ***Graphs and Hypergraphs***, North Holland, 1973.
- A. Bretto, ***Hypergraphs: An Introduction,*** Springer, 2013
- P. Duchet, *Hypergraphs,* in ***Handbook of Combinatorics***, R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (eds.), Elsevier, 1995.
- P. Cameron, ***Combinatorics***, Cambridge Univ. Press, 1995
- P. Erdös, A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set systems*, Acta Math. Acad. Sc. Hung., 17, 61-99, 1966