Universidad Politécnica
de Madrid

HIPERGRAFOS

Combinatoria de conjuntos finitos

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria

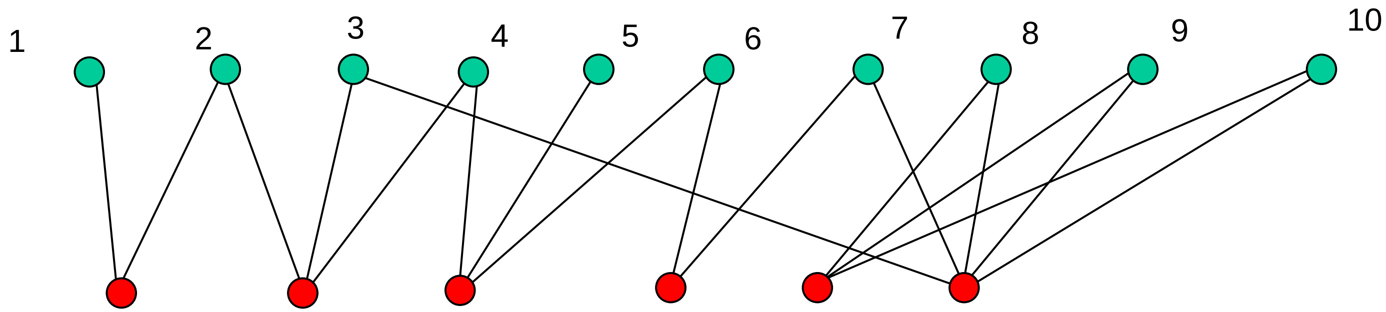
Grafos … no es suficiente!

Redes sociales
Relaciones entre individuos y “grupos”

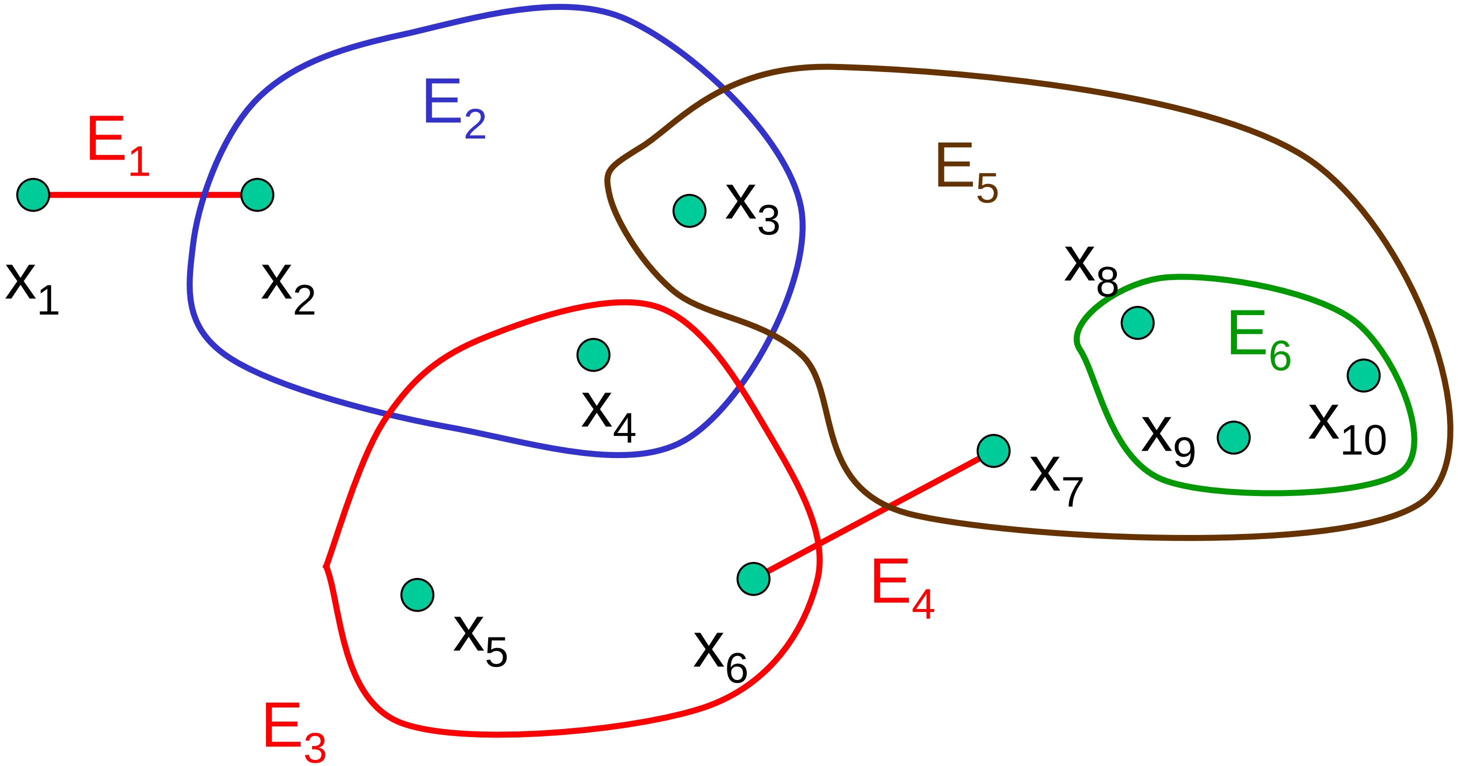
$V = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\}$

“Grupos” 1 con 2, 234, 456, 67, 89 y 10, 3789 y 10

Representación mediante un grafo



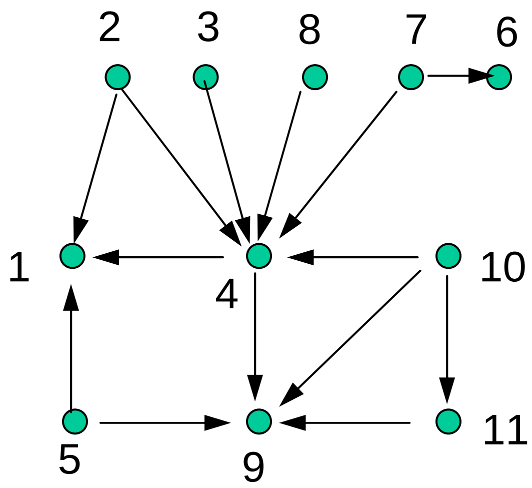
Grafos … no es suficiente!



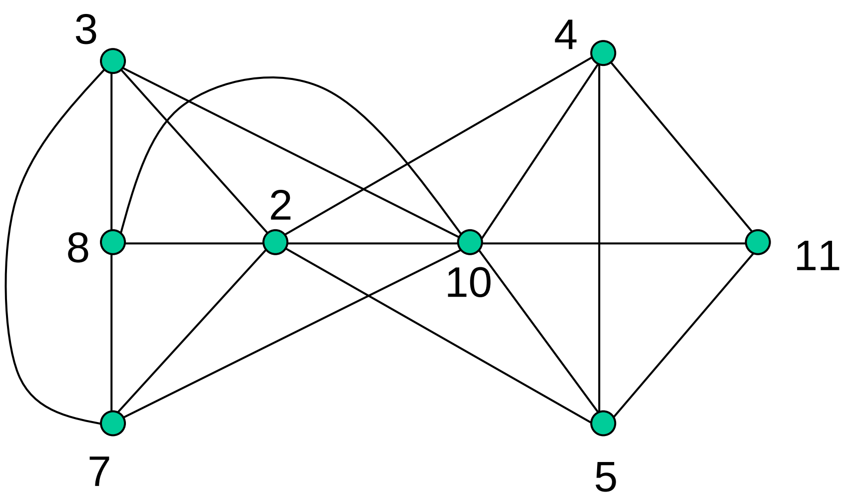
HIPERARISTAS !!

Grafos ... no es suficiente!

Relaciones tróficas en sistemas ecológicos



Red alimenticia



Red competición

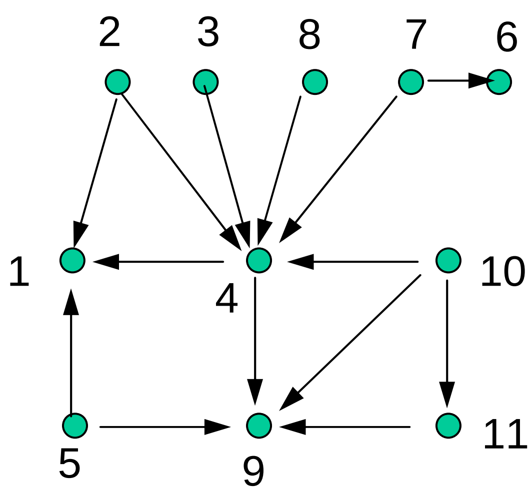
Arco 49, 4 depreda 9

Arista 24, 2 y 4 tienen presa común

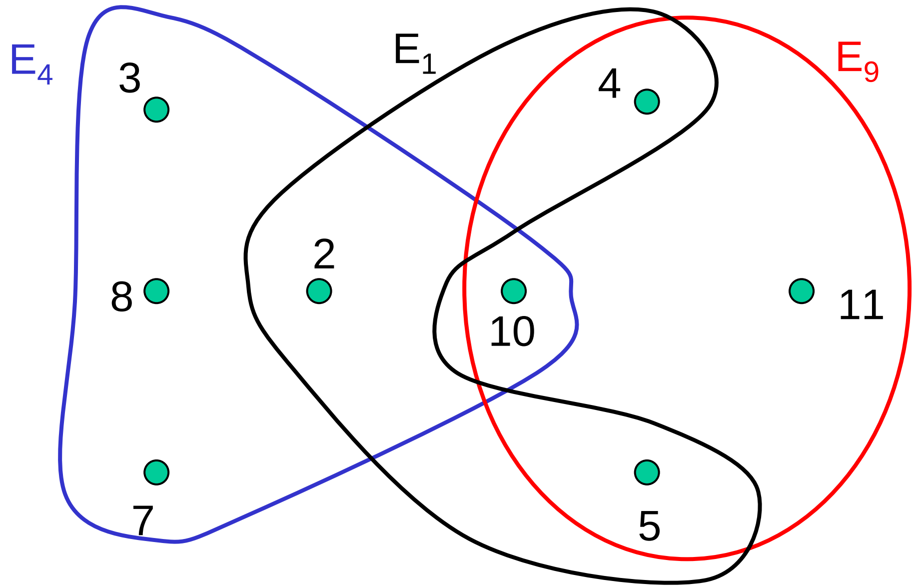
¿Qué especies tienen una determinada presa en común?

Grafos … no es suficiente!

Relaciones tróficas en sistemas ecológicos



Red alimenticia

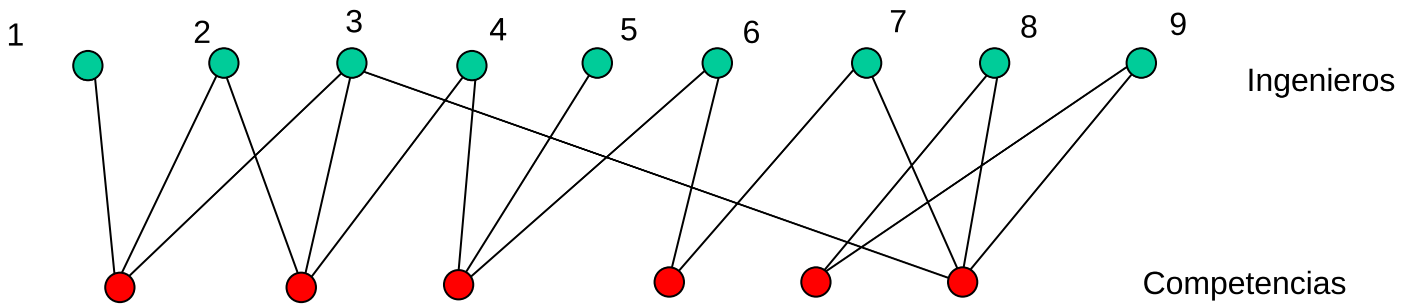


Hipergrafo competición

¿Qué especies tienen una determinada presa en común?
Los vértices de una hiperarista

Grafos … no es suficiente!

Ingenieros en una fábrica que cubren un conjunto de competencias



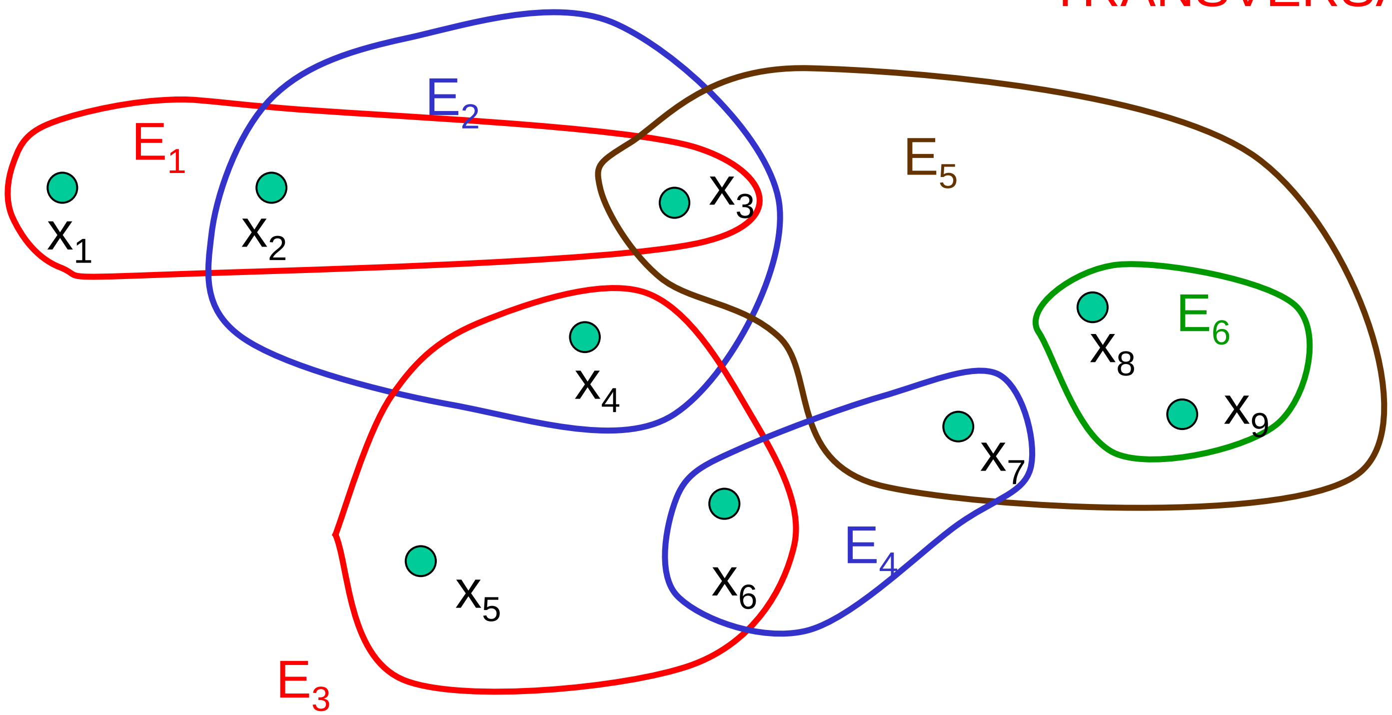
Conjunto de ingenieros que cubren todas las competencias

Grafos … no es suficiente!

Ingenieros en una fábrica que cubren un conjunto de competencias

Conjunto de ingenieros que cubren todas las competencias

TRANSVERSAL



Grafos … no es suficiente!

Complejos de proteínas

La descripción del proteoma de un organismo: lista de proteínas que aparecen en cada complejo proteínico.

Primera representación: Grafo en el que los vértices son las proteínas y las aristas significan proteínas que interaccionan.

NO se tienen en cuenta las interacciones múltiples

Segunda representación: Grafo en el que los vértices son los complejos de proteínas y las aristas significan intersección no vacía.

NO se tiene información sobre las proteínas

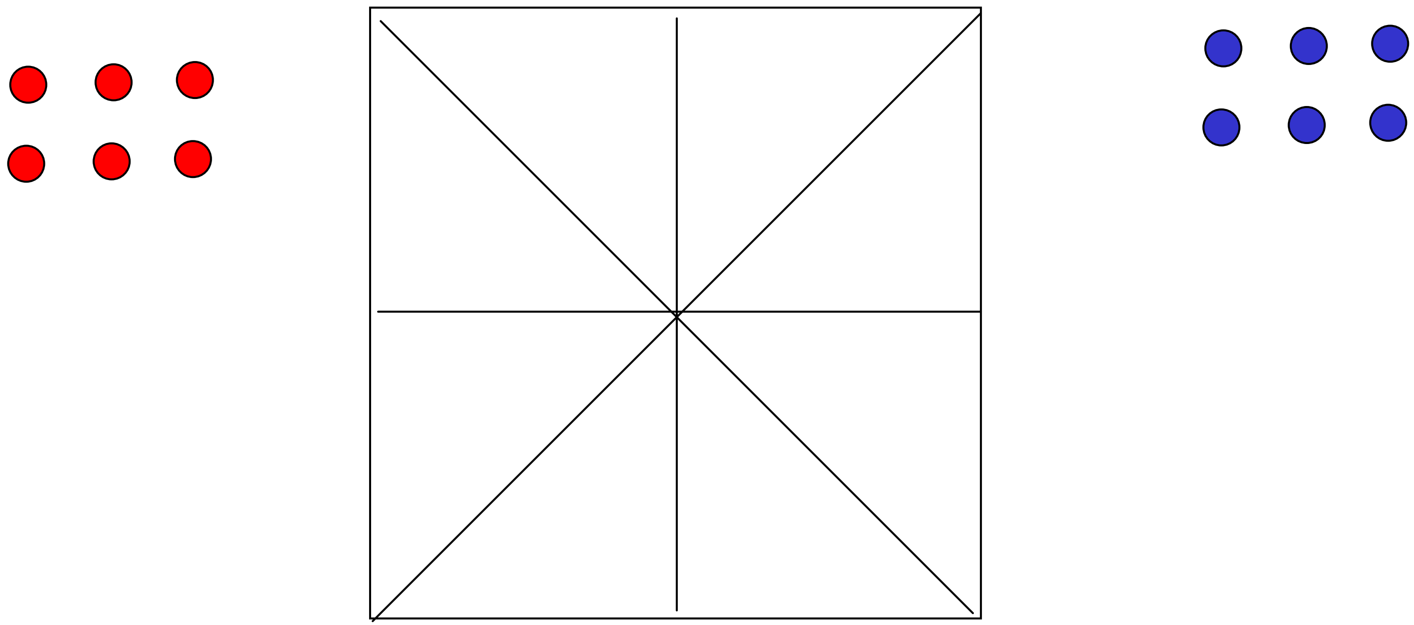
Grafos … no es suficiente!

Complejos de proteínas

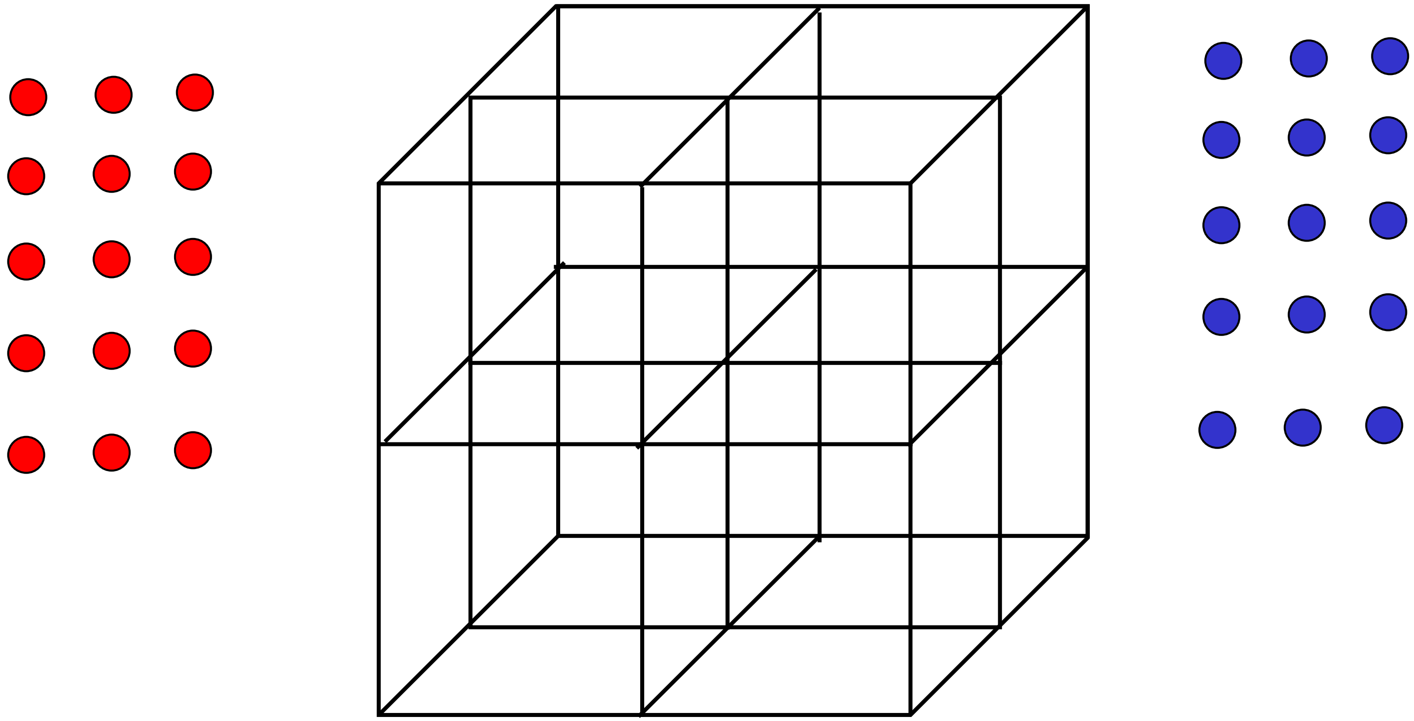
La descripción del proteoma de un organismo: lista de proteínas que aparecen en cada complejo proteínico.

Hipergrafo:
Los vértices serán las proteínas
Cada complejo será una hiperarista (conjunto de proteínas)

TIC-TAC-TOE

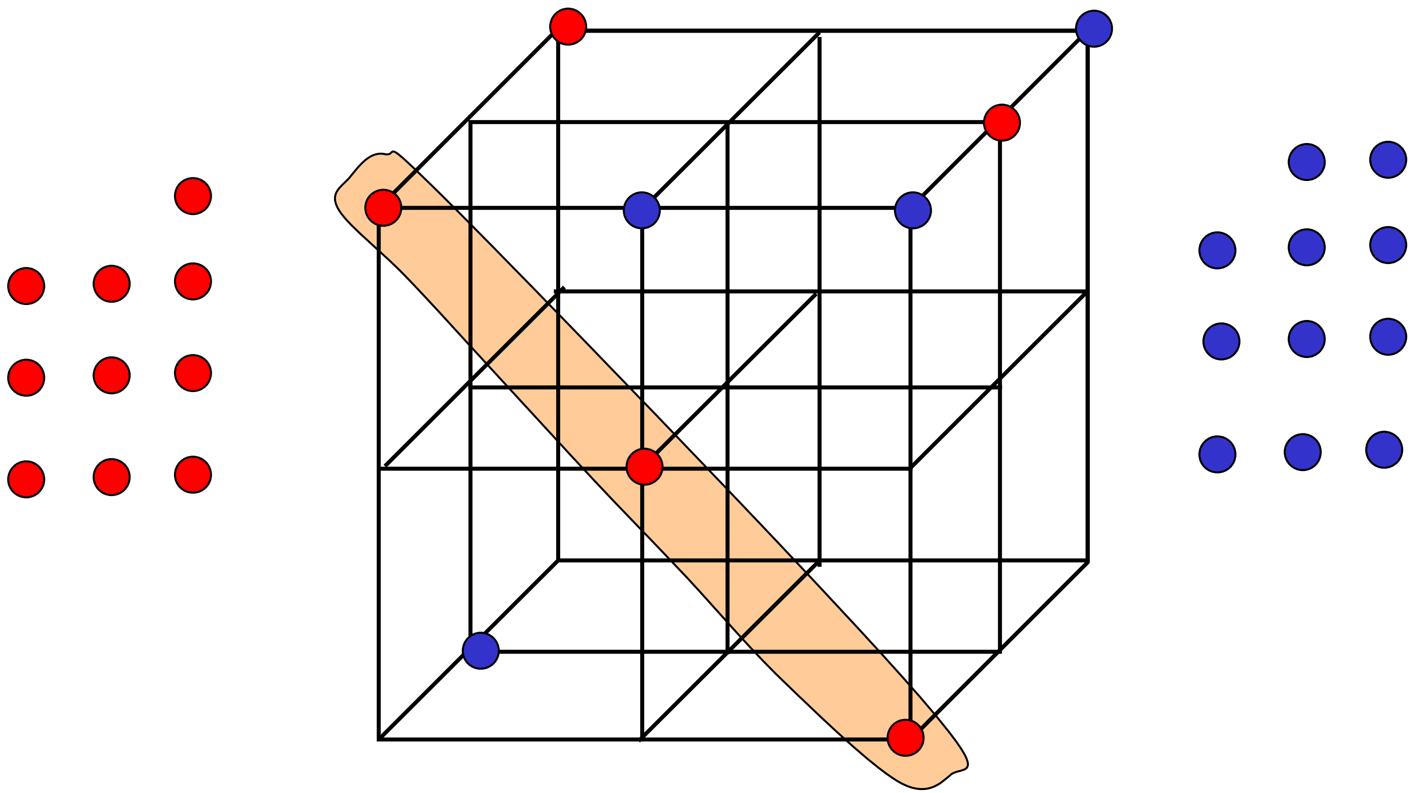


TIC-TAC-TOE



TIC-TAC-TOE

¿ESTRATEGIA?



HIPERGRAFOS

- V conjunto finito $|V| = n$
- $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$ familia de subconjuntos de V

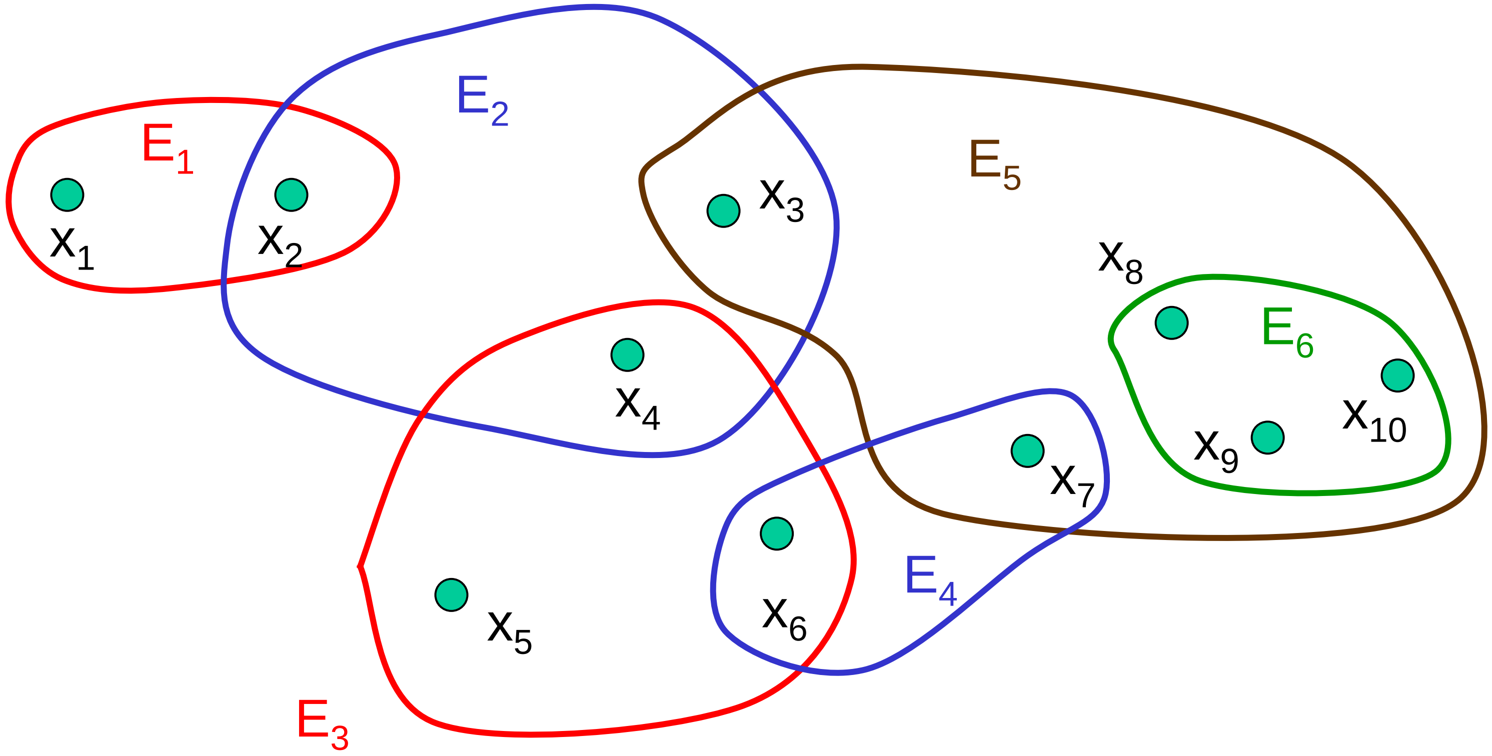
$$E_i \neq \varnothing, \quad \cup E_i = V$$

$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vértices

$E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$ hiperaristas

$$H = (V, E)$$

HIPERGRAFOS



Las hiperaristas determinan el hipergrafo

HIPERGRAFOS

Estudio de las familias de conjuntos

~ 1930
Sperner, Ramsey, Hall, König

~ 1960
Escuela húngara: Combinatoria de conjuntos finitos
Escuela francesa: Generalización de grafos
Berge (1966) sugiere el término **HIPERGRAFO**

Combinatoria de conjuntos finitos

X conjunto finito, de cardinal n $\qquad$ $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

F una familia de subconjuntos de X que satisfacen alguna restricción o condición.

Problema 1. Tamaño máximo de F

Problema 2. Describir todas las familias que alcanzan la cota anterior

Familias de intersección

F es familia de intersección si $\forall A, B \in F \quad A \cap B \neq \emptyset$

Problema 1. Tamaño máximo de F

Si F es de intersección entonces $|F| \leq 2^{n-1}$

Dem. (Principio del palomar)

Los 2^n subconjuntos de X se agrupan en pares $\{A, X - A\}$. Hay 2^{n-1}

Una familia F de intersección contiene, a lo más, un elemento de cada par

Familias de intersección

Problema 2.

Hay familias de intersección F con $|F| = 2^{n-1}$

Ejemplo 1. La familia de todos los subconjuntos de X que contienen a 1

Ejemplo 2.
Si n impar La familia de subconjuntos que contienen más de la mitad de los puntos de X. (Esta familia contiene exactamente un elemento de cada par de la demostración anterior)

Familias de intersección

Problema 2.

Hay familias de intersección F con $|F| = 2^{n-1}$

Ejemplo 1. La familia de todos los subconjuntos de X que contienen a 1

Ejemplo 2.

Si n par Sea F la familia de subconjuntos que contienen más de n/2 puntos. Se agrupan los conjuntos con n/2 puntos en pares complementarios, se toma un conjunto de cada par y se añade a F.

La familia obtenida es de intersección.

Si $|A| \geq n/2$, $|B| > n/2$, entonces

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| > n/2 + n/2 - n = 0$

Familias de Sperner

Una familia F se dice de Sperner si ningún miembro de F contiene a otro propiamente.

La familia de todos los k-subconjuntos de X forma una familia de Sperner de tamaño

$$|F| = \binom{n}{k}$$

Las familias de Sperner de *este tipo* son de tamaño máximo cuando

k = n/2   si n par
k = (n-1)/2 ó (n+1)/2   si n impar

Familias de Sperner

Problema 1

Teorema de Sperner (1928)

Sea F una familia de Sperner de subconjuntos de un conjunto X de cardinal n, entonces

$$|F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Familias de Sperner

Teorema de Sperner

Dem.

Se consideran cadenas de subconjuntos de X

$$\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = X \qquad \text{con } |C_i| = i$$

¿Cuántas cadenas hay de esta forma? $n!$

¿Cuántas cadenas contienen un $A \in F$? $k!(n-k)!$

$$\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{k-1} \subset A \subset C_{k+1} \subset \dots \subset C_n = X$$

$k!$ $(n-k)!$

Familias de Sperner

Teorema de Sperner

Si A, B $\in$ F, ninguna cadena pasa por A y B simultáneamente, luego el número de cadenas que pasan por algún elemento de F es

$$\sum_{A\in F} |A|!(n-|A|)! = n! \sum_{A\in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq n!$$

Hay n! cadenas en total

Luego $$\sum_{A\in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

como $$\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Familias de Sperner

Problema 2

Si una familia F de Sperner tiene tamaño máximo, entonces F está formada por todos los subconjuntos de tamaño $\lfloor n/2 \rfloor$ o por todos los subconjuntos de tamaño $\lceil n/2 \rceil$

Para alcanzar la cota necesitamos que $\binom{n}{|A|} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

para cada $A \in F$, es decir, $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ ó $\lceil n/2 \rceil$

Familias de Sperner

Problema 2

Si n par, entonces $|A| = n/2$

Si n impar, $n = 2m+1$, entonces $|A| = m$ ó $m+1$

Comprobemos que, o bien **todos** los subconjuntos son de tamaño m, o bien **todos** son de tamaño m+1.

Volvemos a la demostración. La cota se alcanza cuando **todas** las cadenas contienen un elemento de F

Sabemos que si $|A| = m$, $|B| = m+1$ $A \subset B$ entonces

$$A \in F \Leftrightarrow B \notin F$$

Familias de Sperner

Problema 2

Sea A un m-conjunto en F, A' otro m-conjunto.

Podemos construir una sucesión

$$\underset{m}{A} \subset \underset{m+1}{B_0} \supset \underset{m}{A_1} \subset \underset{m+1}{B_1} \supset \underset{m}{A_2} \subset \ldots \supset \underset{m}{A'}$$

así $A \in F \Rightarrow B_0 \notin F \Rightarrow A_1 \in F \Rightarrow B_1 \notin F \Rightarrow \ldots . \; A' \in F$

Con lo que si en F está A, están **todos** los m-conjuntos y ninguno de los (m+1)-conjuntos

Técnica LYM (Lubell, Yamamoto, Meshalkin)

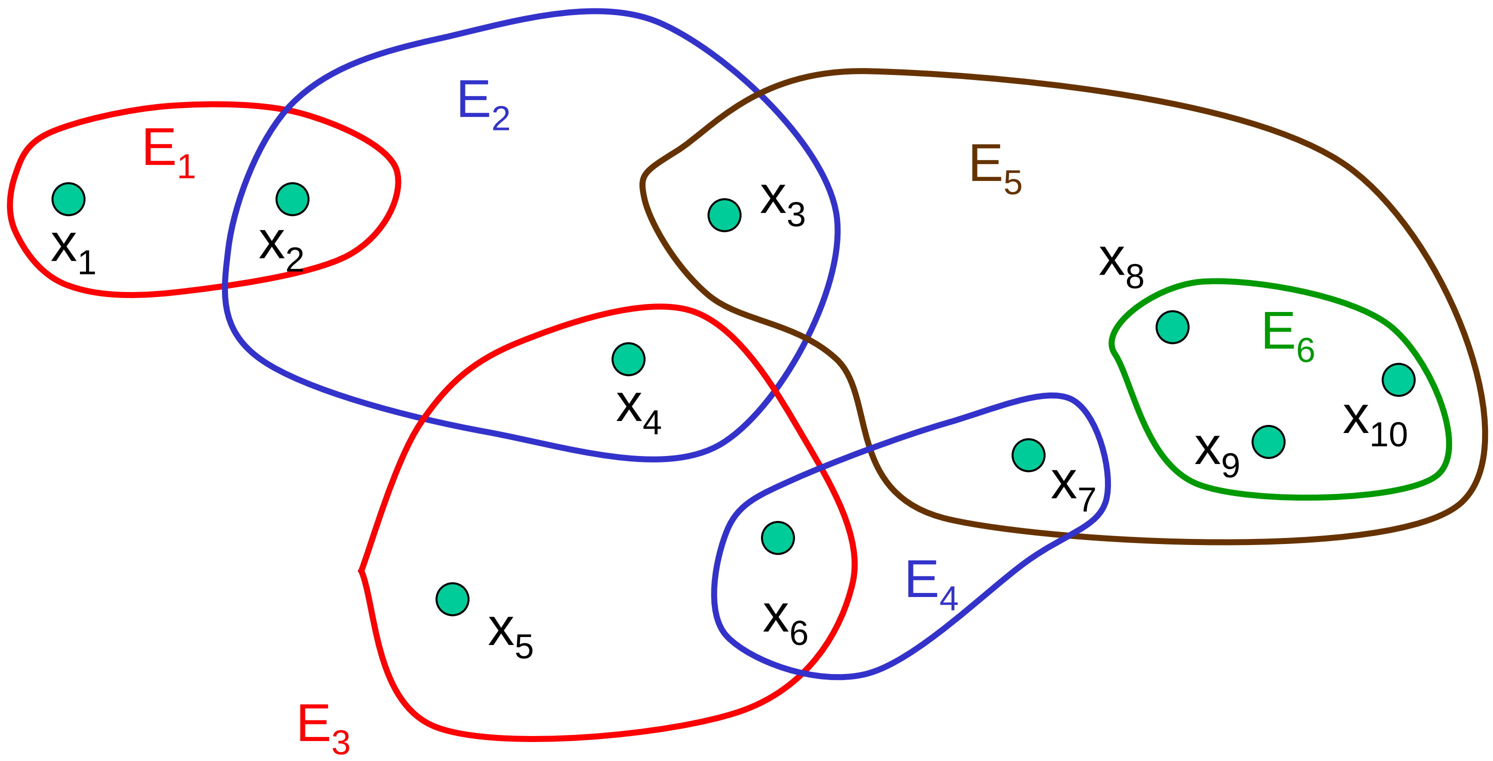
Una cadena y una familia de Sperner tienen, a lo más, un elemento común

HIPERGRAFOS

$H = (V, E)$

orden $(H) = |V|$

rango $(H) = \text{máx } |E_i|$



HIPERGRAFOS

Hipergrafo **lineal** si $|E_i \cap E_j| \leq 1 \quad \forall i,j$

Hipergrafo **simple** si $E_i \not\subset E_j \quad \forall i,j$

!es una familia de Sperner!

Hipergrafo **k-regular** si cada vértice tiene grado k

Hipergrafo **r-uniforme** si es simple y $|E_i| = r \quad \forall i$

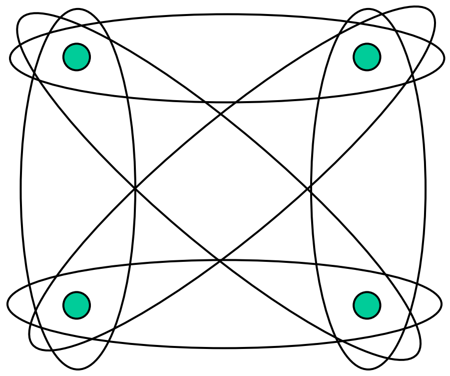
Los grafos simples son hipergrafos simples lineales y 2-uniformes

HIPERGRAFOS

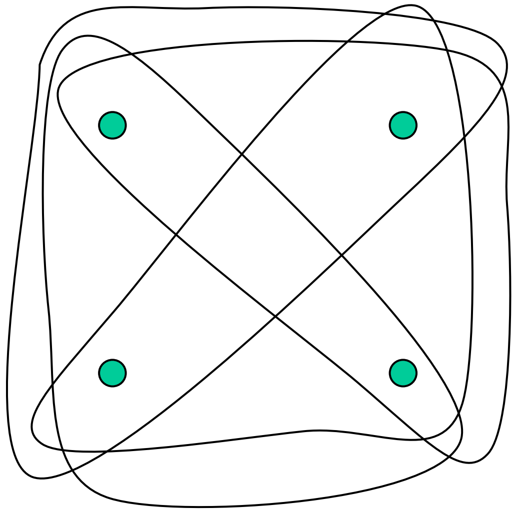
Hipergrafo completo r-uniforme de orden n K_n^r

Vértices: $|V| = n$

Hiperaristas: todos los subconjuntos de V de tamaño r



K_4^2



K_4^3

HIPERGRAFOS

LENGUAJE DE HIPERGRAFOS

- extiende, simplifica y unifica resultados de grafos
- adecuado para los sistemas ó familias de conjuntos
- dualidad elementos $\leftrightarrow$ conjuntos
vértices $\leftrightarrow$ hiperaristas
- generalización párametros de grafos

HIPERGRAFOS

Parámetros

orden (H) = |X| = n

rango (H) = máx $|E_i|$ = r

grado de un vértice d(v) = $|\{E_i \,/\, v \in E_i\}|$

sucesión de grados y tamaños de las hiperaristas

Theorem 1 (Gale [1957], Ryser [1957]). *Given m integers $r_1, r_2, \dots, r_m$ and an n-tuple of integers $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, there exists a hypergraph $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ on a set $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ such that $d_H(x_i) = d_i$ for $i \leq n$ and $|E_j| = r_j$ for $j \leq m$ if and only if*

(1) $$\sum_{j=1}^{m} \min\{r_j, k\} \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \qquad (k < n)$$

(2) $$\sum_{j=1}^{m} r_j = d_1 + d_2 + \dots + d_n \; .$$

(libro "Hypergraphs" de C. Berge)

HIPERGRAFOS

Parámetros

orden (H) = |X| = n

rango (H) = máx $|E_i|$ = r

número de aristas q

¿relación con n?

Teorema de Sperner

$$q(H) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Teorema de Sperner

Sea F una familia de Sperner de subconjuntos de un conjunto X de cardinal n, entonces

$$|F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \qquad \sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

Sea H un hipergrafo simple de orden n, entonces

$$q(H) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \qquad \sum_{E \in H} \frac{1}{\binom{n}{|E|}} \leq 1$$

Teorema de Sperner

Si una familia F de Sperner tiene tamaño máximo, entonces F está formada por todos los subconjuntos de tamaño $\lfloor n/2 \rfloor$ o por todos los subconjuntos de tamaño $\lceil n/2 \rceil$

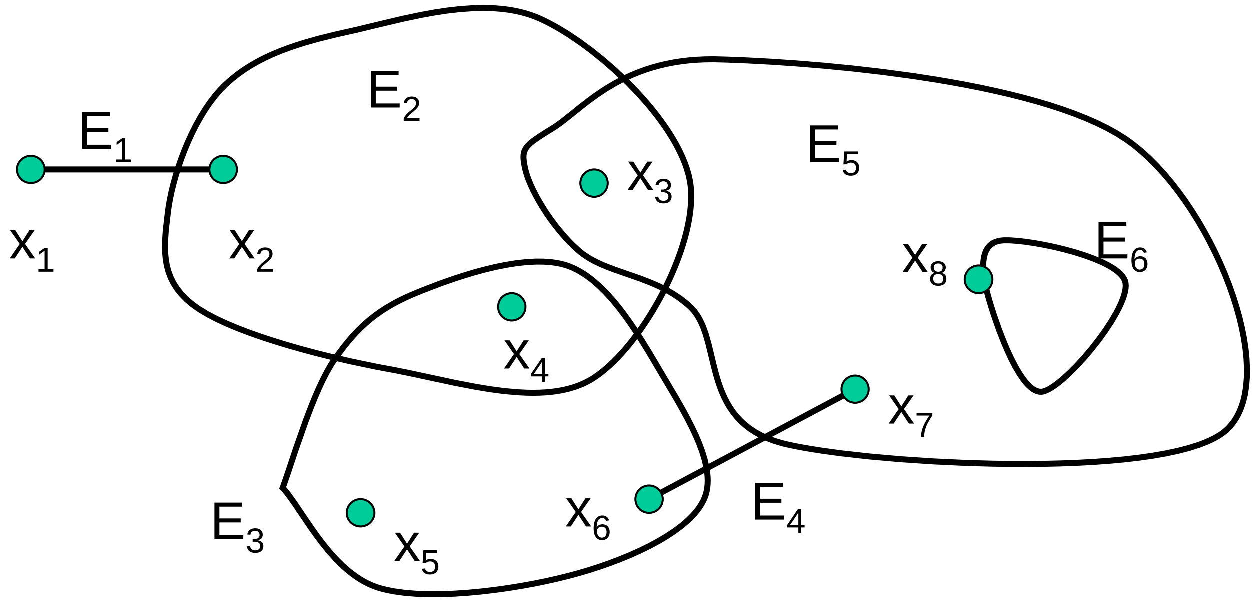
Los hipergrafos de orden n y de **tamaño** máximo son:

si $n = 2r$ el hipergrafo completo r-uniforme K_n^r

si $n = 2r + 1$, los hipergrafos K_n^r y K_n^{r+1}

Todo hipergrafo simple H de orden n y rango $r \leq n/2$ tiene a lo más $\binom{n}{r}$ aristas y sólo tiene dicho número cuando $H \approx K_n^r$

Caminos y ciclos en hipergrafos



Camino $x_3\,E_5\,x_7\,E_4\,x_6$ de longitud 2

Ciclo $x_3\,E_5\,x_7\,E_4\,x_6\,E_3\,x_4\,E_2\,x_3$

Hipergrafo conexo

Distancia entre vértices, diámetro, …

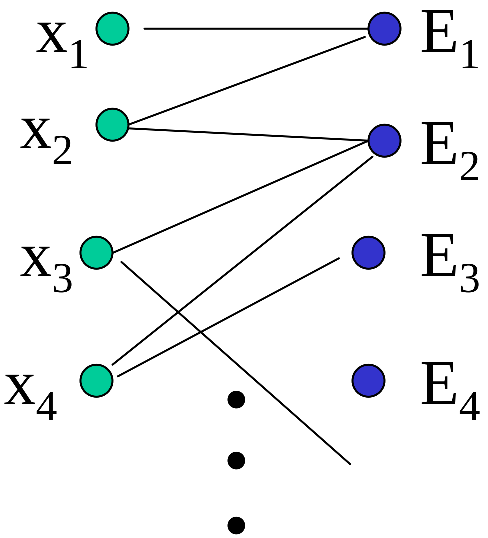
Ciclos en hipergrafos

H hipergrafo conexo de orden n, con q hiperaristas es **acíclico** si y solo si

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q}(|E_i|-1) = n-1}$$

Dem.

H $\Rightarrow$ G(H) bipartido



G(H) conexo

orden n+q

tamaño $\sum_{i=1}^{q}|E_i|$

H acíclico $\Leftrightarrow$ G(H) árbol

$$\sum_{i=1}^{q}|E_i| = (n+q)-1$$

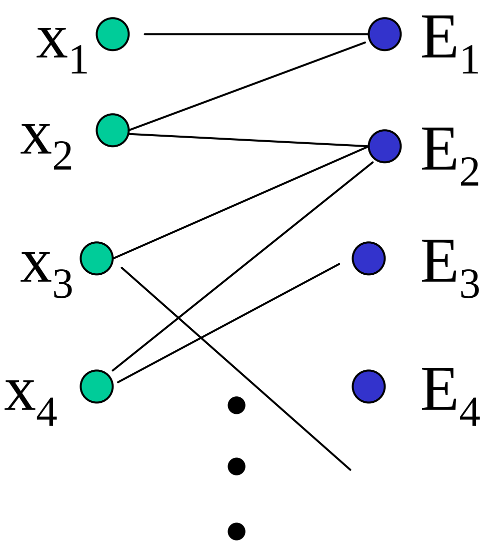
Ciclos en hipergrafos

H hipergrafo de orden n, con q hiperaristas y p componentes conexas es **acíclico** si y solo si

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q}(|E_i|-1) = n-p}$$

Dem.

H $\Rightarrow$ G(H) bipartido



G(H) n+q vértices
p componentes conexas

$$\sum_{i=1}^{q}|E_i| \text{ aristas}$$

H acíclico $\Leftrightarrow$ G(H) bosque

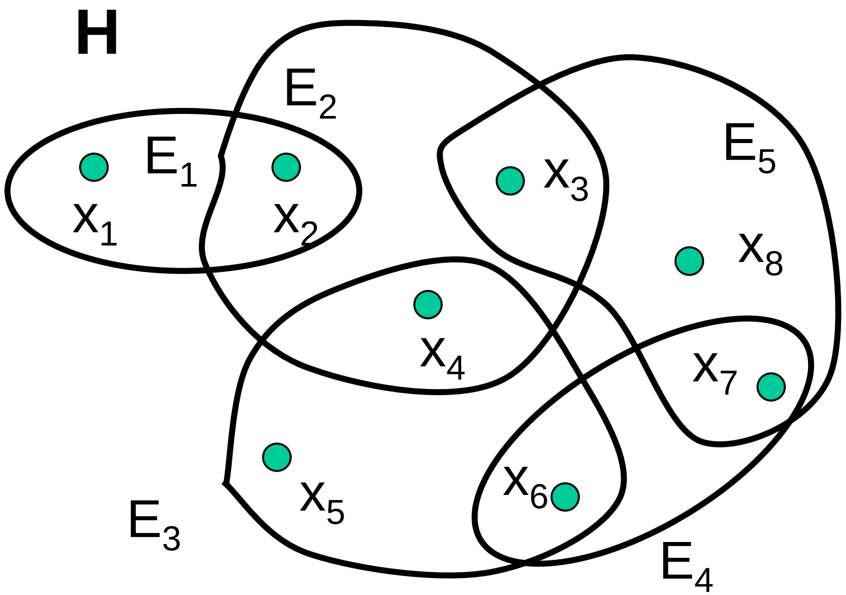
$$\sum_{i=1}^{q}|E_i| = (n+q)-p$$

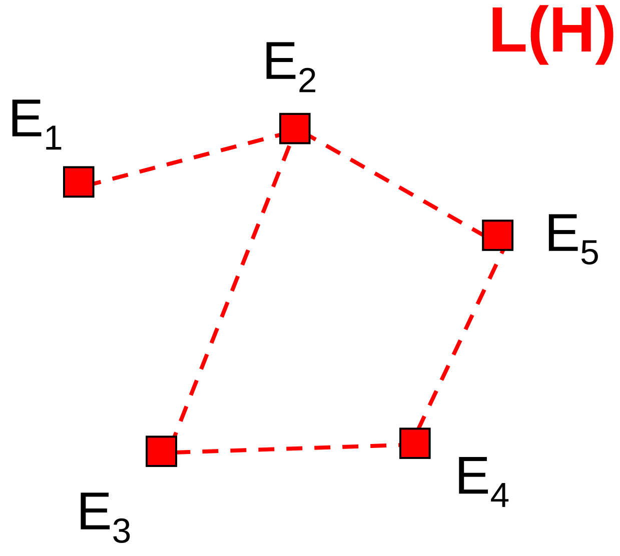
Hipergrafos $\leftrightarrow$ Grafos

$H = (V, E)$ hipergrafo de hiperaristas $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$

Grafo de aristas (line-graph) de H, $L(H) = (V', A')$

$V' = E$, $\quad ij \in A'$ si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$





1. H es conexo $\Leftrightarrow$ L(H) es conexo

Hipergrafos $\leftrightarrow$ Grafos

$H = (V, E)$ hipergrafo de hiperaristas $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$

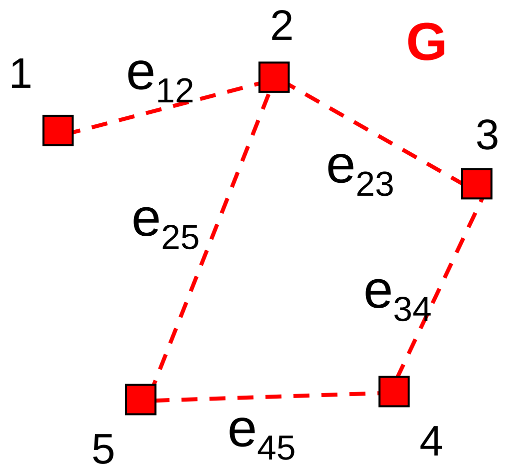
Grafo de aristas (line-graph) de H, $L(H) = (V', A')$

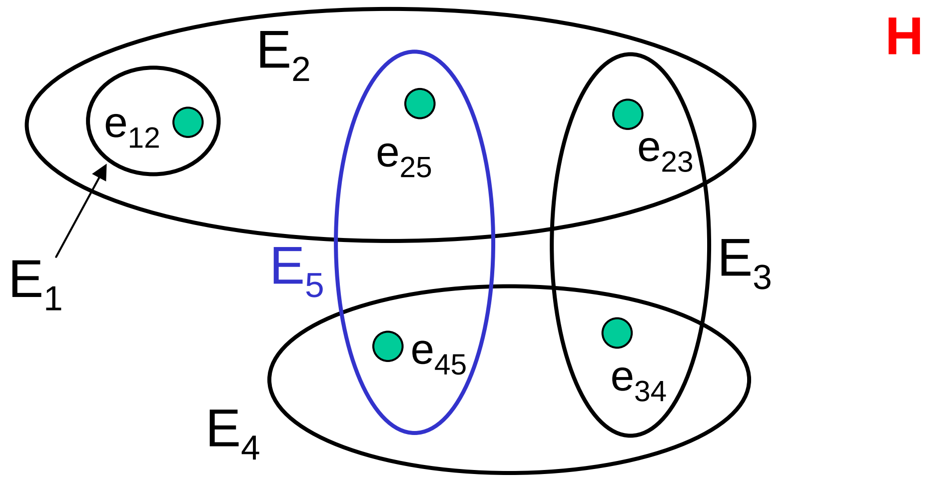
$V' = E$, $ij \in A'$ si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$

2. Todo grafo G no trivial es el grafo de aristas de un hipergrafo lineal

$G = (V, A)$ $V = \{1,2,3,\ldots,n\}$ $\Longrightarrow$ $H = (W, E)$ $W = A$

Hiperaristas E_i = {aristas incidentes con i}



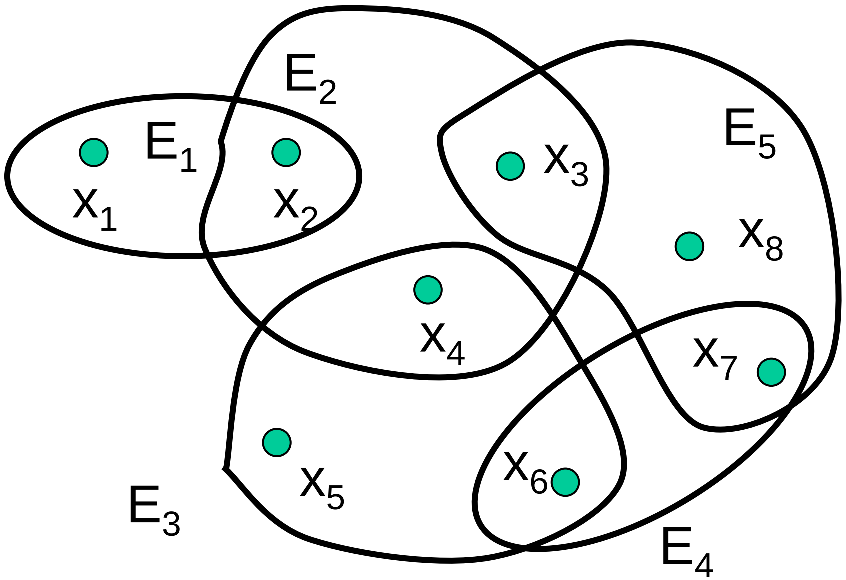


Hipergrafos $\leftrightarrow$ Grafos

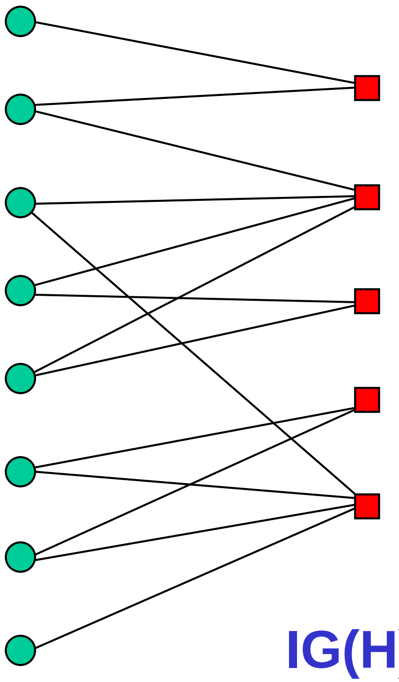
$H = (V, E)$ hipergrafo de hiperaristas $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$

Grafo de incidencia IG(H) Grafo bipartido

Vértices $S = V \cup E$ Adyacencia de $x \in V$, $e \in E$ si $x \in e$



H



IG(H)

Hipergrafos $\leftrightarrow$ Grafos

$H = (V, E)$ hipergrafo de hiperaristas $E = \{E_1, E_2, \dots, E_q\}$

Grafo de incidencia $IG(H)$ Grafo bipartido

Vértices $S = V \cup E$ Adyacencia de $x \in V$, $e \in E$ si $x \in e$

3. Si en H hipergrafo llamamos grado de una hiperarista, $d(E_i)$, a su cardinal entonces

$$\sum_{x \in V} d(x) = \sum_{E_i \in E} d(E_i)$$

Dem.:

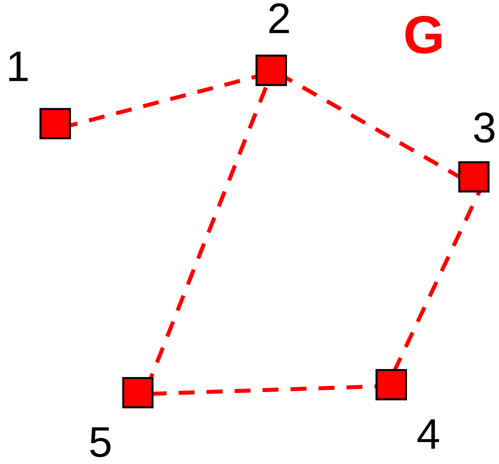
En el grafo de incidencia $IG(H)$, que es bipartido, la primera suma es la suma de los grados de los vértices de V y la segunda es la suma de los grados de los vértices de E

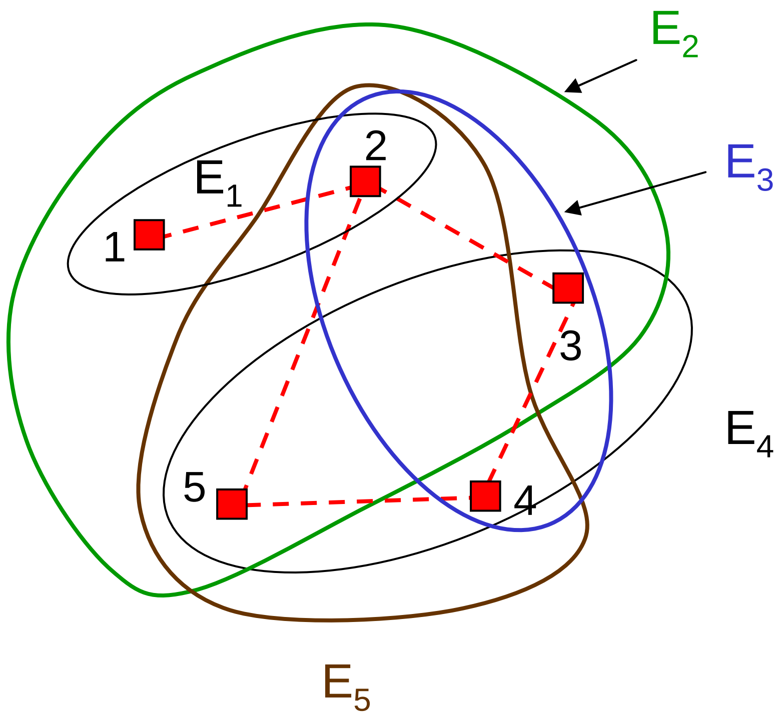
Grafos $\leftrightarrow$ Hipergrafos

$G = (V, A)$ grafo

Hipergrafo de vecindad H_G

$H_G = (V, E)$ Las hiperaristas son $\{E_x = N[x] \ / \ x \in V\}$





Dualidad en hipergrafos

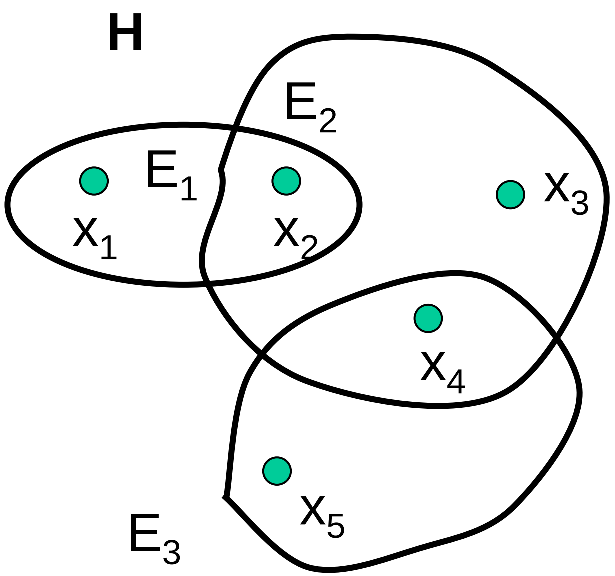
$H = (V, E)$ hipergrafo

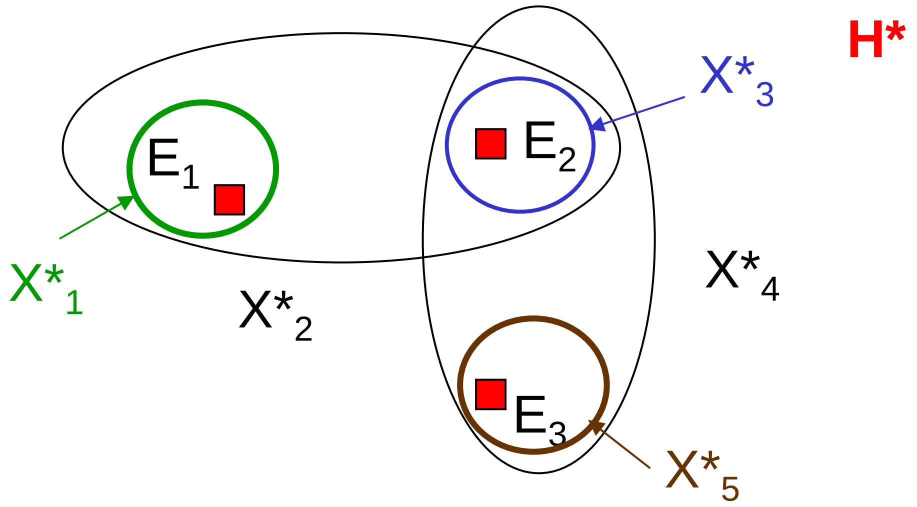
Vértices $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, Hiperaristas $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$

$H^* = (V^*, E^*)$ hipergrafo **DUAL**

Vértices $V^* = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$

Hiperaristas $X^*_j = \{E_s \,/\, x_j \in E_s\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$





Dualidad en hipergrafos

4. El dual de un hipergrafo lineal (sin vértices aislados) es lineal

Dem.: Si H* no es lineal existen hiperaristas X^*_i y X^*_j con al menos dos vértices comunes.
Si E_1 y E_2 son esos vértices comunes en H* entonces, por la dualidad, los vértices de H x_i y x_j pertenecen a las hiperaristas E_1 y E_2
Por tanto, H no es lineal

5. La dualidad es una involución $(H^*)^* = H$

6. H es uniforme $\Leftrightarrow$ H* es regular

Bibliografía

- C. Berge, ***Hypergraphs: Combinatorics of finite sets***, North Holland, 1989.
- C. Berge, ***Graphs and Hypergraphs***, North Holland, 1973.
- A. Bretto, ***Hypergraphs: An Introduction,*** Springer, 2013
- P. Duchet, *Hypergraphs,* in ***Handbook of Combinatorics***, R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (eds.), Elsevier, 1995.
- P. Cameron, ***Combinatorics***, Cambridge Univ. Press, 1995
- P. Erdös, A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set systems*, Acta Math. Acad. Sc. Hung., 17, 61-99, 1966
- L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Math., 2, 253-267, 1972