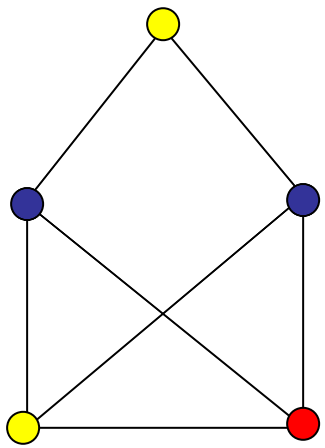
Universidad Politécnica
de Madrid

GRAFOS PERFECTOS

Gregorio Hernández
UPM

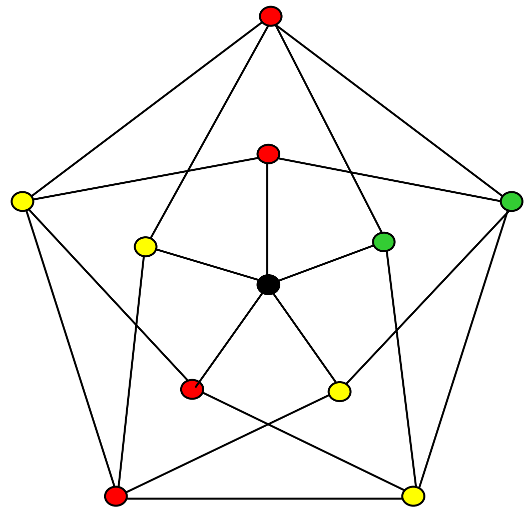
Optimización Combinatoria

GRAFOS PERFECTOS



Número cromático $\chi(G) = 3$

Número de clique $\omega(G) = 3$



$\chi(\text{Grotzsch}) = 4$

$\omega(\text{Grotzsch}) = 2$

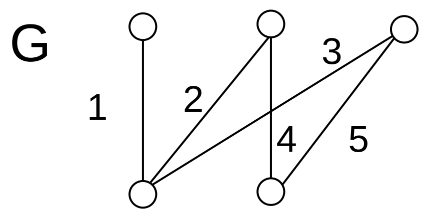
Para todo grafo G
$\chi(G) \geq \omega(G)$

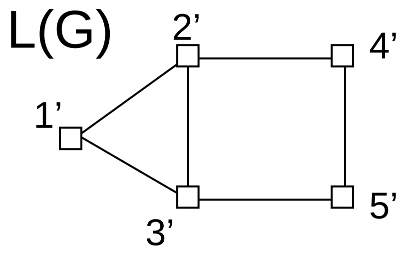
$\forall$ H subgrafo inducido de G
$\chi(H) = \omega(H)$

GRAFOS PERFECTOS

G es perfecto si para todo subgrafo inducido H se cumple que
$$\chi(H) = \omega(H)$$

- Los grafos bipartidos son perfectos
- Los grafos de aristas de grafos bipartidos son perfectos





Coloración de aristas en G $\Leftrightarrow$ Coloración de vértices en L(G)

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

Grado máximo en G $\Leftrightarrow$ Tamaño máximo de clique en L(G)

$$\Delta(G) = \omega(L(G))$$

GRAFOS PERFECTOS

G es perfecto si para todo subgrafo inducido H se cumple que

$$\chi(H) = \omega(H)$$

- Los grafos bipartidos son perfectos
- Los grafos de aristas de grafos bipartidos son perfectos

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

$$\Delta(G) = \omega(L(G))$$

En un grafo bipartido G $\chi'(G) = \Delta(G)$ (Teorema de König)

Luego, $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$

Como lo mismo sucede en cualquier subgrafo inducido, L(G) es perfecto

GRAFOS PERFECTOS

G es perfecto si para todo subgrafo inducido H se cumple que

$$\chi(H) = \omega(H)$$

- Los grafos bipartidos son perfectos
- Los grafos de aristas de grafos bipartidos son perfectos
- El complementario de un grafo bipartido es un grafo perfecto

Conjunto independiente en G $\Leftrightarrow$ Clique en G’

$$\boxed{\alpha(G) = \omega(G')}$$

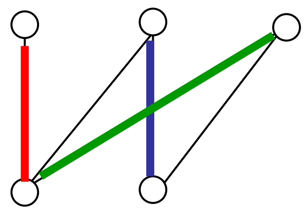
GRAFOS PERFECTOS

G es perfecto si para todo subgrafo inducido H se cumple que

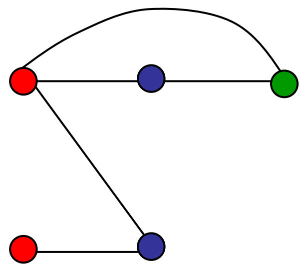
$$\chi(H) = \omega(H)$$

- Los grafos bipartidos son perfectos
- Los grafos de aristas de grafos bipartidos son perfectos
- El complementario de un grafo bipartido es un grafo perfecto

G



G'



$\alpha(G) = \omega(G')$

Recubrimiento por aristas en G $\Leftrightarrow$ Coloración G'

$\beta'(G) = \chi(G')$

En un grafo bipartido G, $\alpha(G) = \beta'(G)$ (Teorema de Gallai)

Luego $\chi(G') = \omega(G')$

Como lo mismo sucede en cada subgrafo inducido, G' es perfecto

GRAFOS PERFECTOS

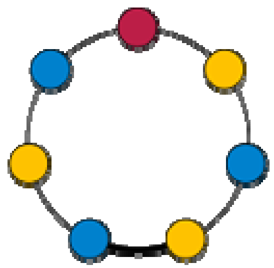
Conjetura (Berge, 1961)
Si G es perfecto entonces su complementario G' es perfecto

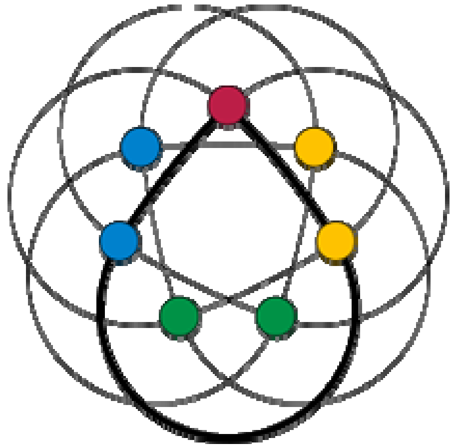
Teorema de los grafos perfectos (Lovász, 1972)

Un grafo G es perfecto $\Leftrightarrow$ su complementario G' es perfecto

GRAFOS PERFECTOS

Los ciclos impares C_{2k+1} (k>1) no son perfectos y tampoco lo son sus complementarios



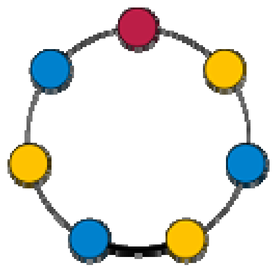


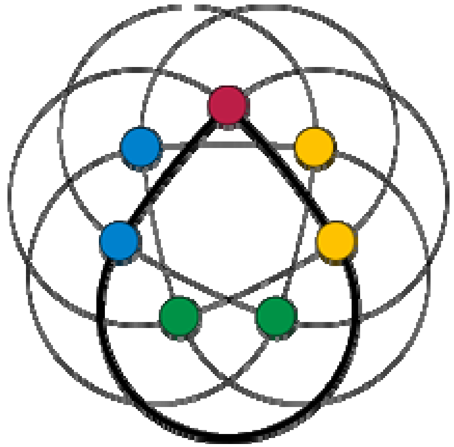
Un ciclo inducido de longitud impar (mayor que 3) $\rightarrow$ agujero impar
Un subgrafo inducido que es el complemento de un agujero impar se llama antiagujero impar

Conjetura (Berge, 1961)
G es perfecto si y solo si ni G ni su complementario G' contienen como subgrafo inducido un ciclo impar de longitud mayor que 3

GRAFOS PERFECTOS

Los ciclos impares C_{2k+1} (k>1) no son perfectos y tampoco lo son sus complementarios





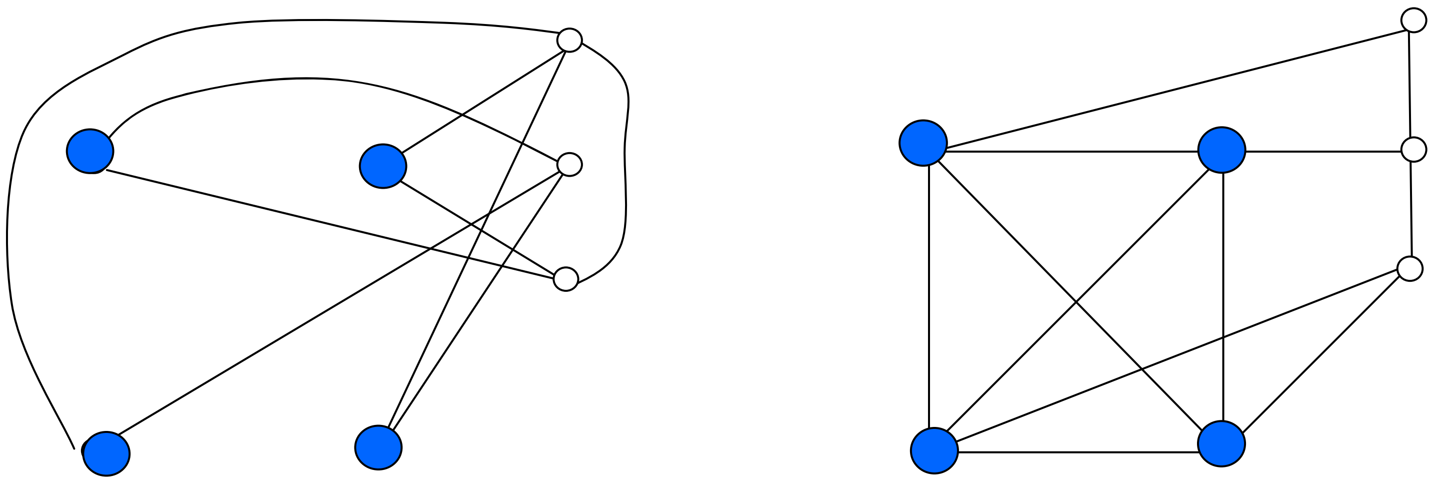
Teorema (fuerte) de los grafos perfectos

(Chudnovski, Robertson, Seymour, Thomas, 2006)

G es perfecto $\Leftrightarrow$ G no contiene ni agujeros impares ni antiagujeros impares

La demostración en un artículo de 78 páginas

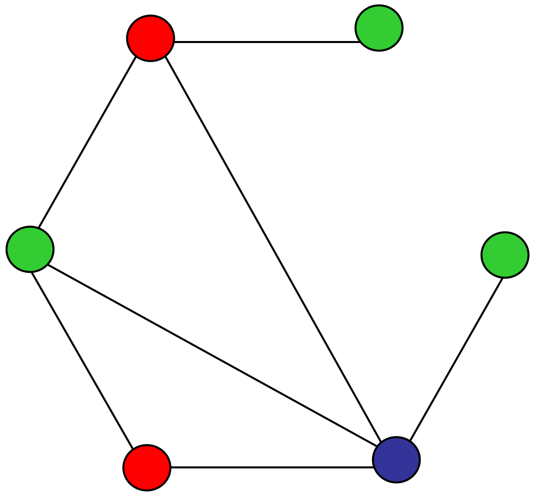
TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

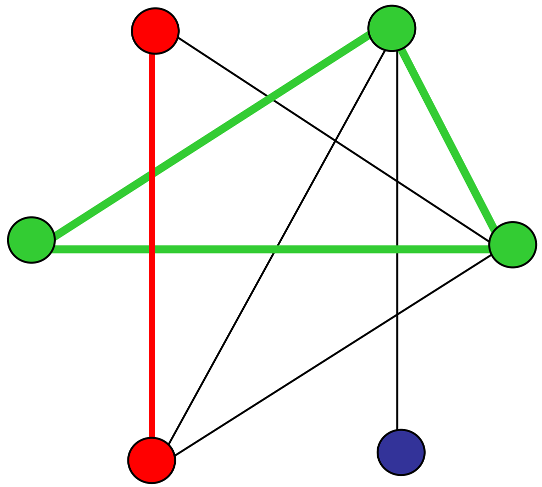


V es independiente en G $\Leftrightarrow$ V es clique en G'

α (G) = ω (G')

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)





Número cromático en G' $\Leftrightarrow$ Número de cliques en que descomponemos V(G)

$$\chi\,(G') = \theta\,(G)$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

$\boxed{G' \text{ es perfecto} \Rightarrow G \text{ es perfecto}}$

Si G' es perfecto entonces para todo $S \subset V(G)$ se tiene que

$\chi\,(G'_S) = \omega\,(G'_S)$, es decir, $\theta\,(G_S) = \alpha\,(G_S)$

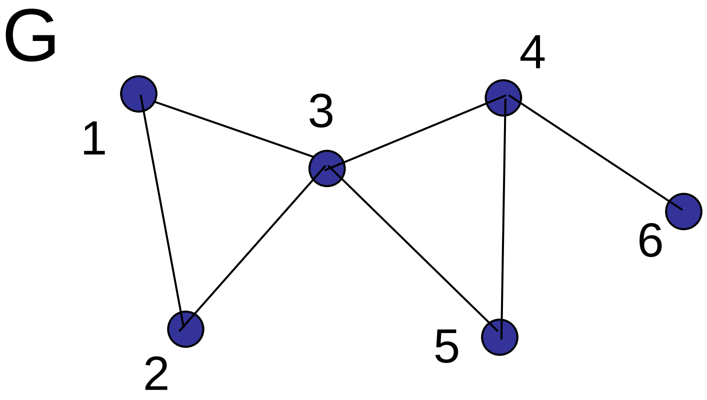
A partir de G se construye un hipergrafo H

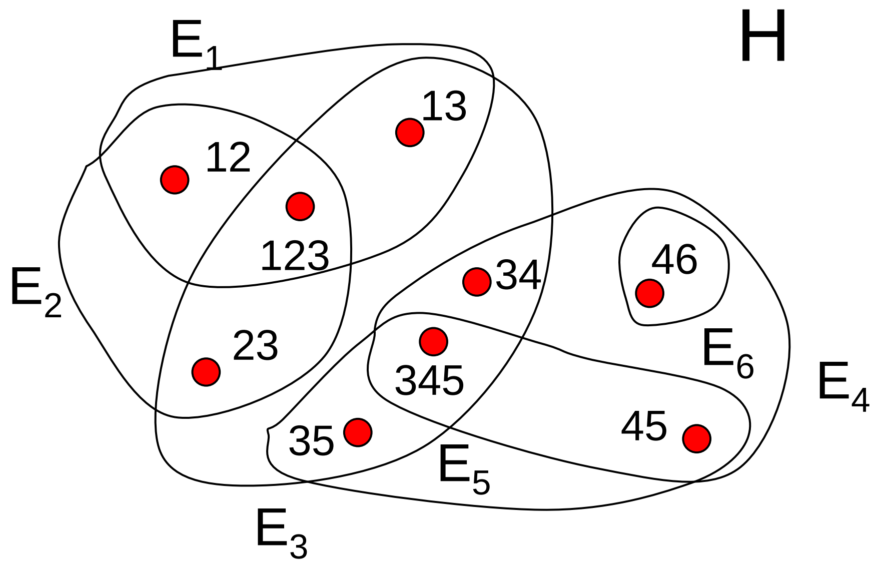
cada clique de G $\leftrightarrow$ un vértice de H

las cliques que contienen al vértice x_i $\leftrightarrow$ una hiperarista X_i en H

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Construcción del hipergrafo de cliques





Cliques: 12, 13, 23, 34, 45, 35, 46,
123, 345

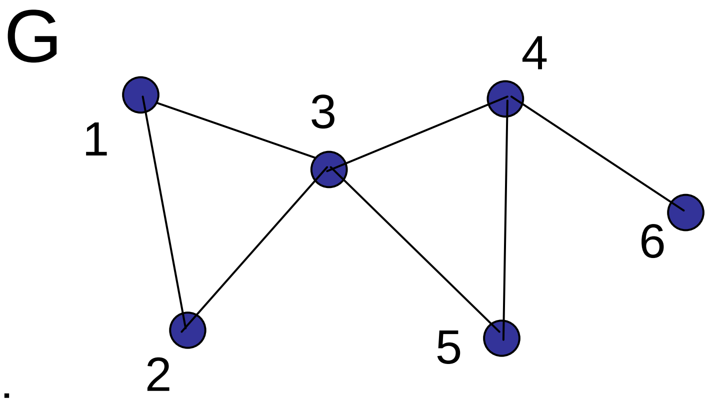
El grafo G es el grafo de hiperaristas de H , G = L(H)

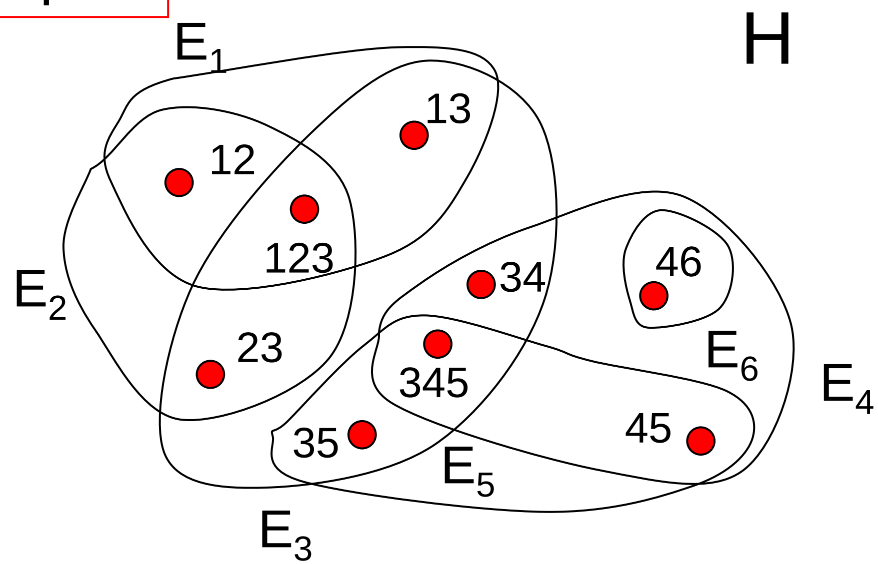
nodos de G $\leftrightarrow$ hiperaristas de H

adyacencia en G $\leftrightarrow$ intersección de hiperaristas en H

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de cliques





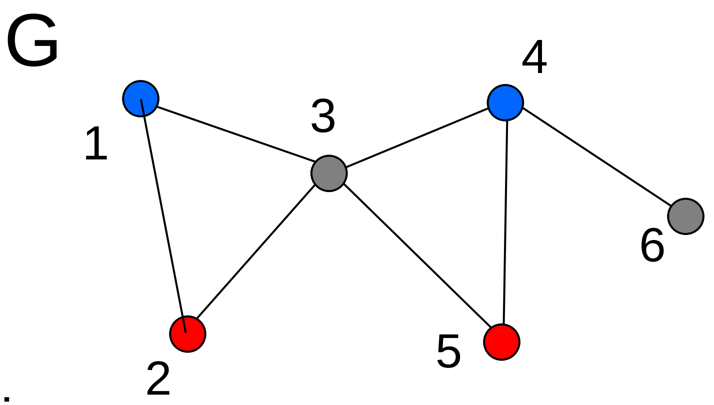
Cliques:
12, 13, 23, 34, 45, 35, 46, 123, 345

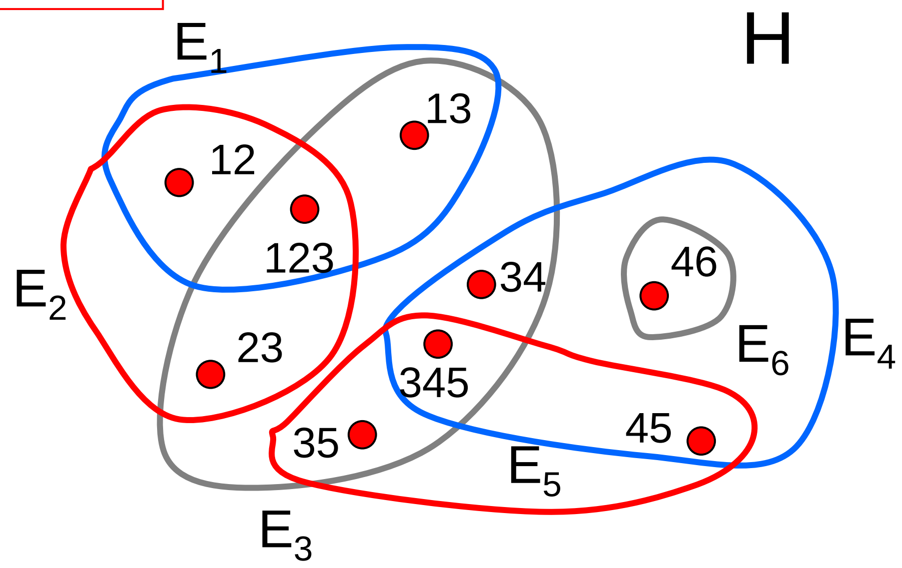
Vértices independientes en G $\Longleftrightarrow$ Aristas independientes en H

número de independencia $\quad \alpha\,(G) = \nu\,(H) \quad$ número de emparejamiento

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de cliques





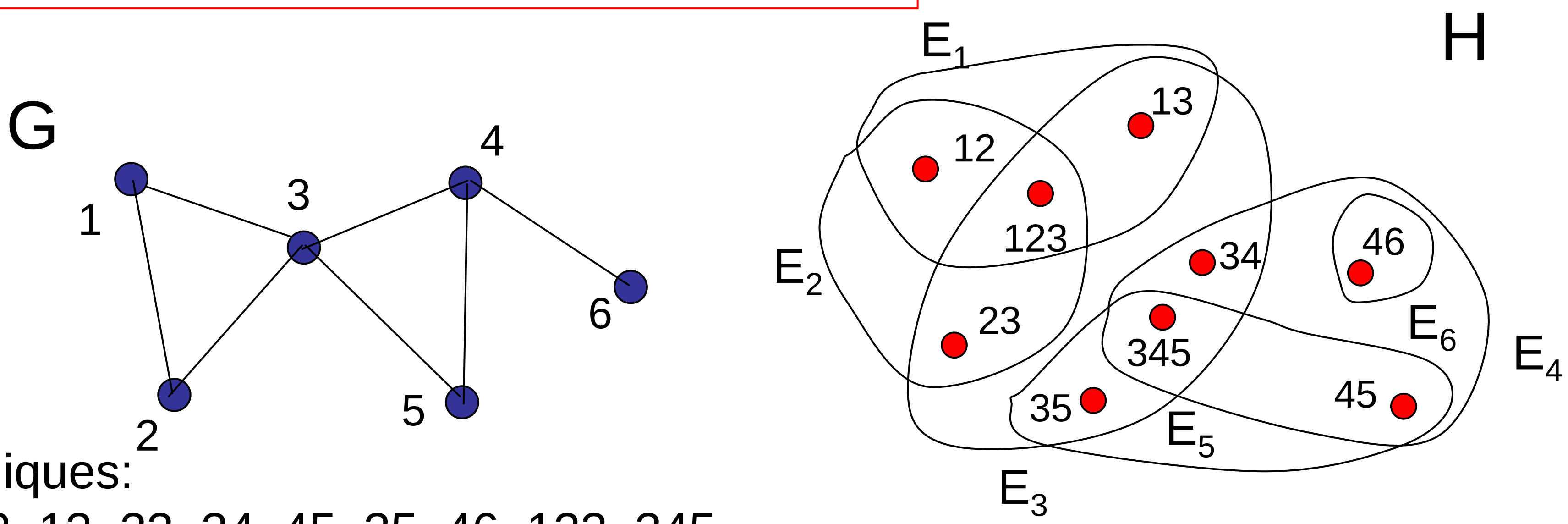
Cliques:
12, 13, 23, 34, 45, 35, 46, 123, 345

Coloración de vértices en G ⟷ Coloración de aristas en H

número cromático $\chi\,(G) = \chi'\,(H)$ índice cromático

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de cliques



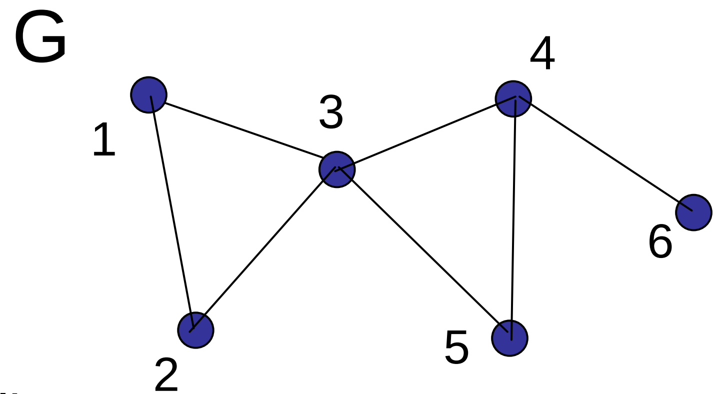
Cliques:
12, 13, 23, 34, 45, 35, 46, 123, 345

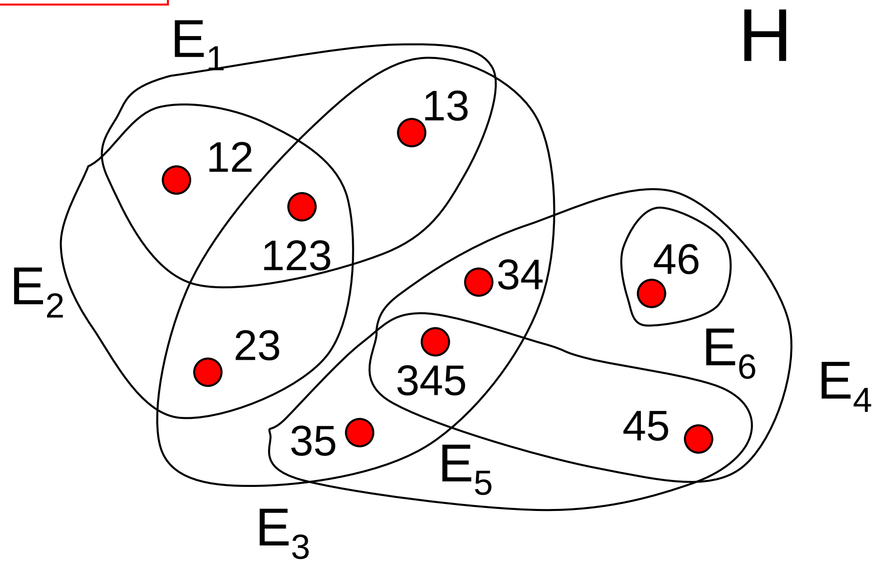
Δ (H) ¿en cuántas aristas de H puede estar un vértice de H?
Cada vértice de H es una clique de G y las aristas son los vértices de G

$$\boxed{\Delta (H) = \omega (G)}$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de cliques





Cliques:
12, 13, 23, 34, 45, 35, 46, 123, 345

τ (H) una transversal de H es un conjunto de vértices de H que cortan todas las aristas E_j, es decir, corresponde en G a un conjunto de cliques que cubre todos los vértices x_j

$$\tau\ (H) = \theta\ (G)$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Recopilamos todo lo anterior y ...

$\boxed{\alpha(G) = \nu(H)}$ $\boxed{\chi(G) = \chi'(H)}$ $\boxed{\Delta(H) = \omega(G)}$ $\boxed{\tau(H) = \theta(G)}$

Para todo $S \subset V$, consideramos el subgrafo inducido G_S y el hipergrafo correspondiente H_S. Las expresiones siguen siendo válidas para todo S

Si G' es perfecto entonces, para todo $S \subset V(G)$ se tiene que

$$\chi(G'_S) = \omega(G_S) \Longrightarrow \theta(G_S) = \alpha(G_S) \Longrightarrow$$

$$\tau(H_S) = \nu(H_S) \xrightarrow{\text{T. normalidad}} \text{H es normal} \qquad \chi'(H_S) = \Delta(H_S)$$

$$\Longrightarrow \chi(G_S) = \omega(G_S) \Longrightarrow \text{G es perfecto}$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Un hipergrafo es normal si para todo hipergrafo parcial $H' \subset H$ se cumple que $\chi'(H') = \Delta(H')$ (propiedad del índice)

$\boxed{\text{Teorema de normalidad (Lovász, 1972)}}$

Un hipergrafo H es normal $\Leftrightarrow$ para todo hipergrafo parcial $H' \subset H$ se cumple que $\nu(H') = \tau(H')$ (propiedad de König)

$\tau(H)$ mínimo cardinal de un conjunto transversal

$\nu(H)$ máximo cardinal de un emparejamiento,

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Teorema de normalidad (Lovász)

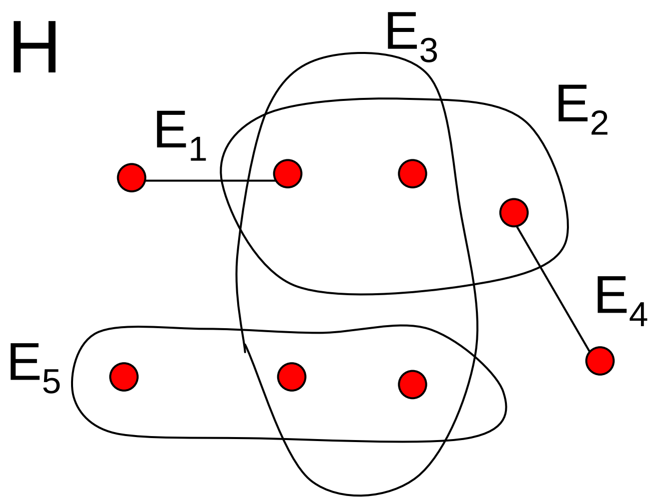
Demostraremos que si se cumple la propiedad de König para H, es decir, ν(H') = τ(H'), entonces se cumple que χ'(H) = Δ (H)

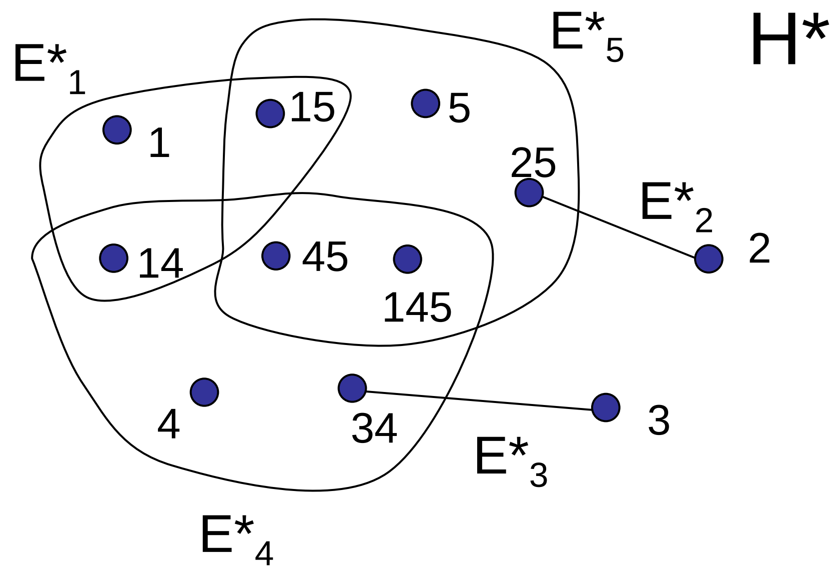
A partir de H = (V, E) se construye el hipergrafo de emparejamientos H*

Los vértices de H* son los emparejamientos de H
Una hiperarista E^*_i en H* está formada por los emparejamientos de H que contienen la hiperarista E_i

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de emparejamientos





ν(H) Las hiperaristas (E_k) forman emparejamiento en H

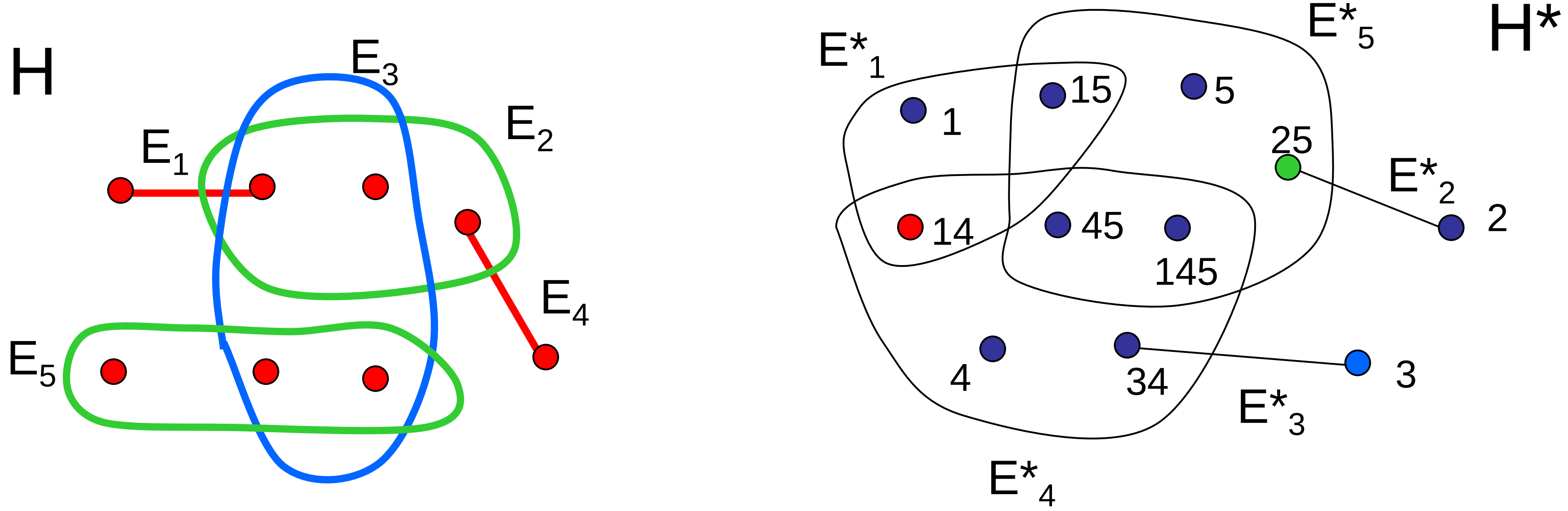
$\Leftrightarrow$

Las hiperaristas (E^*_k) tienen vértice común en H*

$$\boxed{\nu(H) = \Delta\,(H^*)}$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de emparejamientos

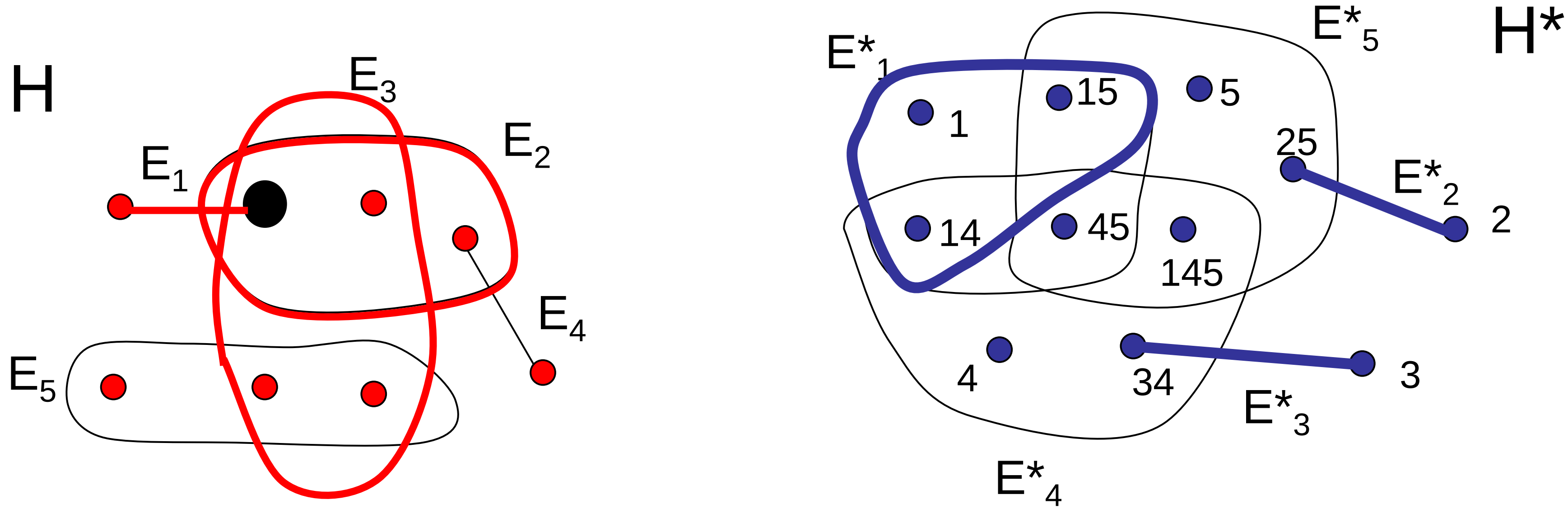


$\chi'(H)$ Las clases de color de hiperaristas en H son emparejamientos que cubren todas las hiperaristas E_k
luego son vértices de H* que cubren todas las E^*_k
es decir, una transversal de H*

$$\boxed{\chi'(H) = \tau(H^*)}$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de emparejamientos



Δ (H) Las hiperaristas (E_k) tienen vértice común en H

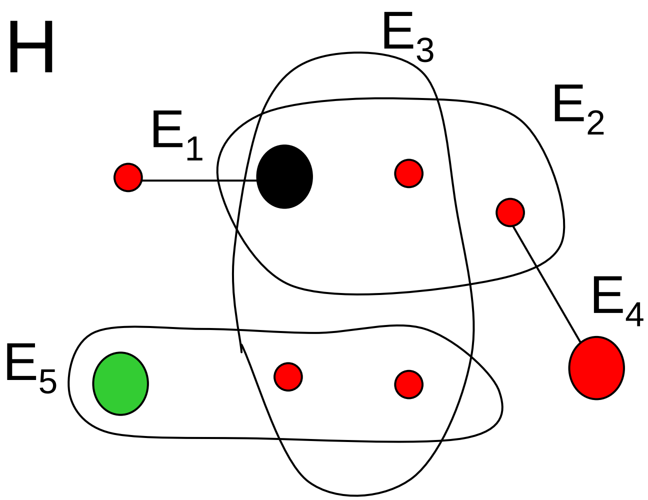
⟺

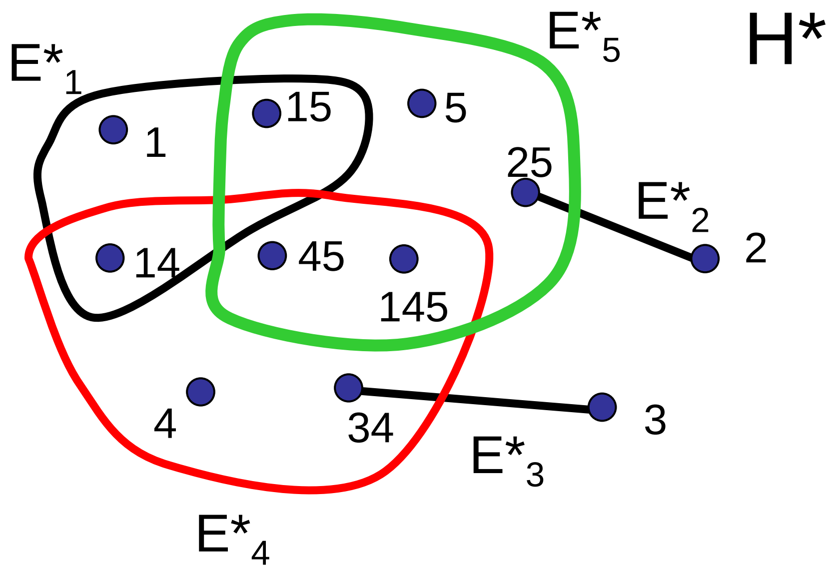
Las hiperaristas (E^*_k) son independientes en H*
es decir, forman emparejamiento

$$\Delta(H) = \nu(H^*)$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Propiedades del hipergrafo de emparejamientos





$\chi'(H^*)$ Una clase de color (E^*_k) de hiperaristas en H* $\Longleftrightarrow$ Un punto de H común a todas las E_k

Coloración de hiperaristas en H* $\Longleftrightarrow$ Transversal en H

$$\boxed{\chi'(H^*) = \tau(H)}$$

TEOREMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS (Lovász)

Recopilamos todo lo anterior y ...

$\boxed{\nu(H) = \Delta(H^*)}$ $\boxed{\chi'(H) = \tau(H^*)}$ $\boxed{\Delta(H) = \nu(H^*)}$ $\boxed{\chi'(H^*) = \tau(H)}$

Las expresiones siguen siendo válidas para todo H' hipergrafo parcial de H (esto es, $H' \subset H$), y el correspondiente H'^* en H^*

Partimos de $\tau(H') = \nu(H')$ $\Rightarrow$ $\chi'(H'^*) = \Delta(H'^*)$

Es decir, H^* es normal $\Rightarrow$ $\tau(H'^*) = \nu(H'^*)$

T. Lovász (la otra implic.)

$\Rightarrow$ $\chi'(H') = \Delta(H')$ $\Rightarrow$ H es normal

Bibliografía

- C. Berge, ***Hypergraphs: Combinatorics of finite sets***, North Holland, 1989.
- C. Berge, ***Graphs and Hypergraphs***, North Holland, 1973.
- A. Bretto, ***Hypergraphs: An Introduction,*** Springer, 2013
- P. Duchet, *Hypergraphs,* in ***Handbook of Combinatorics***, R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (eds.), Elsevier, 1995.
- P. Cameron, ***Combinatorics***, Cambridge Univ. Press, 1995
- P. Erdös, A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set systems*, Acta Math. Acad. Sc. Hung., 17, 61-99, 1966
- L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Math., 2, 253-267, 1972