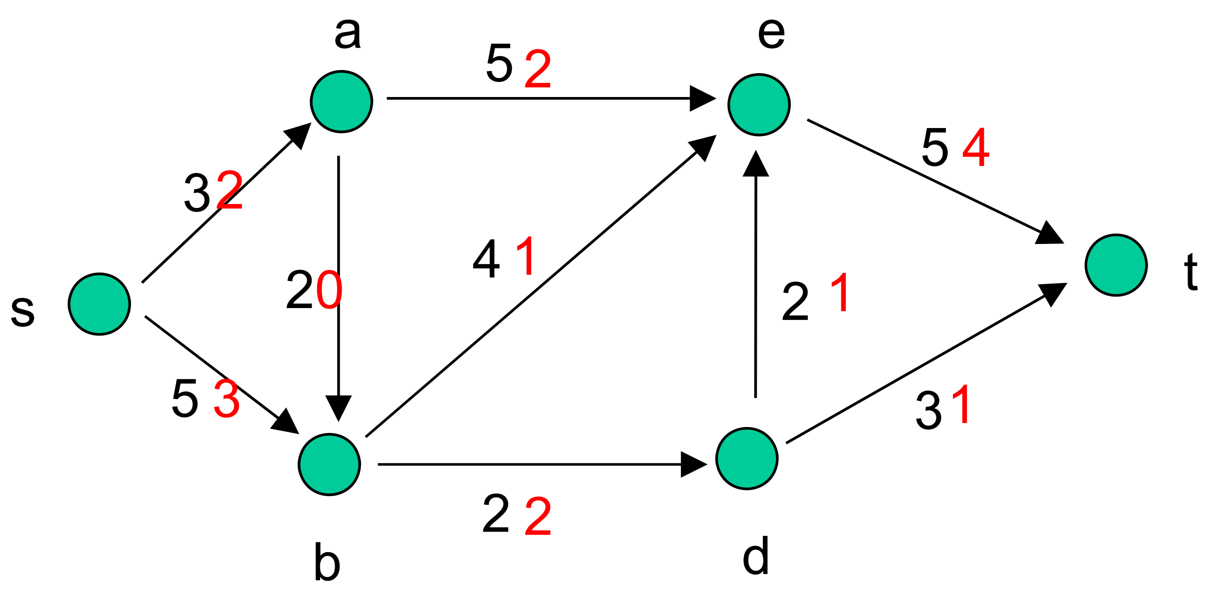
Universidad Politécnica
de Madrid

CIRCULACIONES

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria

Red de transporte N = (D,c)



FLUJO en una red N $\quad f : A \rightarrow Z^+$

1. $f(x,y) \leq c(x,y)$ VIABILIDAD

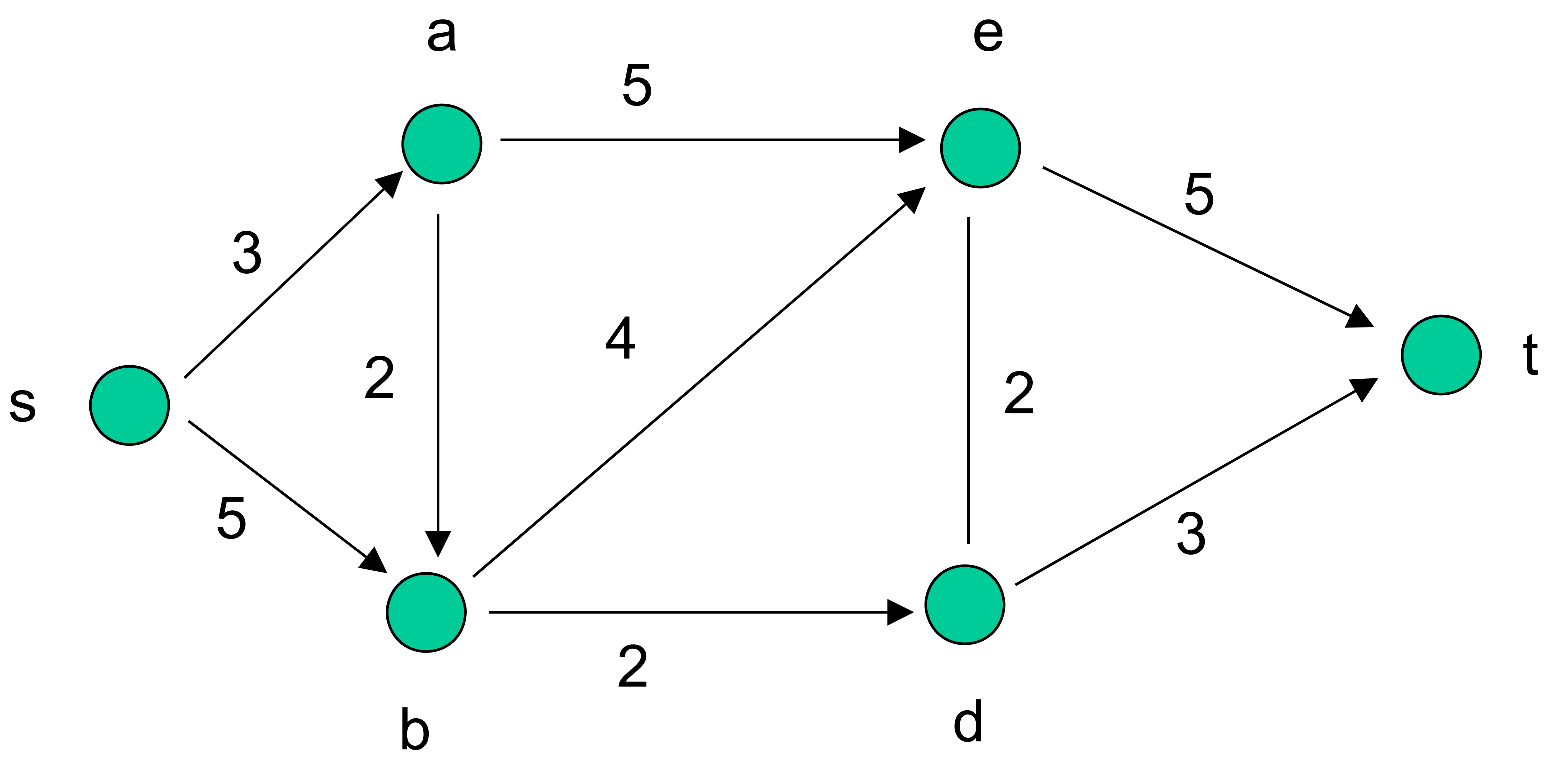
2. $\sum_{xv \in A} f(x,v) = \sum_{vz \in A} f(v,z)$ Para todo $v \neq s, t$ CONSERVACIÓN

Objetivo:
Hallar un flujo de valor máximo

Teorema de Ford-Fulkerson

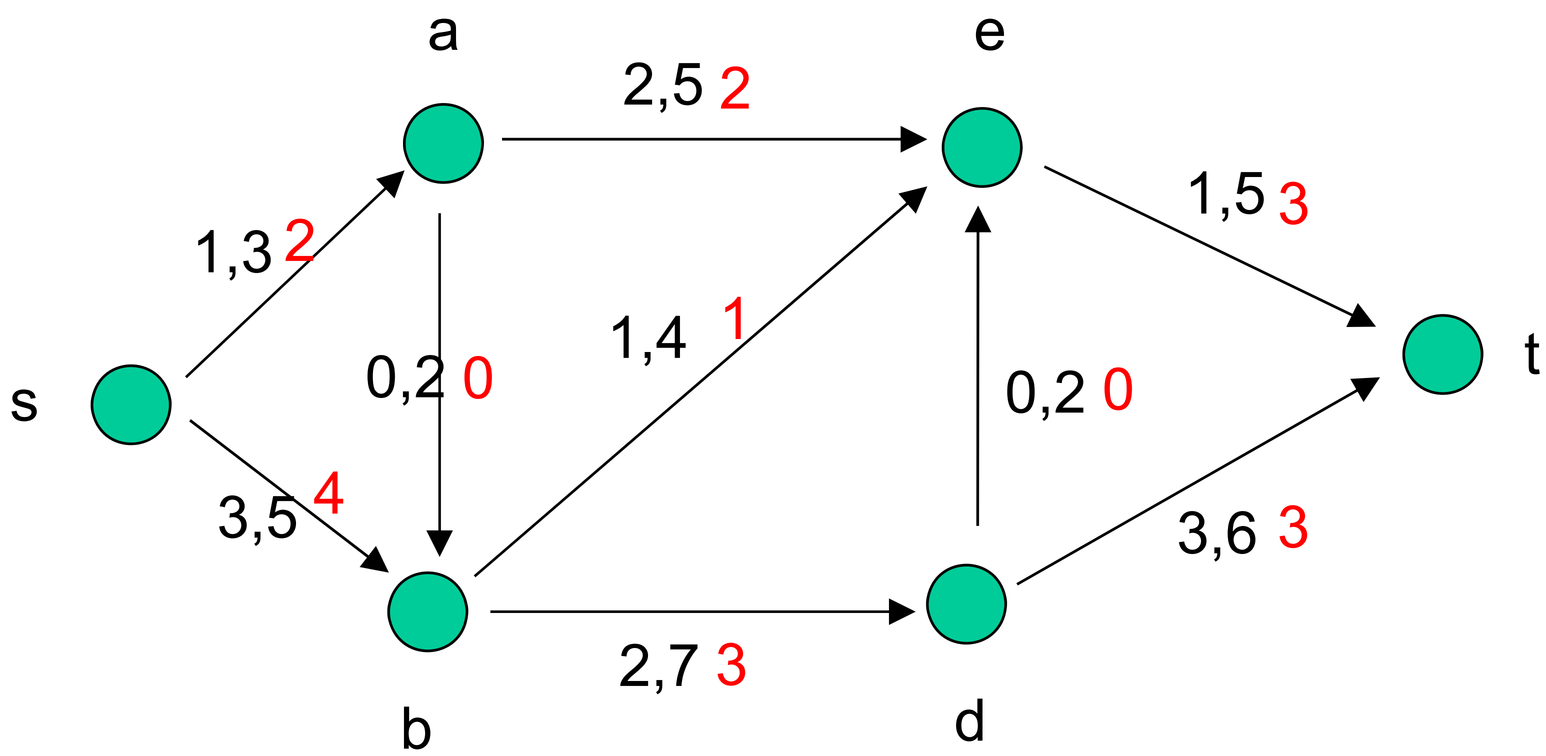
El valor máximo de un flujo en una red N es igual a la mínima capacidad de los cortes de N

REDES NO DIRIGIDAS O MIXTAS



Precaución: Por los nuevos arcos NO puede haber flujo simultáneamente en los dos sentidos

REDES CON ACOTACIÓN SUPERIOR E INFERIOR

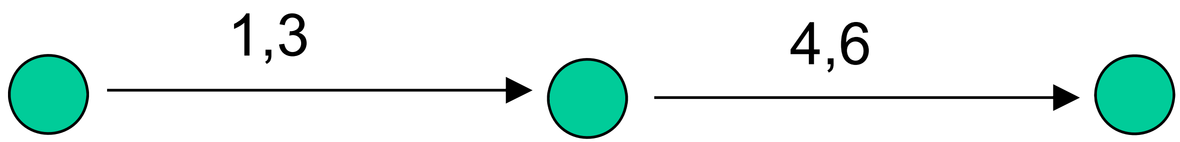


FLUJO en una red N $\quad f: A \rightarrow Z^{+}$

1. $b(x,y) \leq f(x,y) \leq c(x,y)$ VIABILIDAD

2. LEY de CONSERVACIÓN

ATENCIÓN Hay redes NO factibles



PROBLEMAS

1. Dada N determinar si es factible

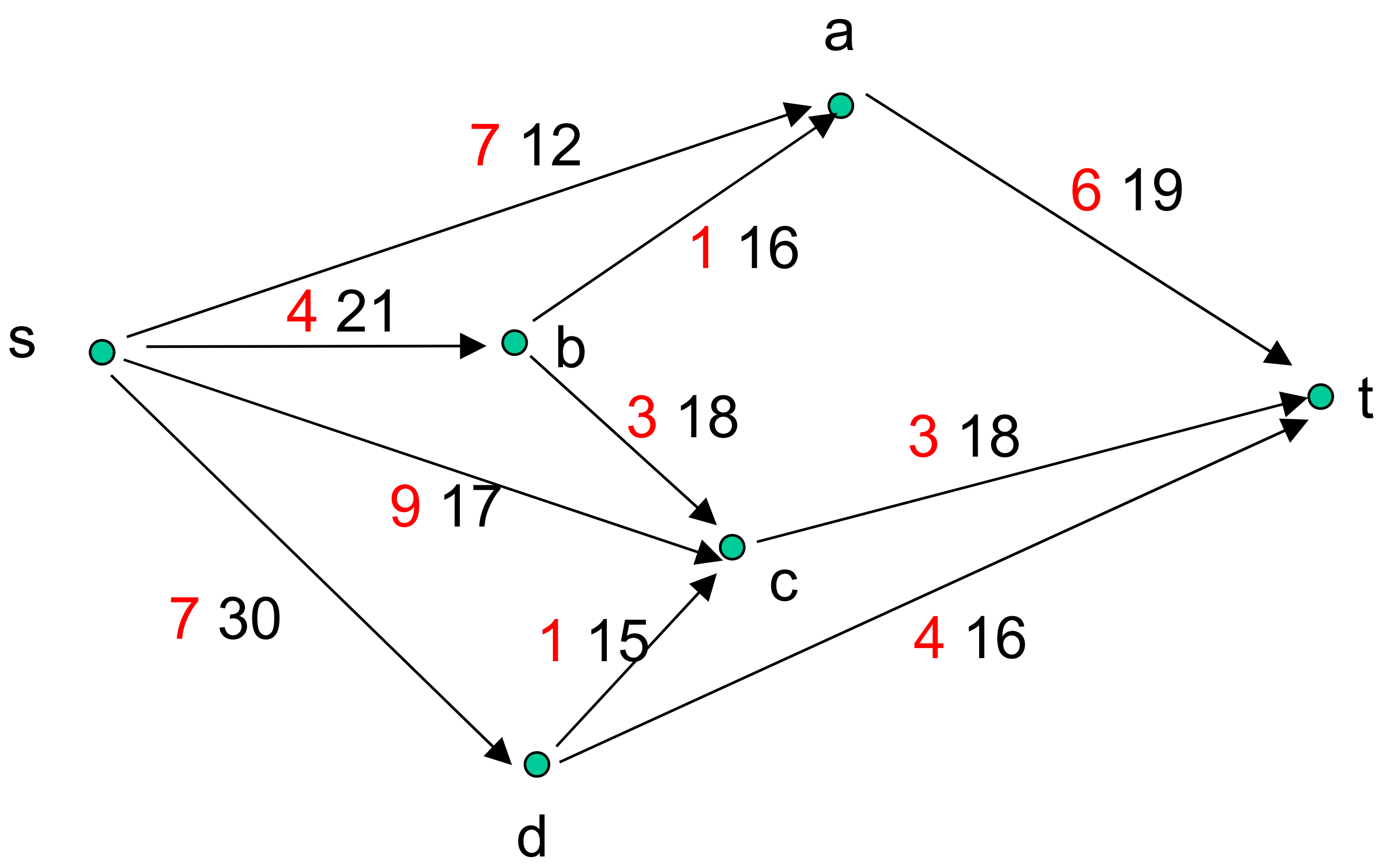
2. Si N es factible, hallar un flujo en N

3. Adaptar el método de Ford-Fulkerson a N

FLUJOS EN REDES CON COSTE

En cada arco de la red tenemos: CAPACIDAD limitada

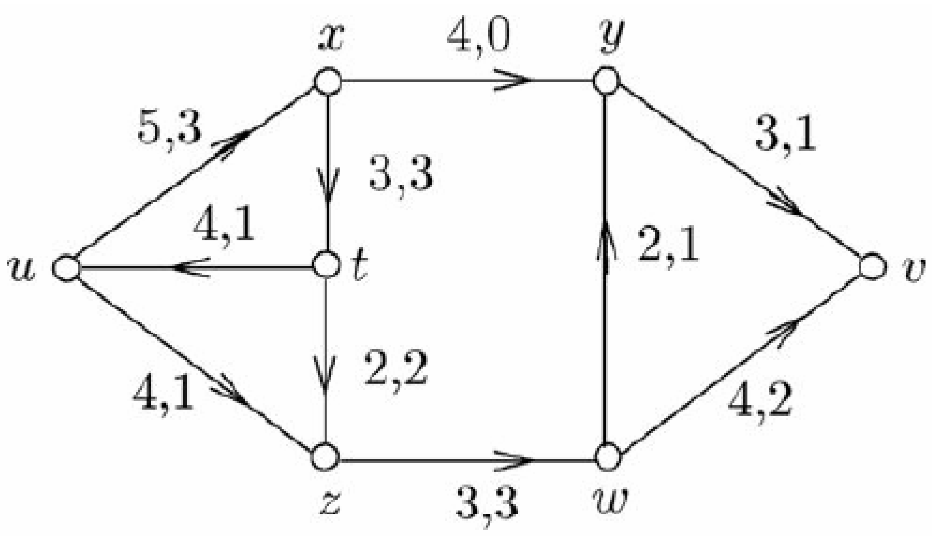
COSTE por unidad de flujo



FLUJOS EN REDES CON COSTE

REDES CON ACOTACIÓN SUPERIOR E INFERIOR

REDES GENERALES (sin fuente ni sumidero)

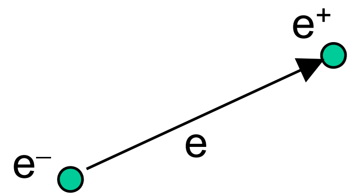


CIRCULACIONES

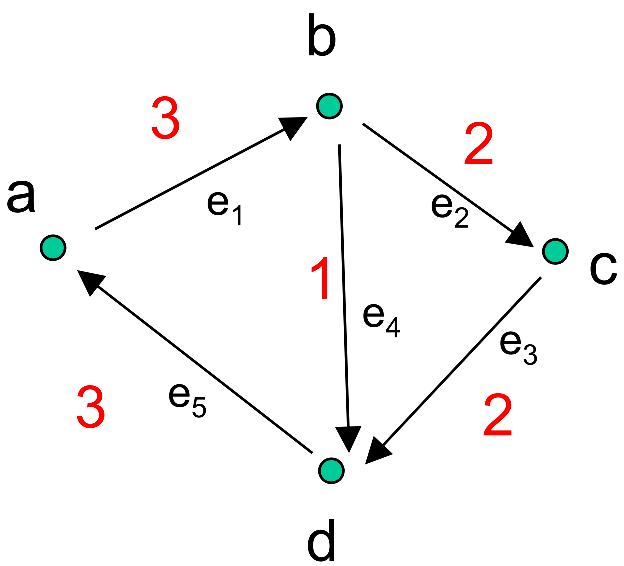
CIRCULACIONES

G = (V,A) digrafo, f: A $\rightarrow$ **R** es una **circulación** si se cumple la ley de **conservación** en cada vértice

(Z1) $$\sum_{e^+=v} f(e) = \sum_{e^-=v} f(e)$$ para todo vértice v



$$\boxed{\textbf{(Z1)} \qquad Mf = 0}$$



Matriz de incidencia

$$M(v_i, e_j) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad v_i = e_j^- \\ -1 & \text{si} \quad v_i = e_j^+ \\ \quad 0 & \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

CIRCULACIONES

G = (V,A) digrafo, $f: A \to \mathbf{R}$ es una **circulación** si se cumple la ley de **conservación** en cada vértice

$\boxed{\textbf{(Z1)} \quad Mf = 0}$ M = Matriz de incidencia (n,m)

M es la matriz de una aplicación lineal $h_M : \mathbf{R^m} \to \mathbf{R}^n$
Cada aplicación $g: A \to \mathbf{R}$ origina un vector $\{g(e_1, \ldots, g(e_m)\}$ en $\mathbf{R^m}$
Las circulaciones son las aplicaciones asociadas a los elementos del núcleo de h_M

Γ = {Circulaciones} es un espacio vectorial de dimensión m – rang(M)

Si G tiene p componentes conexas rang(M) = n – p (**ejercicio**)

1. rang(M) ≤ n – 1
2. Si M_T es la matriz de incidencia de un árbol T, entonces $\det(M_T) = \pm 1$ (inducción)
3. Dado G conexo, considerar un árbol generador de T para deducir que rang(M) = n – 1
4. Si G tiene p componentes entonces rang(M) = n – p

CIRCULACIONES

Teorema
Sea G digrafo de n vértices, q aristas y p componentes conexas.
Las circulaciones de G forman un espacio vectorial de dimensión

$$\nu(G) = m - n + p$$

$\nu(G)$ se denomina número **ciclomático** de G

Corolario. Si f es una circulación en un árbol entonces $f = 0$

Base canónica para el espacio de circulaciones de G

Soporte de una circulación f: Aristas para las que $f(e) \neq 0$

Circulación elemental es aquella con soporte minimal con respecto a la inclusión

BASE del espacio de CIRCULACIONES

Lema

Sea G digrafo y f circulación en G. Entonces f es elemental si y sólo si su soporte es un ciclo de G

Dem.:

$\Leftarrow$) Sea $C = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ un ciclo (no necesariamente dirigido)

Construimos una circulación elemental f_C con soporte C

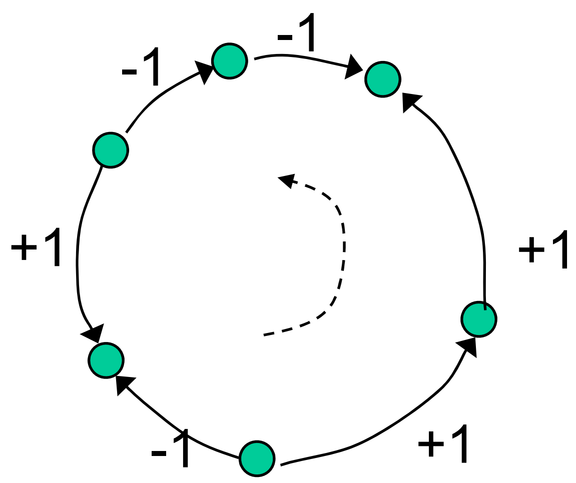
$f_C(e) = 0$ para las aristas que no están en C

$f_C(e_i) = +1$ ó -1 según que e_i sea arco "adelante" o "atrás"

Comprobemos que f_C es elemental

Si g es una circulación con soporte contenido en C, podemos suponer que $g(e_k) = 0$.

Como C es un ciclo, el resto de aristas e_j forman un camino, luego por el corolario anterior, $g(e_j) = 0$. Y así $g = 0$



BASE del espacio de CIRCULACIONES

Lema

Sea G digrafo y f circulación en G. Entonces f es elemental si y sólo si su soporte es un ciclo de G

Dem.:

$\Rightarrow$) Si f es elemental en G y $f \neq 0$ su soporte debe contener un recorrido cerrado, luego contiene un ciclo C.

Pero como existe una circulación con soporte C y f es elemental, entonces el soporte de f tiene que ser el mismo ciclo C

BASE del espacio de CIRCULACIONES

Teorema
Sea G digrafo de n vértices, m aristas y p componentes conexas.
Entonces existe una base del espacio vectorial Γ de circulaciones en G que consta de $\nu(G) = m - n + p$ circulaciones elementales

Dem.:
Se supone que G es conexo (si no, se prueba en cada componente conexa).
Sea T un árbol generador del grafo no dirigido subyacente a G
Para cada arista $e \notin T$ se llama $C_T(e)$ al único ciclo de T+e.
Llamamos f_e a la circulación elemental de soporte $C_T(e)$ y comprobamos que $\{f_e \,/\, e \notin T\}$ es una base de Γ de cardinal $m - n + 1$

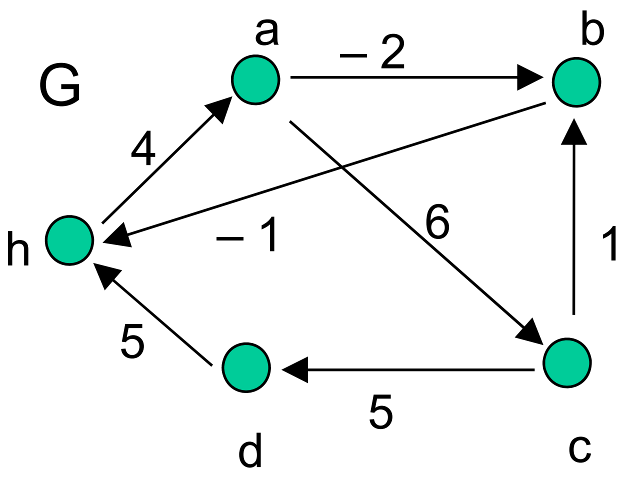
Basta comprobar que es un conjunto linealmente independiente.
El soporte de cada f_e contiene sólo una arista fuera de T (la propia e)

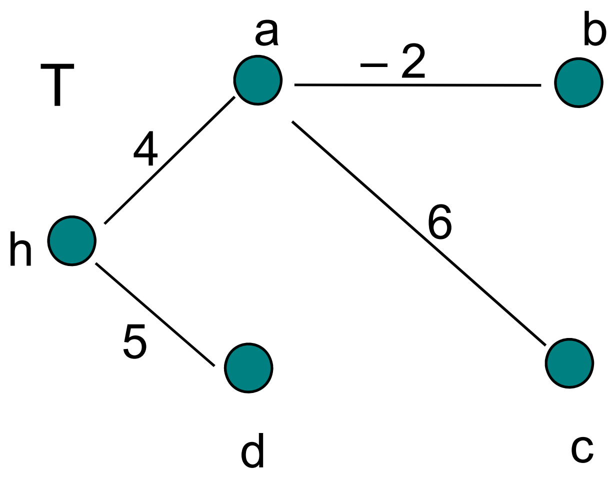
Así cualquier combinación nula de las f_e tiene sus coeficientes nulos y $\{f_e \,/\, e \notin T\}$ es linealmente independiente.

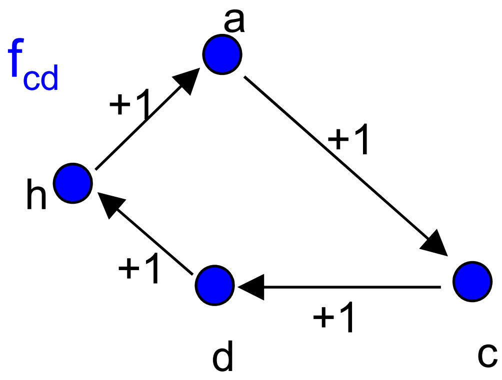
BASE del espacio de CIRCULACIONES Γ

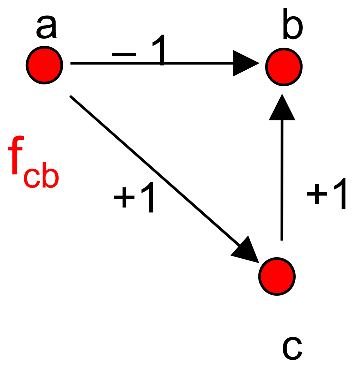
G conexo, f circulación en G, T árbol generador de |G|

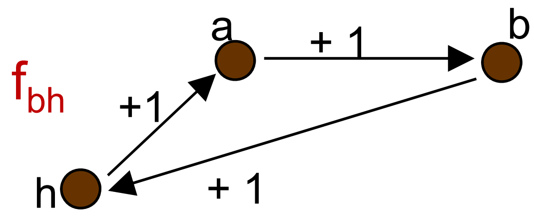
$\{f_e \,/\, f_e$ circulación en $C_T(e),\ e \notin T\}$ base de Γ











$$\boxed{f = 5f_{cd} + f_{cb} - f_{bh}}$$

BASE del espacio de CIRCULACIONES Γ

G conexo, f circulación en G, T árbol generador de |G|
$\{f_e \,/\, f_e$ circulación en $C_T(e)$, $e \notin T\}$ base de Γ

Dada la circulación f se construye $$g = f - \sum_{e \in G-T} f(e) f_e$$

El soporte de g está contenido en T, luego g = 0

Por tanto, $$f = \sum_{e \in G-T} f(e) f_e$$

BASE del espacio de CIRCULACIONES

Teorema
Sea G digrafo de n vértices, m aristas y p componentes conexas. Entonces existe una base del espacio vectorial Γ de circulaciones en G que consta de $\nu(G) = m - n + p$ circulaciones elementales

Al espacio vectorial Γ de circulaciones se le llama también espacio vectorial de ciclos de G
A su dimensión se le llama **número ciclomático**

Si G tiene pesos en las aristas, se puede hallar una base de peso mínimo con complejidad $O(nq^3)$, pero si debe estar formada por ciclos elementales entonces el problema NP-duro

El espacio vectorial de circulaciones es el complemento ortogonal del espacio vectorial de filas de su matriz de incidencia M

CIRCULACIONES no negativas

Una circulación f es no-negativa si $f(e) \geq 0$ para toda arista e

Si f es una circulación no nula entonces su soporte contiene un ciclo

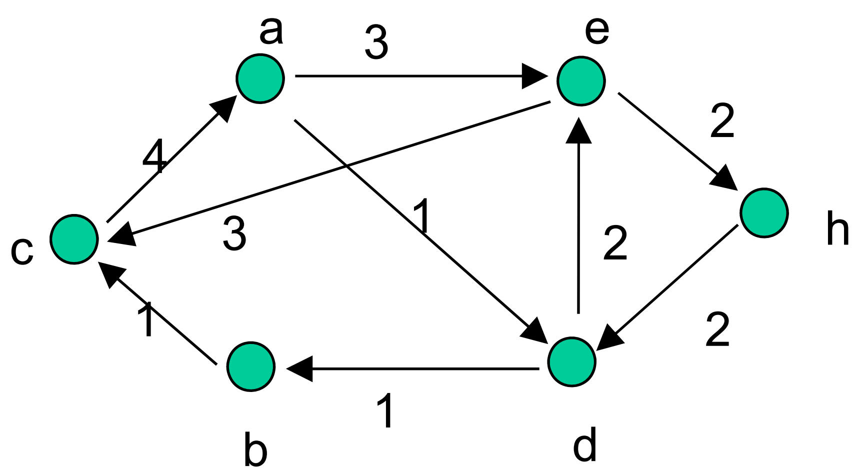
Si f es una circulación no-negativa entonces su soporte contiene un ciclo dirigido.

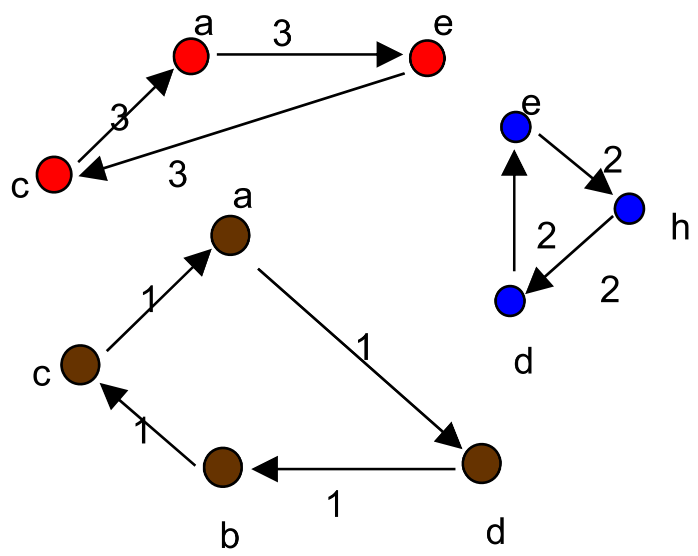
Teorema

Sea G digrafo y $f \neq 0$ una circulación en G. Entonces f es no-negativa si y sólo si $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k$ donde las f_i son circulaciones elementales no negativas (sus soportes son ciclos dirigidos) y λ_i son números positivos

CIRCULACIONES no negativas

Teorema
Sea G digrafo y $f \neq 0$ una circulación en G. Entonces f es no-negativa si y sólo si $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k$
donde las f_i son circulaciones elementales no negativas (sus soportes son ciclos dirigidos) y λ_i son números positivos





$f = 3f_1 + 2f_2 + f_3$

Problemas en términos de **CIRCULACIONES**

1. Flujos en redes con capacidades acotadas **inferiormente**
2. Flujo óptimo para red con **coste** en las aristas
3. Problema de asignación
4. Caminos mínimos
5. Existencia de recorridos eulerianos en multigrafos conexos mixtos (aristas dirigidas y no dirigidas)
6. Problema del proveedor (caterer problem)

CIRCULACIONES

$G = (V,A)$ digrafo, $f: A \to \mathbf{R}$ es una circulación si se cumple la ley de conservación en cada vértice

La capacidad en cada arco está acotada tanto superior como inferiormente $b(e) \leq c(e)$

Una circulación es factible (legal) si $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Función coste $\gamma: A \to R$

Coste de una circulación $$\mathrm{Coste}(f) = \sum_{e \in A} \gamma(e) f(e)$$

¿Circulación óptima? Aquella de coste mínimo

CIRCULACIONES versus FLUJOS

$N = (G,c,s,t)$ red con un flujo f de valor $val(f)$
G' digrafo obtenido al añadir la arista $e^* = ts$
Se extienden capacidad y flujo $c(e^*) = \infty$, $f(e^*) = val(f)$

Así f es una circulación en G' (y factible imponiendo $b(e) = 0$)

Ahora partimos de una circulación factible f' sobre G'
Así se tiene un flujo f de valor $f'(e^*)$ sobre G

Si se define la función coste sobre G'
$\gamma(e^*) = -1$ y $\gamma(e) = 0$ para el resto de aristas

Un flujo en N es maximal $\Leftrightarrow$ La circulación en G' tiene coste mínimo con respecto a γ

$$\boxed{\text{Flujo maximal} \quad \leftrightarrow \quad \text{Circulación óptima}}$$

FLUJOS en REDES CON
CAPACIDAD ACOTADA INFERIORMENTE

CIRCULACIONES FACTIBLES

Dado un digrafo $G = (V,A)$ con restricciones de capacidad b y c, ¿admite una circulación factible?

Una circulación f es factible (legal) si $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$

CIRCULACIONES FACTIBLES

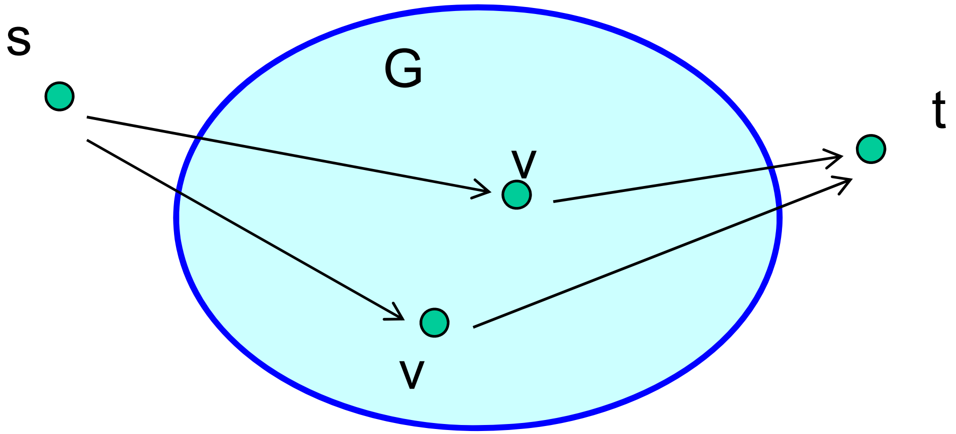
Dado un digrafo G = (V,A) con restricciones de capacidad b y c, ¿admite una circulación factible?

A partir de G se construye otro digrafo H.
Nuevos vértices s, t
Nuevas aristas: Por cada $v \in V$, dos aristas sv y vt

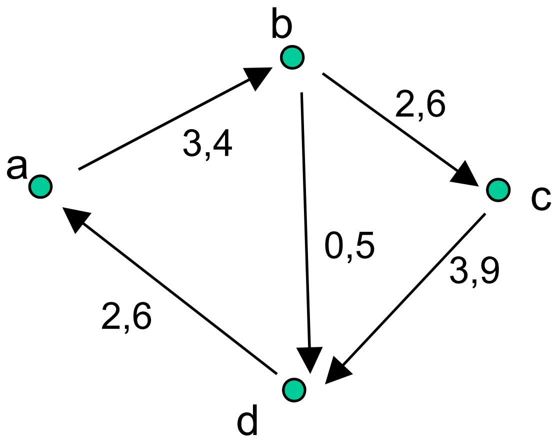
Capacidad en H
Si $e \in A$ $\quad c'(e) = c(e) - b(e)$

$$c'(sv) = \sum_{e^+ = v} b(e)$$

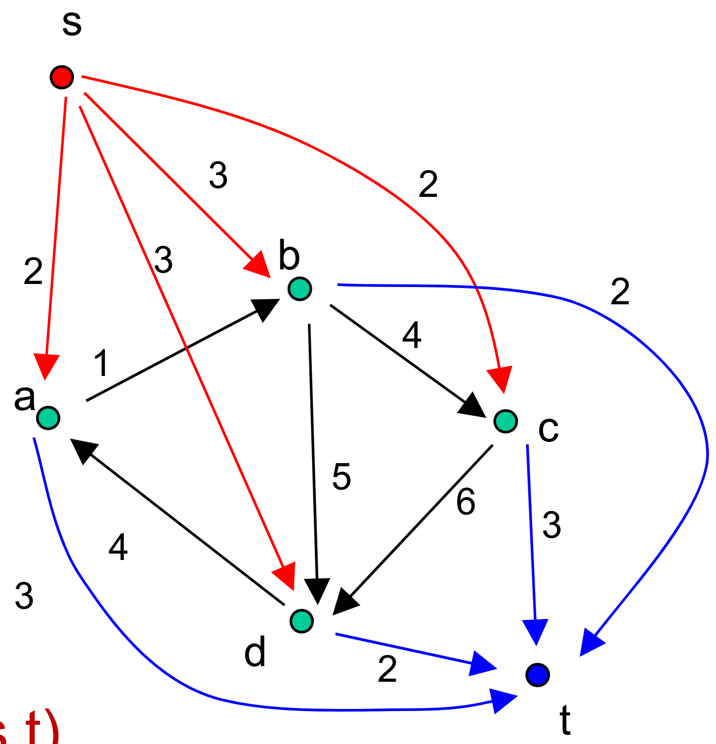
$$c'(vt) = \sum_{e^- = v} b(e)$$



CIRCULACIONES FACTIBLES



(G,b,c)



N = (H,c’,s,t)

CIRCULACIONES FACTIBLES

Dado un digrafo G = (V,A) con restricciones de capacidad b y c, ¿admite una circulación factible?

A partir de G se construye otro digrafo H.
Nuevos vértices s, t
Nuevas aristas: Por cada $v \in V$, dos aristas sv y vt
Capacidad en H
c'(e) = c(e) – b(e)

$$c'(sv) = \sum_{e^+ = v} b(e) \qquad c'(vt) = \sum_{e^- = v} b(e)$$

La red N = (H,c',s,t) es una red de flujo con c'(e) ≥ 0
Se calcula el flujo máximo f ' de s hasta t en H

$$\mathrm{val}(f') \le W = \sum_{v \in V} c'(sv) = \sum_{e \in A} b(e) = \sum_{v \in V} c'(vt)$$

f ' es máximo (val(f ')=W) $\Leftrightarrow$ f ' satura todas las aristas sv y vt

CIRCULACIONES FACTIBLES

Teorema

Dado un digrafo G = (V,A) con restricciones de capacidad b y c, existe circulación factible en G $\Leftrightarrow$ el valor máximo de un flujo en N es $W = \Sigma b(e)$

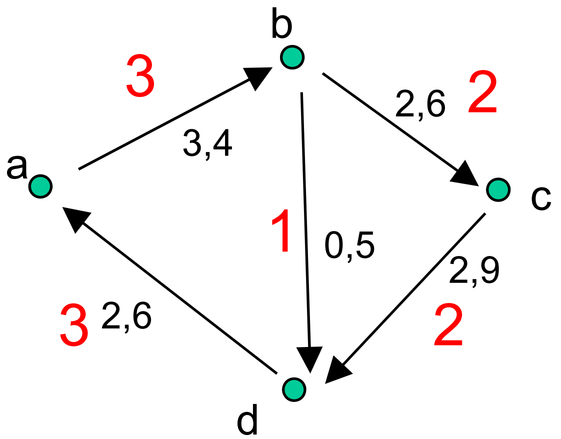
$\Rightarrow$) Si f es circulación factible en G, se define un flujo f ‘ en N así:
f ‘(e) = f(e) – b(e) para las aristas en A

$$f'(sv) = \sum_{e^+=v} b(e) \qquad f'(vt) = \sum_{e^-=v} b(e)$$

Por ser f factible, 0 ≤ f ‘(e) ≤ c’(e) para las aristas en A y
c’(sv) = f ‘(sv), c’(vt) = f ‘(vt)

Las aristas incidentes en s y en t están saturadas, luego val(f ‘) = W y f ‘ es máximo

CIRCULACIONES FACTIBLES

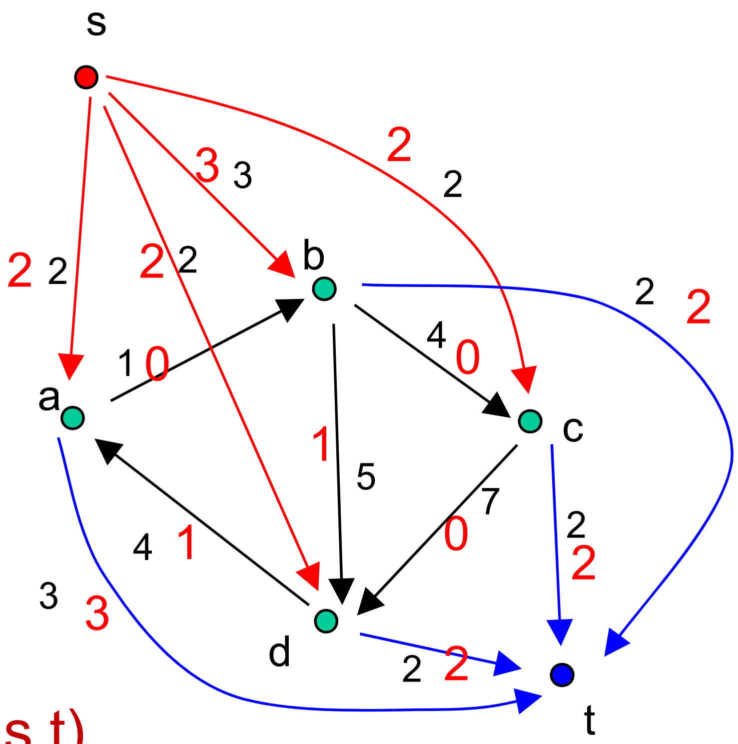


(G,b,c)

f circulación factible en G

f ' flujo en N
entre s y t

N = (H,c',s,t)



CIRCULACIONES FACTIBLES

$\Leftarrow$) Sea f ' flujo en N de valor val(f ') = W
Definimos una función f en A así f(e) = f '(e) + b(e)
Como f ' es flujo, 0 ≤ f '(e) ≤ c'(e) = c(e) – b(e), es decir, b(e) ≤ f(e) ≤ c(e)

Vemos la conservación de f en cada vértice v de G
Como f ' es un flujo en N, en cada vértice v se tiene que:

$$f'(sv) + \sum_{e^+=v} f'(e) = f'(vt) + \sum_{e^-=v} f'(e)$$

Como f ' es máximo, las aristas incidentes con s o t están saturadas, así

$$f'(sv) = c'(s,v) = \sum_{e^+=v} b(e) \qquad f'(vt) = c'(v,t) = \sum_{e^-=v} b(e)$$

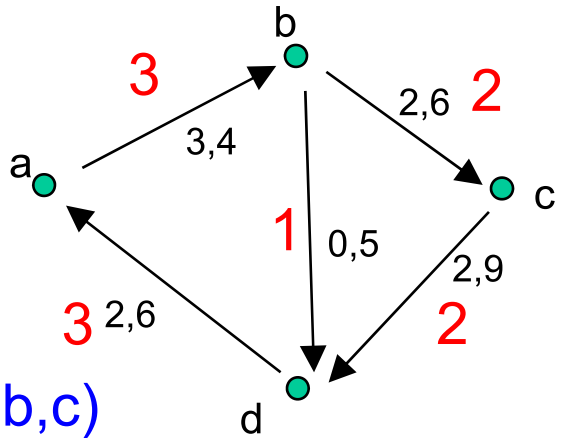
f' es flujo

Luego, $$\sum_{e^+=v} f(e) = \sum_{e^+=v} f'(e) + \sum_{e^+=v} b(e) = \sum_{e^+=v} f'(e) + f'(sv) =$$

$$= f'(vt) + \sum_{e^-=v} f'(e) = \sum_{e^+=v} b(e) + \sum_{e^-=v} f'(e) = \sum_{e^-=v} f(e)$$

f es circulación en G

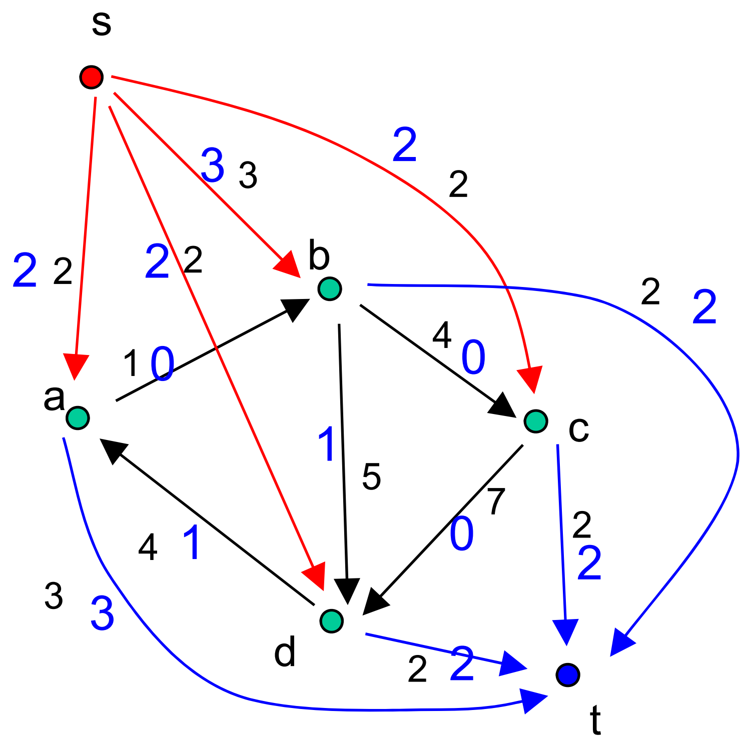
CIRCULACIONES FACTIBLES



(G,b,c)

f(e) = f '(e) + b(e)
circulación factible en G

f ' flujo máximo en N
entre s y t



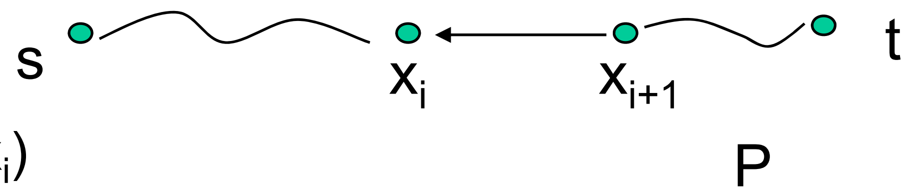
N = (H,c',s,t)

DIGRAFOS CON ACOTACIÓN SUPERIOR E INFERIOR

Estrategia para circulación de valor máximo

1. Dado (G, c, b) construir la red básica $N = (H, c', s, t)$
2. Hallar f^* flujo maximal en N
3. Si $val(f^*) \neq \Sigma\, b(e)$, FIN. La red no es factible
4. Si $val(f^*) = \Sigma\, b(e)$, (es decir, $f^*(sv) = c'(sv)$ para todo v) entonces $f(e) = f^*(e) + b(e)$ es una circulación factible
5. Aplicar el algoritmo Edmonds-Karp "modificado" partiendo de la anterior circulación f factible para hallar el flujo máximo en G

"modificación"



residuo $\alpha_i = f(x_{i+1},x_i) - b(x_{i+1},x_i)$

CIRCULACIONES FACTIBLES

Otra caracterización de la existencia en términos de cortes

Teorema (Hoffman)
Sea G un digrafo con restricciones de capacidad no negativas b y c. Existe una circulación factible sobre G si y sólo si cualquier corte (S,T) de G tiene capacidad no negativa, es decir,

$$\sum_{e^- \in S, e^+ \in T} c(e) \geq \sum_{e^+ \in S, e^- \in T} b(e)$$ para cualquier corte (S,T)

La capacidad de un corte es $\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{e^- \in S, e^+ \in T} c(e) - \sum_{e^+ \in S, e^- \in T} b(e)$

Y esto nos da una generalización del teorema de Ford-Fulkerson

Teorema de Ford-Fulkerson (redes capacidad inferior)

Teorema

Sea N = (G,b,c,s,t) una red con capacidad inferior no negativa b.
Existe un flujo factible en N si y sólo si cap(X,Y) ≥ 0 para cualquier partición $V = X \cup Y$ con $t \notin X$ ó $s \notin Y$

Si se cumple esta condición, el valor máximo de un flujo factible es igual al mínimo de las capacidades cap(S,T) para todos los cortes (S,T)

REFERENCIAS

W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank and A. Schrijver, "*Combinatorial Optimization*", Wiley, 1998.

D. Jungnickel: "*Graphs, networks and algorithms*", Springer, 2008

B. Korte, J. Vygen, "*Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*", Springer, 2006

C. Papadimitriou, K. Steiglitz: "*Combinatorial Optimization: Algorithms and complexity*". Dover, 1998