ELIMINACIÓN

1. Planteamiento del problema
¿Cuáles son las soluciones de un sistema de ecuaciones en n variables?

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Para resolver el problema sería interesante obtener otro sistema con menos variables cuya solución nos diera las soluciones del sistema original

"Dado el sistema de ecuaciones (*) y dados k números $p_1, p_2, \ldots, p_k$ averiguar condiciones necesarias y suficientes para que existan $p_{k+1}, \ldots, p_n$ tales que $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ sea una solución de (*)"

Al efectuar esto diremos que hemos eliminado las variables $x_{k+1}, \ldots, x_n$ entre las ecuaciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$

Este planteamiento es muy general. Lo estudiaremos en algunos casos particulares.

2. Eliminación lineal
Si las ecuaciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son lineales, el problema se resuelve con el **Teorema de Rouché-Fröbenius**

3. Eliminación diferencial
Si las ecuaciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son funciones diferenciables, el problema se resuelve localmente en el entorno de un punto (no singular). Es el **Teorema de la función implícita**.

4. Eliminación algebraica
Las ecuaciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son algebraicas. Solo estudiaremos dos casos muy sencillos: (1) si hay dos ecuaciones en una variable y (2) eliminación de una variable en dos (o más) ecuaciones.

4.1 Resultante
Dadas dos ecuaciones algebraicas en una indeterminada
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$
$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0 = 0$
queremos encontrar una condición necesaria y suficiente para que exista c solución común de ambas ecuaciones, es decir, $f(c) = 0$, $g(c) = 0$

Teorema
La condición necesaria y suficiente para que f(x) y g(x) tengan una raíz común es que existan dos polinomios h(x) y j(x) de grados n – 1 y m – 1 respectivamente, tales que

$$f(x)j(x) = g(x)h(x)$$

Si esos polinomios son
$h(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0 = 0$
$j(x) = d_{m-1}x^{m-1} + d_{m-2}x^{m-2} + \ldots + d_1x + d_0 = 0$
al imponer la igualdad $fj = gh$ e igualar coeficientes resulta un sistema homogéneo de $m + n$ ecuaciones en $m + n$ incógnitas (c_i y d_i) cuya matriz es

$$\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \quad \text{filas} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \quad \text{filas}
\end{array}$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. Este determinante es la **resultante** de f y g denotada por Res(f,g)

Teorema
La condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ y $g(x)$ tengan una raíz común es que $\text{Res}(f,g) = 0$

Ejemplo.
Hallar los puntos de intersección de las cónicas
$f(x,y) = x^2 - 5y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2 = 0$ y $g(x,y) = x^2 - 7y^2 - 3x - 5y + 2 = 0$

Sea (a,b) un punto común de las dos cónicas. Entonces a es raíz común de los polinomios
$f_b(x) = x^2 - (2b + 3)x + (2 + 3b - 5b^2)$ y $g_b(x) = x^2 - 3x + (2 - 5b + 7b^2)$,
luego $x - a$ divide a $f_b(x)$ y a $g_b(x)$, por lo que la resultante $\text{Res}(f_b,g_b)$ es nula

$$\begin{aligned}
\text{Res}(f_b, g_b) &= \det\begin{pmatrix}
1 & -(2b+3) & 2+3b-5b^2 & 0 \\
0 & 1 & -(2b+3) & 2+3b-5b^2 \\
1 & -3 & 2-5b-7b^2 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 2-5b-7b^2
\end{pmatrix} \\
&= -24b^2(b^2-1),
\end{aligned}$$

Luego $b = 0, \pm 1$
Para $b = 0$ las raíces comunes de f_0 y g_0 son $x = 1$ y $x = 2$. Obtenemos los puntos de corte (1,0) y (2,0)
Para $b = 1$, la única raíz común es $x = 5$ y tenemos el punto de corte (5, 1)
Para $b = -1$, la raíz común es $x = 3$ y tenemos el punto de corte (3, – 1)

4.2 Discriminante

Sabemos que un polinomio f(x) tiene una raíz múltiple c si c también es raíz de la derivada f ’, es decir si Res(f,f ’) = 0

Se llama discriminante de una ecuación algebraica f(x) = 0 a la expresión Δ(f) que verifica

$$a_n \Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{Res}(f,f') =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 2a_2 & \cdots & (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & \cdots & (n-1)a_{n-1} & na_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 2a_2 & \cdots & na_n \end{bmatrix}$$

4.3 Interpretación geométrica de la eliminación

Problema:

Hallar la proyección ortogonal sobre el plano z = 0 de la curva C que es intersección de las superficies en R^3 definidas por las ecuaciones algebraicas f(x, y, z) = xz – y = 0 y g(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$

¿Qué significa eliminar z entre las ecuaciones f y g?

Dados p_1, p_2 encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista p_3 tal que (p_1, p_2, p_3) sea solución del sistema de ecuaciones, es decir sea un punto de C.

Evidentemente la c.n.s. es que (p_1, p_2) sea un punto de la proyección ortogonal de C sobre el plano z = 0

Por tanto, **eliminar z equivale a proyectar sobre z = 0**