ECUACIONES ALGEBRAICAS

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

Problemas

1. Existencia de una raíz
2. Propiedades de las raíces a partir de los coeficientes (SIN resolver la ecuación)
3. Cálculo aproximado de las raíces

Resultados básicos:

- a es raíz de f(x) $\Leftrightarrow$ f(a) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x) es divisible por x – a
- a es raíz múltiple de orden k de f(x) $\Leftrightarrow$ f(x) es divisible por $(x - a)^k$
- Una raíz múltiple de orden k de f(x) es raíz de orden k – 1 del polinomio derivado f ’(x)

Problema 1. Existencia

- **Teorema fundamental del Álgebra (Gauss, 1799):**
  Toda ecuación algebraica con coeficientes reales o complejos tiene una raíz en el cuerpo de los números complejos.
- Consecuencia: Si la ecuación tiene grado n, posee exactamente n raíces en **C,** contando cada una de ellas con su multiplicidad.

Problema 2. Propiedades de las raíces a partir de los coeficientes

2.1 Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

- Si los coeficientes de f(x) son enteros y $\alpha \in \mathbf{Z}$ es una raíz entera de f(x) entonces $\alpha \mid a_0$
- Si los coeficientes de f(x) son enteros, $a_n = 1$ y α es una raíz racional de f, entonces α es un número entero.
- Si los coeficientes de f(x) son enteros y $\frac{p}{q}$ es una raíz racional (irreducible) de f(x) entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$

2.2 Raíces reales de polinomios con coeficientes reales.

Intentamos responder las siguientes preguntas: ¿Cuántas raíces positivas tiene f(x)?, ¿cuántas raíces tiene en el intervalo (a,b)?

Lema 0. (**Teorema de Rolle**)
Si $a,b \in R$ son raíces de f(x) entonces existe un número real $c \in (a,b)$ que es raíz de su derivada.

Lema 1.
Si f(x) tiene todas sus raíces reales entonces todas las raíces de f ’(x) también son reales. Además entre dos raíces consecutivas de f solo existe una raíz de f ’ y es simple

Lema 2.
Si $f(x)$ tiene todas sus raíces reales y de ellas p son positivas entonces $f'(x)$ tiene p ó $p-1$ raíces positivas.

Ley de Descartes de los signos
("Geometría", 1637)
Si $f(x) = 0$ es una ecuación algebraica real con todas sus raíces reales, entonces el número de raíces positivas (contando su multiplicidad) es el número de cambios de signo de la sucesión de sus coeficientes. Si hay raíces complejas entonces dicho número es igual al número de cambios de signo menos un número par.

Observación: Los coeficientes nulos de f no cuentan en los cambios de signo.
Ejemplo:
$f(x) = x^6 - 2x^5 - 23x^4 - 16x^3 + 56x^2 + 32x - 48$
La sucesión de coeficientes tiene tres cambios de signo. Como f tiene todas sus raíces reales, 3 de ellas son positivas.

La demostración de la "Ley de los signos" se realiza por inducción sobre el grado de f y utilizando este lema auxiliar.
Lema 3.
Si todas las raíces de f son reales y de ellas hay p positivas entonces $(-1)^p$ es el signo del coeficiente del término de menor grado no nulo.

Corolario. **Teorema de Budan-Fourier**
Si todas las raíces de $f(x)$ son reales, el número de raíces de $f(x)$ en el intervalo (a,b) es
#(cambios de signo de $f(x+a)$) – #(cambios de signo de $f(x+b)$)
Y si hay raíces complejas a esta diferencia se le resta un número par.

Finalmente, el teorema de Sturm nos proporciona el número de raíces **distintas** de un polinomio en un intervalo dado.

Teorema de Sturm
Dado el polinomio $f(x)$ se construye la sucesión de polinomios $f, f_1, f_2, \ldots, f_r$ tales que
$f_1 = f'$
$f = f_1q_1 - f_2$
$f_1 = f_2q_2 - f_3$
……
$f_{r-1} = f_rq_r$
Llamamos $v(c)$ al número de cambios de signo en $f(c), f_1(c)\ f_2(c) \ldots, f_r(c)$
Si a, b son números reales que no son raíces de $f(x)$, $a < b$, entonces
#(raíces distintas de $f(x)$ en (a,b)) = $v(a) - v(b)$