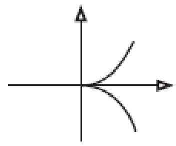
**CURVAS ALGEBRAICAS. Representación gráfica**

El conjunto de puntos del plano euclídeo cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma

$$F(x,y) = \sum_{i=0,\dots,p;\ j=0,\dots,q} a_{ij}x^i y^j = 0$$

donde los coeficientes $a_{ij}$ son números reales se llama **curva algebraica**. El grado del polinomio F es el **orden** de la curva C.

**Ejemplos**:
La circunferencia unidad $x^2 + y^2 - 1 = 0$
La curva de ecuación $y^2 - x^3 = 0$, cuya representación gráfica es



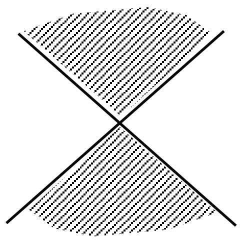
¿Cómo representar gráficamente una curva algebraica?

**1. Regiones de existencia de la curva**
Expresamos la ecuación de la curva C, $F(x,y) = 0$ en la forma

$$g_1(x,y)^{j_1}\cdots g_s(x,y)^{j_s} = h_1(x,y)^{k_1}\cdots h_p(x,y)^{k_p} \qquad (1)$$

donde los factores sean curvas fáciles de dibujar. Cada una de las curvas (con exponente impar) divide el plano en dos regiones en las que el factor correspondiente de (*) toma signo positivo en una y negativo en la otra. Consideramos la descomposición del plano en las regiones delimitadas por todas las curvas (de exponente impar) de la factorización (1). En las regiones en que el signo de los dos miembros de (1) es distinto, NO puede haber puntos de la curva C. Además la curva pasa por los puntos de intersección de cada factor del primer miembro con cada factor del segundo.

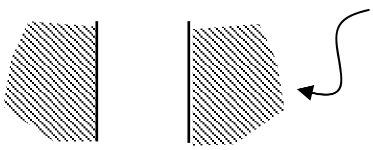
Ejemplos:
C: $x^2 - y^2 - x^4 = 0$
Descomposición $(x + y)(x - y) = x^4$



$x - y = 0$

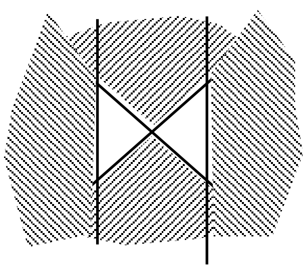
$x + y = 0$

Otra descomposición $x^2(1 - x)(1 + x) = y^2$



$1+x = 0$ $1-x = 0$

Y juntando las dos descomposiciones, ¡casi se dibuja la curva!



## 2. Simetrías

Si F(x,y) = F(–x, y)   la curva es simétrica respecto del eje  Y
Si F(x,y) = F(x, –y)   la curva es simétrica respecto del eje  X
Si F(x,y) = F(–x, –y)   la curva es simétrica respecto del origen
Si F(x,y) = F(y, x)   la curva es simétrica respecto de la recta  y = x
Si F(x,y) = F(–x, –y)   la curva es simétrica respecto de la recta x + y = 0

## 3. Puntos de corte con los ejes

Las soluciones de los sistemas

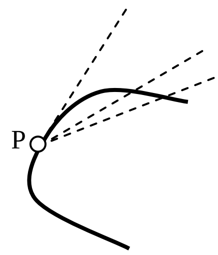
$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x,y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

proporcionan los puntos de corte con los ejes

## 4. Tangentes a una curva algebraica

Si P = (a, b) es un punto de la curva C, y las derivadas parciales de F no se anulan en P $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P\right) \neq (0,0)$   entonces la ecuación de la recta tangente a C en el punto P es

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (y-b) = 0$$




Una recta que pasa por P tiene por ecuaciones $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$

Hallemos la intersección de la recta con C

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \\ F(a + t\alpha, b + t\beta) = 0 \end{cases}$$

Desarrollamos la tercera ecuación por Taylor:

$$F(a+t\alpha, b+t\beta) = F(a,b) + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P \alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P \beta\right] t + \cdots + \frac{1}{r!}\left[\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)_P \alpha^r + \cdots + \binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P \alpha^{r-i}\beta^i + \cdots + \left(\frac{\partial^r F}{\partial y^r}\right)_P \beta^r\right] t^r +$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_P \alpha^n + \cdots + \binom{n}{i}\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\right)_P \alpha^{n-i}\beta^i + \cdots + \left(\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right)_P \beta^n\right] t^n = 0 \qquad (2)$$

F(a,b) = 0 porque  P está  la curva.
La ecuación anterior tiene n soluciones en t, que son los posibles puntos de corte con C.
Una solución es t = 0, que es el punto P

Si $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P\right) \neq (0,0)$    el coeficiente de t será 0   si  $(\alpha,\beta) = \rho\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P, -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P\right)$

La raíz t = 0 será doble y un segundo punto de corte ha venido a coincidir con P. Luego la recta será tangente a la curva C en P.

La ecuación (paramétrica) de la recta tangente en P es:

$$\begin{cases} x = a + \rho t\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_P \\ y = b - \rho t\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_P \end{cases} \qquad \text{eliminando } \rho t \text{ resulta}$$

(c.n.s para que el sistema tenga solución en $\rho t$)

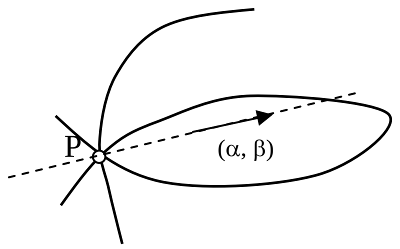
$$\text{rango}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_P \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_P \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} x-a & \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_P \\ y-b & -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_P \end{pmatrix} = 1\text{, es decir, } \begin{vmatrix} x-a & \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_P \\ y-b & -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_P \end{vmatrix} = 0$$

Luego, la ecuación de la recta tangente en P = (a,b) a la curva C: F(x,y) = 0 es

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (x-a) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (y-b) = 0}$$

**¿Qué sucede si las derivadas parciales se anulan en P?**

El punto P se llama **singular** o **múltiple**.
Si en (2) el primer término no nulo es el de orden r, es decir, todas las derivadas parciales de orden menor que r son nulas en P y alguna de orden r es no nula, entonces decimos que **P es un punto múltiple de orden r** de la curva C.




P es un punto triple

Si $(\alpha,\beta)$ anula el coeficiente de $t^r$ en (2), se puede sacar factor común $t^{r+1}$ y un nuevo punto de intersección de la recta con C se confunde en P. Así la recta será tangente a C en P. Por tanto, la ecuación homogénea en $\alpha$ y $\beta$

$$\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)_P \alpha^r + \cdots + \binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P \alpha^{r-i}\beta^i + \cdots + \left(\frac{\partial^r F}{\partial y^r}\right)_P \beta^r = 0 \qquad (3)$$

nos dará las tangentes a la curva en el punto múltiple P.

Esta ecuación homogénea tiene r soluciones que son las r tangentes a C en P.

Si (x,y) es un punto de una de esas tangentes entonces (x,y) es una solución de la ecuación:

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases} \quad \text{donde } (\alpha,\beta) \text{ es una solución de (3),} \quad \text{pero} \quad \begin{cases} \alpha = (x-a)/t \\ \beta = (y-b)/t \end{cases}$$

Y sustituyendo en (3) resulta que si (x,y) es un punto de una recta tangente entonces

$$\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)_P \left(\frac{x-a}{t}\right)^r + \cdots + \binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P \left(\frac{x-a}{t}\right)^{r-i}\left(\frac{y-b}{t}\right)^i + \cdots + \left(\frac{\partial^r F}{\partial^r}\right)_P \left(\frac{y-b}{t}\right)^r = 0$$

Multiplicando por $t^r$ resulta

$$\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)_P (x-a)^r + \cdots + \binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P (x-a)^{r-i}(y-b)^i + \cdots + \left(\frac{\partial^r F}{\partial y^r}\right)_P (y-b)^r = 0$$

¡Ésta es la ecuación conjunta de las r tangentes a C en el punto P!

Particularizando en P = (0,0), si es punto múltiple de orden r entonces, ordenando los términos de F en polinomios del mismo grado,

$F(x,y)\,) = f_r(x,y) + f_{r+1}(x,y) + \ldots + f_n(x,y)$

Resulta que la ecuación anterior es, $r!\ f_r(x,y) = 0$

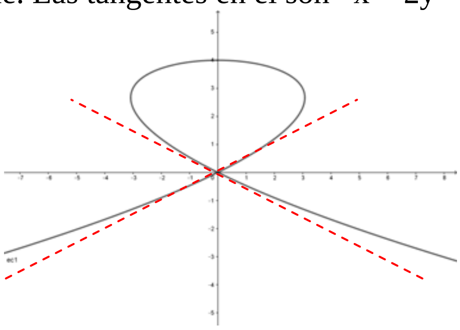
Porque en el término $\binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P x^{r-i}y^i$, el único sumando de $f_r(x,y)$ que NO se anula es el término $cx^{r-i}y^i$

Derivando resulta $\binom{r}{i}\left(\frac{\partial^r (cx^{r-i}y^i)}{\partial x^{r-i}\partial y^i}\right)_P = \binom{r}{i} c(r-i)!i! = cr!$

Por tanto, si F(x,y) = 0 tiene un punto múltiple de orden r en el origen, la ecuación conjunta de las r tangentes en (0,0) es

$$\boxed{f_r(x,y) = 0}$$

Ejemplo:
La curva de ecuación $x^2 - 4y^2 + y^3 = 0$
El origen es un punto doble. Las tangentes en él son $x + 2y = 0$, $x - 2y = 0$

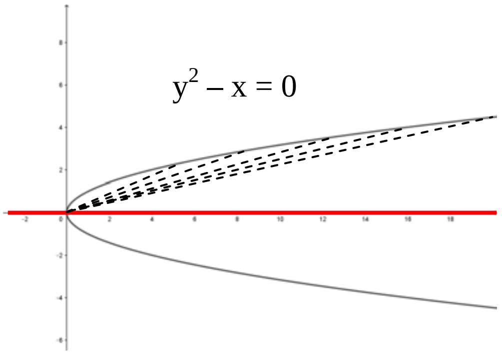


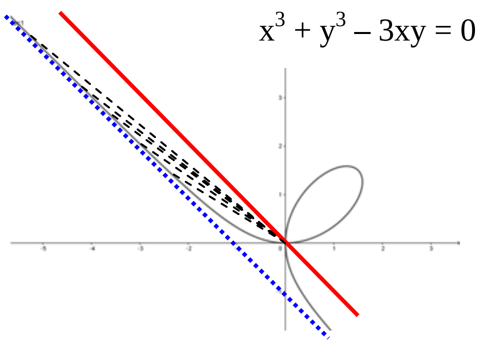
**5. Ramas infinitas. Direcciones asintóticas y asíntotas de una curva algebraica**

Se llama rama infinita de C un arco de la curva tal que una de las coordenadas (x,y) de un punto que la recorra crezca indefinidamente.

**Dirección asintótica de C**

Es una **dirección** $D_r$ tal que r es el límite de las rectas determinadas por (0,0) y (x,y) cuando (x,y) se mueve por la curva de forma que $(x,y) \to \infty$




**Asíntotas y ramas parabólicas**

Si $D_r$ es una dirección asintótica de C y **s** es una recta de $D_r$ tal que $\operatorname{dist}(P,C) \xrightarrow[P\in C]{P\to\infty} 0$ diremos que s es **asíntota** de C

Si no existe s tal que lim dist(P,C) = 0 entonces decimos que C tiene una **rama parabólica** en la dirección $D_r$

**5.1 Cálculo de las direcciones asintóticas de C**

Dada la curva C de ecuación $F(x,y) = f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + \ldots + f_1(x,y) + f_0 = 0$, la ecuación conjunta de de todas las direcciones asintóticas de C es

$$\boxed{f_n(x,y) = 0}$$

Dem.:

Si $ax + by = 0$ es una dirección asintótica de C entonces o bien $a\neq 0$ o bien $b\neq 0$.

Supongamos $b\neq 0$, así la dirección asintótica es $y = -\frac{a}{b}x$

Si P = (p,q) es un punto de la curva C, la recta OP tiene pendiente $\alpha = q/p$ y la pendiente de la dirección asintótica será $-a/b = \lim\limits_{(p,q)\to\infty} \alpha$

Como $P \in C$, $f_n(p,q) + f_{n-1}(p,q) + \ldots + f_1(p,q) + f_0 = 0$, operando

$p^n f_n\left(1,\frac{q}{p}\right) + p^{n-1} f_{n-1}\left(1,\frac{q}{p}\right) + \cdots + f_o = 0$ dividimos por $p^n$

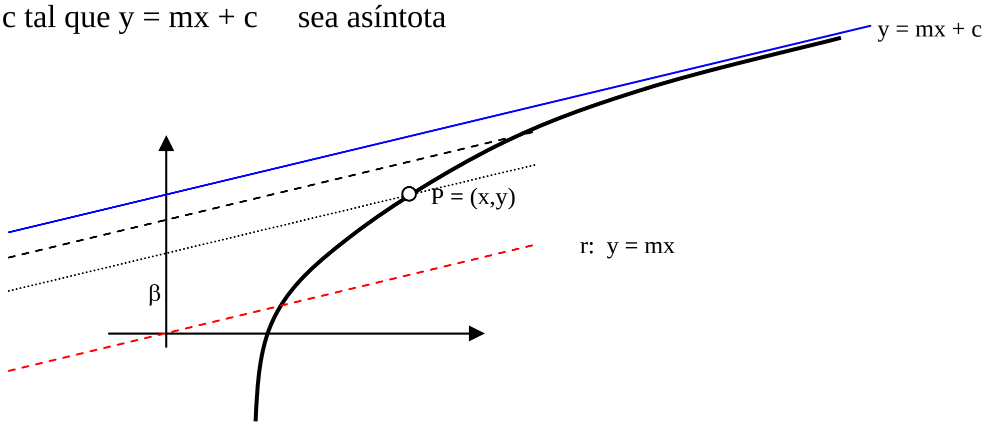
$f_n(1,\alpha) + \frac{1}{p} f_n(1,\alpha) + \cdots + \frac{1}{p^n} f_0 = 0$ tomando límite cuando $(p,q) \to \infty$ resulta

$$f_n(1,\alpha) = f_n\left(1, -\frac{a}{b}\right) = 0$$ es decir, $f_n(b, -a) = 0$, luego $ax + by$ divide a $f_n(x,y)$

## 5.2 Detección de asíntota o rama parabólica en una dirección asintótica

Dada la dirección asintótica $ax + by = 0$ queremos encontrar c, si existe tal que la recta $ax + by = c$ sea asíntota de C.
Suponemos que $b \neq 0$. Así determinamos las asíntotas y ramas parabólicas correspondientes a direcciones asintóticas de la forma $y = mx$ donde m es una raíz de $f_n(1,m) = 0$

Buscamos c tal que $y = mx + c$ sea asíntota




La recta de la dirección asintótica que pasa por P es $y = mx + \beta$
Queremos hallar el límite de $\beta$ cuando $P \to \infty$

$f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + \ldots + f_1(x,y) + f_0 = 0$ sustituyendo
$f_n(x, mx + \beta) + f_{n-1}(x, mx + \beta) + \ldots + f_1(x, mx + \beta) + f_0 = 0$
$x^n f_n(1, m + \beta/x) + x^{n-1} f_{n-1}(1, m + \beta/x) + \ldots = 0$ dividiendo por $x^n$

$$f_n(1, m + \beta/x) + \frac{1}{x} f_{n-1}(1, m + \beta/x) + \ldots = 0$$ ahora desarrollamos en serie

$$f_n(1,m) + \frac{\beta}{x} f'_n(1,m) + \frac{\beta^2}{2x^2} f''_n(1,m) + \ldots + \frac{1}{x}\left[f_{n-1}(1,m) + \frac{\beta}{x} f'_{n-1}(1,m) + \ldots\right] + \ldots = 0$$

El primer término es 0. Agrupamos en potencias de 1/x

$$\frac{1}{x}\left[\beta f'_n(1,m) + f_{n-1}(1,m)\right] + \frac{1}{x^2}\left[\frac{\beta^2}{2!} f''_n(1,m) + f'_{n-1}(1,m) + f_{n-2}(1,m)\right] + \ldots = 0$$

Si el primer corchete no es idénticamente nulo multiplicamos por x y tomamos límites cuando $P \to \infty$

Resulta $c f'_n(1,m) + f_{n-1}(1,m) = 0$ (4)

Si $f'_n(1,m) \neq 0$, tenemos que $c = \dfrac{-f_{n-1}(1,m)}{f'_n(1,m)}$

Así obtenemos la asíntota $\boxed{y = mx - \dfrac{f_{n-1}(1,m)}{f'_n(1,m)} \quad \text{donde m verifica } f_n(1,m) = 0}$

Si $f'_n(1,m) = 0$ y $f_{n-1}(1,m) \neq 0$, la ecuación (4) no tiene solución en c. En este caso no existe asíntota y la curva tiene una rama parabólica en la dirección $y = mx$

Si el primer corchete es idénticamente nulo multiplicamos por $x^2$ y tomamos límites cuando $P \to \infty$

Resulta $\frac{1}{2}c^2 f''_n(1,m) + cf'_{n-1}(1,m) + f_{n-2}(1,m) = 0$

Si esta ecuación en c tiene dos raíces tendremos dos asíntotas correspondientes a la dirección asintótica $y = mx$.

Si los coeficientes de $c^2$ y c son nulos, no hay solución en c y tendremos dos ramas parabólicas en la dirección $y = mx$

Si solo es $f''_n(1,m) = 0$ , entonces tenemos una rama parabólica y la asíntota

$$y = mx - \frac{f_{n-2}(1,m)}{f'_{n-1}(1,m)}$$

Si el segundo corchete también es idénticamente nulo se analiza el siguiente. En general el (o los ) valor(es) de c se obtienen del primer corchete no nulo. La multiplicidad de la raíz m en $f_n(1,m) = 0$ nos indica ese primer corchete no nulo.

Hemos detectado así las asíntotas y ramas parabólicas en las direcciones asintóticas de la forma $y = mx$. Falta el estudio de las direcciones asintóticas de la forma $x = m'y$, donde m' es raíz de $f_n(m',1) = 0$.

Realmente solo falta la dirección asintótica $x = 0$, pero las asíntotas paralelas a los ejes pueden obtenerse directamente.

**5.3 Asíntotas paralelas a los ejes**

Las asíntotas paralelas al eje OX se hallan determinando los valores finitos de y para los cuales x crece indefinidamente.

Si $(x,y) \in C$ y cuando $x \to \infty$ entonces $y \to a$ será la recta $x = a$ una asíntota de C

Ordenamos los términos de F(x,y) según las potencias de x

$$F(x,y) = x^p g_0(y) + x^{p-1} g_1(y) + \dots + g_p(y) = 0$$

Dividimos por $x^p$ $\quad g_0(y) + \frac{1}{x} g_1(y) + \dots + \frac{1}{x^p} g_p(y) = 0$ $\quad$ y tomamos límite $x \to \infty$

Resulta $g_0(a) = 0$

Así la recta $y = a$ es asíntota de C $\Leftrightarrow$ $g_0(a) = 0$

La descomposición en factores lineales de $g_0(y)$ proporciona las asíntotas paralelas al eje OX

Razonando de forma análoga si ordenamos F según las potencias de y,

$$F(x,y) = y^q h_0(x) + y^{q-1} h_1(x) + \dots + h_q(x) = 0$$

La recta $x = b$ es asíntota de C $\Leftrightarrow$ $h_0(b) = 0$

La descomposición en factores lineales de $h_0(x)$ proporciona las asíntotas paralelas al eje OY.

## 6. Información adicional

- Puntos de tangencia vertical $\begin{cases} F = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$ y horizontal $\begin{cases} F = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \end{cases}$
- Puntos de inflexión
- Cortes de la curva con las asíntotas

## 7. Estudio de C en el plano proyectivo real

El estudio de asíntotas y ramas parabólicas es más sencillo si pasamos al plano proyectivo.
Homogeneizamos el polinomio F(x,y) multiplicando por $x_0^{gr(F)}$ y cambiando
$x = x_1/x_0$ , $y = x_2/x_0$

La ecuación homogénea de C es $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ en el plano proyectivo en el que la ecuación de la recta del infinito es $x_0 = 0$

La recta tangente a $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ en $P = (p_0, p_1, p_2)$ es:

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_P x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P x_2 = 0}$$

Las asíntotas de C son las tangentes a C en los puntos del infinito $C \cap (x_0 = 0)$.
Si la tangente a C en uno de esos puntos $(0, b, -a)$ es la recta $x_0 = 0$, entonces C tiene una rama parabólica en la dirección de la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y $(0, b, -a)$, es decir en la dirección $ax + by = 0$

Con este resultado el proceso para obtener las ramas infinitas de C es:

1. Se calculan los puntos de intersección de C con la recta del infinito $x_0 = 0$
2. Se calculan las tangentes a C en dichos puntos.
   Sea $(0, b, -a)$ uno de esos puntos de intersección.
   Si la tangente es $cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$ con a ó b no nulos entonces la recta $ax + by + c = 0$ es asíntota.
   Si la tangente es $x_0 = 0$ entonces hay rama parabólica en la dirección de la recta $ax + by = 0$

Demostremos las afirmaciones sobre tangentes en los puntos del infinito de C y asíntotas de C que se han realizado

**Tangente en un punto a una curva C en el plano proyectivo**

La ecuación homogénea de C es $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ (polinomio homogéneo)

La recta que pasa por $P = (p_0, p_1, p_2)$, punto de C y $Q = (q_0, q_1, q_2)$ tiene por ecuaciones paramétricas $\rho x_i = p_i + \lambda q_i$ $i = 0,1,2$

Queremos hallar los puntos de intersección de la curva con la recta
$F(x_0, x_1, x_2) = (1/\rho^n)\, F(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2) = 0$ , sustituyendo

$$F(\rho x_0,\rho x_1,\rho x_2) = F(p_0+\lambda q_0, p_1+\lambda q_1, p_2+\lambda q_2) = F(p_0,p_1,p_2) + \lambda\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_P q_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P q_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P q_2\right] + \cdots +$$
$$+\frac{\lambda^r}{r!}\left[\sum_{|i|=r}\frac{r!}{i_0!i_1!i_2!}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x_0^{i_0}\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\right)_P q_0^{i_0}q_1^{i_1}q_2^{i_2}\right] + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\left[\sum_{|i|=n}\frac{n!}{i_0!i_1!i_2!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial x_0^{i_0}\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\right)_P q_0^{i_0}q_1^{i_1}q_2^{i_2}\right] = 0$$

Esta ecuación en $\lambda$ tiene n raíces, como P está en la curva, $F(p_0, p_1, p_2) = 0$, es decir una de las raíces es $\lambda=0$. Cuando el primer corchete se anula, $\lambda=0$ será raíz doble y la recta PQ tiene dos puntos comunes con la curva en P, así la recta es tangente a la curva en C. Luego la ecuación de la recta tangente a C en P es:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_P x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P x_2 = 0$$

Si el primer corchete es idénticamente nulo porque las tres derivadas parciales en P se anulan, el punto P es punto **múltiple** de la curva. Si todas las parciales de orden r – 1 se anulan y alguna de orden r no se anula en P, el punto P es **múltiple de orden r**.
La ecuación conjunta de las r tangentes en P es:

$$\sum_{|i|=r}\frac{r!}{i_0!i_1!i_2!}\left(\frac{\partial^r F}{\partial x_0^{i_0}\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\right)_P x_0^{i_0}x_1^{i_1}x_2^{i_2} = 0 \qquad (*)$$

**Asíntotas y ramas parabólicas**

Hemos visto anteriormente que las direcciones asintóticas de C se obtenían a partir de los términos de mayor grado de F(x,y)
$F(x,y) = f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + \ldots + f_1(x,y) + f_0 = 0$

Al homogeneizar resulta
$F(x_0, x_1, x_2) = f_n(x_1,x_2) + x_0 f_{n-1}(x_1,x_2) + x_0^2 f_{n-1}(x_1,x_2) \ldots + x_0^n f_0 = 0$

Consideremos una dirección asintótica de la forma $y = mx$ donde m verifica que $f_n(1,m) = 0$

La intersección con la recta del infinito es el punto (0, 1, m)

Debemos calcular la tangente a C en ese punto P = (0,1,m)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_P = \left(f_{n-1}(x_1,x_2)+2x_0 f_{n-2}(x_1,x_2)+\cdots n x_0^{n-1} f_0\right)_P = f_{n-1}(1,m)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_P = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_P + x_0\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right)_P + \cdots x_0^{n-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_P = f_n^{'}(1,m)$$

Falta solo calcular la derivada parcial con respecto a $x_1$ y comprobar que es

Si $f_n(x_1,x_2) = d_0 x_1^n + d_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + d_n x_2^n$

$f_n(1,m) = d_0 + d_1 m + \cdots + d_n m^n = 0$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_P = nd_0 + (n-1)d_1 m + (n-2)d_1 m^2 + \cdots + d_{n-1} m^{n-1} = n(d_0 + d_1 m + \cdots + d_{n-1} m^{n-1}) -$$

$$-(d_1 m + \cdots + (n-1)d_{n-1} m^{n-1}) = -nd_n m^n - (d_1 m + \cdots + (n-1)d_{n-1} m^{n-1}) =$$

$$= -(d_1 m + \cdots + (n-1)d_{n-1} m^{n-1} + nd_n m^n)$$

Y esta expresión es justamente $-mf_n^{'}(1,m)$

Por tanto la tangente en P = (0,1,m) es $f_{n-1}(1,m)x_0 - mf_n^{'}(1,m)x_1 + f_n^{'}(1,m)x_2 = 0$

Que deshomogeneizando resulta:

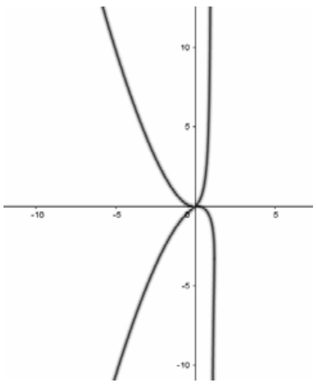
$f_{n-1}(1,m) - mf_n^{'}(1,m)x + f_n^{'}(1,m)y = 0$ o sea, $y = mx - \dfrac{f_{n-1}(1,m)}{f'_n(1,m)}$

que era la ecuación de la asíntota.

Si la tangente es $x_0$ , es decir, $f_n^{'}(1,m)=0$, $f_{n-1}(1,m) \neq 0$ tendremos las condiciones para rama parabólica como queríamos comprobar.

Si el punto del infinito es un punto múltiple de orden r, habría que analizar las tangentes dadas por la expresión (*). Pero es mucho más sencillo deshomogeneizar la ecuación F para que dicho punto sea el origen de coordenadas y calcular las r tangentes ahí. Lo comprobamos en un ejemplo.

Ejemplo:




$F(x,y) = x^4 + y^2x - y^2 + xy = 0$

El origen (0,0) es un punto doble.

Las tangentes son $x - y = 0$, $y = 0$

Dirección asintótica $x = 0$

Asíntotas paralelas a los ejes (coef. de $y^2$) $x = 1$

Si homogeneizamos F para estudiar el comportamiento en el infinito, tenemos

$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_0x_1x_2^2 - x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 = 0$

El único punto de corte de C con la recta del infinito es (0,0,1)
Este punto es múltiple porque las derivadas parciales se anulan en él. Para estudiar las tangentes a C en (0,0,1) deshomogeneizamos respecto $x_2$ para llevarlo al origen en el nuevo plano afín.

Dividiendo por $x_2^4$ y denominando $z = x_0/x_2$, $t = x_1/x_2$ resulta

C': $t^4 + zt - z^2 + z^2t = 0$
Las tangentes a C' en (0,0) que es un punto doble vienen dadas por los términos de menor grado, es decir, $z = 0$ y $t - z = 0$
Que pasando de nuevo al proyectivo (homogeneizando) corresponden a $x_0 = 0$ y $x_1 - x_0 = 0$

Por tanto las ramas infinitas de C son una asíntota $x - 1 = 0$ (correspondiente a la tangente $x_1 - x_0 = 0$) y una rama parabólica en la dirección $x = 0$ (correspondiente a la tangente $x_0 = 0$)

La representación gráfica de C en el plano proyectivo real $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ es