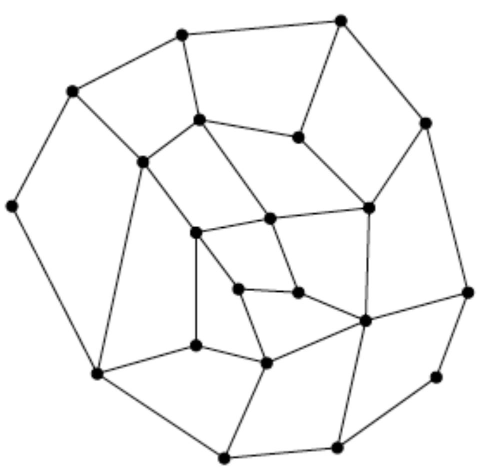
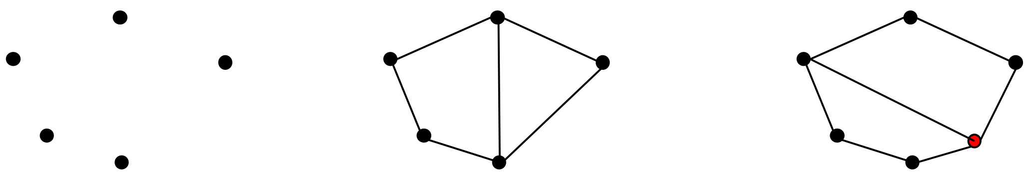
CUADRANGULACIONES
COMBINATORIA y ALGORITMOS

CUADRANGULACIÓN DE NUBES DE PUNTOS

Una cuadrangulación de un conjunto de puntos S es una subdivisión plana cuyos vértices son los puntos de S, cuya cara exterior es el cierre convexo de S, y cada cara de la subdivisión (excepto posiblemente la cara exterior) es un cuadrilátero.



En primer lugar se debe observar que hay conjuntos de puntos que NO se pueden cuadrangular sin añadir puntos adicionales (puntos de Steiner)



CARACTERIZACIÓN (Bose, Toussaint ’97)
Un conjunto de puntos S admite una cuadrangulación si y sólo si el cierre convexo de S tiene un número par de vértices

Recordemos que si S, conjunto de n puntos tiene h en su cierre convexo, entonces cualquier triangulación de S consta de $t = 2n - 2 - h$ triángulos
Así si S admite una cuadrangulación entonces como t es par resulta que h es par

Si h es par se demuestra por inducción que S se puede cuadrangular.

En toda cuadrangulación de un conjunto S de n puntos del plano con 2k de ellos en su cierre convexo hay

$$q = n - 1 - k \qquad \text{cuadriláteros}$$

y

$$A = 2n - 2 - k \qquad \text{aristas}$$

Dem.:

Aplicamos la fórmula de Euler $C + V = A + 2$ al grafo de la cuadrangulación.

Las caras son $C = q + 1$

Los vértices son $V = n$

Y si contamos las aristas mirando a los triángulos tenemos $2A = 4q + 2k$

pues cada arista interior se cuenta dos veces y las de CH(S) sólo una.

Sustituyendo en la fórmula de Euler, resulta :

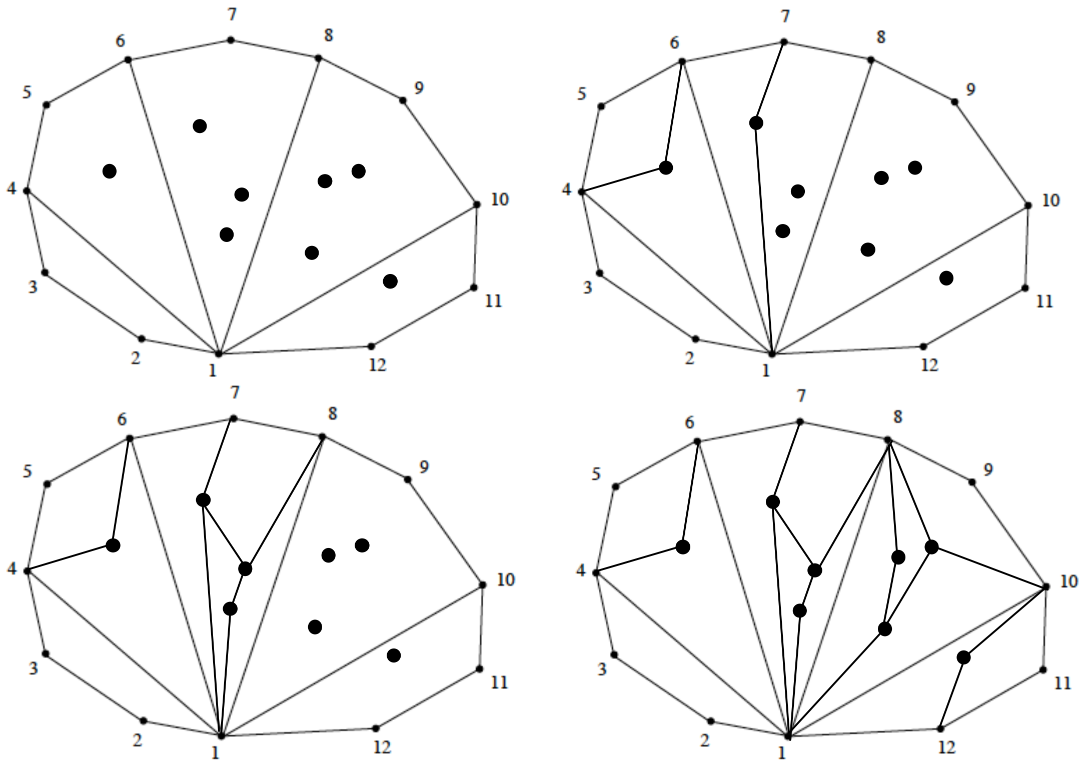
$$q + 1 + n = 2q + k + 2$$

Luego $\boxed{q = n - 1 - k}$ y $\boxed{A = 2n - 2 - k}$

ALGORITMOS para CUADRANGULAR conjuntos de puntos

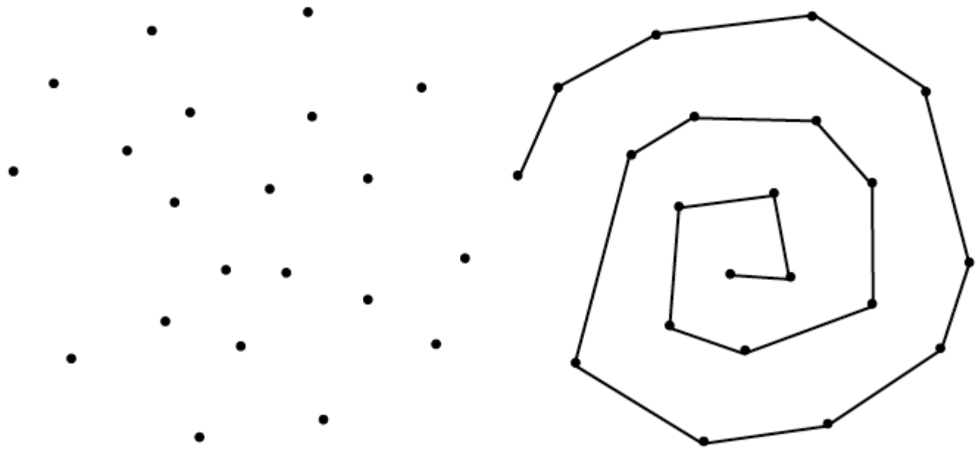
1. Sequential Insertion (SI)
Descomposición de CH(S) e INSERCIÓN

La demostración de Bose y Toussaint conduce al siguiente algoritmo:
Paso 1) Se descompone CH(S) en cuadriláteros trazando diagonales desde uno de sus vértices.
Paso 2) En cada cuadrilátero resultante se insertan secuencialmente los puntos interiores para obtener la descomposición.



Naturalmente el cierre convexo se puede cuadrangular de diferentes formas y la inserción se puede realizar con diferentes técnicas. Así tendremos distintas variantes de este algoritmo.

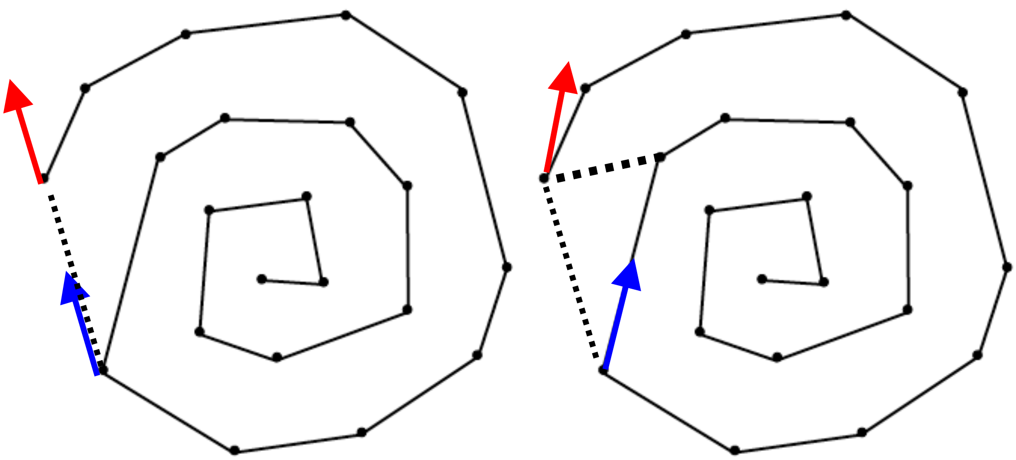
2. Spiraling Rotating Calipers (SRC)
Espiral convexa + Triangulación hamiltoniana ⇒ Cuadrangulación

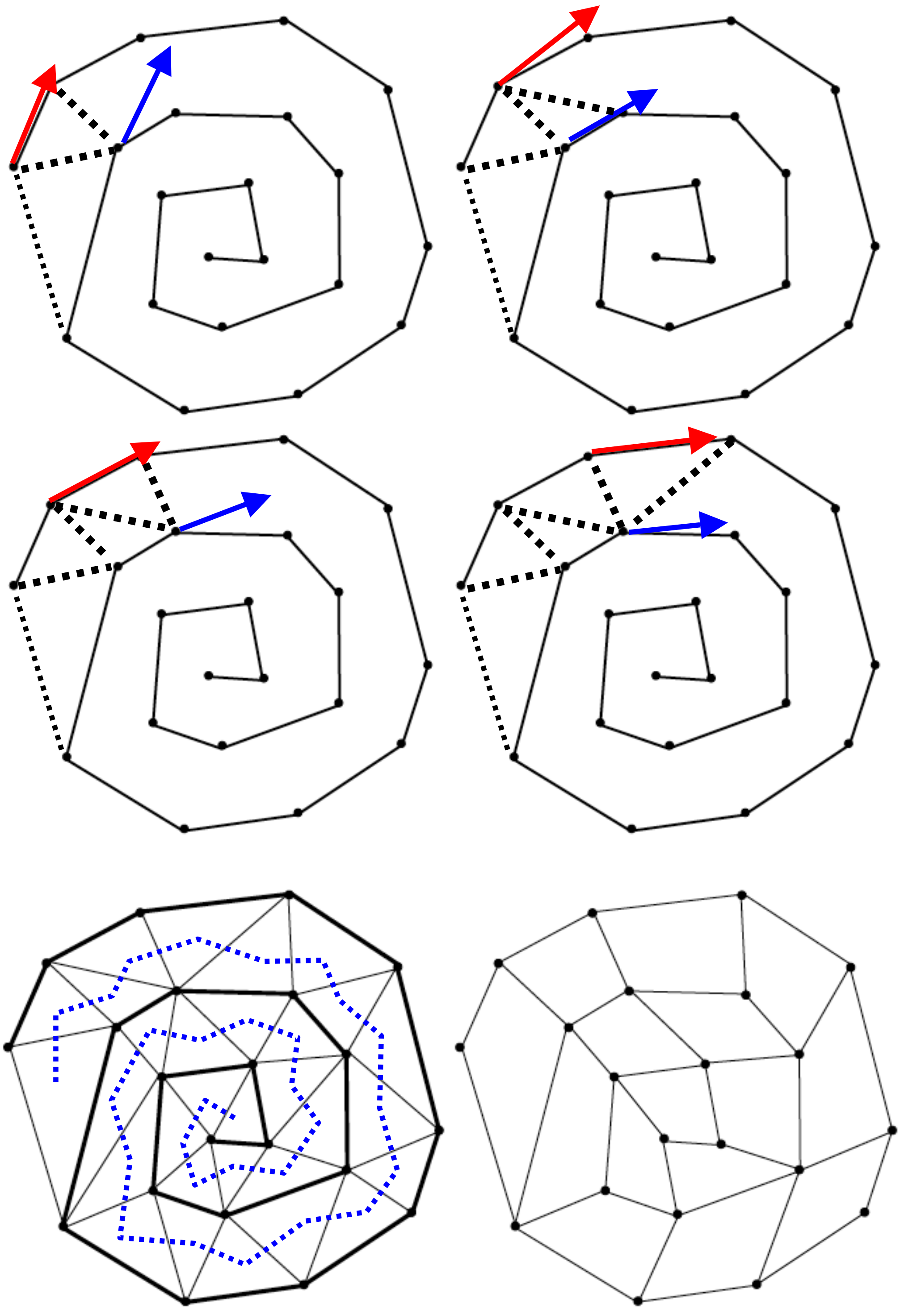


El conjunto de puntos y la correspondiente espiral convexa

Algoritmo de Bose y Toussaint

La técnica de los *calibres giratorios* (rotating calipers) permite construir una triangulación hamiltoniana (es decir, el grafo dual tiene un camino hamiltoniano)



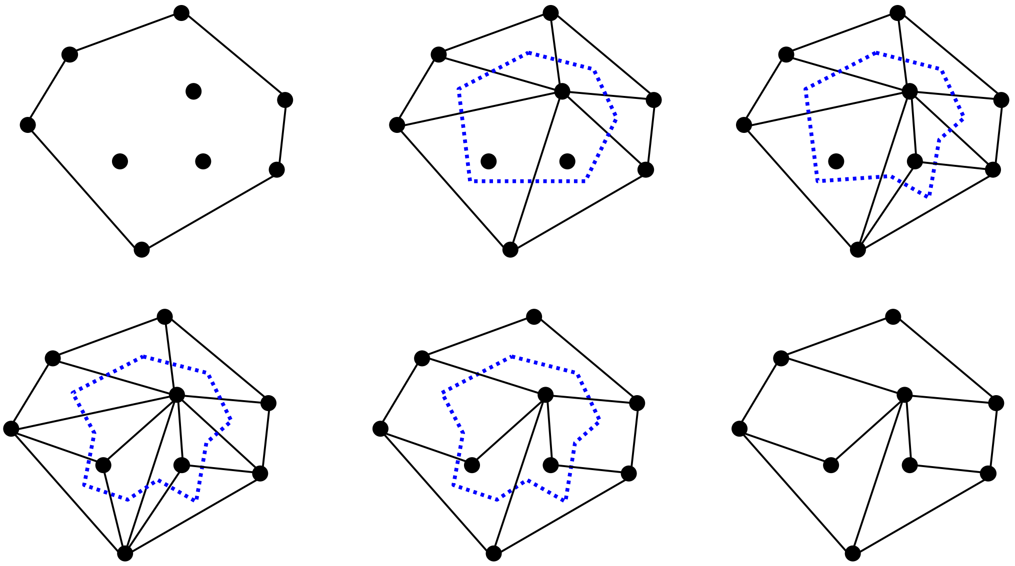


Como la triangulación es hamiltoniana (es decir, el grafo dual tiene un camino hamiltoniano, azul en la figura) podemos eliminar una arista de cada dos en ese camino y obtener una cuadrangulación.

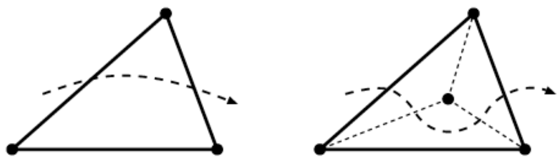
El paso final de la construcción de la cuadrangulación se puede realizar a partir de cualquier triangulación hamiltoniana. En 1994, Arkin et al. presentaron otras construcciones para obtener triangulaciones de este tipo.

3. (1) Triangulación hamiltoniana por inserción.

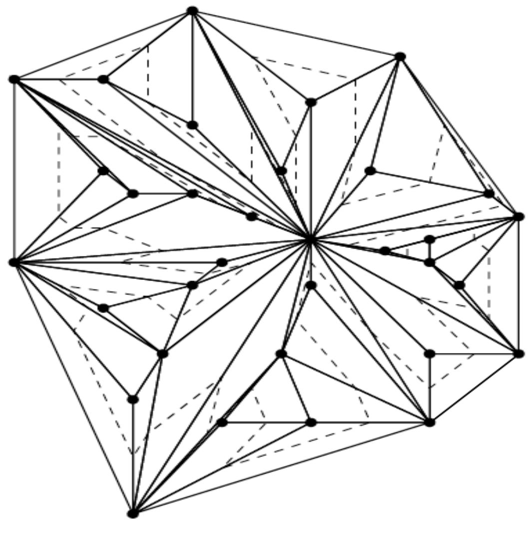
Se parte de CH(S) y se van insertando los puntos uno a uno. La triangulación obtenida tiene un ciclo hamiltoniano según se observa fácilmente.



El ciclo hamiltoniano se actualiza al insertar un nuevo punto de manera obvia

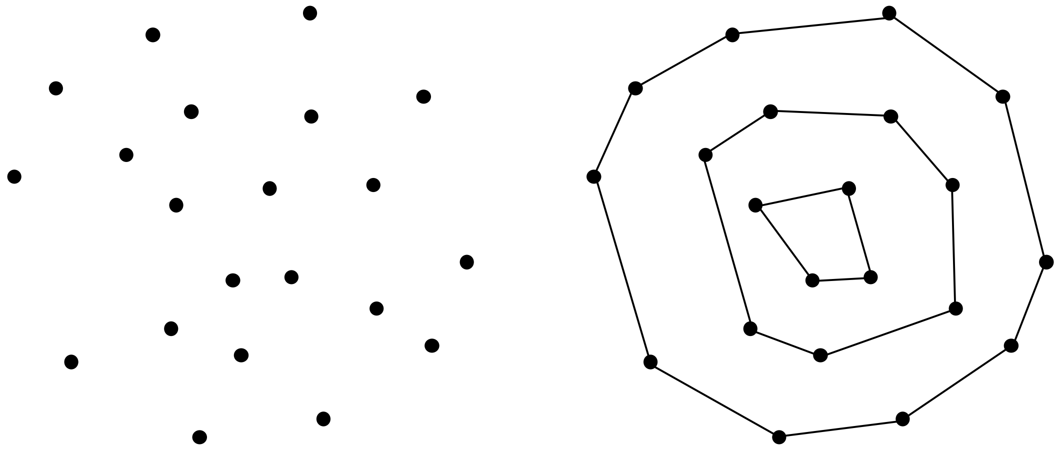


Al final se sigue el ciclo hamiltoniano eliminando una de cada dos aristas atravesadas. La cuadrangulación obtenida puede ser muy "fea", con muchos cuadriláteros no convexos y muy alargados.

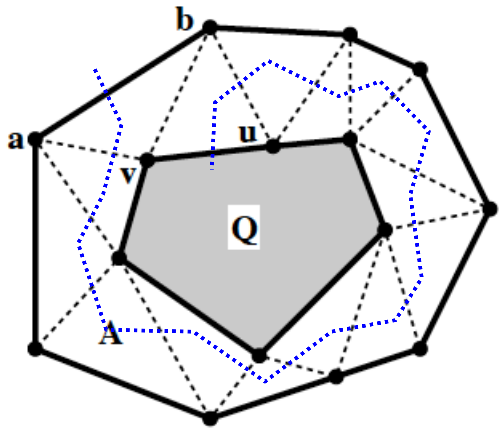


3. (2) Triangulación hamiltoniana por capas.

En primer lugar se construyen las capas convexas del conjunto S.



Luego se triangula el espacio entre dos capas consecutivas. Dada una arista cualquiera ab se puede comprobar que siempre existe otra uv en la capa interior de forma que existe una triangulación del espacio entre capas cuyo dual tiene un camino hamiltoniano que empieza en e y termina en e'.



A partir de ab, se detecta el punto v que es el más próximo de la capa interior. Se considera la arista vu donde u está la izquierda de la arista orientada bv.

Se comienza la triangulación con el triángulo avb. Se prosigue en sentido positivo de giro tomando siempre como nueva arista de la triangulación una que tenga los extremos en diferentes capas. Así hasta alcanzar el último triángulo que es ubv.

Si al avanzar hay dos triángulos posibles, se elige el que tenga mayor el menor ángulo. Por ejemplo, en la figura desde av podemos trazar nueva arista desde a o desde v. Se ha elegido la arista desde a.

Medidas de la calidad de una cuadrangulación.

- Porcentaje de cuadriláteros convexos.
- Promedio del mayor ángulo. (Se mide el mayor ángulo de cada cuadrilátero, se suman y se divide por el número de cuadriláteros)
- Promedio del menor ángulo.
- Peso (suma total de las longitudes de las aristas)
- Dilación.

En el trabajo de Bose y Toussaint se comparan las estrategias anteriores con algunos de esos criterios.

Cuadrangulación de peso mínimo

El objetivo es minimizar la suma total de las longitudes de las aristas. A veces se llama "minimu ink cuadrangulation".

Resultados sobre polígonos
Keil, Sack y Lubiw. Cuadrangulación convexa de peso mínimo de un polígono ortogonal en $O(n^4)$ con programación dinámica
Conn, O'Rourke. Cuadrangulación convexa de peso mínimo de un polígono o de un polígono ortogonal en $O(n^3 \log n)$. Si el polígono es convexo en $O(n^3)$

Resultados para conjuntos de puntos.
Fevens, Meijer y Rappaport. Si el número de capas convexas es h, presentan un algoritmo en tiempo $O(n^{3h})$

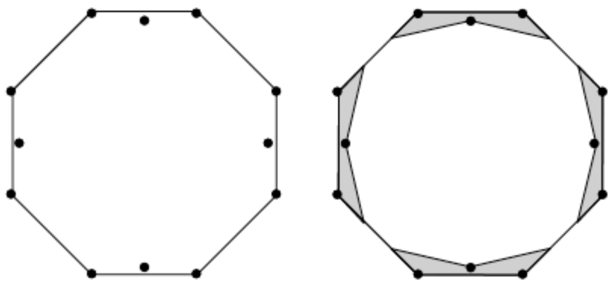
Cuadrangulación convexa

El objetivo es que todos los cuadriláteros de la descomposición sean convexos.
El problema de decidir si un conjunto S admite una cuadrangulación convexa no está resuelto. Es obvio que una condición necesaria es que el cierre convexo tenga un número par de puntos, pues esa es la condición para la existencia de cuadrangulación.

Se ha estudiado el problema de minimizar el número de puntos de Steiner que es preciso añadir a S para asegurar cuadrangulación convexa.

Bremner, Hurtado, Ramaswami y Sacristán demostraron que $3\lfloor n/2 \rfloor$ puntos de Steiner interiores son siempre suficientes para construir una cuadrangulación convexa (en tiempo O(nlogn)). Y encontraron conjuntos de n puntos (en posición degenerada) que necesitan $\lceil (n-3)/2 \rceil - 1$ puntos de Steiner para obtener cuadrangulación estrictamente convexa. Para puntos en posición general encontraron un ejemplo que necesita n/4 puntos de Steiner.

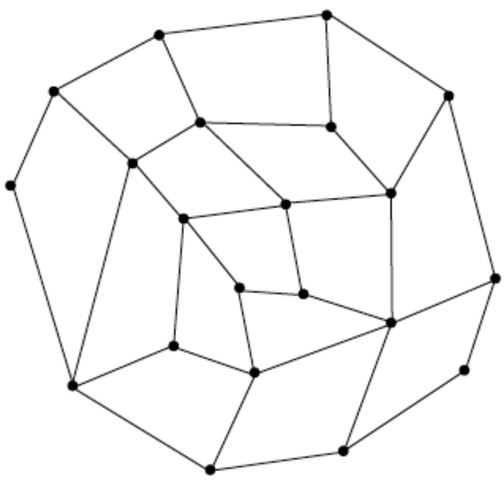
Heredia y Urrutia mejoraron en 2007 las cotas anteriores. Demuestran que $\frac{4n}{5}+2$ puntos de Steiner adicionales son siempre suficientes y encontraron un ejemplo que necesita n/3 puntos (en posición general) para conseguir la cuadrangulación convexa.



El ejemplo de Heredia y Urrutia. Cada zona sombreada necesita un punto de Steiner para obtener cuadrangulación convexa.

CUADRANGULACIONES Y 2-COLORACIONES

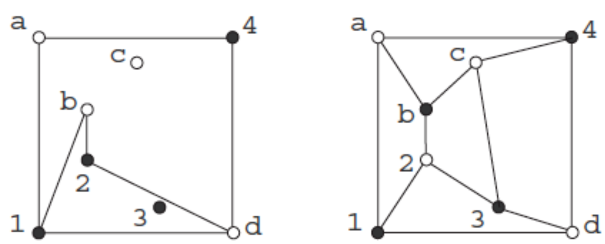
Cualquier cuadrangulación de un conjunto de puntos S determina una 2-coloración de S, de forma que las aristas unen puntos de distinto color (aristas bicolores)



Una cuadrangulación de S (como grafo geométrico) tiene sólo ciclos pares luego es un grafo bipartido. Por tanto tiene número cromático 2 y de ahí la 2-coloración del conjunto S.

Y si partimos de un conjunto S bicolor, ¿admite siempre una cuadrangulación compatible, con todas sus aristas bicolores?

La respuesta es negativa. Existen conjuntos bicolores que no admiten cuadrangulación compatible.



Una condición necesaria para la existencia de cuadrangulación compatible es que en el cierre convexo se alternen los dos colores. Esta condición no es suficiente (ejemplo de la izquierda)

Una condición suficiente para asegurar cuadrangulación compatible es que en cada capa convexa los colores se alternen, como sucede en la figura de la derecha. Pero esta condición no es necesaria, según muestra el siguiente ejemplo.

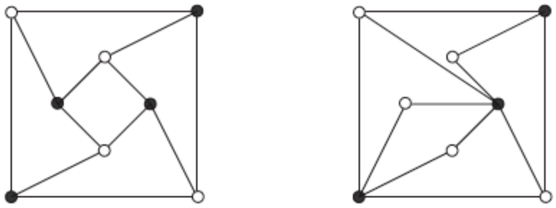


Figure 3: Quadrangulations of the same set with different colorations.

Conjuntos bicolores + Puntos de Steiner = Cuadrangulación bicolor

Hay conjuntos bicolores que no admiten cuadrangulación compatible. ¿Cuántos puntos de Steiner hay que añadir para conseguir la compatibilidad?

Álvarez, Sakai y Urrutia demostraron en 2007 que añadiendo a lo sumo $\left\lceil \frac{5n}{12} + \frac{7}{2} \right\rceil$ puntos de Steiner en el interior de un conjunto bicolor siempre podemos conseguir una cuadrangulación compatible y que $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ son a veces necesarios.