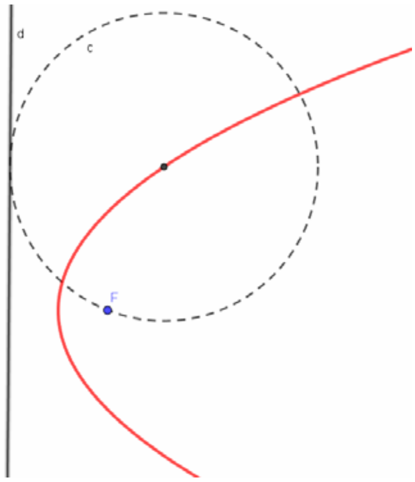
LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

PARÁBOLA

La parábola de foco F y directriz la recta d es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de F y d.

O dicho de otra forma, es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por F y son tangentes a la recta d.

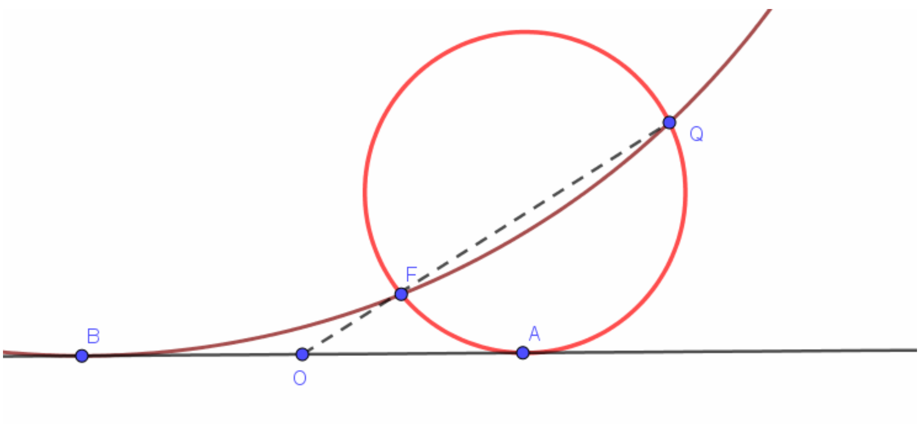


Construcción:
Dados la recta d y los puntos F y Q, se traza la circunferencia tangente a d y que pasa por los puntos F y Q. Variando el punto Q (por los puntos del plano) se obtiene el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, que es la parábola.

Construcción de las circunferencias tangentes a d y que pasan por los puntos F y Q.

Las circunferencias quedan determinadas en cuanto se conozcan los puntos A y B de tangencia con la recta d. Si O es el punto de intersección de FQ con d se debe cumplir, por la potencia de O respecto de la circunferencia solución que:

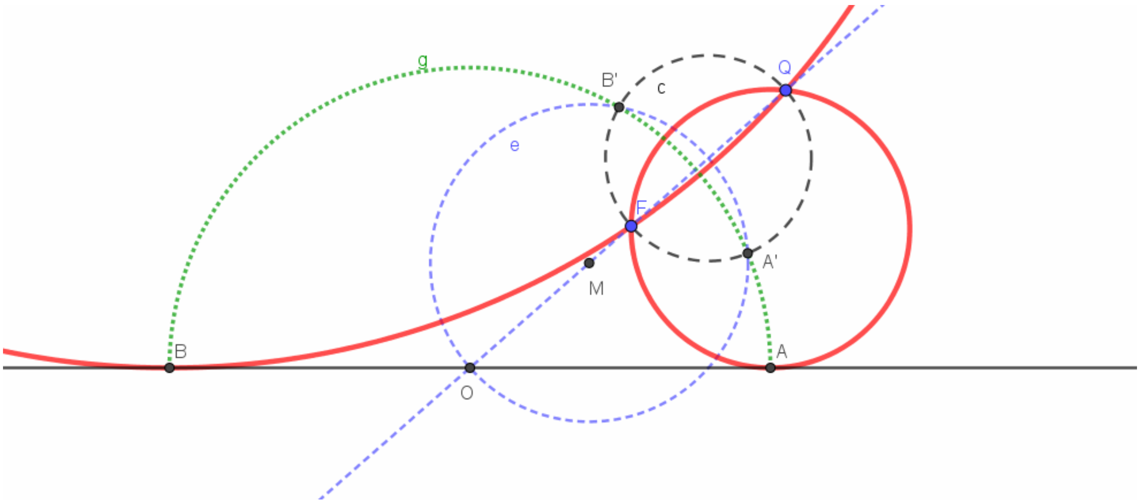
$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OF} \cdot \overline{OQ}$$



Para determinar los puntos A y B se procede así:

1. Se traza una circunferencia cualquiera que pase por los dos puntos, por ejemplo c, la circunferencia que tiene por diámetro el segmento FQ.

2. Desde el punto O, intersección de d con la recta que pasa por F y Q, se trazan las tangentes a la circunferencia c. Los puntos de tangencia A’ y B’ se obtienen al cortar c con la circunferencia e, que tiene por diámetro el segmento OD siendo D el centro de c.



3. Finalmente se traza la circunferencia g con centro O y que pasa por A’ y B’
Los puntos de corte con la recta d, A y B, cumplen que:

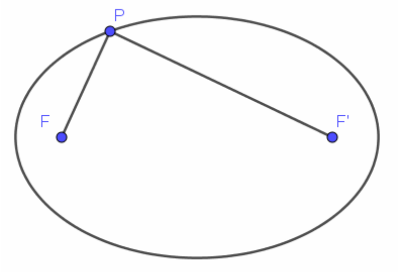
$$\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = \overline{OF} \cdot \overline{OQ}$$

luego OA es tangente a la circunferencia que pasa por A, F y Q. Y análogamente d es tangente también a la circunferencia por B, F y Q. Estas dos **circunferencias** son las pedidas.

ELIPSE

La elipse de focos F y F’ es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es constante.

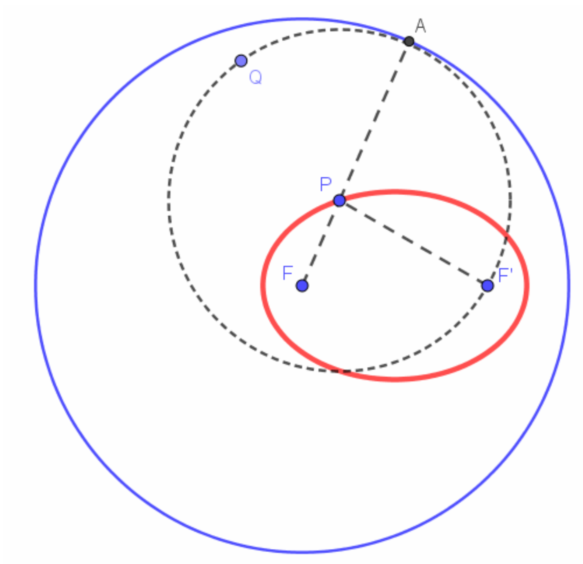
$$\overline{PF} + \overline{PF'} = k$$



La elipse de focos F y F’ y constante k es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por F’ y son tangentes (interiores) a una circunferencia C, que tiene centro en F y radio k, llamada **circunferencia focal**.

Construcción:
Dados la circunferencia C, de centro F y radio k, y los puntos F’ y Q interiores a C, se traza la circunferencia que pasa por F’ y Q y es tangente interiormente a C. Variando el punto Q (interior a C) se obtiene el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, que es la elipse porque:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PF} + \overline{PA} = k$$



Construcción de una circunferencia tangente a C y que pasa por los puntos F’ y Q.

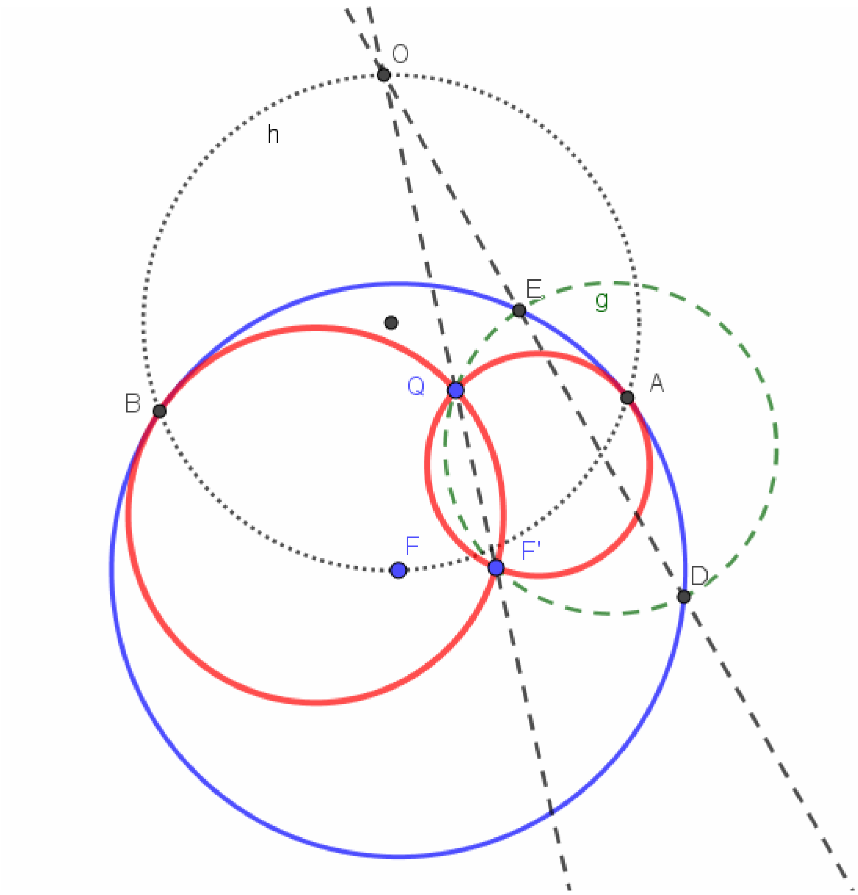
Método 1. Potencia

El problema se reduce, como en el caso de la parábola, a la determinación del punto de tangencia A de las dos circunferencias, la dada C y la solución.

Las circunferencias solución quedan determinadas en cuanto se conozcan los puntos A y B de tangencia con la circunferencia C. Debemos hallar un punto O de la tangente común a ambas circunferencias. La potencia de este punto respecto de ambas circunferencias será:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$$

1. Se traza una circunferencia g cualquiera que pase por Q y F' y corte a la dada en dos puntos E y D



2. Las rectas determinadas por QF' y ED se cortan en O.

La potencia de O respecto de la circunferencia g es $\overline{OE} \cdot \overline{OD} = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$ pero como E y D pertenecen a la circunferencia dada y F' y Q a la solución, resulta que O tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias. Por tanto la tangente común a C y a la solución pasa por O. Así pues basta hallar los puntos de tangencia de la tangente a C desde O

3. La circunferencia h de diámetro OF corta a la circunferencia dada C en dichos puntos. Así se tiene que

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$$

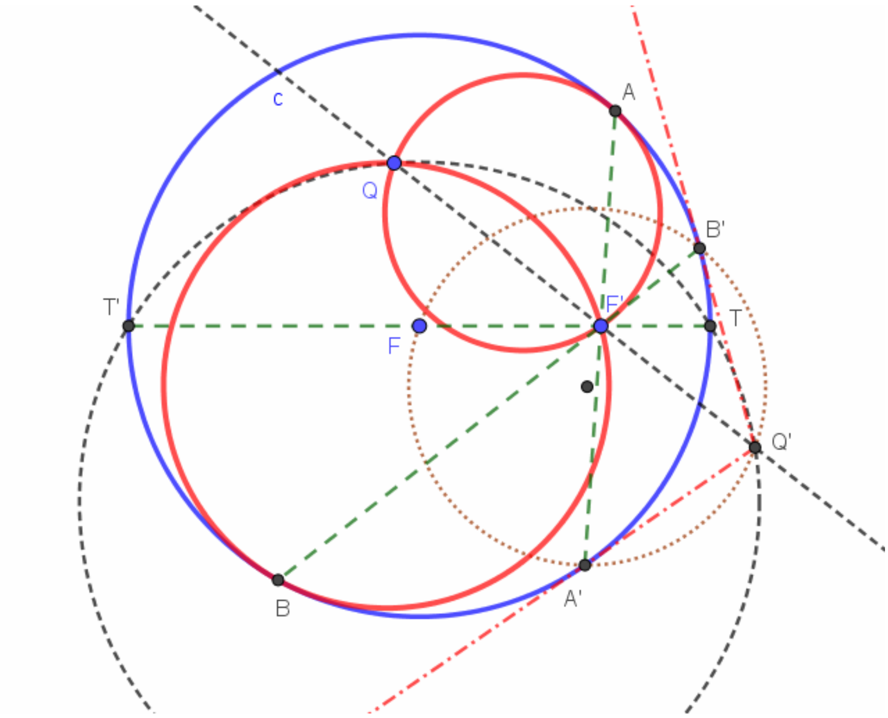
Y las circunferencias determinadas por A, Q y F' y por B, Q y F' son las circunferencias buscadas.

Método 2. Inversión

Se considera la inversión g de centro F' y en la que la circunferencia C es una circunferencia invariante (ojo, NO de puntos dobles).
Esta inversión g transforma C en C, Q en otro punto Q' y la circunferencia solución C' en una recta tangente a C desde el punto Q' (porque C' pasa por el centro de la inversión)

Así pues el problema se reduce a calcular Q’

1. La inversión con centro F’ que deja invariante **C** es de razón negativa y transforma el punto T en el punto T’ (extremos del diámetro de **C** por F’)



Dos parejas de puntos homólogos en una inversión son concíclicos, es decir, T, T’, Q y Q’ son concíclicos. Por tanto el punto Q’ es la intersección de la circunferencia TQT’ con la recta QF’

2. Se trazan las tangentes desde Q’ a la circunferencia dada **C**. Así tenemos los puntos de tangencia A’ y B’ (Estos puntos son los de corte de la circunferencia de diámetro FQ’ con **C**

3. Se hallan los homólogos de A’ y B’ en la inversión. Como son puntos de la circunferencia **C** (invariante), se obtienen al cortar las rectas F’A’ y F’B’ con **C**

4. Las circunferencias AQF’ y BQF’ son la solución, tangentes a **C** y pasan por F’ y Q

NOTAS sobre la inversión y sus elementos invariantes

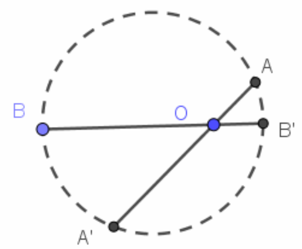
Sea g una inversión de centro O y potencia k. La imagen de un apunto A es el punto A’, alineado con O y A y verificando que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$

Si la potencia de la inversión es positiva k, entonces los pares de puntos homólogos está en la misma semirrecta de origen O. Y si es negativa en distinta.

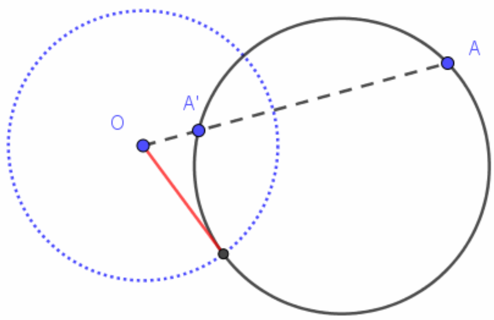
1. Si la potencia k es positiva, entonces todos los puntos invariantes por están en la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$. Si k < 0 la inversión no tiene puntos invariantes.
2. Las rectas que pasan por O son **rectas dobles** por la inversión.
3. Si C es una circunferencia respecto de la cual el centro de la inversión O tiene potencia k, entonces C se transforma en sí misma por la inversión (es circunferencia doble).
   Pues si A y A’ son puntos de la circunferencia alineados con O se tiene por la definición de potencia que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$, es decir A y A’ son homólogos en la inversión de razón k.

   Así toda circunferencia que pase por dos puntos homólogos es una **circunferencia doble**. Y dos pares de puntos homólogos no alineados son concíclicos.

4. En el caso k < 0 el centro de la inversión es interior a cualquier circunferencia doble.



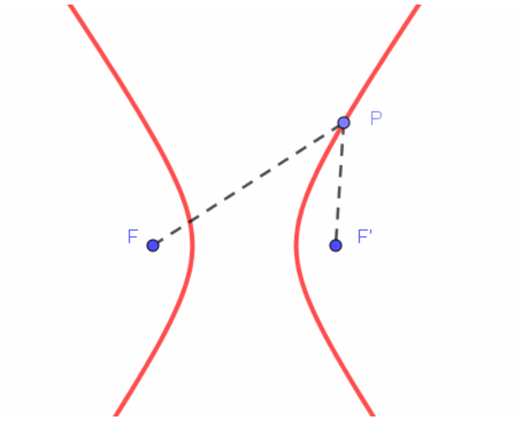
5. En el caso k > 0, las circunferencias dobles son ortogonales a la circunferencia de puntos invariantes (y el centro O es exterior).
   (porque si T es el punto de corte $\overline{OT}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$, luego el radio OT es tangente a la circunferencia doble)



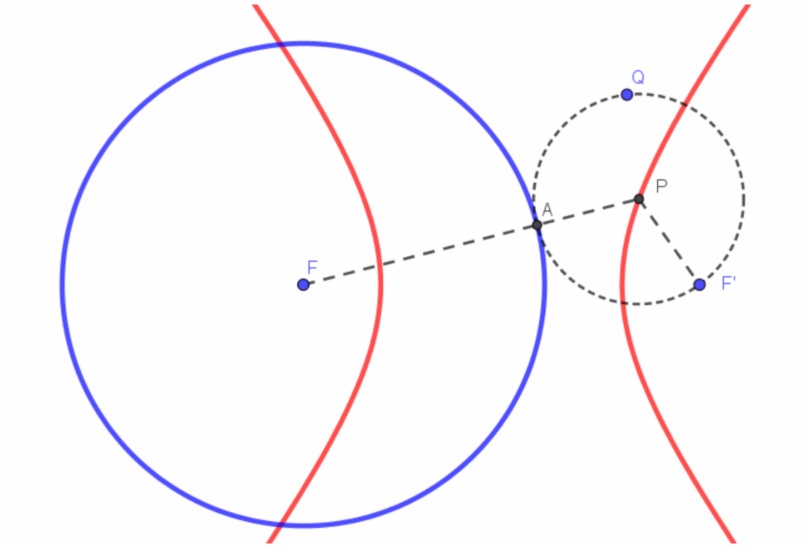
HIPÉRBOLA

La hipérbola de focos F y F’ es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los focos es constante.

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = k$$



La hipérbola de focos F y F’ y constante k es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un foco F’ y son tangentes (exteriores) a una circunferencia C, que tiene centro en el otro foco F y radio k, llamada **circunferencia focal**. Hay dos circunferencias focales, una con centro en cada foco. Cada una de ellas origina una rama de la hipérbola.



Construcción:
Dados la circunferencia C, de centro F y radio k, y los puntos F’ y Q exteriores a C, se traza la circunferencia que pasa por F’ y Q y es tangente exteriormente a C. Variando el punto Q (exterior a C) se obtiene el lugar geométrico de los centros de las circunferencias, que es la hipérbola porque:

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = |\overline{PF} - \overline{PA}| = k$$

Construcción de una circunferencia tangente a C y que pasa por los puntos F' y Q.
Seguimos los mismos pasos que en la elipse con la diferencia que ahora las circunferencias buscadas han de ser exteriores a C

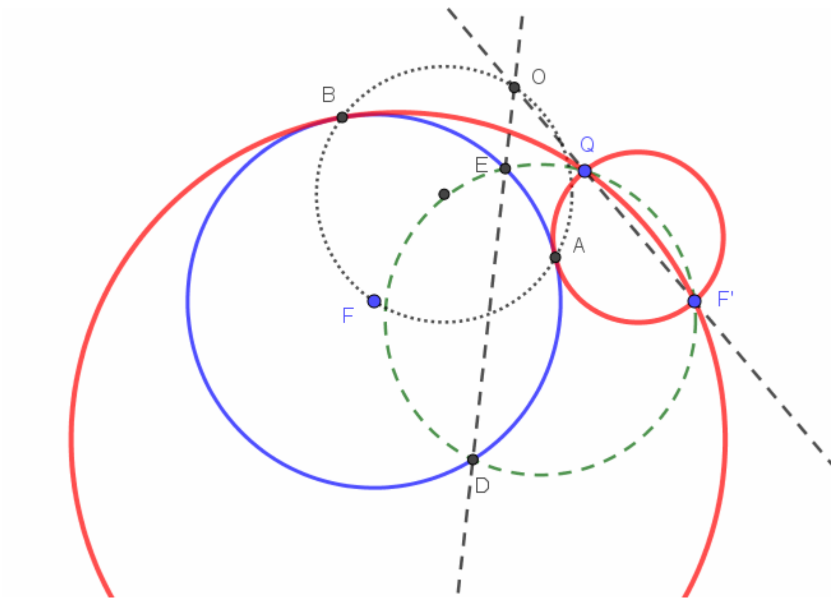
Método 1. Potencia

El problema se reduce, como en el caso de la elipse, a la determinación del punto de tangencia A de las dos circunferencias, la dada C y la solución.

Las circunferencias solución quedan determinadas en cuanto se conozcan los puntos A y B de tangencia con la circunferencia C. Debemos hallar un punto O de la tangente común a ambas circunferencias. La potencia de este punto respecto de ambas circunferencias será:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$$

1. Se traza una circunferencia g cualquiera que pase por Q y F' y corte a la dada en dos puntos E y D



2. Las rectas determinadas por QF' y ED se cortan en O.
La potencia de O respecto de la circunferencia g es $\overline{OE} \cdot \overline{OD} = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$ pero como E y D pertenecen a la circunferencia dada y F' y Q a la solución, resulta que O tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias. Por tanto la tangente común a C y a la solución pasa por O. Así pues basta hallar los puntos de tangencia de la tangente a C desde O

3. La circunferencia h de diámetro OF corta a la circunferencia dada C en dichos puntos. Así se tiene que

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OF'} \cdot \overline{OQ}$$

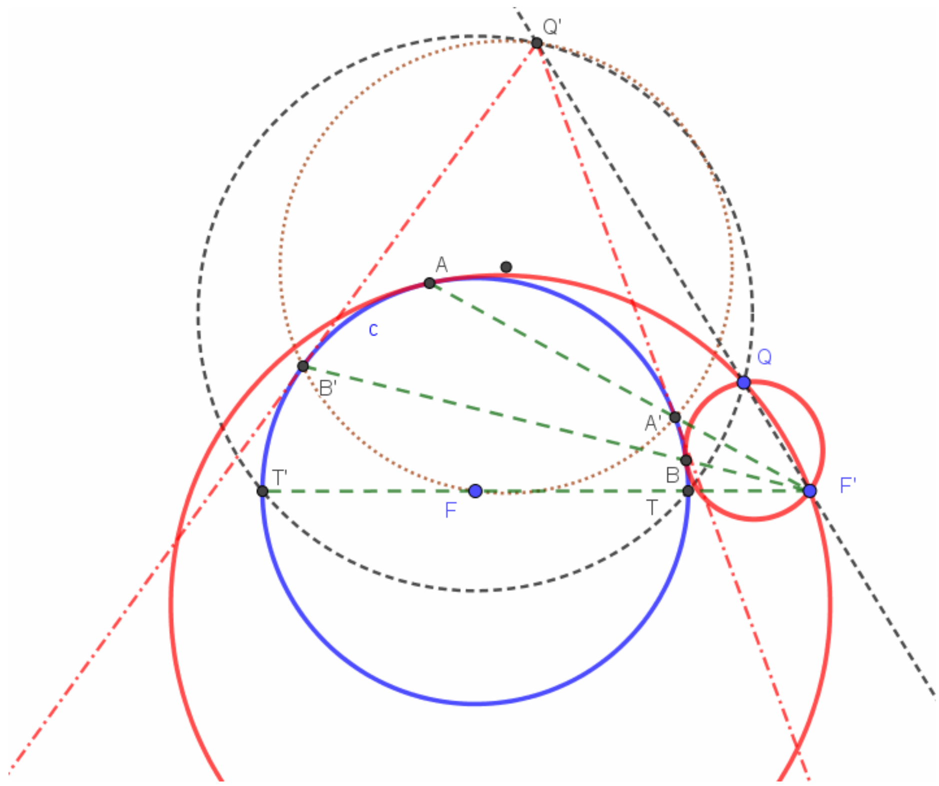
Y las circunferencias determinadas por A, Q y F' y por B, Q y F' son las circunferencias buscadas.

Método 2. Inversión

Se considera la inversión g de centro F’ y en la que la circunferencia C es una circunferencia invariante.
Esta inversión g transforma C en C, Q en otro punto Q’ y la circunferencia solución C’ en una recta tangente a C desde el punto Q’ (porque C’ pasa por el centro de la inversión)

Así pues el problema se reduce a calcular Q’

1. La inversión con centro F’ que deja invariante **C** es de razón positiva y transforma el punto T en el punto T’ (extremos del diámetro de **C** por F’)



Dos parejas de puntos homólogos en una inversión son concíclicos, es decir, T, T’, Q y Q’ son concíclicos. Por tanto el punto Q’ es la intersección de la circunferencia TQT’ con la recta QF’

2. Se trazan las tangentes desde Q’ a la circunferencia dada **C**. Así tenemos los puntos de tangencia A’ y B’ (Estos puntos son los de corte de la circunferencia de diámetro FQ’ con **C**)

3. Se hallan los homólogos de A’ y B’ en la inversión. Como son puntos de la circunferencia **C** (invariante), se obtienen al cortar las rectas F’A’ y F’B’ con **C**

4. Las circunferencias AQF’ y BQF’ son la solución, tangentes a **C** y pasan por F’ y Q