Universidad Politécnica
de Madrid

COMPLEJIDAD
NP-COMPLETITUD

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria

Complejidad (o coste) de un algoritmo

Algoritmo: secuencia de instrucciones para resolver un problema

Programa: algoritmo escrito en un lenguaje de programación, junto con las estructuras de datos utilizadas

La complejidad mide la eficiencia del algoritmo en la resolución del problema. Se mide en:

- Tiempo (número de operaciones realizadas)
- Espacio o cantidad de memoria utilizada

  - en el peor caso
  - en media

Complejidad de un problema

MST Algoritmo de Prim

Complejidad
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$

Algoritmo polinómico

TSP Algoritmo “fuerzabruta”

Complejidad
- $O(n!)$

Algoritmo no polinómico

Complejidad

	log n	**n**	**n^2**	**2^n**	**n!**
2	1	2	4	4	2
8	3	8	64	256	40320
32	5	32	1024	$4{,}3\times10^{9}$	$2{,}6\times10^{35}$
100	6	100	10^{4}	$1{,}2\times10^{27}$	$9{,}3\times10^{177}$

Un siglo tiene $3{,}1\times10^{9}$ segundos

Si la edad del Universo es de 13500 millones de años,
el big-bang ocurrió hace $4{,}5\times10^{16}$ segundos

Problema INDECIDIBLE

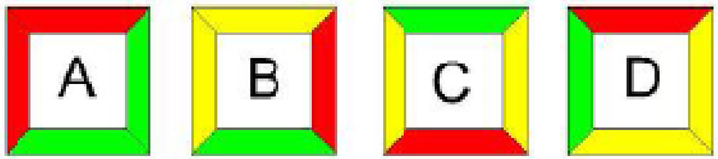
Si no existe ningún algoritmo que lo resuelva.

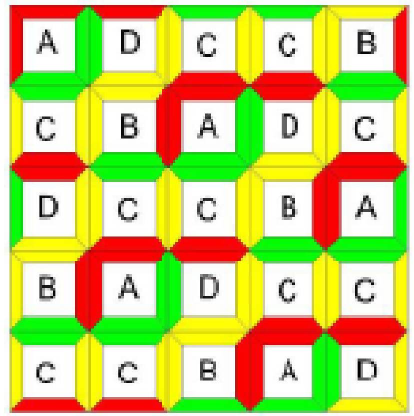
- Entscheidungsproblem (problema de decisión): Dada una frase del cálculo de predicados de primer orden, decidir si es un teorema. (Church y Turing)
- El Problema de la parada: Dado un programa y su entrada, decidir si ese programa terminará para esa entrada o si correrá indefinidamente. (Turing)
- Un número computable es un número real que puede ser aproximado por un algoritmo con un nivel de exactitud arbitrario. Turing demostró que casi todos los números no son computables.
- 10º problema de Hilbert: Dada una ecuación diofántica (con coeficientes enteros) ¿existe solución entera? (Matijasevic 1970)

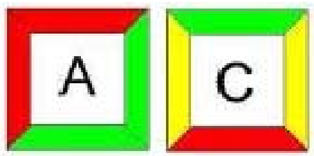
Problema INDECIDIBLE

Si no existe ningún algoritmo que lo resuelva.

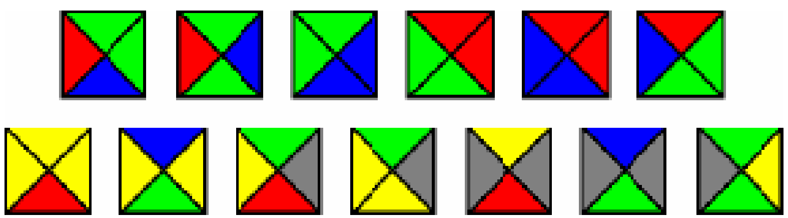
– Embaldosados del plano: Dado un conjunto finito de baldosas cuadradas con un color en cada lado, ¿puede embaldosarse el plano de forma que lados contiguos tengan el mismo color? (Domino problem, Wang, Berger, 1966)







No hay solución



Hay solución no periódica

Problema INDECIDIBLE

- Matrix Mortality
  Dado un conjunto finito de matrices de tamaño n×n, ¿se puede obtener la matriz nula multiplicando algunas de ellas?
  El problema es indecidible para n = 3 y no se sabe para n = 2
- Problema 3n + 1 (Collatz Problem)

  Sea a_0 un entero positivo. Se construye la sucesión (a_n) así

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{n-1} & \text{si } a_{n-1} \text{ es par} \\ 3a_{n-1} + 1 & \text{si } a_{n-1} \text{ es impar} \end{cases}$$

¿En esta sucesión se alcanza siempre el 1?

No se sabe si este problema es decidible o indecidible

Problemas INDECIDIBLES

Problemas DECIDIBLES

Si existen algoritmos que los resuelven

- MST de un grafo con pesos en las aristas
- Dado un grafo G, ¿es hamiltoniano?
- Hallar el camino de peso mínimo entre dos vértices de un grafo.
- Hallar el número cromático de un grafo G.

Clase P
Problemas resolubles en tiempo polinómico

Clase NP
Problemas verificables en tiempo polinómico

Clase P
Problemas resolubles en tiempo polinómico

Existe un algoritmo de complejidad polinómica $O(n^k)$ que resuelve el problema (k constante, n tamaño de la entrada del problema)

- Hallar el MST de un grafo con pesos en las aristas.
- Hallar el camino de peso mínimo entre dos vértices de un grafo.
- Decidir si un grafo es euleriano.

$P \subset NP$

Clase NP (No determinista Polinómico)
Problemas verificables en tiempo polinómico

¿$P \neq NP$?

Dado un "certificado" (una posible solución), podemos verificar si es correcto en tiempo polinómico en el tamaño del problema.

- Decidir si un grafo es 4-coloreable.
- Decidir si un grafo es hamiltoniano.
- Hallar el camino más largo entre dos vértices de un grafo

Clase NP (No determinista Polinómico)
Problemas verificables en tiempo polinómico

Dado un "certificado" (una posible solución), podemos verificar si es correcto en tiempo polinómico en el tamaño del problema.

- **Decidir si un grafo es 5-coloreable**

Dada una instancia I del problema, es decir, un grafo G, un certificado C(I) es una asignación de colores a los vértices

$$V(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$$

que podemos comprobar si es una 5-coloración válida en tiempo $O(n^2)$ mirando los extremos de cada arista

Clase NP (No determinista Polinómico)
Problemas verificables en tiempo polinómico

Dado un "certificado" (una posible solución), podemos verificar si es correcto en tiempo polinómico en el tamaño del problema.

- **Decidir si un grafo es hamiltoniano**

Dada una instancia I del problema, es decir, un grafo G, un certificado C(I) es una permutación de los vértices,

$$v_6\, v_3\, v_1\, v_7\, v_5\, v_8 \ldots v_9\, v_2$$

que podemos comprobar si es un ciclo hamiltoniano averiguando si en G existen las aristas v_6v_3, $v_3 v_1$, v_1v_7, … , v_9v_2, v_2v_6 en tiempo $O(n^2)$

PROBLEMAS DE DECISIÓN

Problemas en que la respuesta es SÍ o NO

Los problemas de optimización se transforman en problemas de decisión

Hallar el camino mínimo entre dos vértices u y v de un grafo G → Dados el grafo G, los vértices u,v y un entero k, decidir si entre u y v existe un camino con a lo más k aristas.

Problema del Viajante
Hallar el ciclo hamiltoniano de peso mínimo → Dados el grafo G y un entero k, decidir si existe un ciclo hamiltoniano de peso menor o igual a k.

TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS

El problema A es polinómicamente reducible a B si existe T, algoritmo polinómico, que convierte cada instancia I de A en una instancia T(I) para el problema B tal que:

La respuesta a I es SÍ $\Leftrightarrow$ La respuesta a T(I) es SÍ

La notación es $A \propto B$

Problema A
Dado un grafo G y un entero k, ¿existe un conjunto independiente en G de tamaño k?

Problema B
Dado un grafo G y un entero k, ¿existe una clique en G de tamaño k?

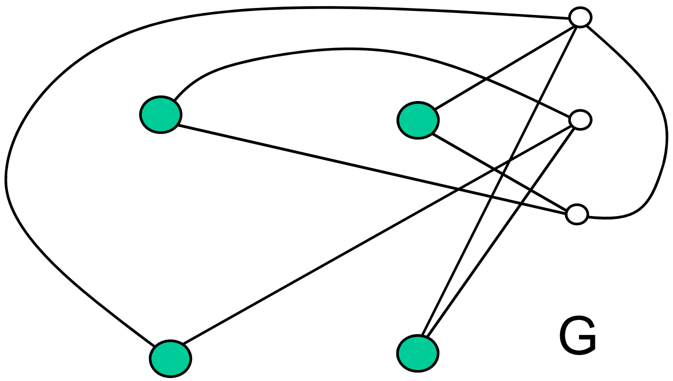
$IS \propto CLIQUE$

TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS

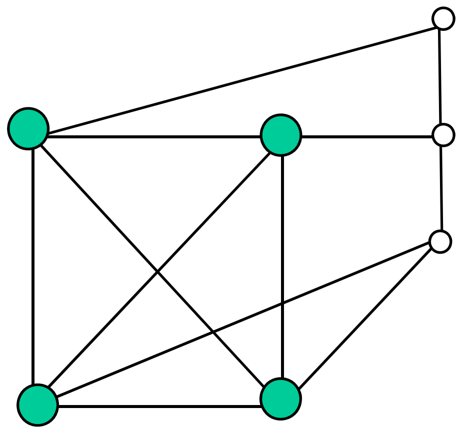
IS $\propto$ CLIQUE

Una instancia de IS es un grafo G y un entero k. Debemos transformarla en una entrada de datos para B. La transformación consiste en pasar al grafo complementario G'. El coste de la transformación es $O(n^2)$

G tiene un conjunto independiente de tamaño k (la respuesta para la instancia es SÍ) $\Leftrightarrow$
G' contiene una clique de tamaño k (la respuesta para T(I) es SÍ)



G



G'

PROBLEMAS NP-duros y NP-completos

Un problema Π es **NP-duro** si cualquier problema de la clase NP puede transformarse polinómicamente a Π

Es decir, si resolviendo Π se pueden resolver TODOS los problemas de la clase NP.

Un problema Π es **NP-completo** si

- es NP-duro
- está en la clase NP

¿Existen problemas NP-duros?

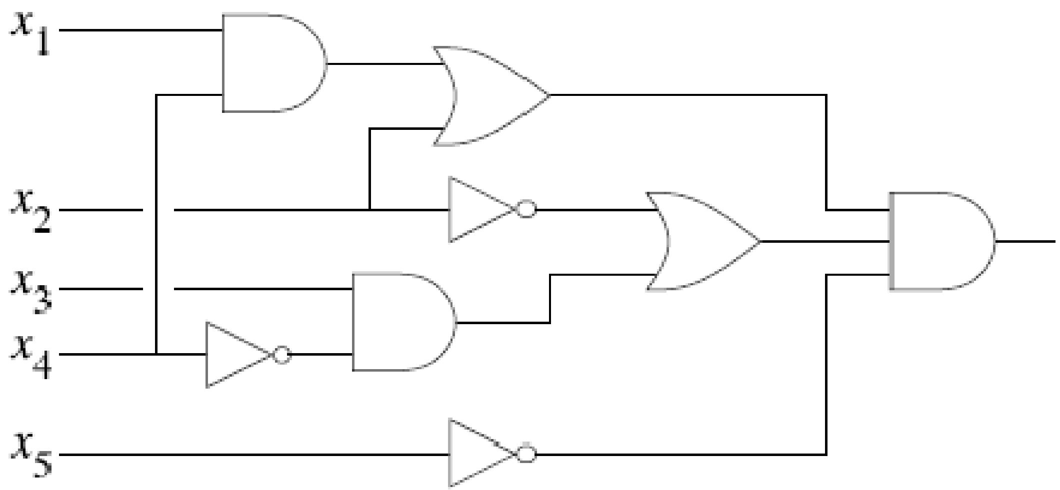
¿Existen problemas NP-completos?

SAT

Satisfactibilidad de circuitos o expresiones booleanas

En 1971 Cook demostró que es un problema NP-completo

Dado un circuito C o expresión booleana, ¿existe una asignación de valores 0, 1 a las variables de modo que la respuesta de C sea 1?



$$C = (x_1x_4 + x_2)\,(x'_2 + x_3x'_4)\,x'_5$$

SAT es un problema de la clase NP

SAT es un problema de decisión

En 1971 Cook demostró que es un problema NP-completo

Dado un circuito C o expresión booleana, ¿existe una asignación de valores 0, 1 a las variables de modo que la respuesta de C sea 1?

Una asignación de valores a las variables es una aplicación

$$f: \{x_1, x_2, \dots , x_n\} \rightarrow \{0,1\}$$

y esto es un certificado para el circuito dado C. Comprobar que la asignación satisface el circuito (responde con 1) es fácil, basta calcular todas las operaciones indicadas en el circuito o expresión booleano. Se puede hacer en tiempo polinómico.

$$C = (x_1x_4 + x_2)\,(x'_2 + x_3x'_4)\,x'_5$$

Si $x_1, x_4 = 1$, $x_2, x_3, x_5 = 0$ entonces $C = 1$

Problemas NP-completos

SAT (Cook, 1971)

3-SAT (Karp, 1972)

Dada una expresión booleana E en forma normal conjuntiva con **tres** literales (variables o negación de variables) por cláusula (factores), ¿existe una asignación de valores 0, 1 a las variables de modo que la respuesta de E sea 1?

$$E = (x_1 + x'_4 + x_2)\ (x'_2 + x_3 + x'_4)\ (x'_2 + x_3 + x_5)$$

SAT $\propto$ 3-SAT

¿Cómo demostrar que un problema Q es NP-completo

1. Demostrar que **Q** está en la clase NP (es lo más sencillo)
2. Elegir un problema **Q’** que sea NP-completo
3. Demostrar que **Q’** $\propto$ **Q**

En su artículo de 1972, Karp demostró, utilizando esta estrategia, que muchos problemas eran NP-completos: 3-coloración, recubrimiento por vértices, conjunto independiente, ciclo hamiltoniano, etc.

$\boxed{\text{3-coloración es NP-completo}}$ Karp, 1972

1. Demostrar que **3C** está en la clase NP (ya lo hemos visto)
2. Elegir un problema, **3-SAT** que es NP-completo
3. Demostrar que **3-SAT ∝ 3C**

Consideramos una instancia de 3-SAT, una expresión booleana E, y construimos a partir de ella un grafo G tal que:

E se satisface $\Leftrightarrow$ G es 3-coloreable

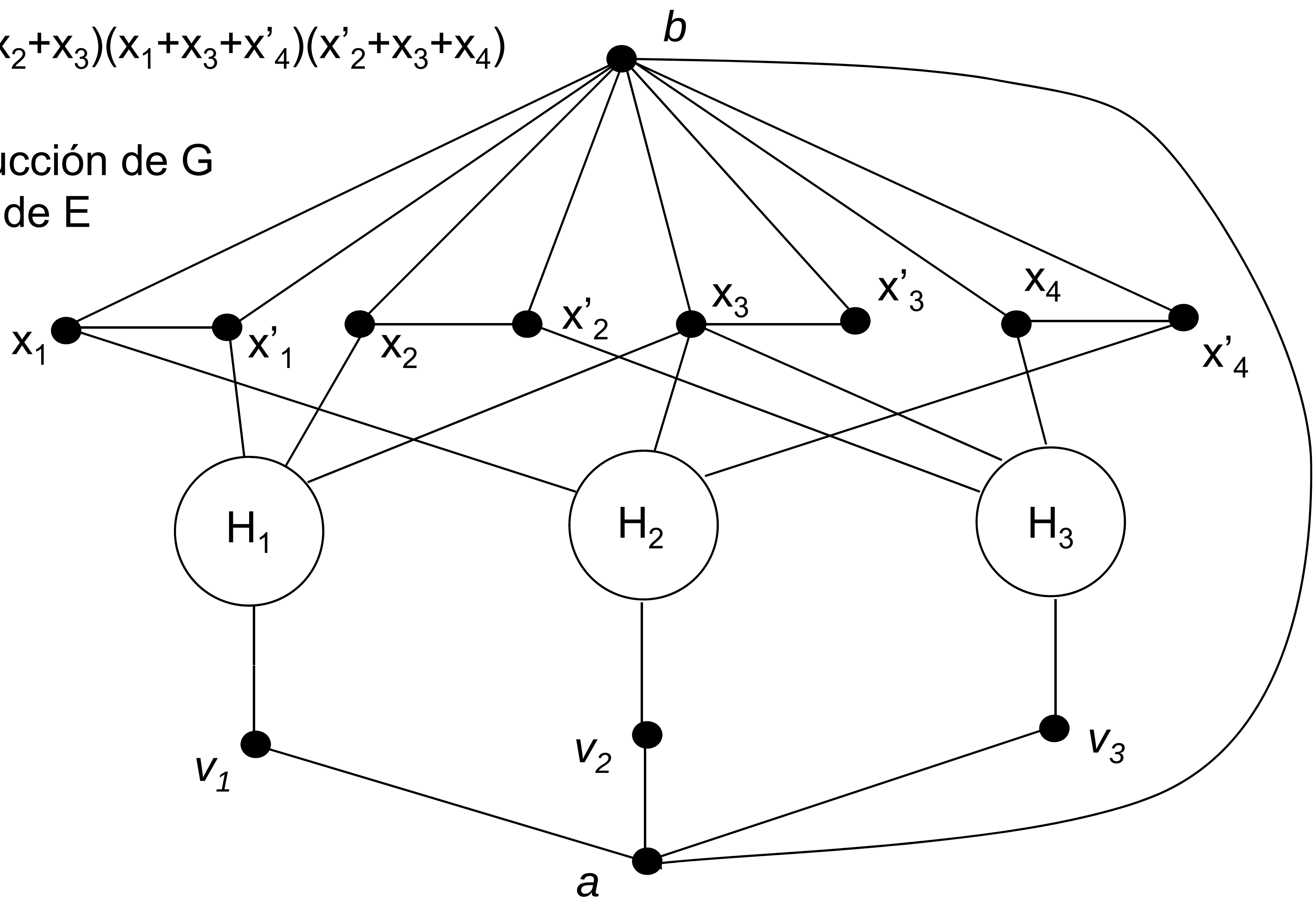
Existe una asignación de valores 0,1 a las variables de forma que E toma el valor 1

G admite una 3-coloración válida

3-coloración es NP-completo

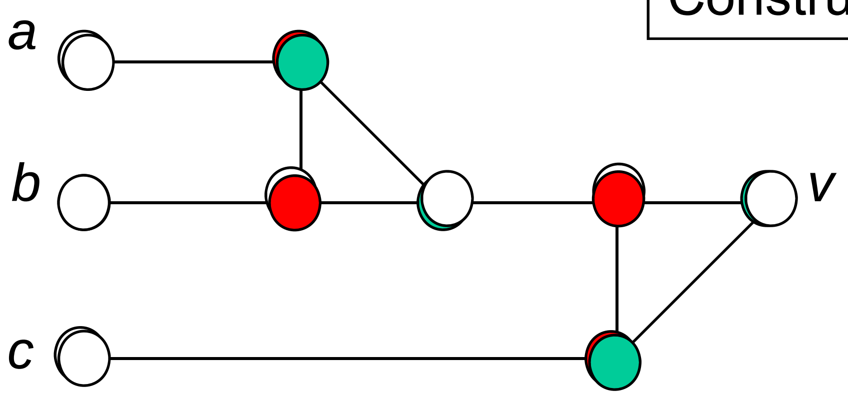
$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$

Construcción de G
a partir de E

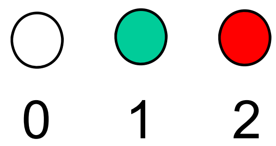


3-coloración es NP-completo

Construcción de las piezas H



Colores

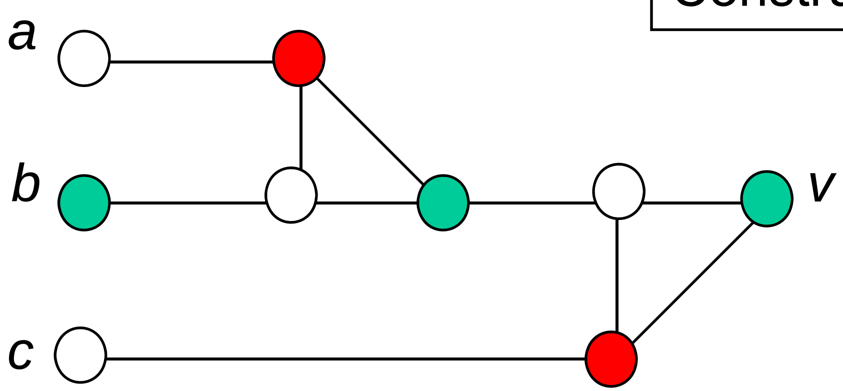


Si a, b, c color ⟹ v color

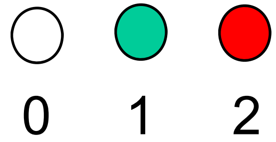
Si alguno de los vértices a, b, ó c tiene color ó ⟹ Se puede colorear v con los colores

3-coloración es NP-completo

Construcción de las piezas H



Colores

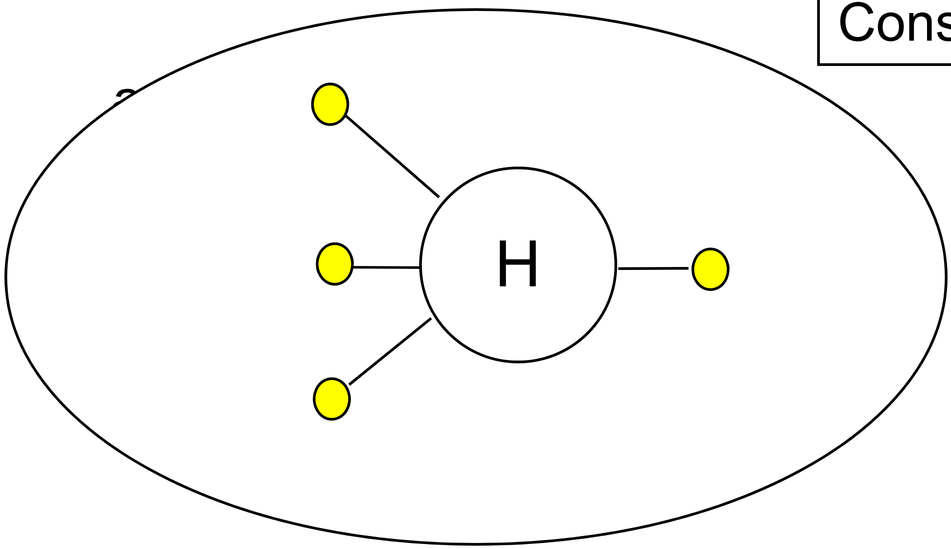


Si a, b, c color ⟹ v color

Si alguno de los vértices a, b, ó c tiene color ó ⟹ Se puede colorear v con los colores

3-coloración es NP-completo

Construcción de las piezas H



Colores

0 1 2

Si a, b, c color ⟹ v color

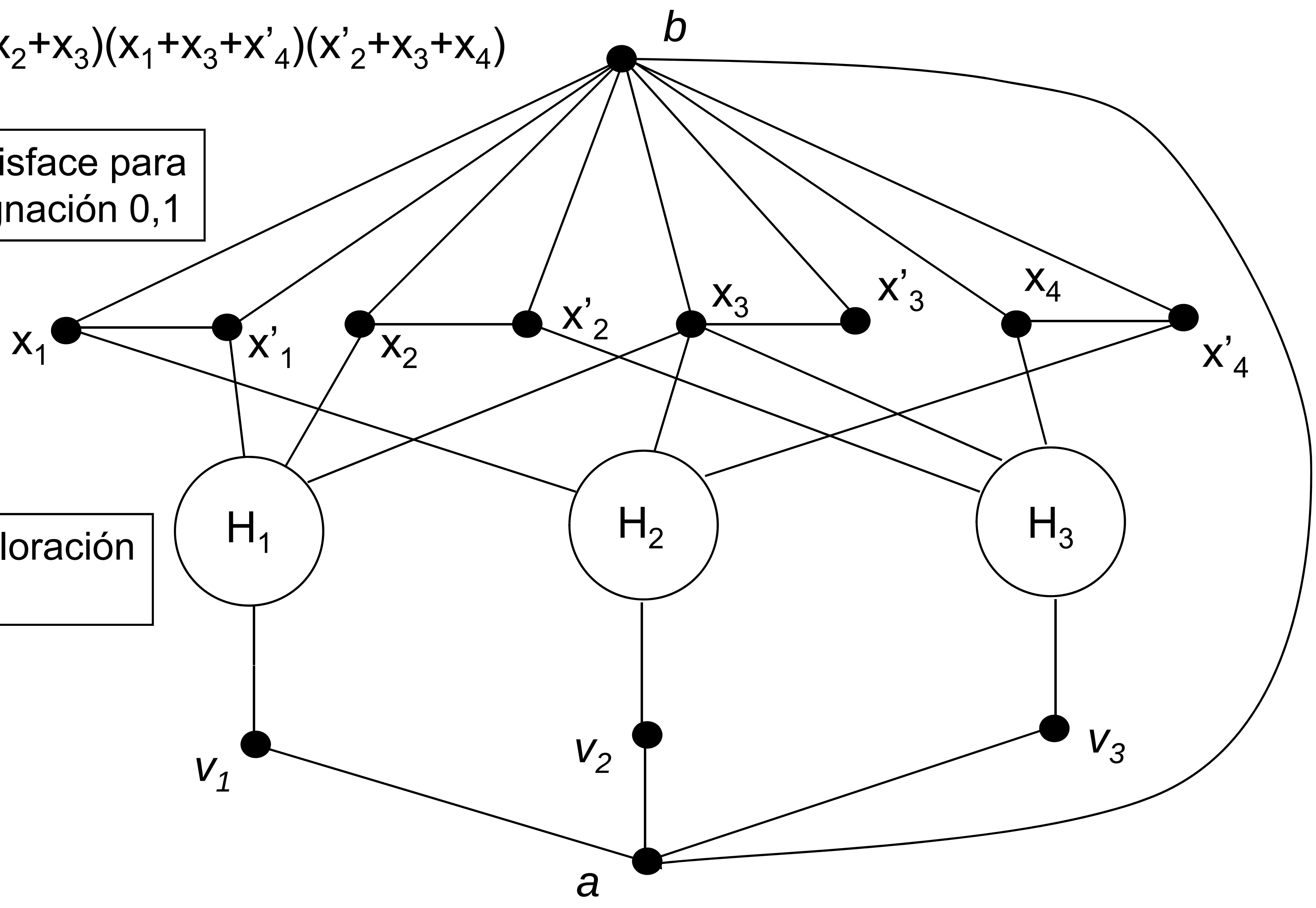
Si alguno de los vértices a, b, ó c tiene color ó ⟹ Se puede colorear v con los colores

3-coloración es NP-completo

$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$

E se satisface para una asignación 0,1

Una 3-coloración de G

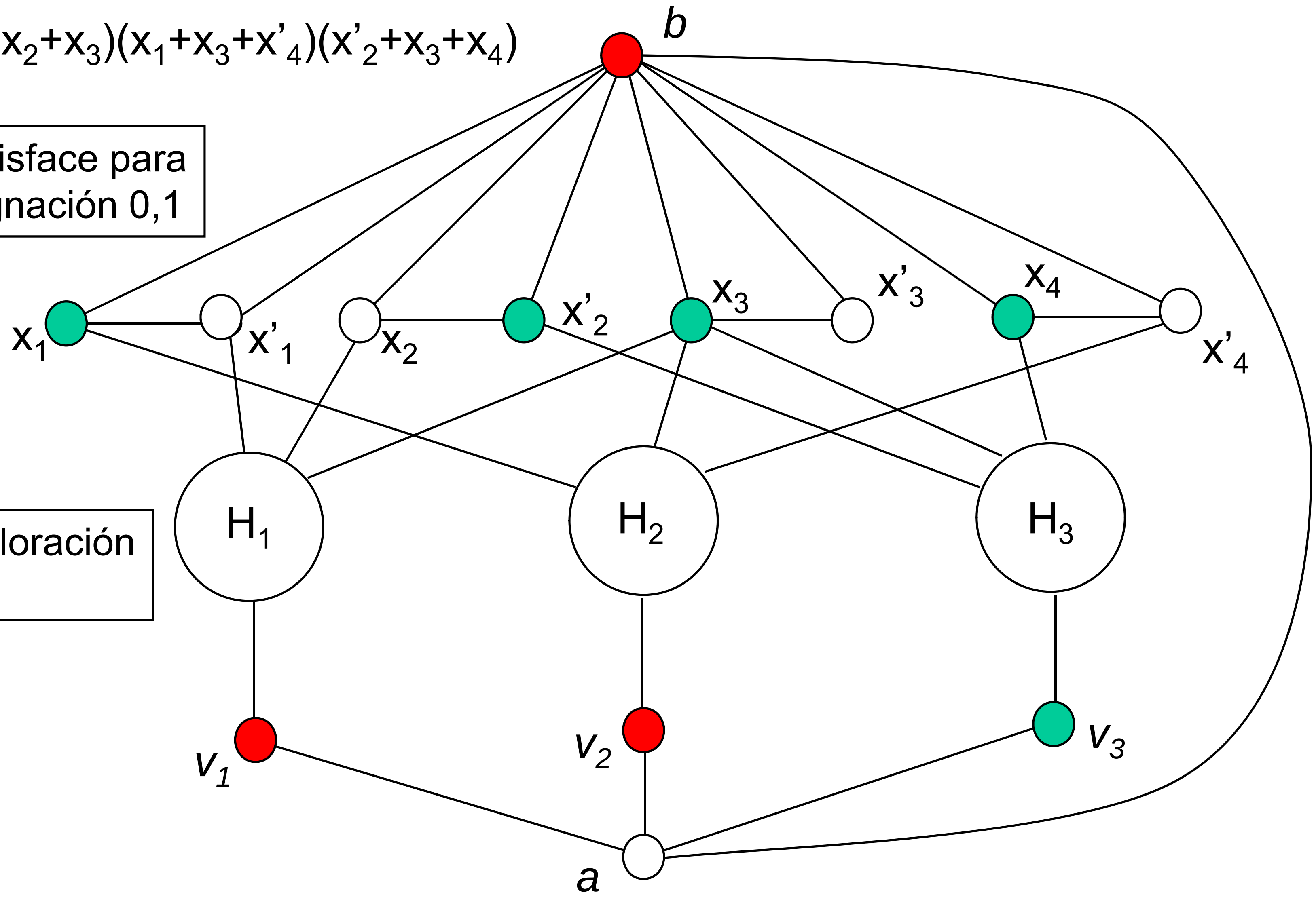


3-coloración es NP-completo

$E = (x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$

E se satisface para una asignación 0,1

Una 3-coloración de G



3-coloración es NP-completo

$$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$$

E se satisface para una asignación 0,1

Si E se satisface con una asignación T de valores 0,1 coloreamos el grafo G así:

- Si $x_i=1$ (verdad) $\Rightarrow$ x_i color ●, x'_i color ○
- Si $x_i=0$ (falso) $\Rightarrow$ x_i color ○, x'_i color ●

Una 3-coloración de G

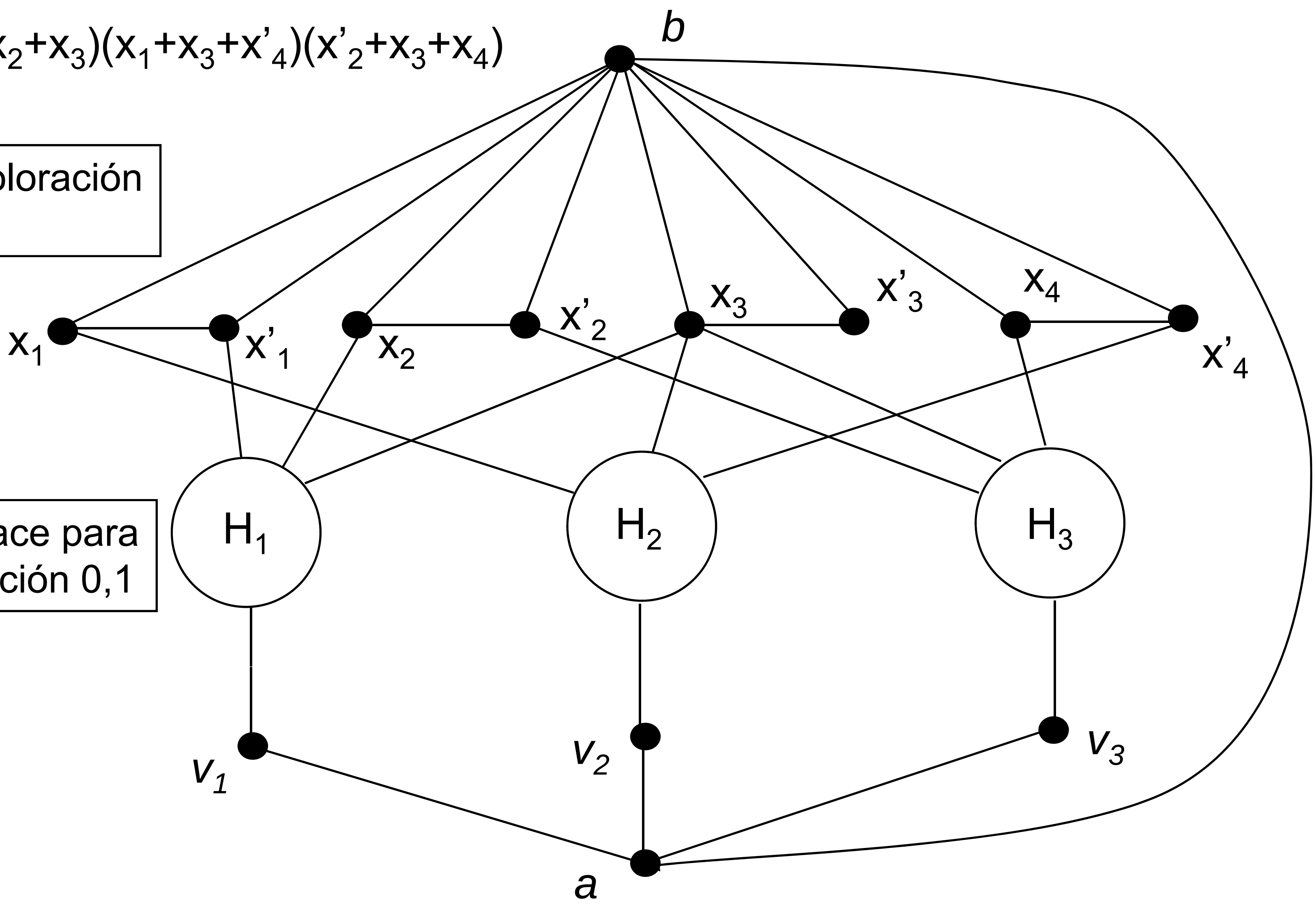
Como la asignación T satisface la expresión E, alguna literal de cada H_k no puede tener color 0, luego cada uno de los vértices v_k o bien tiene color 1 (verde) o color 2 (rojo). Coloreamos el vértice *a* con el color 0 (blanco) y *b* con el color 2 (rojo) y tendremos una 3-coloración de G

3-coloración es NP-completo

$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$

Una 3-coloración de G

E se satisface para una asignación 0,1

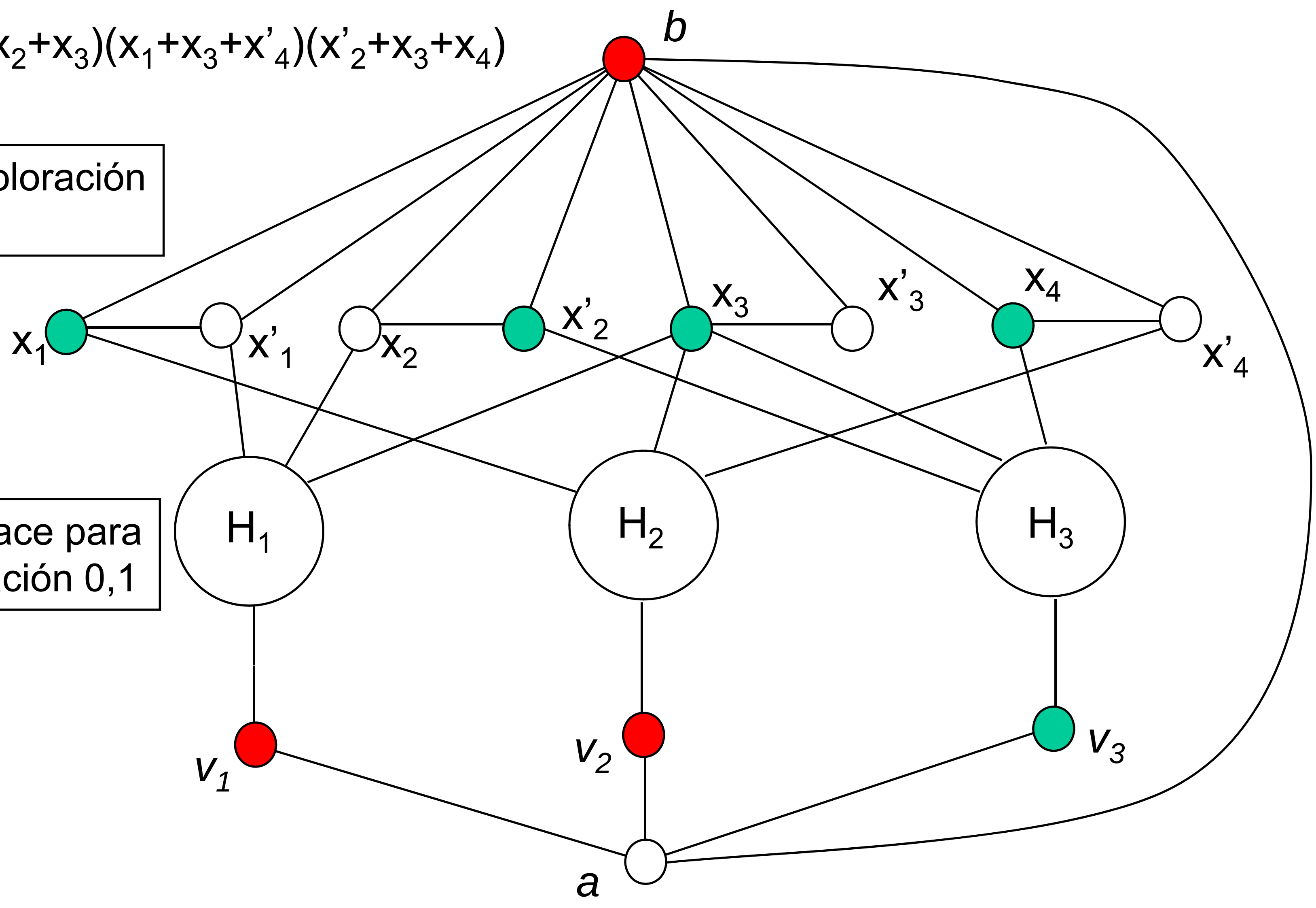


3-coloración es NP-completo

$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$

Una 3-coloración de G

E se satisface para una asignación 0,1



3-coloración es NP-completo

$$E=(x'_1+x_2+x_3)(x_1+x_3+x'_4)(x'_2+x_3+x_4)$$

Una 3-coloración de G

$\Downarrow$

E se satisface para una asignación 0,1

Si G es 3-coloreable, renombrando los colores podemos suponer que *a* color 0 (blanco) y *b* color 2 (rojo)

Así cada variable tiene una literal con 0 (blanco) y otra con 1 (verde).

Construimos una asignación T de verdad (valores 0, 1)

x_j es verdad (toma el valor 1) $\Leftrightarrow$ recibe el color 1 (verde)

Los vértices v's de las piezas H's no tienen color 0, luego cada producto (cláusula) de E debe tener una literal de color 1 (verde), es decir, cada producto toma el valor 1 y, por tanto, la expresión E toma el valor 1 (se satisface) para la asignación de 0,1 realizada.

3-coloración de grafos planos, 3CP es NP-completo

Stockmayer, 1976

1. Demostrar que **3CP** está en la clase NP
2. Elegir un problema, **3C** que es NP-completo
3. Demostrar que **3C** $\propto$ **3CP**

Consideramos una instancia de 3C, es decir, un grafo G y construimos a partir de ella un grafo G’ plano tal que:

G es 3-coloreable $\Leftrightarrow$ G’ es 3-coloreable

3CP es NP-completo

Construcción de las piezas H

Si 3-coloreamos H

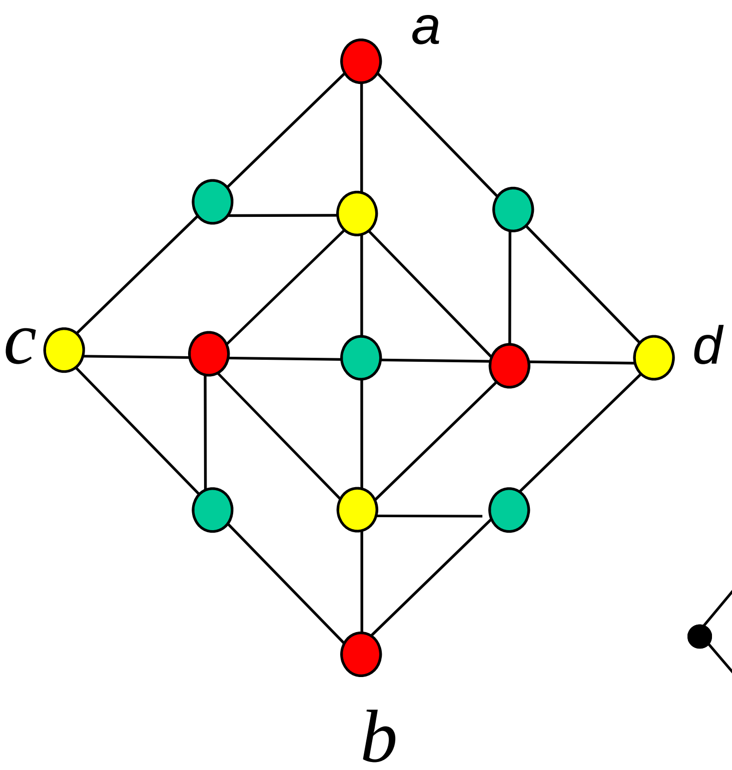
color(a) = color(b)

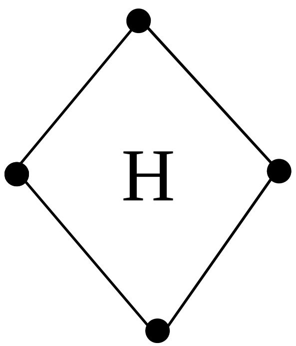
color(c) = color(d)

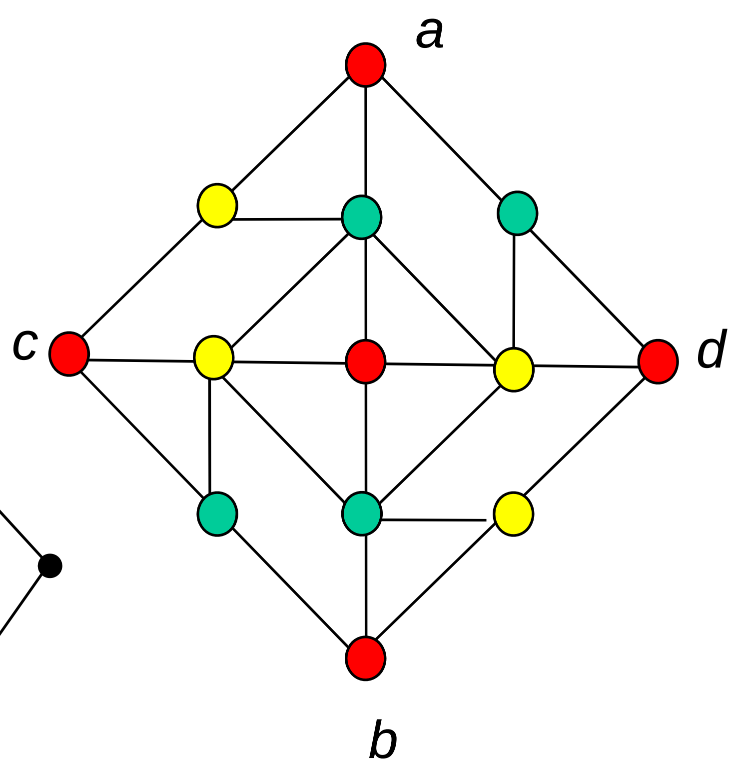
entonces existen 3-coloraciones de H con

color(a) = color(b)=color(c) = color(d)

color(a) = color(b)$\neq$color(c) = color(d)

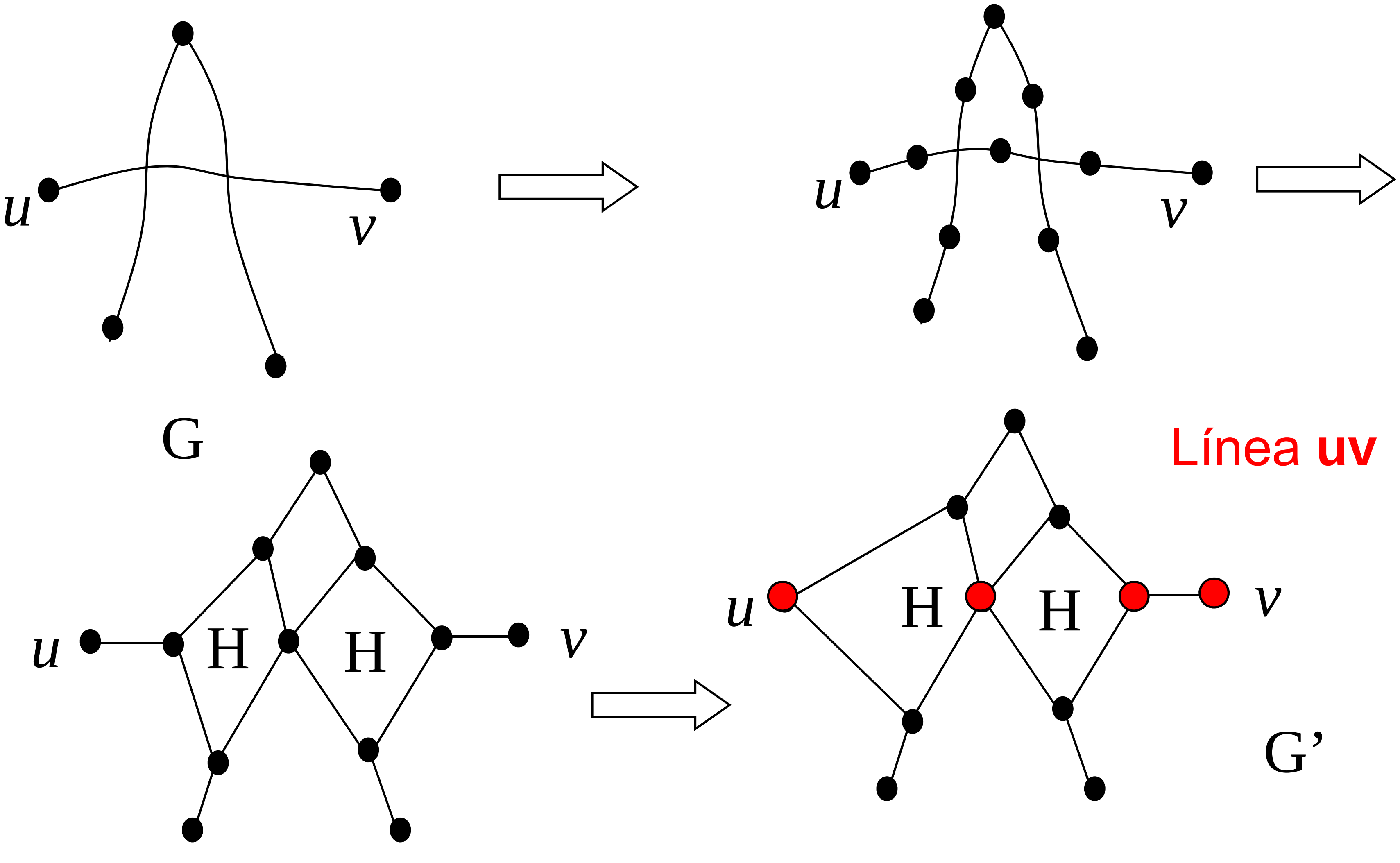






3CP es NP-completo

Construcción de G’ a partir de una representación plana de G



3CP es NP-completo

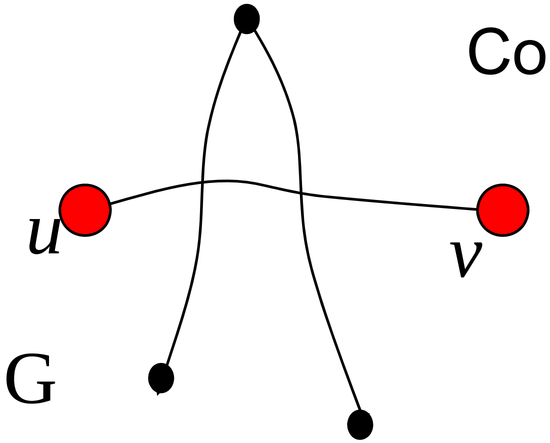
G’ es 3-coloreable $\Leftrightarrow$ G es 3-coloreable

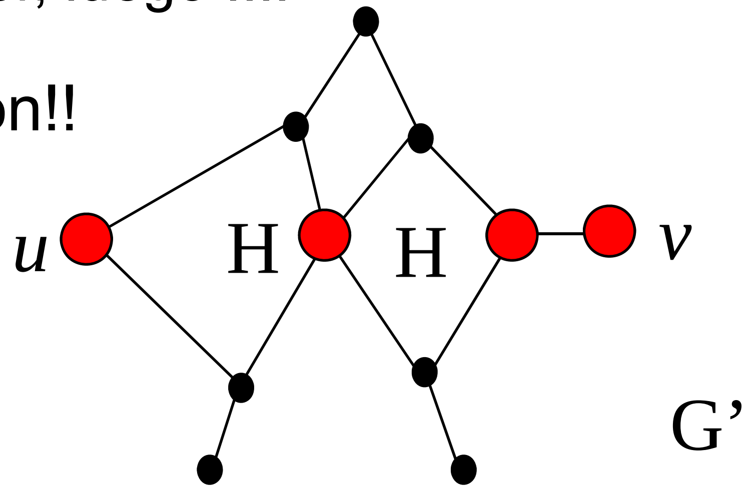
$\Rightarrow$) Si f es una 3-coloración de G’ veremos que $f|_G$ es una 3-coloración para G.

Si no lo fuera habría una arista uv con f(u)=f(v).

El lema 1 nos dice que todos los nuevos puntos en la *línea* uv reciben el mismo color, luego ....

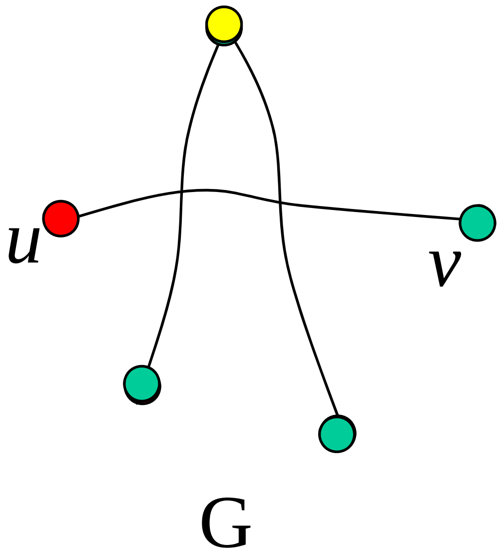
Contradicción!!

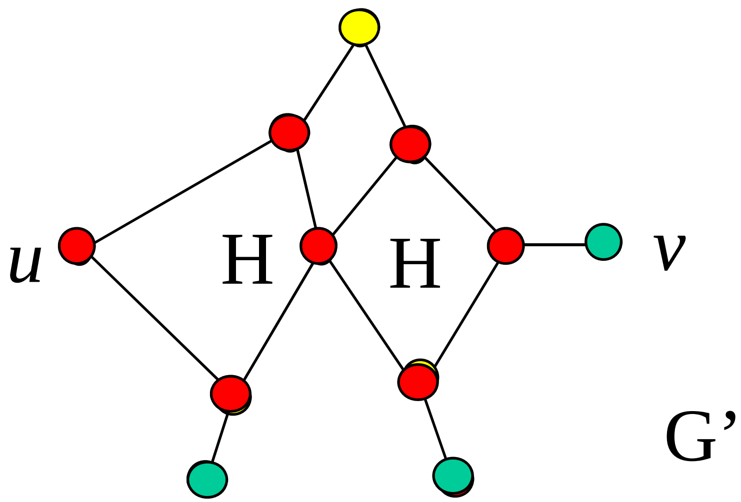




3CP es NP-completo

⇐) Si f es una 3-coloración de G, la extendemos a una 3-coloración para G'.

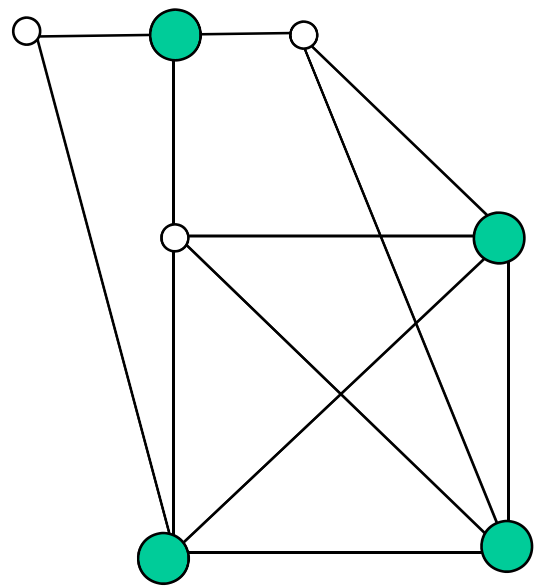




Problemas NP-completos

- 3C (tricoloración de grafos)
- VC (Vertex Cover)

Dado un grafo $G=(V,A)$ y un entero k, ¿existe un subconjunto $V' \subset V$ tal que $|V'| \leq k$ y para cada arista $\{u,v\} \in A$, al menos uno de los dos extremos está en V'? (un recubrimiento de tamaño k)



VC es un problema NP-completo

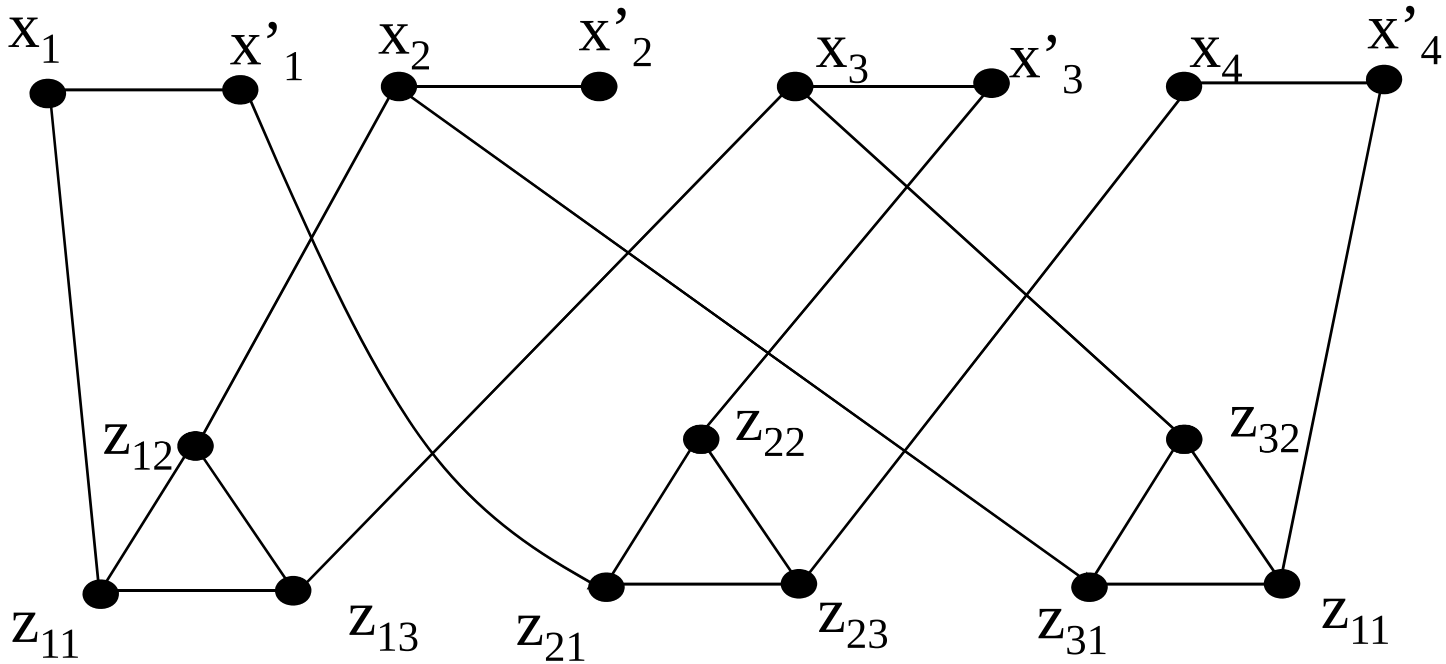
Karp, 1972

Dem.:

- VC es un problema NP
- Veremos que 3-SAT $\propto$ VC
- Consideremos una instancia de 3-SAT con variables $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y cláusulas $C = \{C_1, \ldots, C_p\}$ y construimos un grafo G y un entero k tales que:

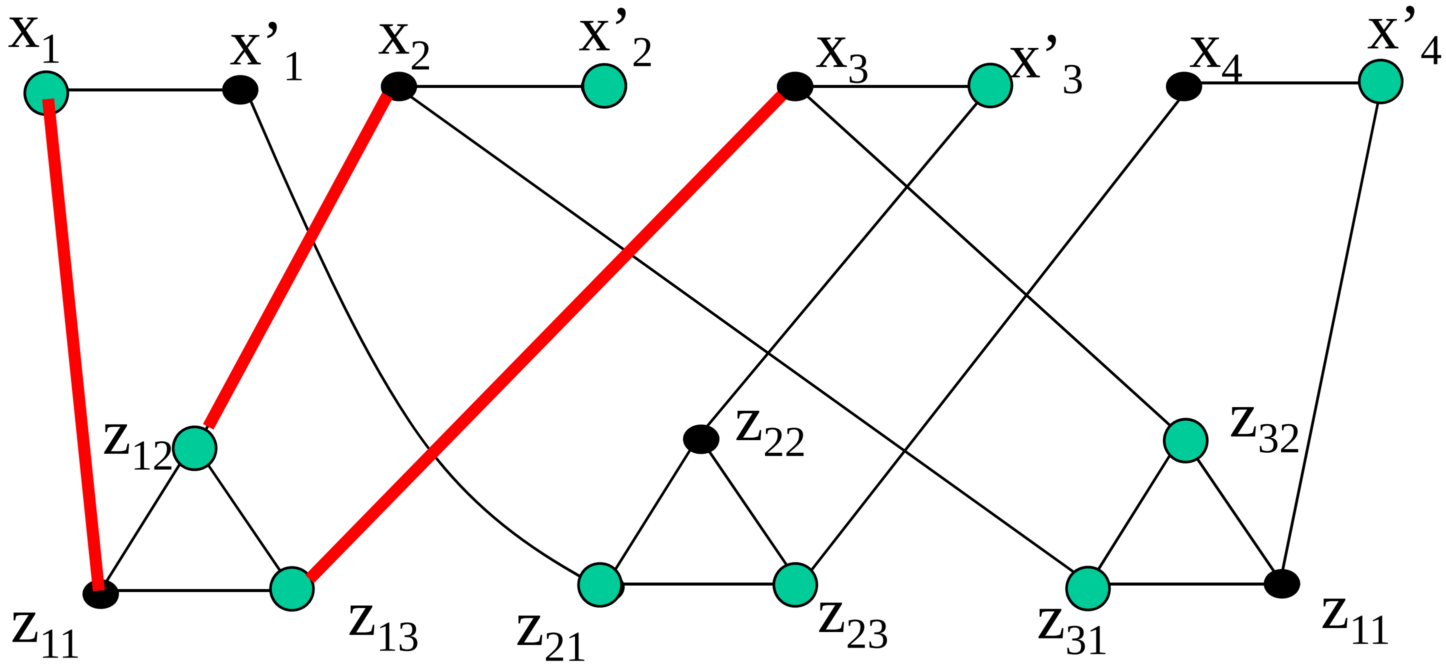
  G admite un recubrimiento de cardinal k
  $\Leftrightarrow$ la instancia se satisface

C: $(x_1 + x_2 + x_3)(x'_1 + x'_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x'_4)$



- Si C tiene n variables y p cláusulas, el grafo **G** consta de $2n + 3p$ vértices y $n + 6p$ aristas.
- El entero k es $n + 2p$
  Todo recubrimiento debe contener un vértice de cada pareja superior y dos de cada triángulo inferior

$C: (x_1 + x_2 + x_3)(x'_1 + x'_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x'_4)$



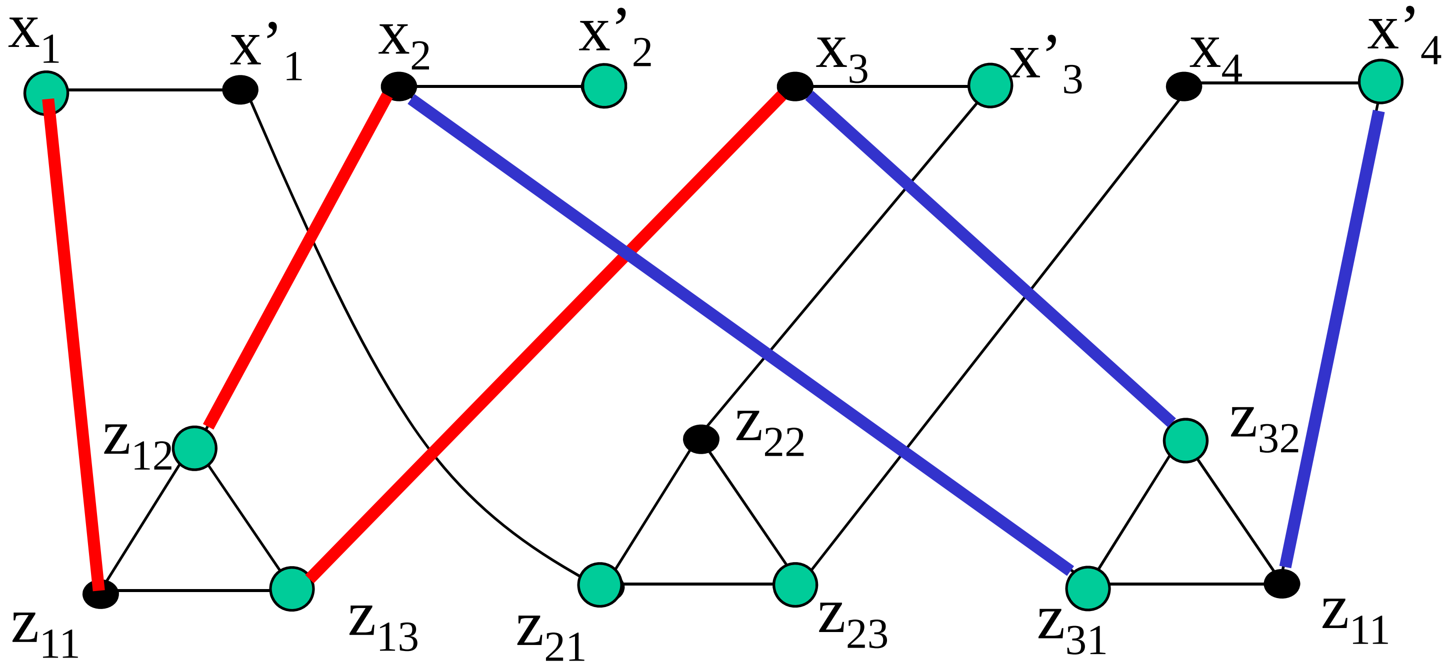
x_m es verdad $\Leftrightarrow$ $x_m \in V'$

$\Rightarrow$) Si G admite un recubrimiento V' de cardinal k, construimos una asignación de verdad para C así:

x_m es verdad $\Leftrightarrow x_m \in V'$

Veamos que C se satisface. De las 3 aristas que salen del triángulo c_s, 2 se cubren por vértices de T, la tercera se debe haber cubierto por una literal de c_s, luego esta literal habrá recibido el valor verdad y, por tanto, cada cláusula se satisface

C: $(x_1 + x_2 + x_3)(x'_1 + x'_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x'_4)$



x_m es verdad $\Leftrightarrow$ $x_m \in V'$

$\Leftarrow$) Si C se satisface con una asignación de verdad, construimos un recubrimiento V’ así:

De cada par $x_m x'_m$ elegimos para V’ el vértice verdad (así tenemos cubiertas las aristas superiores y UNA de las que bajan a cada cláusula o triángulo)

De cada triángulo elegimos para V’ los dos vértices restantes (a donde no llega la arista de bajada cubierta).

Así tenemos un recubrimiento de tamaño n + 2p

Problemas NP-completos

- IS (conjunto independiente)
  Dado un grafo $G = (V,A)$ y un entero positivo d, ¿existe un subconjunto $V' \subset V$ tal que $|V'| \geq d$ y para todo par $u,v \in V'$, $\{u,v\}$ no es arista de G?

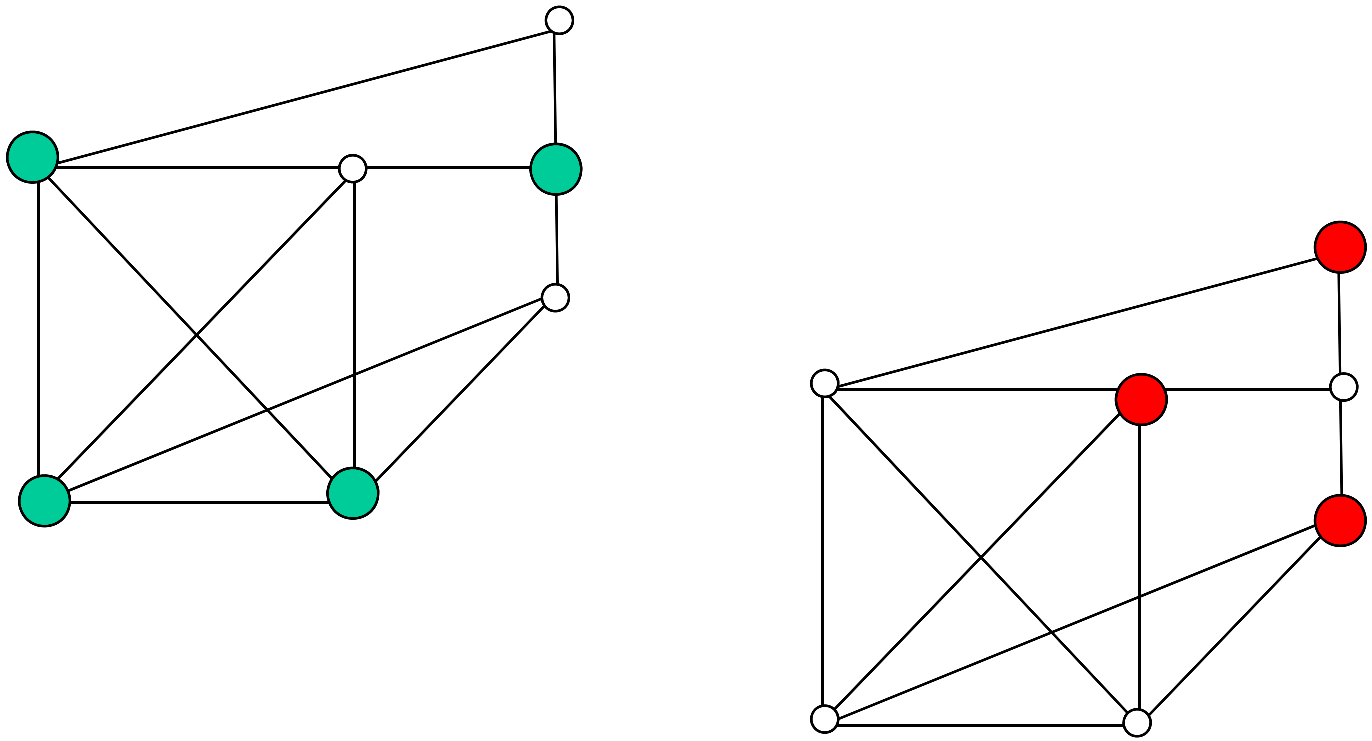
- CLIQUE (camarilla)
  Dado un grafo $G=(V,A)$ y un entero positivo $d \leq |V|$, ¿existe un subgrafo G' que es un grafo completo con d vértices?

IS es un problema NP-completo

- IS es un problema NP
- Veremos que VC $\propto$ IS
- Consideremos una instancia de VC, es decir un grafo G y un entero k, y construimos otro grafo G' = G y otro entero $d = n - k$ tales que:

G admite un recubrimiento de cardinal k
$\Leftrightarrow$ G' tiene un conjunto independiente de cardinal d

V' es recubrimiento $\Leftrightarrow$ V – V' es independiente



V’ es recubrimiento $\Leftrightarrow$ V – V’ es independiente

Problemas NP-completos

- HC (ciclo hamiltoniano)
  Dado un grafo G=(V,A), ¿existe un ciclo en G que contenga todos sus vértices?

- TSP (problema del viajante)
  Dado G grafo completo ponderado y un entero k>0, ¿existe un ciclo hamiltoniano en G de longitud menor o igual a k?

TSP es un problema NP-completo

- TSP es un problema NP
- Veremos que HC $\propto$ TSP
- Consideremos una instancia de HC, es decir un grafo $G=(V,A)$ con $|V|=n$, y construimos una instancia para TSP, otro grafo G' que será el completo K_n ponderado en las aristas así:

$$w(u,v) = 1 \text{ si } \{u,v\} \in A$$
$$w(u,v) = 2 \text{ si } \{u,v\} \notin A$$

y el entero n, tales que:

G tiene un ciclo hamiltoniano

$\Leftrightarrow$ G' admite un ciclo hamiltoniano de longitud n

TSP es un problema NP-completo

Karp, 1972

Dem.:

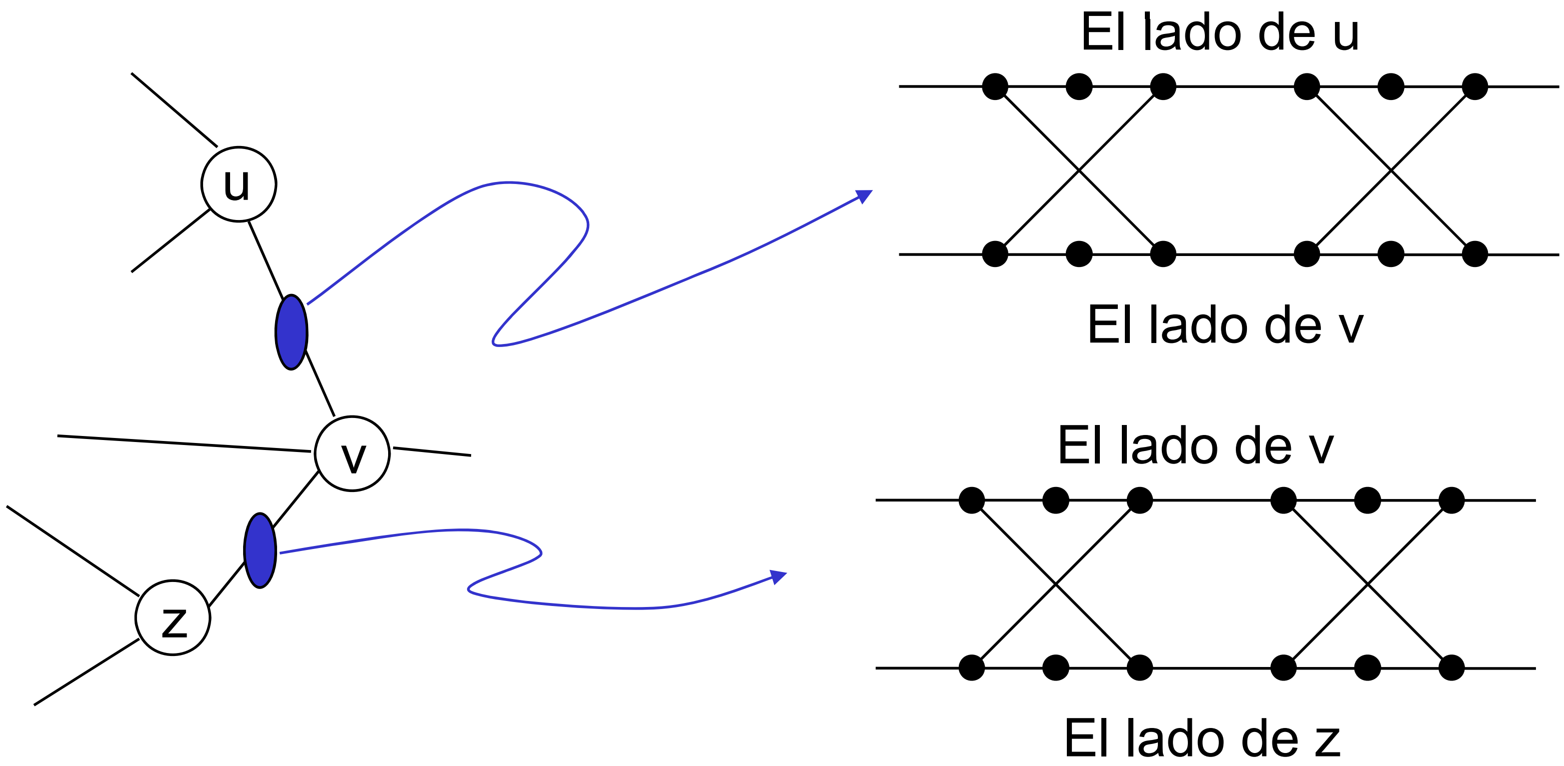
- HC es un problema NP
- Veremos que VC $\propto$ HC
- Dado un grafo G = (V,A) y un entero k debemos construir un grafo G' tal que:

G tiene un recubrimiento de cardinal k
$\Leftrightarrow$ G' es hamiltoniano

Piezas básicas de la construcción de G'

1) Aristas en G

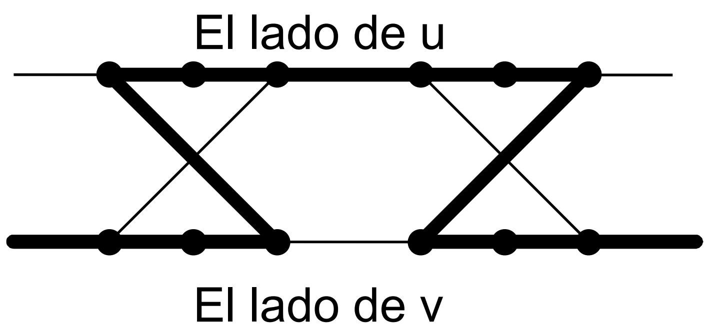
Testigos en G'

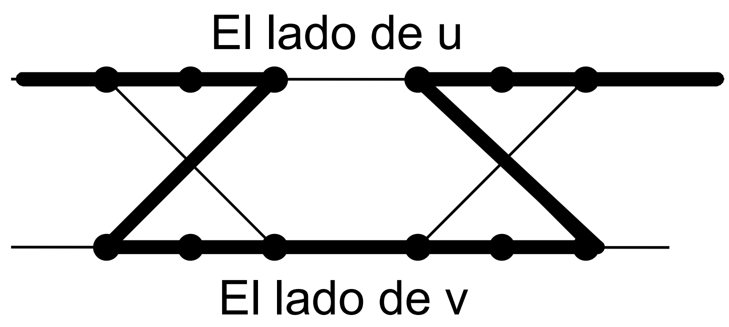


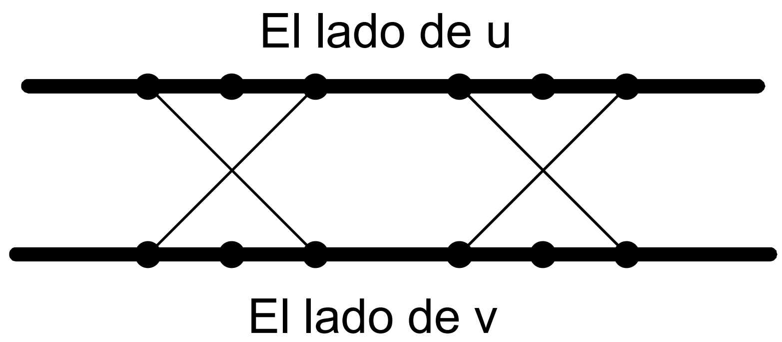
2) El entero k

Vértices $a_1, \ldots a_k$

3) ¿Cómo recorre un ciclo hamiltoniano un testigo?

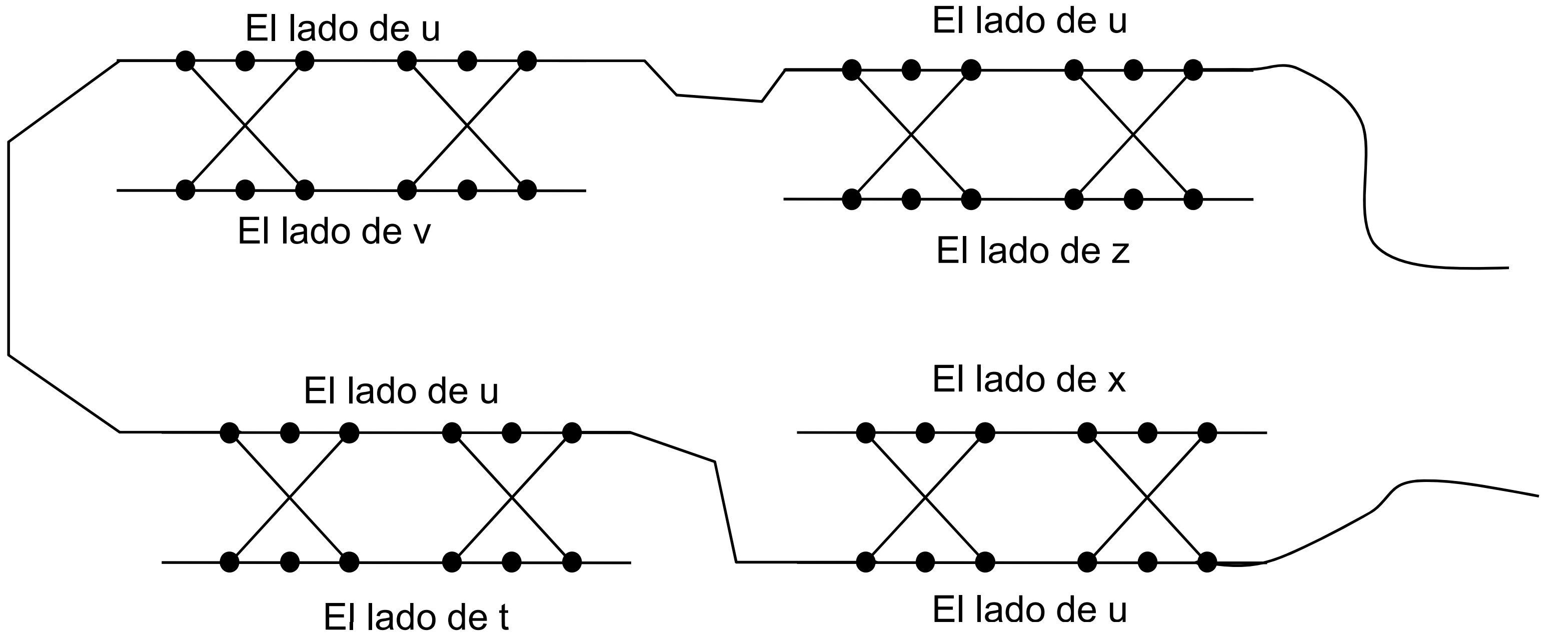






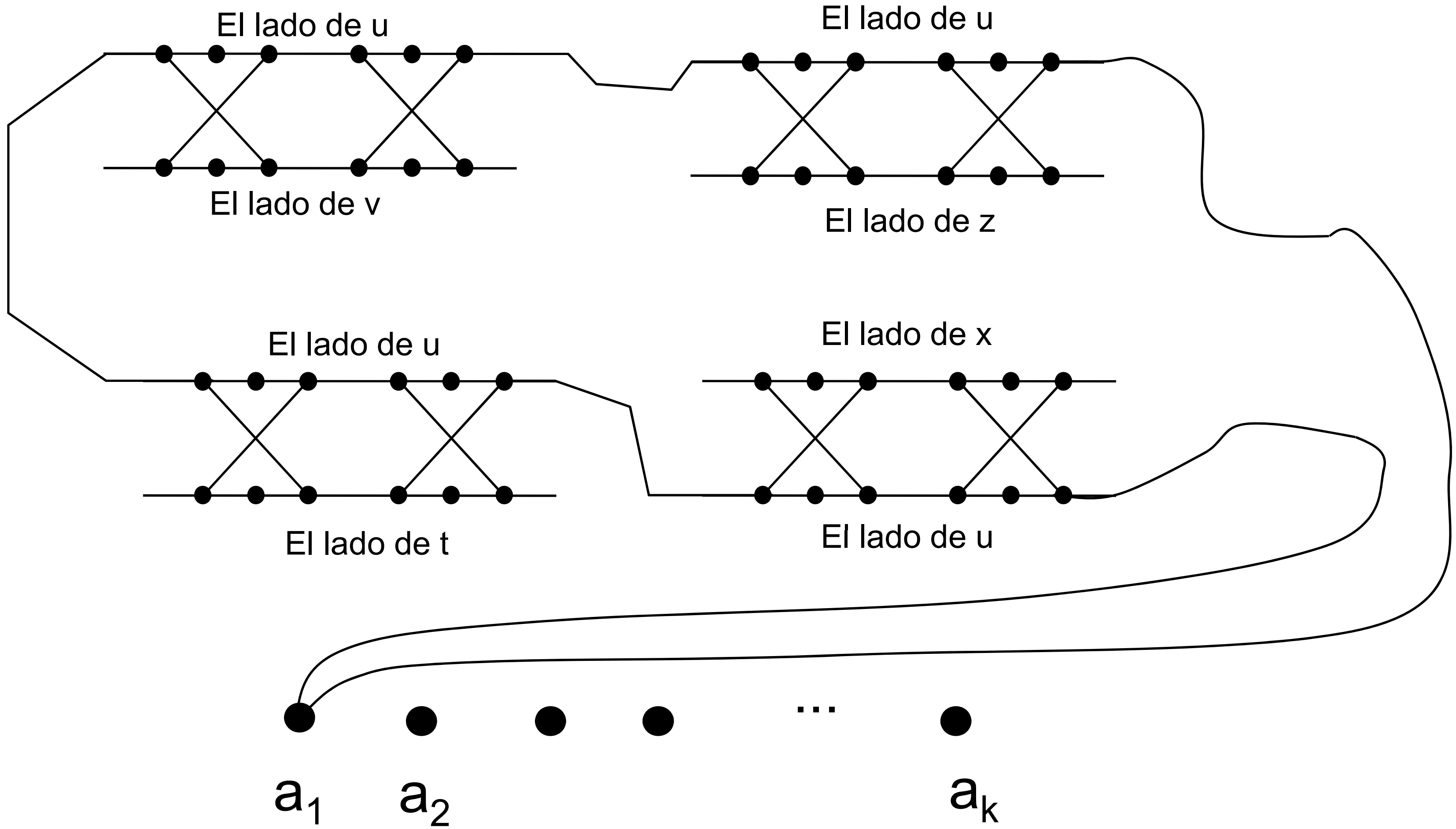
4) ¿Cómo se empalman los testigos de un vértice u?

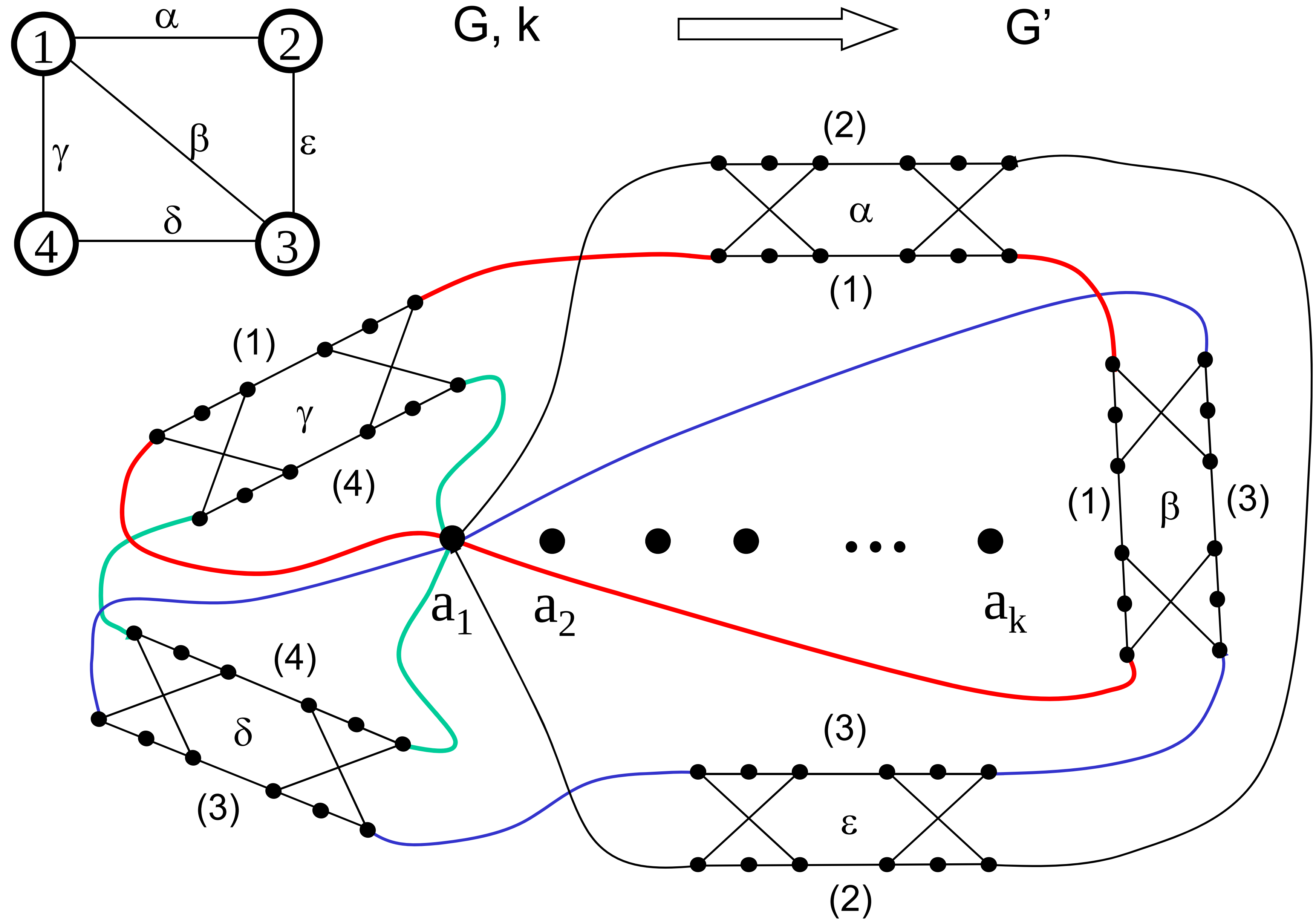
Si los vecinos de u son v, z, t, x,…



Así tenemos en G’ un camino por todos los vértices asociados a **u**

5) ¿Dónde y cómo se colocan los vértices $a_1, \ldots a_k$?

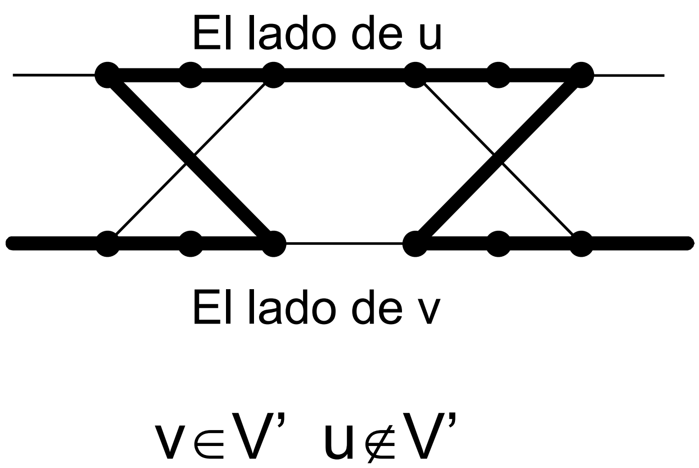


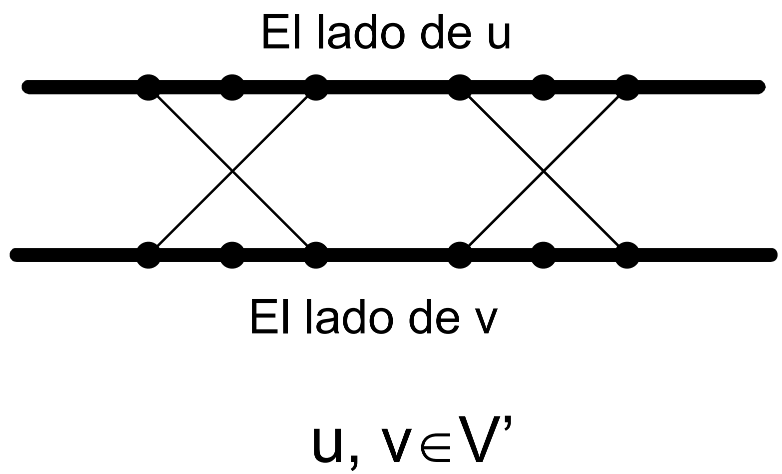


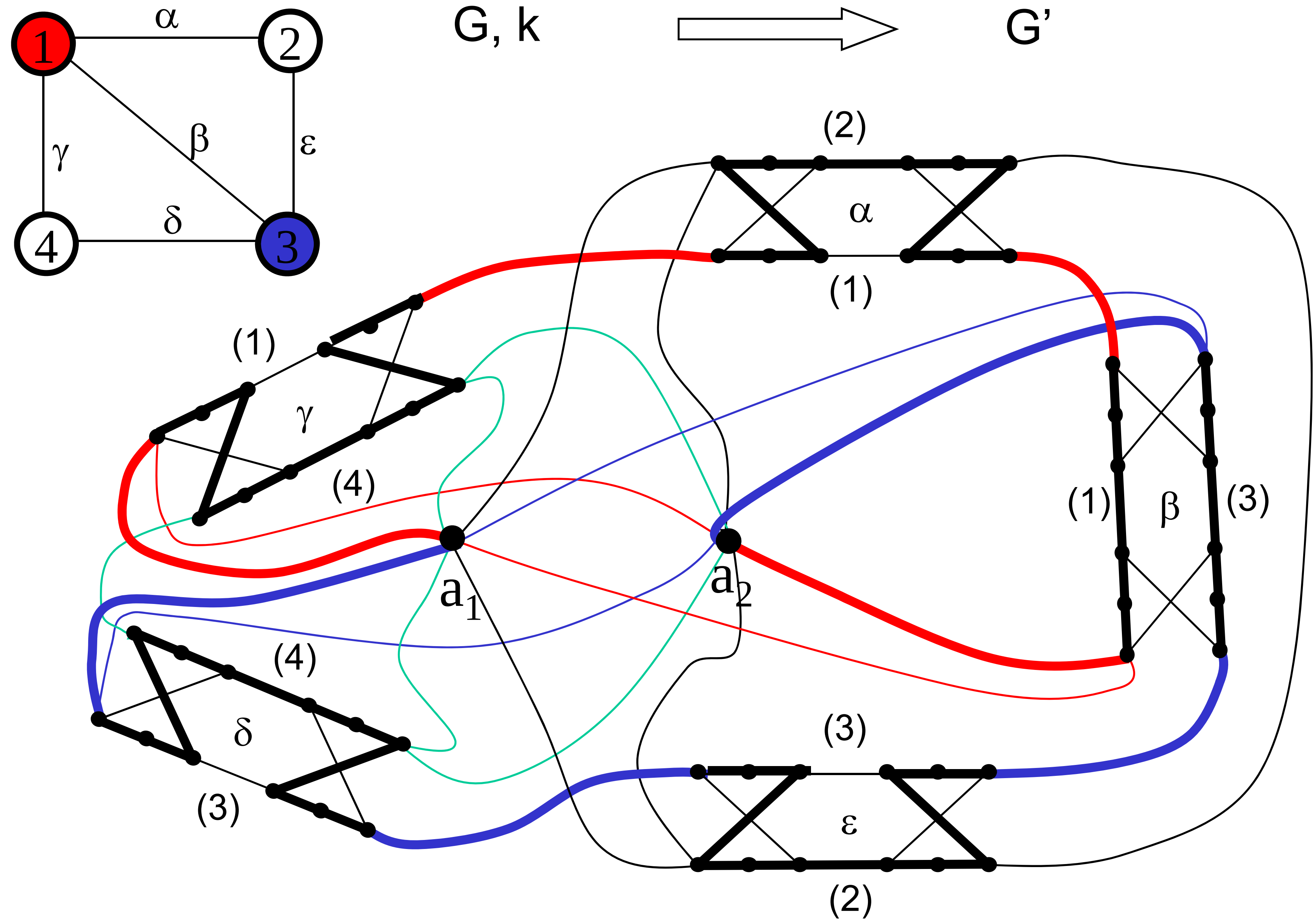
1
2
3
4
α
β
γ
δ
ε
G, k
G'
(2)
(1)
(3)
(4)
a1
a2
ak

$\Rightarrow$) Si G admite un recubrimiento $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$, construimos un ciclo hamiltoniano eligiendo las aristas del siguiente modo:

1) Del testigo de cada arista uv elegimos las aristas marcadas según pertenencia de u y v a V'







1
2
3
4
α
β
γ
δ
ε
G, k
G'
(2)
α
(1)
(1)
γ
(4)
(1)
β
(3)
a1
a2
(4)
δ
(3)
(3)
ε
(2)

2) Todas las aristas que empalman testigos

3) Las aristas que unen, para todo i desde 1 hasta k, a_i con el primer vértice del camino de v_i

4) Las aristas que unen, para todo i desde 1 hasta k-1, a_{i+1} con el último vértice del camino de v_i

5) La arista que une a_1 con el último vértice del camino de v_k

Y así se construye un ciclo hamiltoniano

$\Leftarrow$) Si en G' tenemos un ciclo hamiltoniano C debemos construir un recubrimiento para G

La parte de C comprendida entre los vértices a_i a_j debe pasar a través de todos los testigos de un vértice v de G, luego los k vértices $a_1,\ldots a_k$ descomponen C en k caminos, cada uno correspondiente a un vértice distinto de G

Estos vértices forman un recubrimiento de G

El ciclo C contiene TODOS los vértices de cada testigo, y cada testigo a = uv SÓLO puede ser atravesado por los caminos de u y de v. Por tanto, cada arista de G debe tener un vértice entre los k elegidos

Problemas NP-completos

- PARTICIÓN

  Dado un conjunto A de enteros positivos, ¿existe un subconjunto A' tal que la suma de los elementos de A' es exactamente la mitad de la suma de los elementos de A?

- X3C (Recubrimiento por 3-conjuntos)

  Dado el conjunto X de cardinal $|X|=3q$ y una colección C de 3-subconjuntos de X, ¿existe $C' \subset C$ tal que cada elemento de X aparece en, exactamente, un elemento de C'?

Problemas NP-completos

- BDST (ÁRBOL GENERADOR DE GRADO ACOTADO)

  Dado un grafo $G=(V,A)$ y un entero $d \leq |V|-1$, ¿existe un árbol generador de G de grado máximo $\leq d$?

- PROBLEMA DE LA MOCHILA (KNAPSACK)

  Dado un conjunto finito U, en el que cada elemento x tiene un tamaño $s(x)$ y un valor $v(x)$, y dos enteros positivos B y K, ¿existe un subconjunto U' de U tal que el tamaño total de los elementos de U' es $\leq B$ y el valor total de los elementos de U' es $\geq K$?

Bibliografía

- https://complexityzoo.uwaterloo.ca/Complexity_Zoo
- “A compendium of NP optimization problems” http://www.nada.kth.se/~viggo/wwwcompendium/wwwcompendium.html
- M. Garey, D. Johnson, ***Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness***, Freeman, 1979
- A. Gibbons, ***Algorithmic Graph Theory***, Cambridge Univ. Press, 1985
- D. West, ***Introduction to Graph Theory***, Prentice Hall, 1996