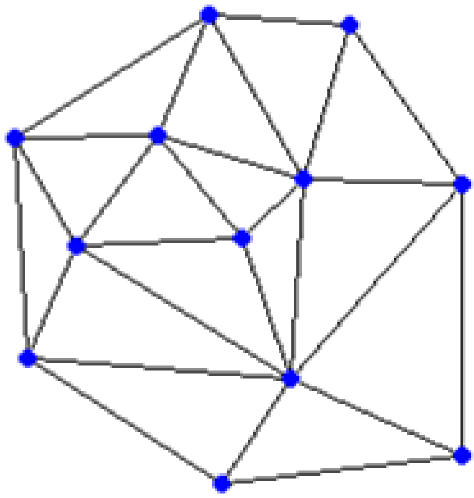
COMBINATORIA de TRIANGULACIONES y PSEUDO-TRIANGULACIONES

TRIANGULACIÓN DE NUBES DE PUNTOS



En toda triangulación de un conjunto S de n puntos del plano con k de ellos en su cierre convexo hay

$$t = 2n - 2 - k \quad \text{triángulos}$$

y

$$A = 3n - 3 - k \quad \text{aristas}$$

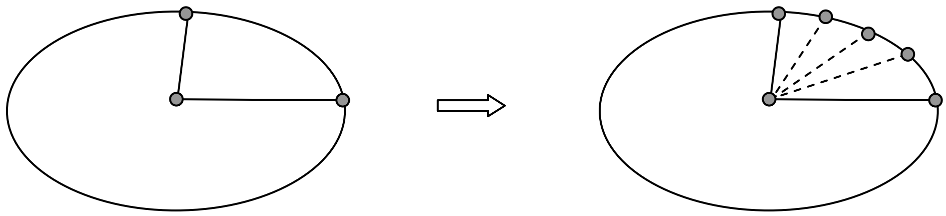
Dem.:
Aplicamos la fórmula de Euler $C + V = A + 2$ al grafo de la triangulación.
Las caras son $C = t + 1$
Los vértices son $V = n$
Y si contamos las aristas mirando a los triángulos tenemos $2A = 3t + k$
pues cada arista interior se cuenta dos veces y las de CH(S) sólo una.
Sustituyendo en la fórmula de Euler, resulta :

$$t + 1 + n = \frac{1}{2}(3t + k) + 2$$

Luego $\boxed{t = 2n - 2 - k}$ y $\boxed{A = 3n - 3 - k}$

GRADOS EN EL GRAFO TRIANGULACIÓN

¿Cuántos vértices de grado 3 puede tener una triangulación de n puntos? Intentaremos dar respuestas parciales a esta pregunta.
En primer lugar observamos que, dada una triangulación T siempre podemos obtener otra añadiendo vértices de grado 3 en el cierre convexo.



Por esto vamos a contar sólo los vértices interiores de grado 3

Sea S un conjunto de n puntos, T una triangulación del conjunto S. Si llamamos n_3 al número de vértices de T de grado 3 que no están en CH(S), se cumple que:

$$n_3 \leq \left\lfloor \frac{2n-5}{3} \right\rfloor$$

Dem.:
Si eliminamos de S el conjunto S_3 de los n_3 vértices de grado 3 interiores, queda una triangulación del conjunto $V = S - S_3$, $|V| = n - n_3$
Tendremos mayor número de vértices de grado cuanto mayor sea el número de triángulos en la triangulación de V, es decir cuando haya 3 puntos en CH(S).
En este caso tendremos $t = 2(n - n_3) - k - 2 = 2(n - n_3) - 5$
Luego $n_3 \leq 2(n - n_3) - 5$

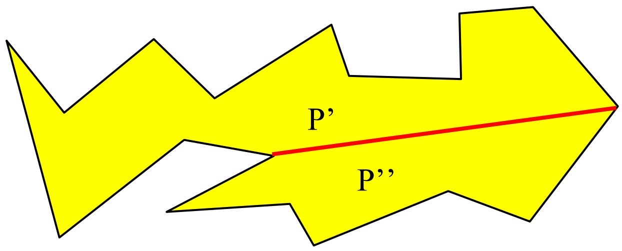
$$n_3 \leq \left\lfloor \frac{2n-5}{3} \right\rfloor$$

Además existe una triangulación con ese número de vértices interiores de grado 3. Se toma un conjunto S de $j = (n - 4)/3$ puntos. Se triangula S (dentro de un triángulo para tener j +3 puntos). En cada una de las $2(j+3) - 5$ caras acotadas se inserta un punto y se triangula.
Así el número de vértices interiores de grado 3 es
$2(j + 3) - 5 = 2j + 1 = (2n - 5)/3$
Y el número total de puntos es $j + 2j + 1 + 3 = 3j + 4 = n$

TRIANGULACIÓN DE POLÍGONOS

Toda triangulación de un polígono de n vértices consta de n – 2 triángulos y tiene n – 3 diagonales.

Dem.: Por inducción sobre n
Paso base) Para $n=3$ es obvio
Paso de inducción) Supongamos que el resultado es cierto para todo polígono con menos de n lados. Tomamos el polígono P y lo descomponemos en dos, P' y P'' por una diagonal.



P' tiene n' lados, P'' tiene n'' lados. Se cumple que $n' + n'' = n + 2$
y por hipótesis de inducción que P' se triangula en $n' - 2$ triángulos y P'' en $n'' - 2$.
Así el número de triángulos de P será:

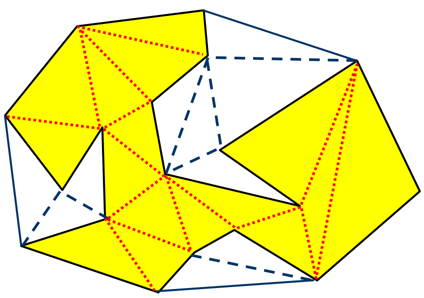
$$t = (n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$$

En cuanto al número de diagonales d, si contamos los lados de todos los triángulos, se verifica que $2d + n = 3t$, luego sustituyendo en la expresión anterior

$$d = n - 3$$

TRIANGULACIÓN DEL CIERRE CONVEXO DE UN POLÍGONO

Sea P un polígono, CH(P) su cierre convexo y T una triangulación de P y de los bolsillos de CH(P). Cada bolsillo es una componente conexa de CH(P) – P
El polígono de la figura tiene tres bolsillos.

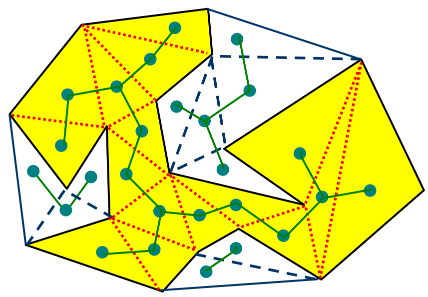


$\Delta_0 = 4$
$\Delta_2 = 9$
$\lambda = 3$

Si Δ_0 es el número de triángulos de T que no tienen lados en P,
Δ_2 es el número de triángulos de T con dos lados en P y
λ es el número de bolsillos de P, entonces

$$\boxed{\Delta_2 = \Delta_0 + \lambda + 2}$$

Dem.:
Consideramos los árboles duales de la triangulación de P y de sus bolsillos.
Recordemos que en un árbol se cumple
$t_1 = 2 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 + \ldots$
donde t_j es el número de vértices de grado j
Para estos árboles duales esta relación se convierte en $t_1 = 2 + t_3$



Como en P tenemos que $t_1 = \Delta_2$, $t_3 = \Delta_0$, resulta $\Delta_2 = 2 + \Delta_0$
Y en cada bolsillo tenemos que

si el triángulo de la "tapa" es hoja entonces $\Delta_2 = t_1 - 1$, $\Delta_0 = t_3$

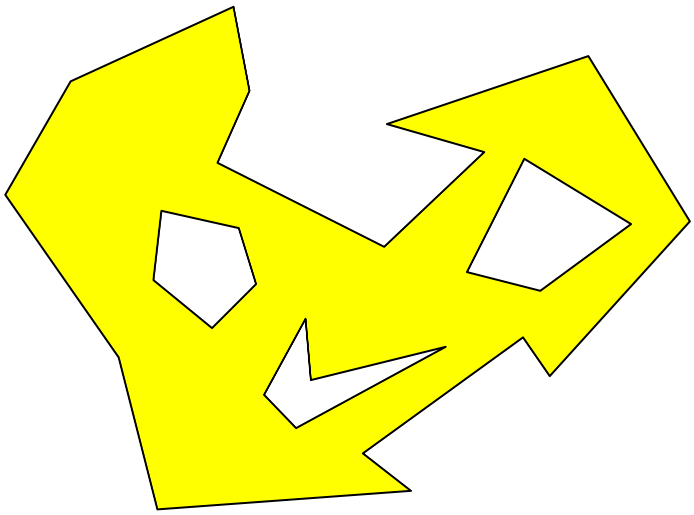
si el triángulo de la "tapa" no es hoja entonces $\Delta_2 = t_1$, $\Delta_0 = t_3 + 1$

es decir, $\Delta_2 = 1 + \Delta_0$ en cada uno de los bolsillos.
Sumando todas las expresiones correspondientes a P y sus bolsillos, resulta

$$\boxed{\Delta_2 = \Delta_0 + \lambda + 2}$$

TRIANGULACIÓN DE POLÍGONOS CON AGUJEROS

Toda triangulación de un polígono de n vértice con h agujeros consta de $n + 2h - 2$ *triángulos y tiene* $n + 3h - 3$ *diagonales.*

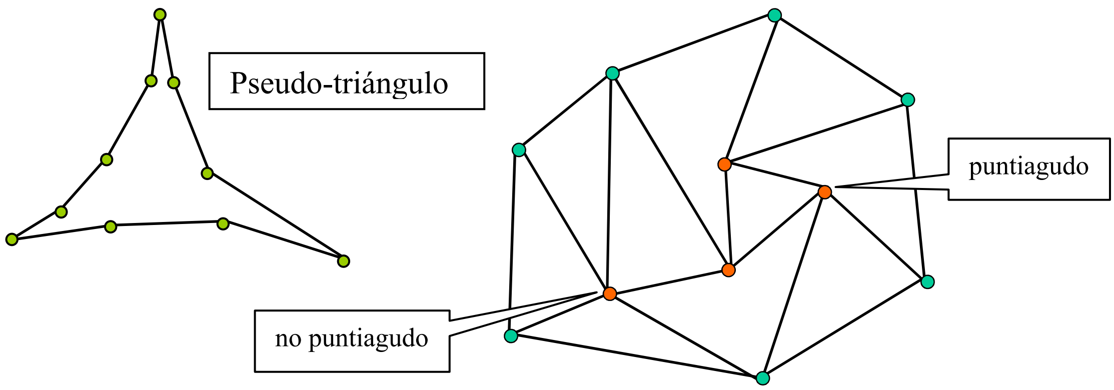


Dem.:
Aplicamos la fórmula de Euler $C + V = A + 2$
Ahora es $V = n$, $C = t + h + 1$, $2A = 3t + n$
Sustituyendo resulta, $n + t + h + 1 = \frac{1}{2}(3t + n) + 2$
Luego $2n + 2t + 2h - 2 = 3t + n + 4$ y por tanto, $\boxed{t = n + 2h - 2}$

Y como $d = A - n$, también tenemos
$d = \frac{1}{2}(3t + n) - n = \frac{1}{2}(3t - n) = \frac{1}{2}(3n + 6h - 6 - n)$ $\boxed{d = n + 3h - 3}$

PSEUDO-TRIANGULACIÓN DE NUBES DE PUNTOS

Un pseudo-triángulo es un polígono con 3 vértices convexos



Un vértice en un grafo plano es **puntiagudo** si uno de los ángulos incidentes en él es mayor que π

Toda pseudo-triangulación de n puntos de los cuáles p son puntiagudos consta de

$t = 2n - 2 - p$ *pseudotriángulos*

$A = 3n - 3 - p$ *aristas*

O bien, en términos de los n_x vértices no puntiagudos,

$t = n - 2 + n_x$ *pseudotriángulos*

$A = 2n - 3 + n_x$ *aristas*

Así, cuando todos los vértices son puntiagudos (n_x=0) el número de aristas es el menor posible. Por eso las pseudo-triangulaciones puntiagudas (con todos sus vértices puntiagudos) son las pseudo-triangulaciones mínimas.

Dem.: Contemos los ángulos menores que π de dos formas distintas:

(1) En cada pseudo-triángulo hay 3, en total 3t

(2) En cada vértice puntiagudo v hay $d_v - 1$

En cada vértice no puntiagudo v hay d_v

En total, si V_x es el conjunto de no puntiagudos tendremos

$$\sum_{v \notin V_x}(d_v - 1) + \sum_{v \in V_x} d_v = \sum_{v \in V} d_v - (n - n_x)$$

Por tanto, $3t = 2A - n + n_x$

Aplicamos ahora la fórmula de Euler $C + V - A = 2$, donde $C = t + 1$

$6 = 3V - 3A + 3C = 3n - 3A + 3t + 3 = 3n - 3A + 2A - n - n_x + 3$

Luego $\boxed{A = 2n - 3 + n_x}$

Y, sustituyendo $3(C - 1) = 4n - 6 + 2\,n_x - n + n_x$, es decir $\boxed{t = n - 2 + n_x}$

Podemos definir las pseudo-triangulaciones puntiagudas como grafos maximales, sin cruces y puntiagudos (todos los vértices puntiagudos).

Otro aspecto combinatorio interesante sobre las triangulaciones y pseudo-triangulaciones es contar cuántas hay diferentes sobre el mismo **conjunto de puntos S**.

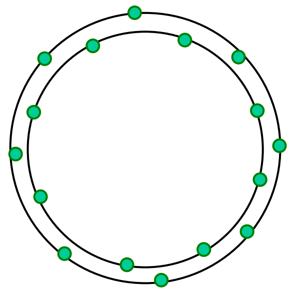
COTAS SOBRE EL NÚMERO DE TRIANGULACIONES

Dado S, conjunto de n puntos en el plano, ¿de cuántas formas se puede triangular S?

COTA INFERIOR

$\boxed{2{,}33^n \leq tr(S)}$ 06, Aichholzer et al.

Es decir, todo conjunto S admite al menos $2{,}33^n$ triangulaciones distintas
Se conjetura que la distribución de puntos con menor número de triangulaciones corresponde al "doble círculo"

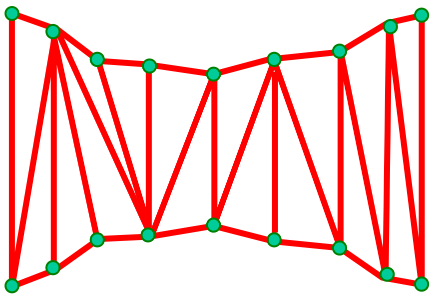


$\sim \sqrt{12}^n$

COTA SUPERIOR

$\boxed{tr(S) \leq 43^n}$ 06, Sharir, Welzl

Es decir, un conjunto S admite a lo sumo 43^n triangulaciones distintas.
Se conjetura que la distribución con mayor número de triangulaciones corresponde a la doble cadena en zig-zag



$\sim \sqrt{72}^n$

06, Aichholzer et al.

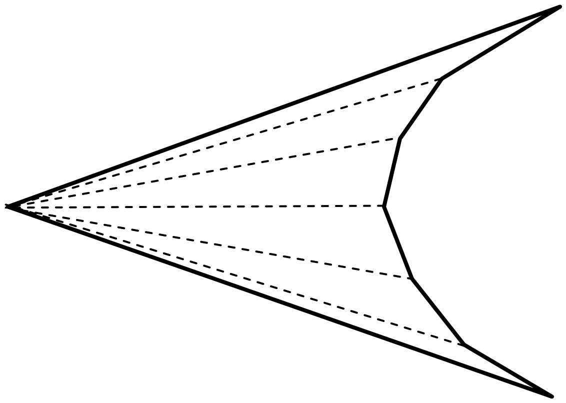
COTAS SOBRE EL NÚMERO DE PSEUDO-TRIANGULACIONES

El doble círculo tiene $\sim \sqrt{28}^n$ pseudo-triangulaciones puntiagudas y
$\sim \sqrt{40}^n$ pseudo-triangulaciones en total
La doble cadena tiene $\sim 12^n$ pseudo-triangulaciones puntiagudas y
$\sim 20^n$ pseudo-triangulaciones en total
06, Aichholzer, Orden, Santos, Speckmann
$\sim$ significa salvo un factor polinómico

Vemos ahora qué sucede con las triangulaciones y pseudos-triangulaciones de un polígono de n lados

NÚMERO DE TRIANGULACIONES DE UN POLÍGONO

El número de triangulaciones de un polígono de n lados alcanza su valor máximo en un polígono convexo, este valor es el número de Catalan C_{n-2} . Y existen polígonos con triangulación única (el de la figura)



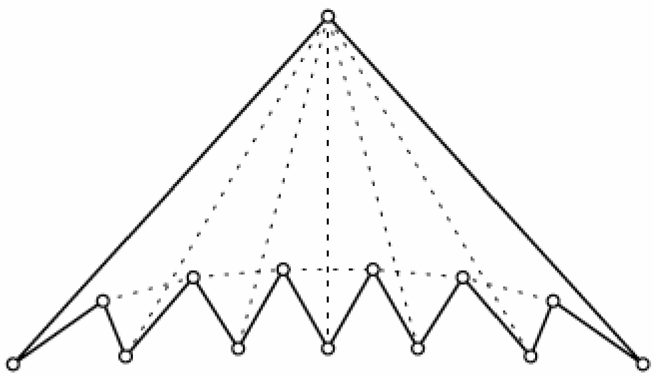
Por tanto, $1 \le tr(P) \le \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} \approx \Theta(4^n n^{-3/2})$

NÚMERO DE PSEUDO-TRIANGULACIONES DE UN POLÍGONO

Ahora el número de pseudo-triangulaciones es función del número k de vértices convexos del polígono.

Un polígono P con k vértices convexos tiene entre 2^{k-3} y C_{k-2} *(número de Catalan) pseudo-triangulaciones. (Ambas cotas son ajustadas)*

La cota superior se alcanza en el polígono convexo de k vértices.
La cota inferior se alcanza en el polígono de la figura.



Las diagonales dibujadas de P se agrupan en k – 3 pares que se cortan. Cada elección de un elemento de un par origina una pt diferente.