Universidad Politécnica
de Madrid

ÁRBOL GENERADOR DE DIÁMETRO MÍNIMO (MDST)

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria, 2018

DIÁMETRO, EXCENTRICIDAD, CENTRO, …

Dado (G,w) hallar el árbol generador de diámetro mínimo

El diámetro de G diam(G) = min{dist(a,b) / a,b vértices de G}

Recordemos:

Excentricidad exc(a) = max {dist(a,x) / $x \in V$ }

Diámetro diam(G) = max {exc(u) / $u \in V$ }

Radio rad(G) = min {exc(u) / $u \in V$ }

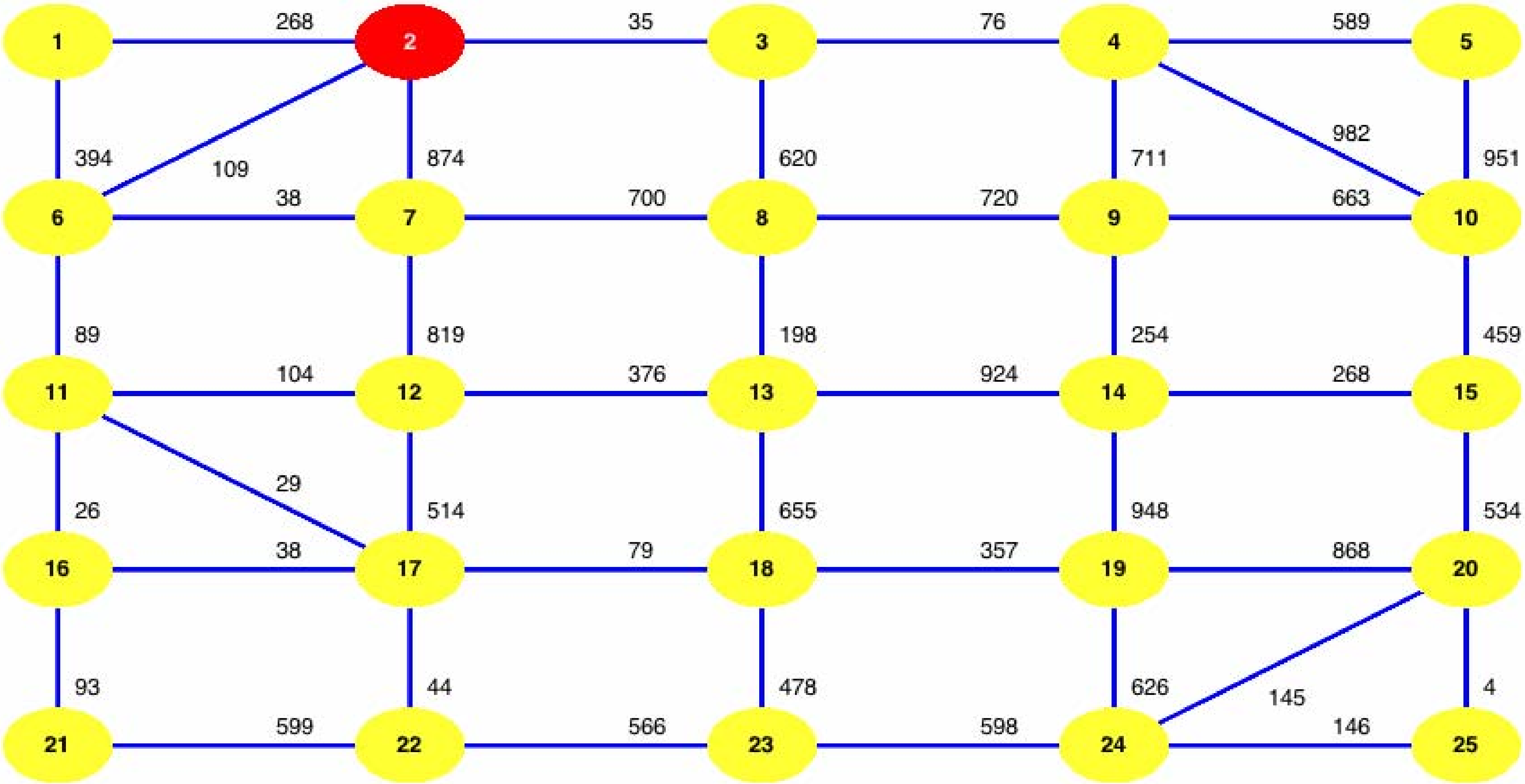
Centro: Subgrafo generado por los vértices de mínima excentricidad

Periferia: Subgrafo generado por los vértices de máxima excentricidad

Complejidad: O(n(q + nlogn))

TODAS las distancias entre pares de vértices

UBICACIÓN DE SERVICIOS



El parque de bomberos se debe instalar en el centro del grafo, C(Red) = {2}

DIÁMETRO y CENTRO EN UN ÁRBOL

Propiedades de diámetro y centro en los árboles

Árbol sin pesos

(1) El centro, o bien es un vértice o bien dos vértices adyacentes.

(2) Todos lo caminos diametrales pasan por el centro.

(3) $2 \text{ rad}(T) - 1 \leq \text{diam}(T) \leq 2 \text{ rad}(T)$

Árbol con pesos en las aristas

(1) El centro, o bien es un vértice o bien dos vértices adyacentes.

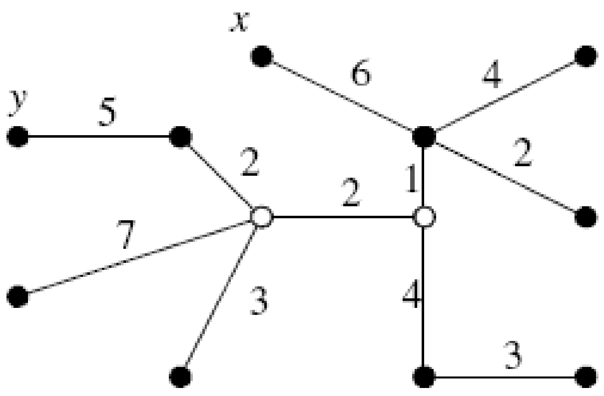
(2) Todos lo caminos diametrales pasan por el centro.

(3) $2 \text{ rad}(T) - \max\{w(e) / e \text{ arista}\} \leq \text{diam}(T) \leq 2 \text{ rad}(T)$

DIÁMETRO y CENTRO EN UN ÁRBOL

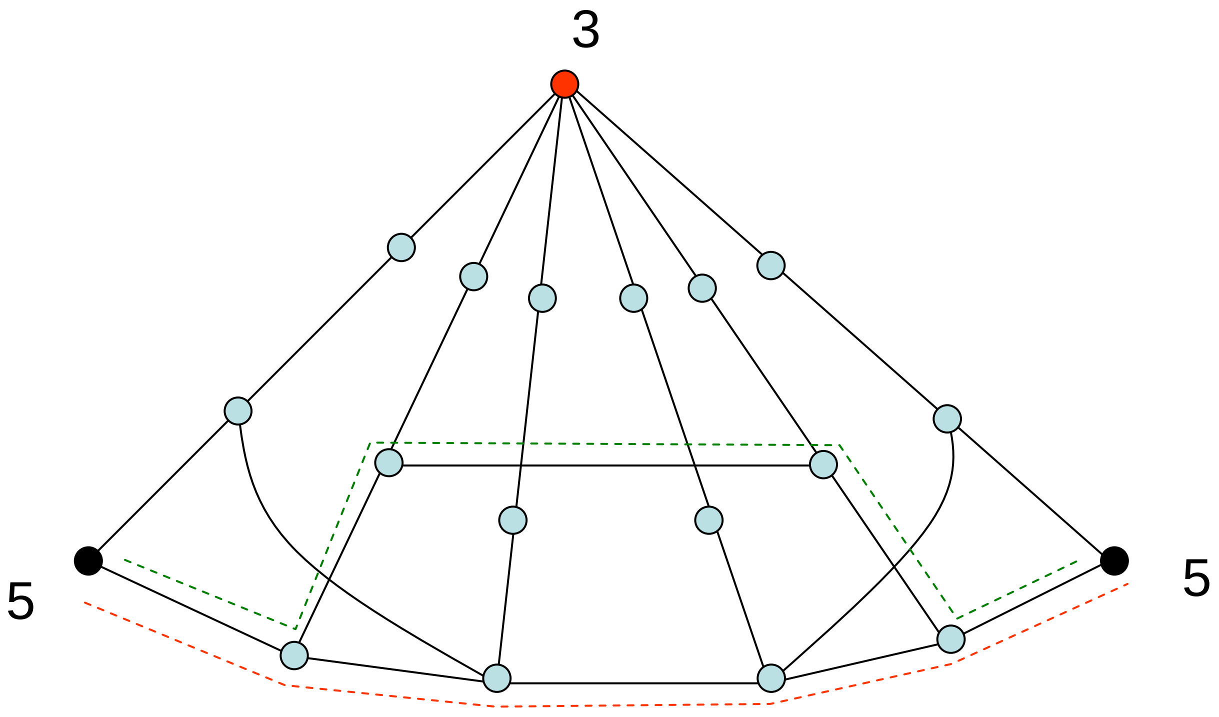
Propiedades de diámetro y centro en los árboles

Los caminos diametrales pasan por el centro



Diámetro 16
Radio 9

DIÁMETRO y CENTRO EN UN ÁRBOL



El centro (rojo) no está en ninguno de los caminos diametrales

La excentricidad de los vértices sin etiqueta es 4

DIÁMETRO EN UN ÁRBOL

Dado (T,w) hallar el diámetro del árbol

Algoritmo

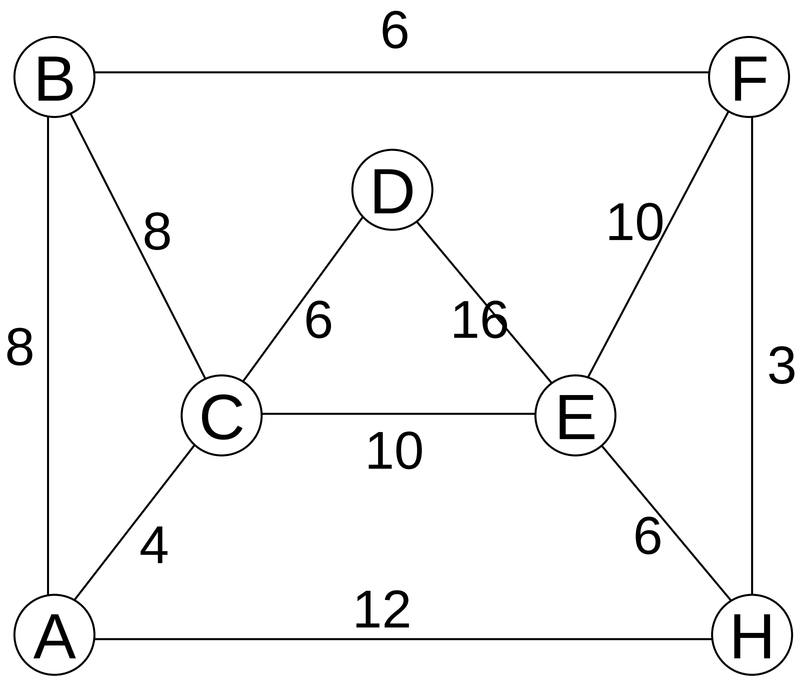
(1) Se elige un vértice cualquiera r
(2) Se calcula la excentricidad de r y un vértice v en que se alcanza la excentricidad
(3) La excentricidad de v es el diámetro de T

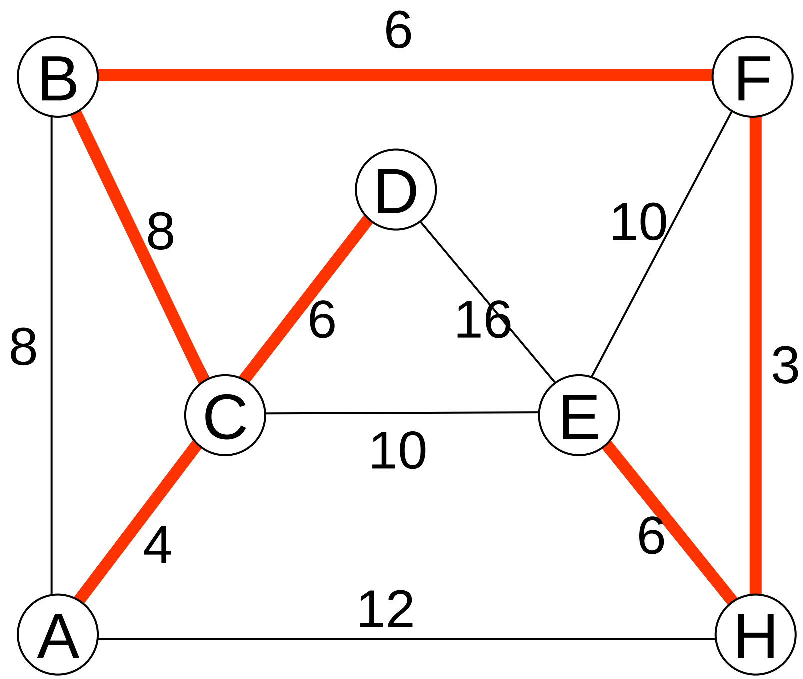
Demostración de la corrección del algoritmo. Ejercicio

Complejidad: O(n)
La clave es un algoritmo recursivo para calcular Exc(T,r)
Exc(T,r) = max {exc(T_s, s) + w(r,s) / para s hijo de r }
Así, con un recorrido post-orden, se calcula la excentricidad de r en tiempo lineal

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Dado (G,w) hallar el árbol generador de diámetro mínimo



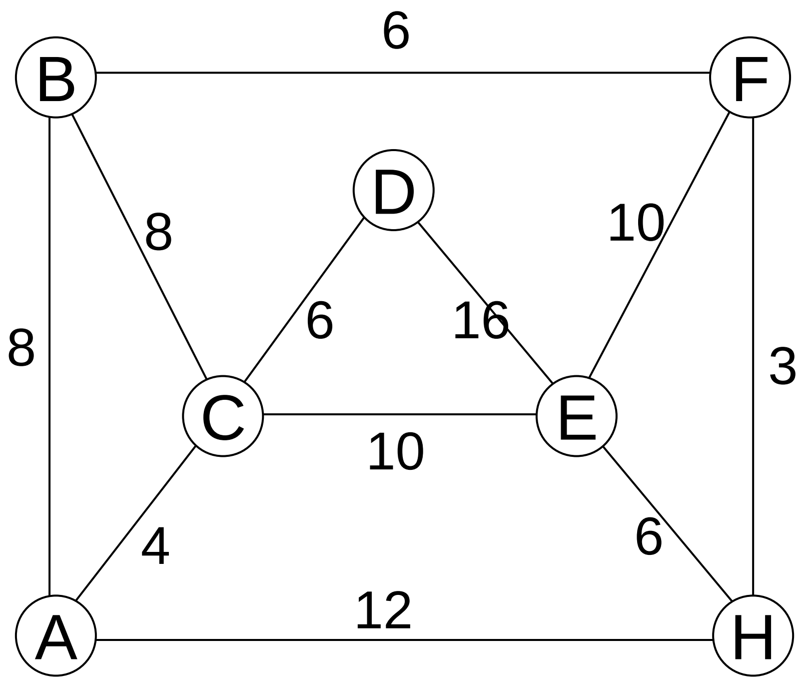


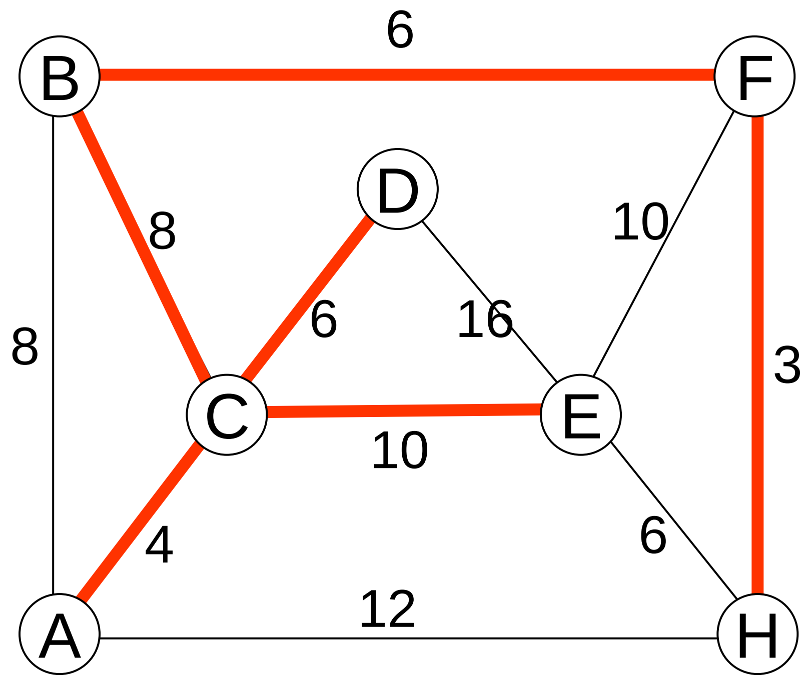
MST(G) peso 33

diámetro 29

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Dado (G,w) hallar el árbol generador de diámetro mínimo





MDST(G) peso 37
diámetro 27

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Dado G (sin pesos) hallar el árbol generador de diámetro mínimo

Algoritmo polinómico para construir un árbol generador de diámetro casi mínimo.

Sea T un árbol generador de G y x un vértice del centro de T.

El diámetro de T es o bien $2e_T(x)$ o bien $2e_T(x) - 1$, según que el árbol T tenga uno o dos vértices en el centro.
La excentricidad de x en G es a lo más $e_T(x)$.

¿Cuál debe ser el centro del MDST?

Parece "razonable" que sea un vértice del centro de G

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Dado G (sin pesos) hallar el árbol generador de diámetro mínimo

Algoritmo polinómico para construir un árbol generador de diámetro casi mínimo.

Sea z un vértice de C(G) y sea T_z un árbol generador de G construido por búsqueda en anchura empezando en z

Como z tiene excentricidad mínima en G, z también está en $C(T_z)$

Por tanto, el diámetro de T_z es o bien $d = 2e_z(G)$ o bien $d = 2e_z(G) - 1$

Además $diam(T^*) \geq 2e_z(G) - 1$ para cualquier otro árbol T*

El árbol T_z difiere a lo sumo en una unidad del MDST

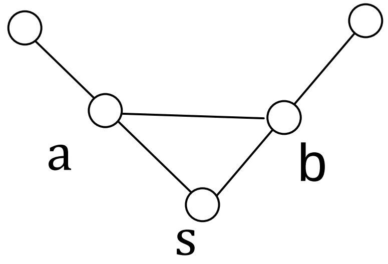
MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

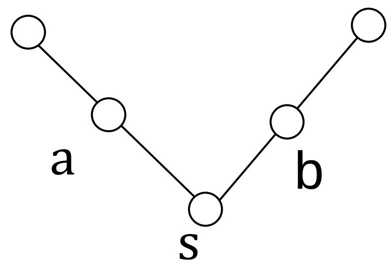
Dado G (sin pesos) hallar el árbol generador de diámetro mínimo

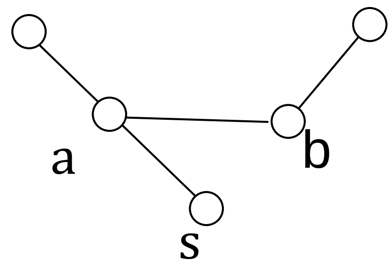
Algoritmo polinómico para construir un árbol generador de diámetro casi mínimo.

Complejidad $O(n^3)$

El resultado es el mejor posible a partir del centro de G







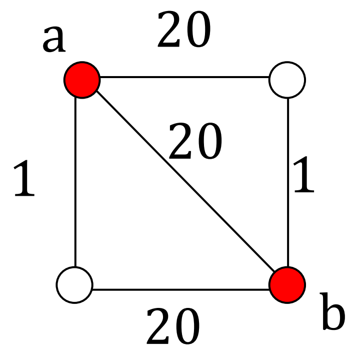
$C(G) = \{a,b,s\}$

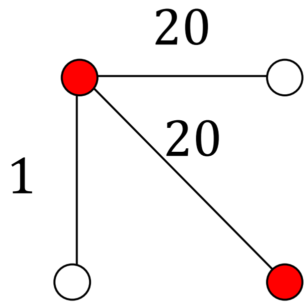
$\mathrm{diam}(T_s) = 4$

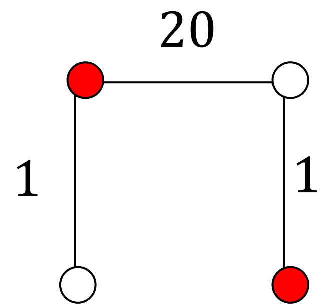
$\mathrm{diam}(T_a) = 3$

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Dado G (con pesos) hallar el árbol generador de diámetro mínimo







C(G) = {a,b}   Diam(T_a) = 40   Diam(T*) = 22

NO sirve la estrategia de construir un árbol de caminos mínimos desde un vértice del centro de G

MDST versus 1-CENTRO ABSOLUTO

Un vértice u pertenece al centro de (G,w) si exc(u) es mínima

Consideramos todos los puntos P(G) de todas las aristas de G y extendemos la noción de distancia en G a todo P(G)

Para cada par de puntos x, y de P(G), se define dist(x,y) como la longitud del camino mínimo entre x e y a través de las aristas de G. También podemos construir para cada z $\in$P(G) el árbol de caminos mínimos desde z a todos los vértices de G

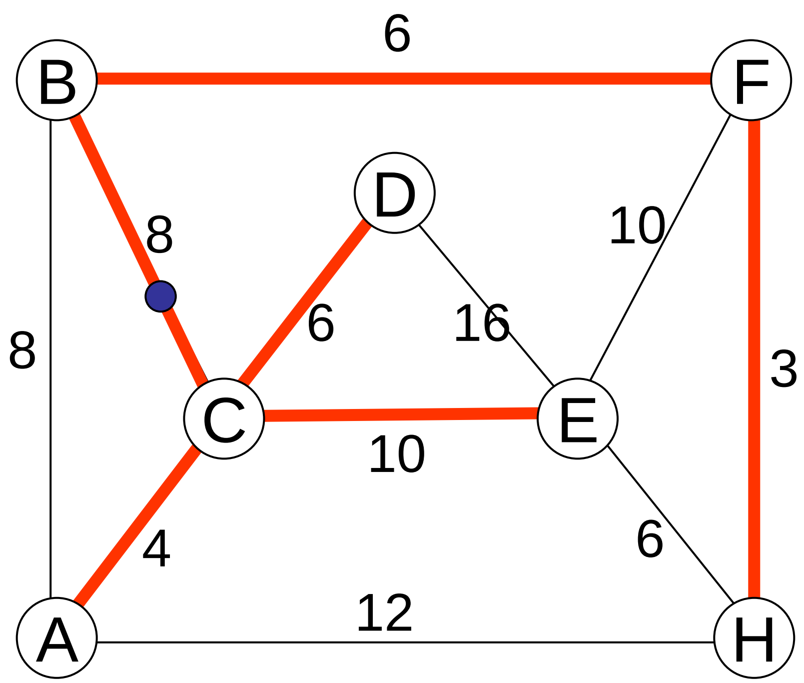
Para cada x de P(G) se considera la función $f(x) = \max \{dist(x,v) / v \in V(G)\}$

Un 1-centro absoluto de G es un punto en el que se minimiza f

En un grafo puede haber varios 1-centros absolutos, pero en un árbol el 1-centro es único. La razón es que en un árbol dos diámetros cualesquiera no son disjuntos

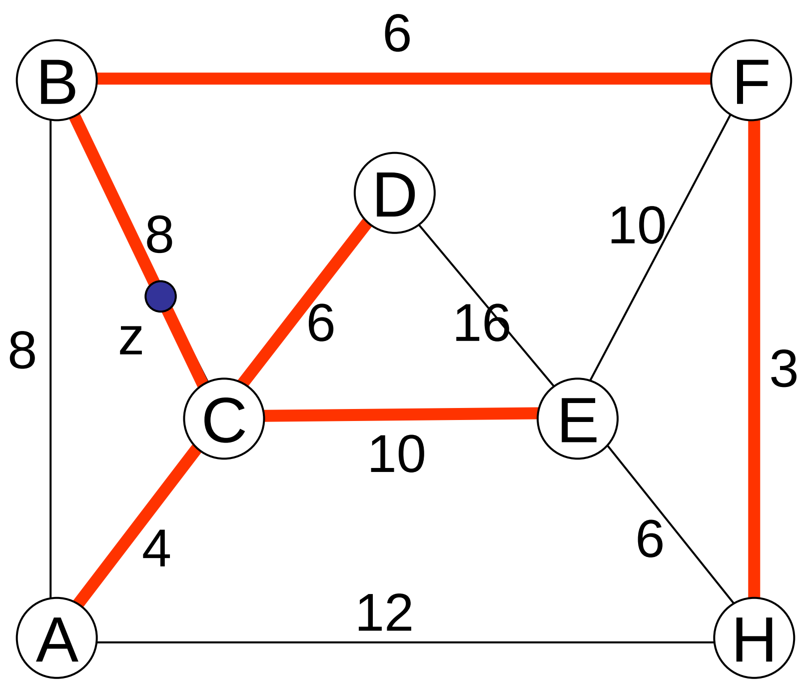
MDST versus 1-CENTRO ABSOLUTO

Un punto (interior de una arista) es 1-centro absoluto de G si su excentricidad es mínima



MDST versus 1-CENTRO ABSOLUTO

Si z es un 1-centro absoluto de G entonces cualquier árbol de caminos mínimos con raíz en z es un MDST del grafo G



MDST versus 1-CENTRO ABSOLUTO

Si z es un 1-centro absoluto de G entonces cualquier árbol de caminos mínimos con raíz en z es un MDST del grafo G

Dem.:
Sea diam(G) el diámetro de G, T un árbol generador, u 1-centro de T
$\mathrm{diam}(T) = 2\,\mathrm{dist}_T(u,V)$

Sea T* árbol de caminos mínimos con raíz en z, un 1-centro de G.
z es el punto medio de cualquier camino diametral de T*

Por tanto,
$\mathrm{diam}(T^*) = 2\mathrm{dist}_{T^*}(z,V) = 2\mathrm{dist}_G(z,V) \leq 2\mathrm{dist}_G(u,V) \leq 2\mathrm{dist}_T(u,V) = \mathrm{diam}(T)$

Y así T* es un árbol generador de diámetro mínimo, $T^* = \mathrm{MDST}(G)$

MDST versus 1-CENTRO ABSOLUTO

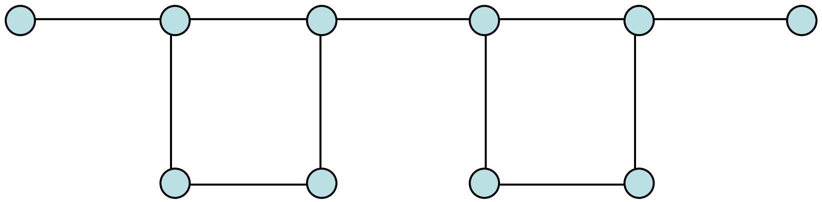
¿Cómo calcular el 1-centro absoluto de G ?

O. Kariv, S.L. Hakimi, "An algorithmic approach to network location problems: The p-centers", SIAM J. Appl. Math, 37 (1979), 513-537

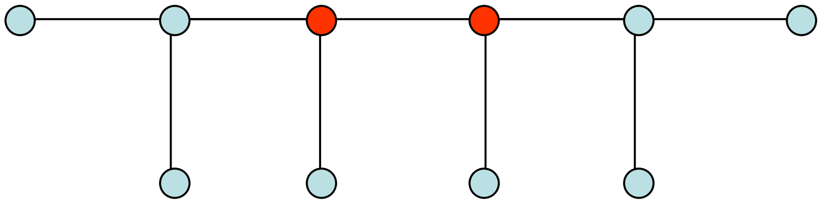
Complejidad: $O(nq + n^2 \log n)$

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

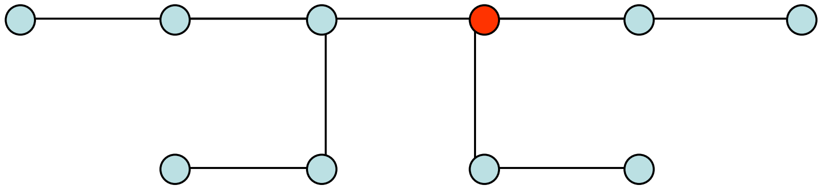
MDST ¿es único?



G



T* = MDST(G)



Árbol de caminos mínimos en G
desde un vértice del centro de T*

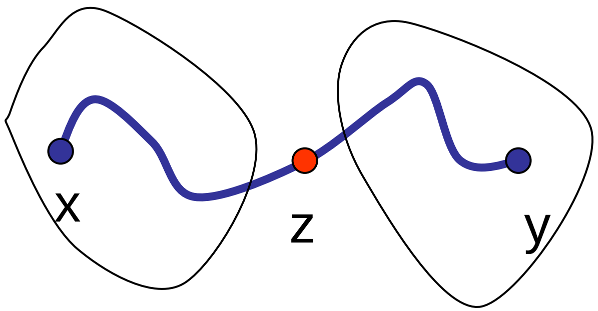
También es MDST(G)

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Recordemos

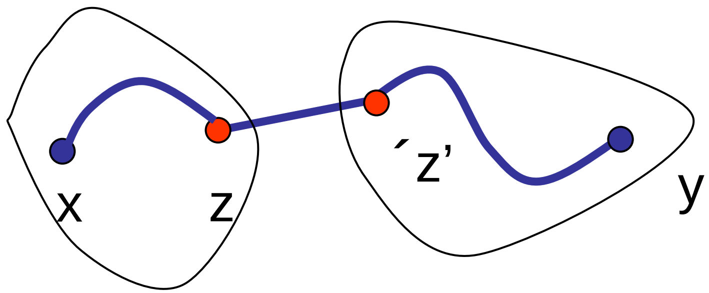
En un árbol el centro, o bien es un vértice o bien dos vértices adyacentes.

Todos lo caminos diametrales pasan por el centro



Caso 1

diam(T) = 2rad(T)



Caso 2

diam(T) < 2rad(T)

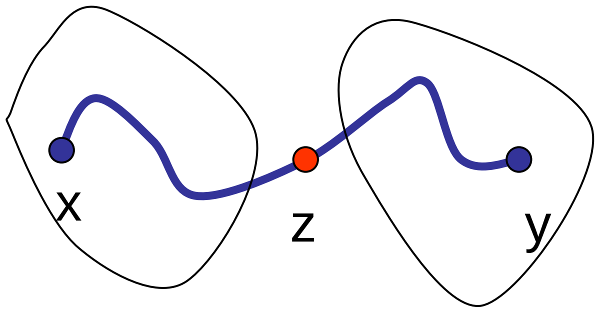
MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Propiedades del MDST

Sea T un MDST del grafo G. Distinguimos los dos casos anteriores

Caso 1) diam(T) = 2 rad(T)

$\text{dist}_T(x,z) = \text{dist}_T(z,y)$



Sea S un árbol de caminos mínimos con raíz en z (el centro de T)

Para cada vértice v, $\text{dist}_S(z,v) = \text{dist}_G(z,v) \leq \text{dist}_T(z,v)$
La excentricidad de z en S es la misma que en T, luego S es también un MDST

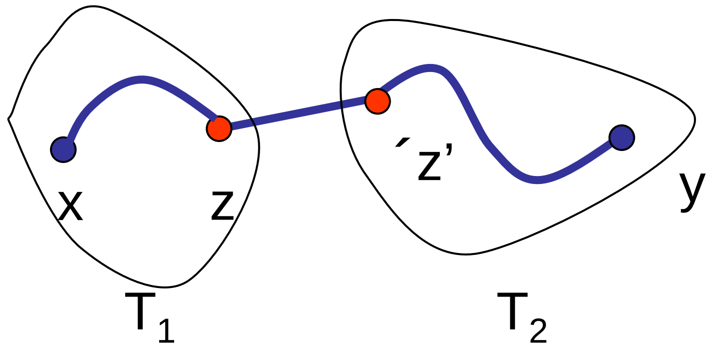
Cualquier árbol de caminos mínimos con raíz en el centro de un MDST, es también un MDST del grafo

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Propiedades del MDST

Sea T un MDST del grafo G. Distinguimos los dos casos anteriores

Caso 2) diam(T) < 2 rad(T)



$dist_T(x,z) \neq dist_T(z,y)$

Suponemos $dist_T(x,z) \leq dist_T(z',y)$

Empezamos por el caso euclídeo, es decir, los pesos de las aristas son las longitudes de las aristas.

Construimos la estrella de los vértices de T_1 con centro z y la estrella de los vértices de T_2 con centro z'

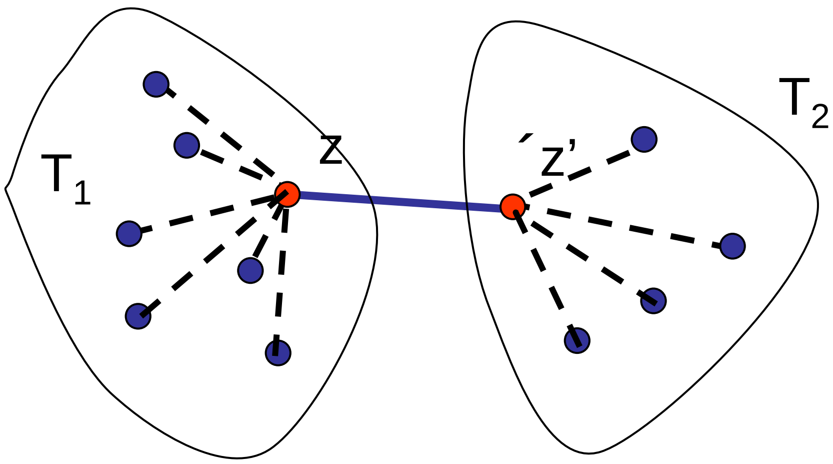
MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Propiedades del MDST

Sea T un MDST del grafo G. Distinguimos los dos casos anteriores

Caso 2) diam(T) < 2 rad(T)

Situación euclídea



Las estrellas de centros z, z'
y la arista zz' forman un
árbol generador S del grafo G

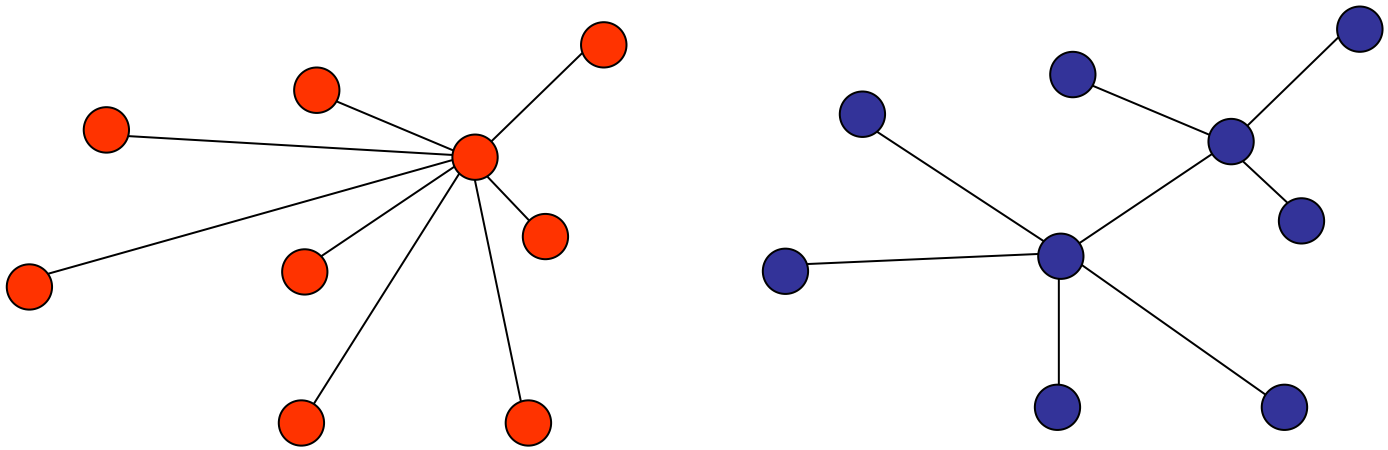
diam(S) = diam(T) luego S también es un MDST del grafo G

Volviendo al caso 1, situación euclídea ….
¡El árbol SP(G,z) es la estrella con centro z! Luego es también un MDST

EUCLIDEAN MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE

Dado un conjunto de puntos en el plano S, hallar el árbol generador del grafo geométrico completo K_S de diámetro mínimo

Hay un MDST que es, o bien estrella (**monopolar**),
o bien biestrella (**dipolar**)



Algoritmo Ho, Li, Chang, Wong 1991

O(nlogn) caso monopolar $O(n^3)$ caso dipolar

MINIMUM DIAMETER SPANNING TREE MDST

Algoritmo de construcción de MDST (sin utilizar el 1-centro absoluto)

Lema

Sea G = (V,A,w) grafo con pesos en las aristas. Existe un MDST del grafo G y una arista **ab** tal que para todo vértice x se cumple que

$dist_G(a,x) = dist_T(a,x)$ y $dist_G(b,x) = dist_T(b,x)$

Idea clave

Para cada arista uv se construye una partición (V_1, V_2) tal que
$dist(u, V_1) + dist(v, V_2)$ es mínimo con la restricción de que
$dist(x_1,u) – dist(x_1,v) \leq dist(x_2,u) – dist(x_2,v) \quad \forall\, x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2$

El diámetro del árbol correspondiente a la arista uv es

$$w(uv) + dist(u, V_1) + dist(v, V_2)$$

Luego se elige la mejor (mínimo diámetro) de todas las aristas

Complejidad O(qnlogn)