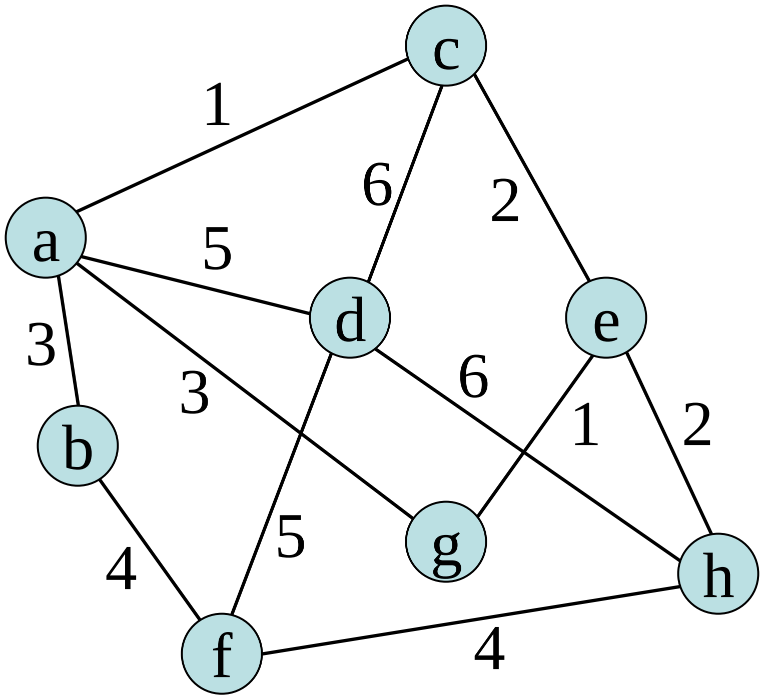
Universidad Politécnica
de Madrid

ÁRBOL DE RUTAS CON MÍNIMO COSTE (MRCT)

Gregorio Hernández
UPM

Optimización Combinatoria, 2018

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**



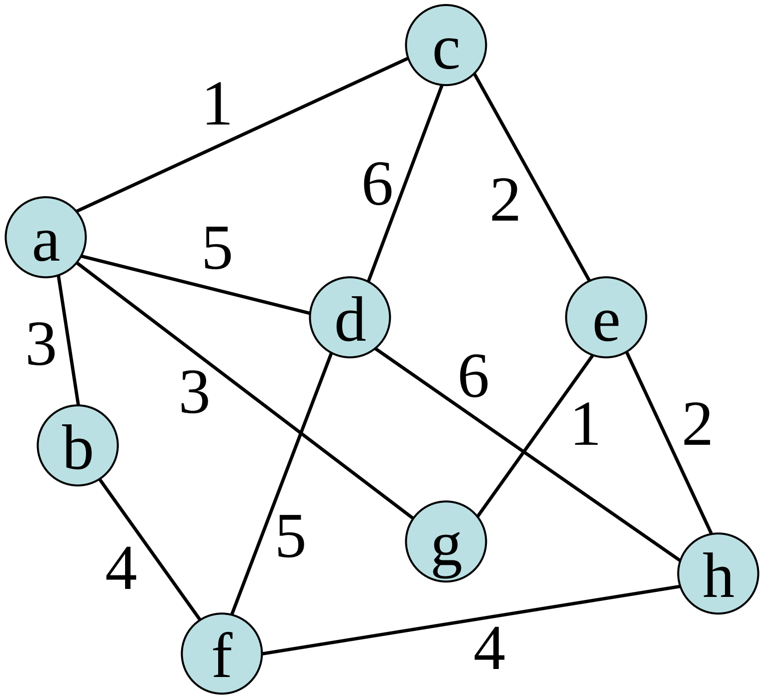
(G,w)

Red de comunicaciones

Hallar el árbol generador tal que el tiempo de comunicación (o coste) entre cada par de de nodos sea, en media, el menor posible.

Minimizar el tiempo (o coste) en media es equivalente a minimizar el tiempo total entre todos los pares de vértices

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**



(G,w)

Sea S un árbol generador de G

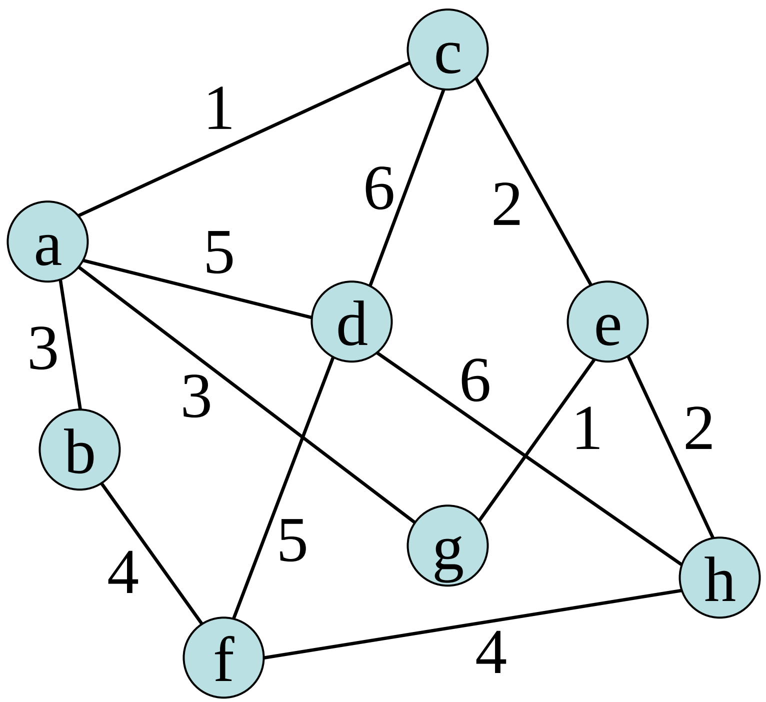
Routing Cost(S)

$$C(S) = \sum_{u,v} dist_S(u,v)$$

MRCT es el árbol generador que minimiza C(S)

El problema es NP-duro

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**



(G,w)

Sea S un árbol generador de G

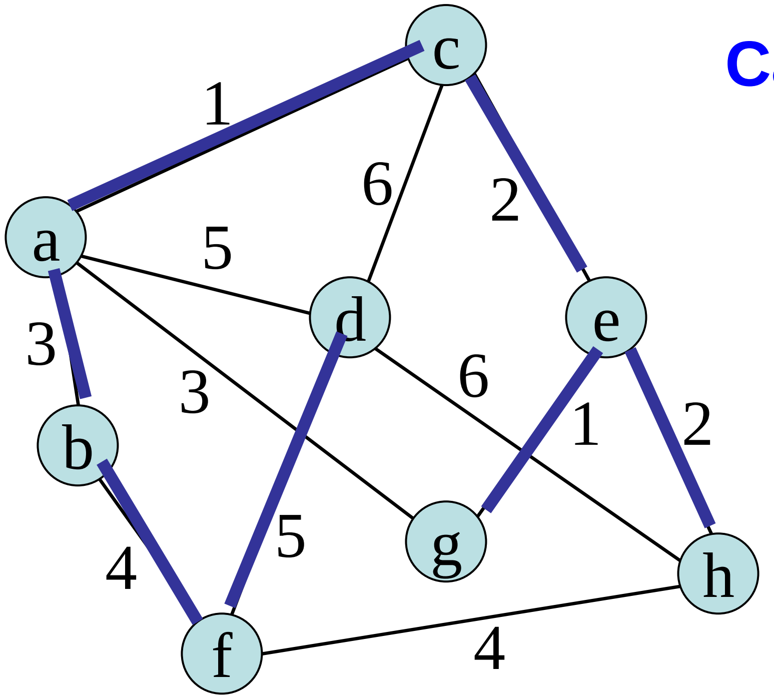
Routing Cost(S)

$$C(S) = \sum_{u,v} dist_S(u,v)$$

Mediana del grafo G
Vértices que minimizan

$$\text{dist\_total}(u) = \sum_{v} \text{dist}_S(u, v)$$

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**



(G,w)

¿Cómo calcular C(S)?

Carga de ruteo de una arista e* de S

S – e* tiene dos componentes de x y n – x vértices

R(S,e*) = 2x(n – x)

R(S,ce) = 30

R(S,bf) = 24

$$R(S,e^*) \le \frac{n^2}{2}$$

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**

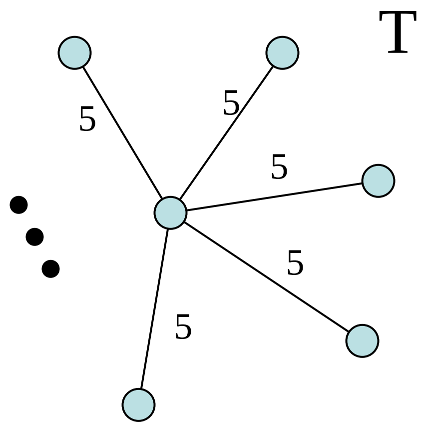
Lema $$C(T) = \sum_{e} R(T,e)w(e)$$

$$C(T) = \sum_{u,v} dist_T(u,v) = \sum_{u,v}\left(\sum_{e \in SP_T(u,v)} w(e)\right) =$$

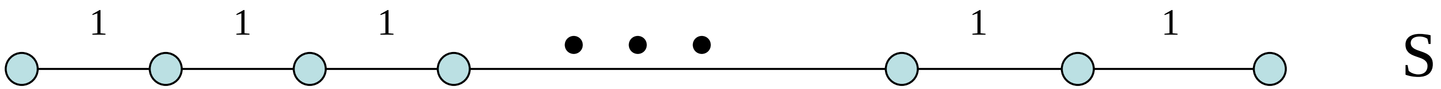
$$= \sum_{e}\left(\sum_{u \in V} \left|\{v / e \in SP_T(u,v)\}\right|\right) w(e) = \sum_{e} R(T,e)w(e)$$

Por tanto C(T) puede calcularse en tiempo lineal

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**



$$C(T) = \Sigma\, 2(n-1)5 = 10\,(n-1)^2$$

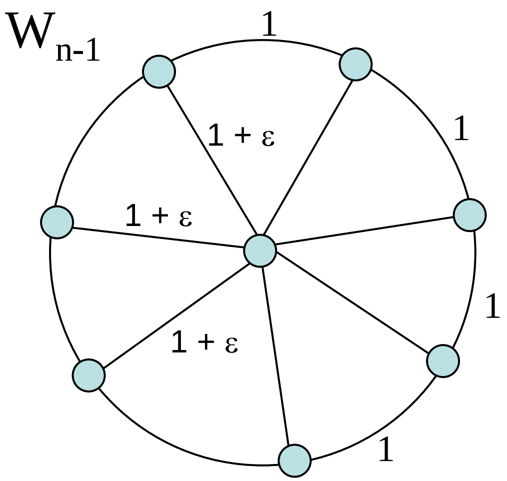


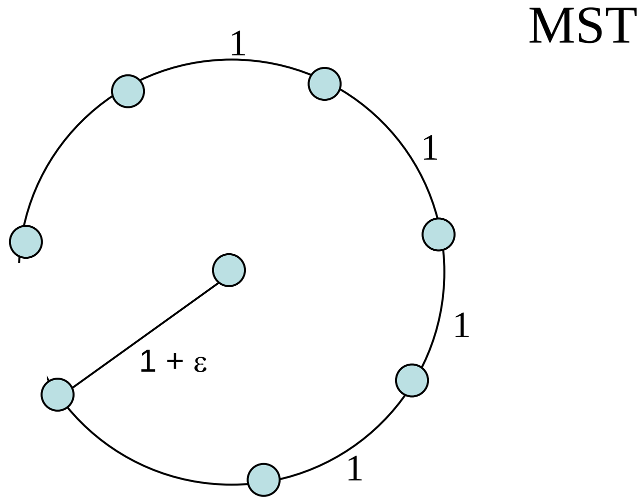
$$C(S) = 2(n-1) + 2\cdot 2\,(n-2) + \ldots\, 2\cdot i\,(n-i) + \ldots + 2\,(n-1)\cdot 1 =$$

$$= n^2(n-1) - \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

MST no es MRCT

La rueda W_{n-1} con n vértices y pesos unitarios en las aristas del ciclo y ligeramente superiores, $1 + \varepsilon$, en los radios



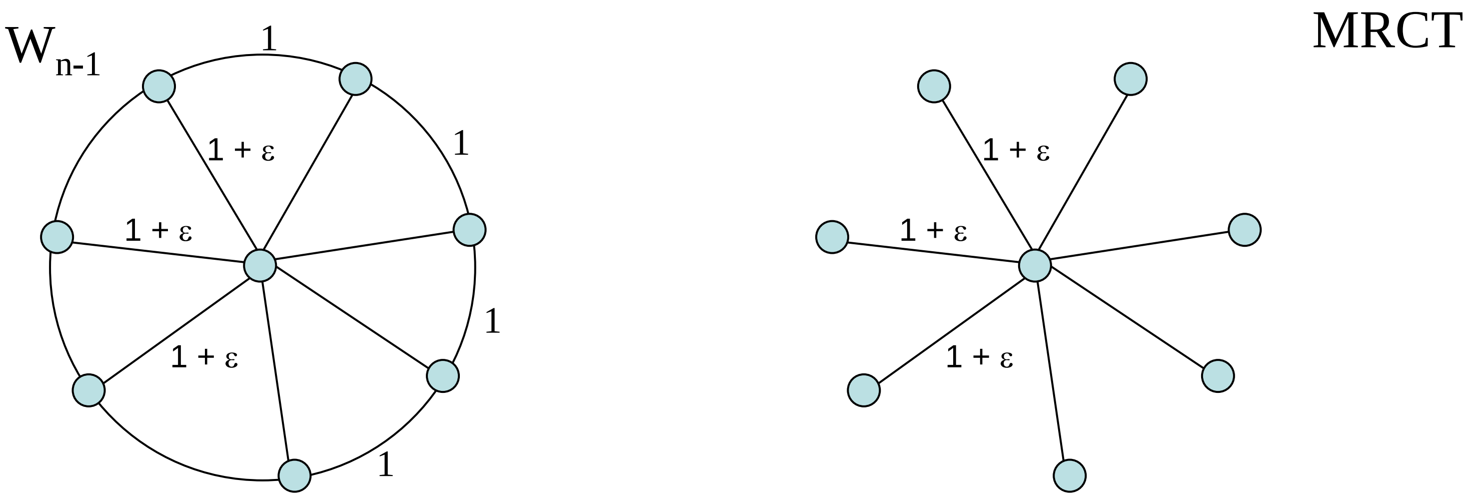


$$\text{Coste(MST)} = \sum_{e} R(T,e)w(e) = 2(n-1) + 2 \cdot 2(n-2) + \ldots + 2(n-2)2 + 2(n-1)(1+\varepsilon) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + 2(n-1)\varepsilon$$

MST no es MRCT

La rueda W_{n-1} con n vértices y pesos unitarios en las aristas del ciclo y ligeramente superiores, 1 + ε, en los radios



$$\text{Coste(MST)} = \sum_{e} R(T,e)w(e) = \sum_{e} 2(n-1)(1+\varepsilon) = 2(n-1)^2(1+\varepsilon)$$

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**

Teorema

El árbol de caminos mínimos desde un vértice r de la mediana de G, SPT(G,r), es una 2-aproximación al MRCT

Dem.

Para cualquier árbol generador S, $dist_S(u,v) \geq dist_G(u,v)$
luego si T* es el MCRT se tiene que $C(T^*) \geq \Sigma dist_G(u,v)$

Sea S árbol de caminos mínimos desde r
$dist_S(u,v) \leq dist_S(u,r) + dist_S(r,v)$ sumando resulta

$$C(S) = \sum_{u,v} dist_S(u,v) \leq n \sum_{u} dist_S(u,r) + n \sum_{v} dist_s(v,r) = 2n \sum_{v} dist_S(v,r)$$

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**

Teorema

El árbol de caminos mínimos desde un vértice r de la mediana de G, SPT(G,r), es una 2-aproximación al MRCT

Dem.

Pero r está en la mediana $$\sum_{v} \text{dist}_G(r,v) \leq \sum_{v} \text{dist}_G(u,v)$$

Luego $$\sum_{v} \text{dist}_G(r,v) \leq \frac{1}{n} \sum_{u,v} \text{dist}_G(u,v)$$

y como $\text{dist}_S(r,v) = \text{dist}_G(r,v)$
porque en un árbol S de caminos mínimos, el (único) camino de la raíz a cualquier vértice es un camino mínimo en G

Minimum Routing Cost Tree **MRCT**

Teorema

El árbol de caminos mínimos desde un vértice r de la mediana de G, SPT(G,r), es una 2-aproximación al MRCT

Dem.

y como $dist_S(r,v) = dist_G(r,v)$, sustituyendo resulta:

$$C(S) \le 2n \sum_{v} dist_S(v,r) \le 2n \frac{1}{n} \sum_{u,v} dist_G(u,v) \le 2C(T^*)$$

MRCT(G) Algoritmo 2-aproximado

1. Construcción de la **mediana**
2. Árbol de caminos mínimos desde un vértice de la mediana

http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/arboles_optimos/Principal.html

Complejidad $O(n^2 \log n + nq)$
(ShortestPathTree requiere $O(n\log n + q)$, Dijkstra)

La razón de aproximación es ajustada.
Considerar el grafo completo con peso unitario en cada arista

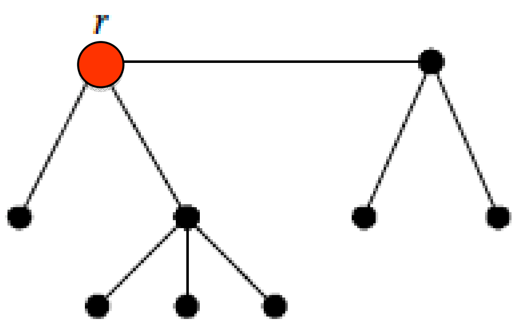
¿Cuál es la mediana del grafo? ¿Y el árbol de caminos mínimos?

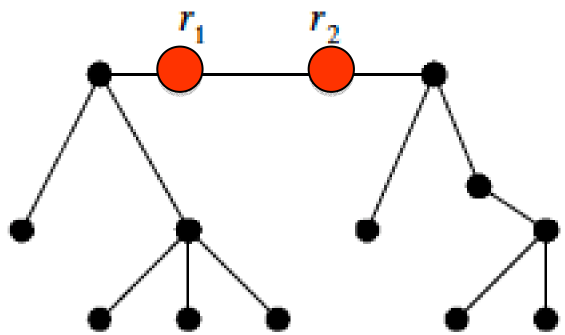
El coste de ruteo de la estrella es
$C(S) = 2(n – 1)(n – 2) + 2(n – 1) = 2(n – 1)^2$

$C(G) = n(n – 1)$ luego $C(S) \approx 2C(G) \leq 2C(\text{óptimo MRCT})$

MRCT(G) Centroide de un árbol

T árbol, un vértice z es **centroide** de T si cada componente de T – z contiene a lo sumo la mitad de los vértices.





Dado un árbol T y un vértice v, se llama **rama** en v a cada uno de los subgrafos maximales de T que tienen v como hoja.
El **peso** de un vértice v es el máximo número de aristas en una de sus ramas.
Los vértices de peso mínimo forman el **centroide** del árbol

El centroide coincide con la mediana en árboles

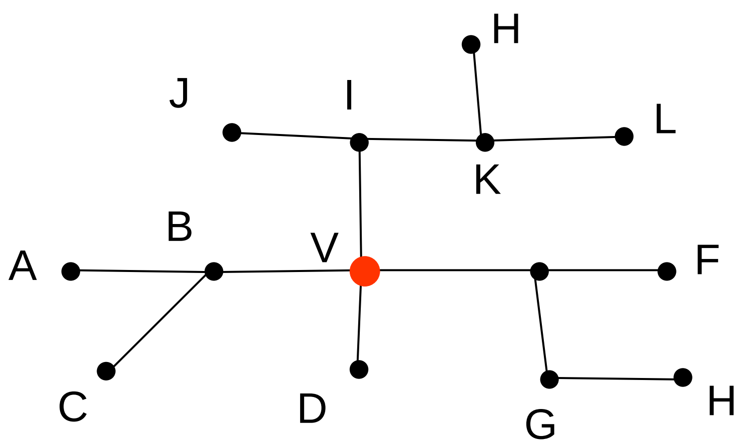
MRCT(G) Centroide de un árbol

Centralidad telefónica

Los vértices de un árbol T representan líneas telefónicas y un camino representa una llamada entre sus extremos. En un momento dado, un vértice solo puede involucrarse en una llamada.

El número de conmutador de v es el máximo número de llamadas que pueden a través de v, sb(v) (por *switchboard*)

El centro telefónico de T está formado por los vértices de conmutación máxima.



Llamadas a través de V
EJ, FI, GK, HL, AM, BD

V es el centroide

MRCT(G) Centroide de un árbol

Centralidad telefónica

El centro telefónico de un árbol coincide con el centroide

Lema

Para cualquier vértice v de un árbol T se cumple que $sb(v) \leq \frac{n-1}{2}$

MRCT(G) Centroide de un árbol

Algoritmo del centroide

1. Calcular el árbol de caminos mínimos desde cada vértice del grafo
2. Calcular el coste de ruteo de cada uno de esos árboles.
3. Elegir el árbol de menor coste

Complejidad

$O(n^2 \log n + nq)$

MRCT(G)

1. Mejores aproximaciones utilizando otros separadores

Un centroide es un (1/2)-separador $\Rightarrow$ 2-aproximación
Camino separador $\Rightarrow$ 3/2-aproximación

2. Reducción al caso métrico

3. PTAS (Esquema polinómico de aproximación)
   Algoritmo polinómico que construye una (1+ ε)-aproximación en tiempo $O(n^{2\left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil - 2})$

4. Aplicaciones: diseño de redes, biología computacional