# Coloración de grafos

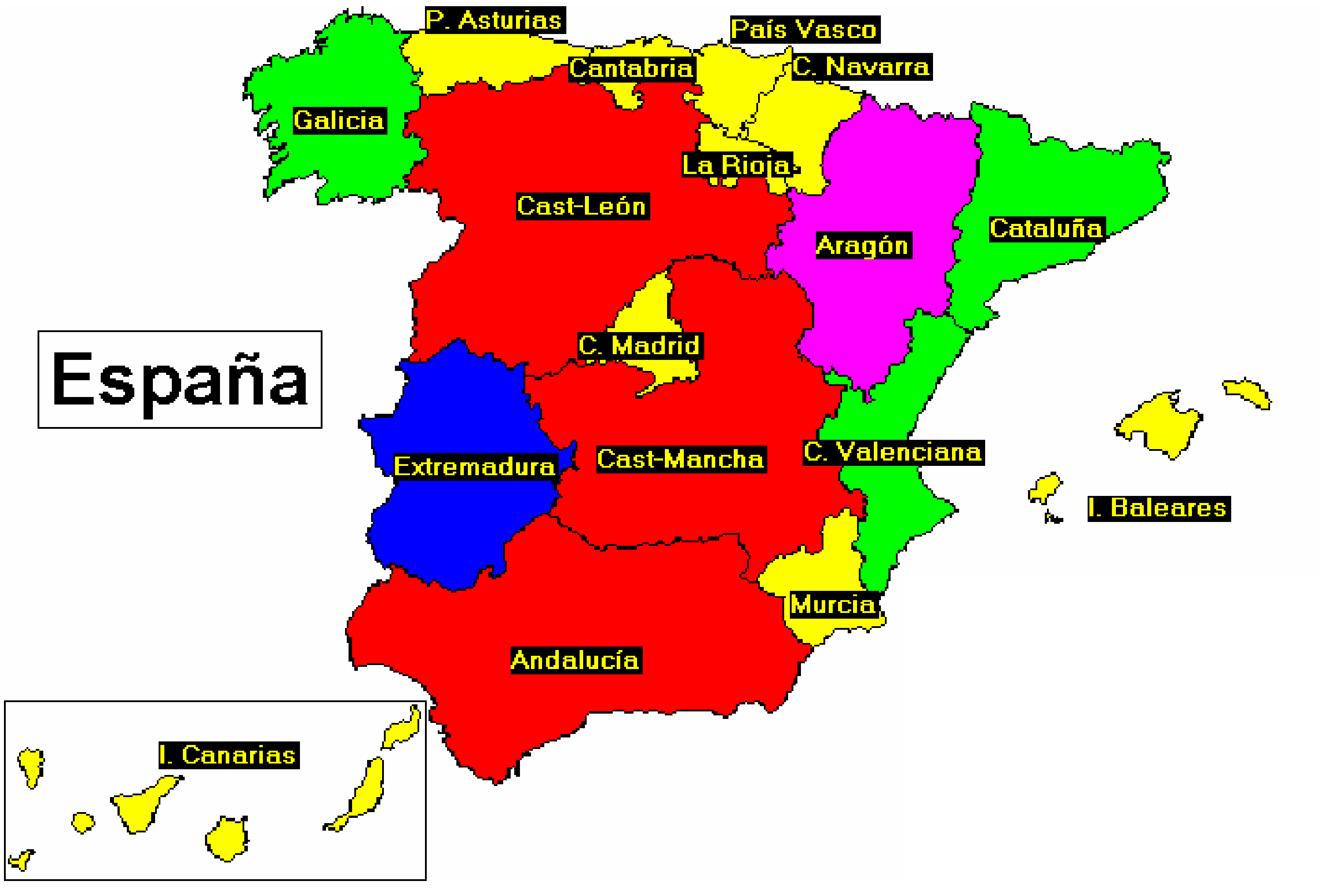
Gregorio Hernández Peñalver

UPM

**Matemática Discreta II**

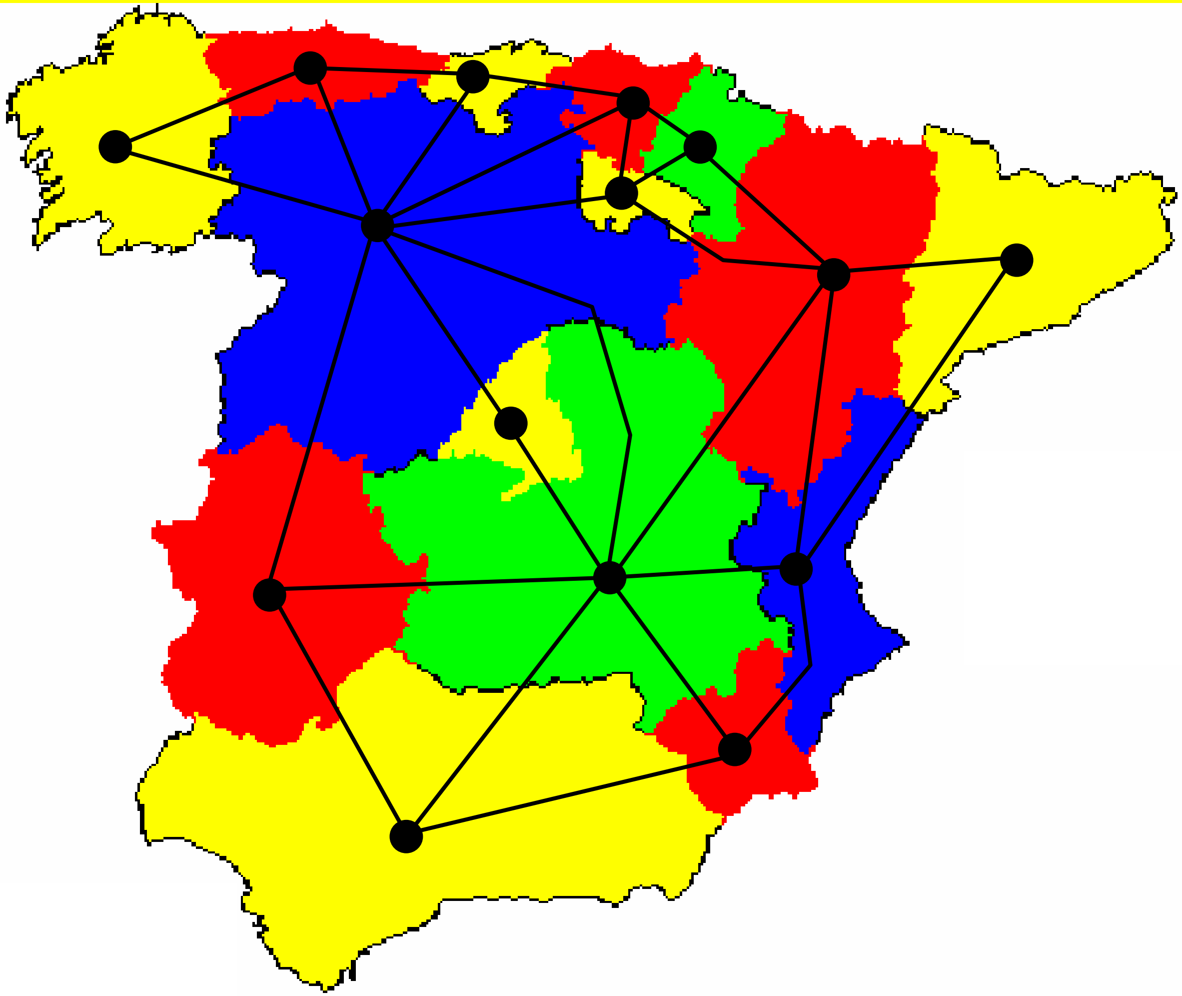
**(MI)**

# Coloreando mapas

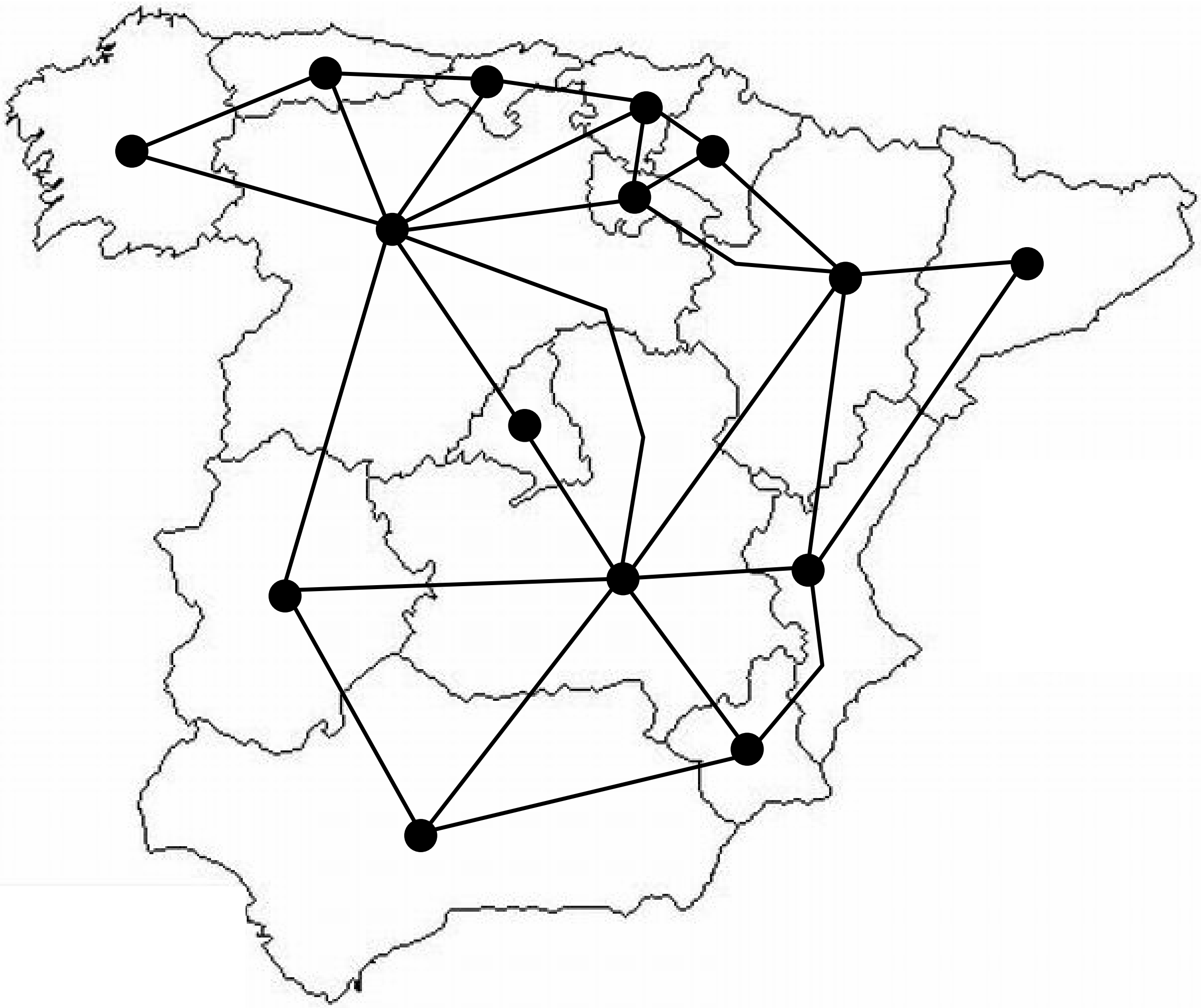


# Coloreando mapas

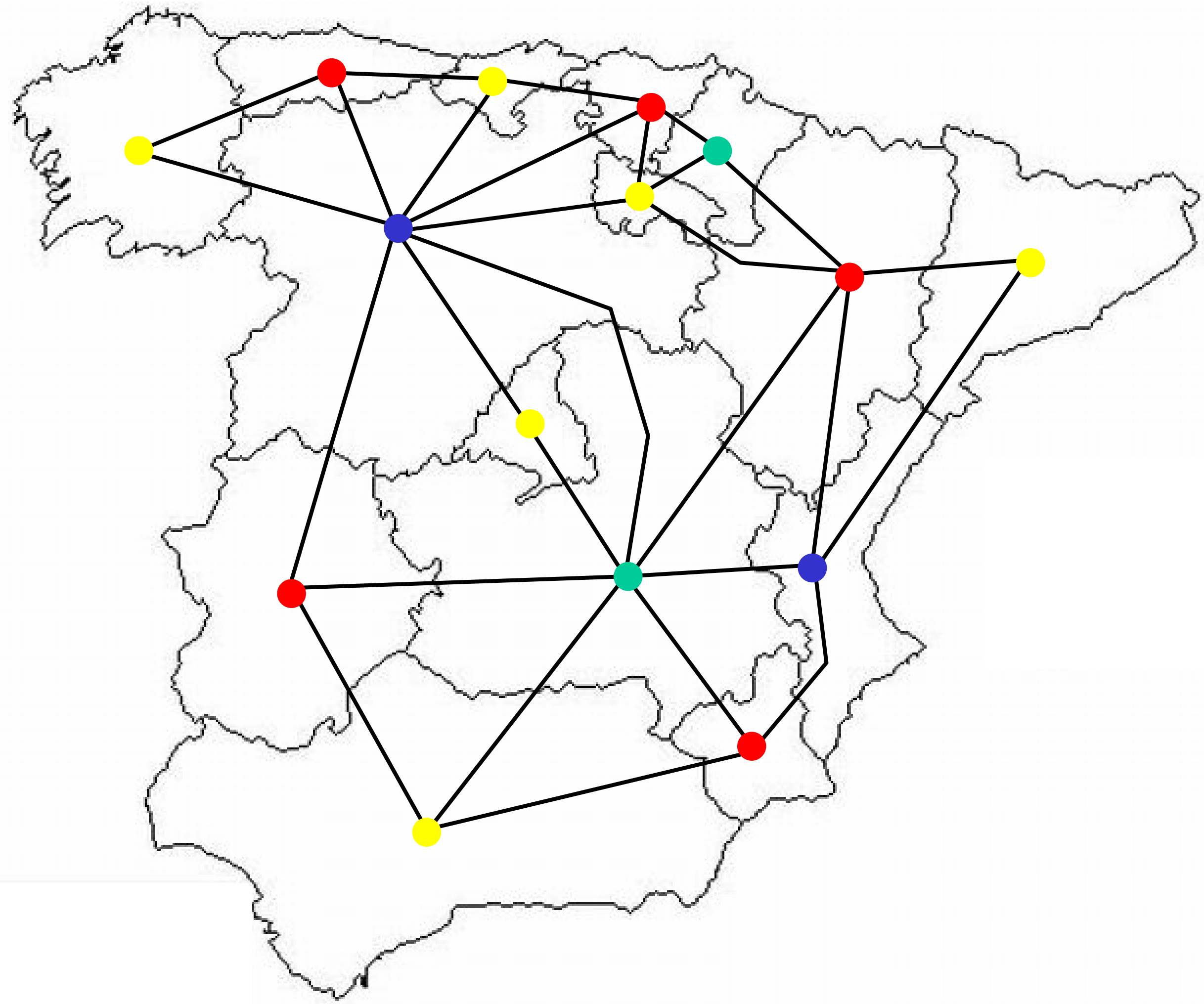
# Coloreando mapas



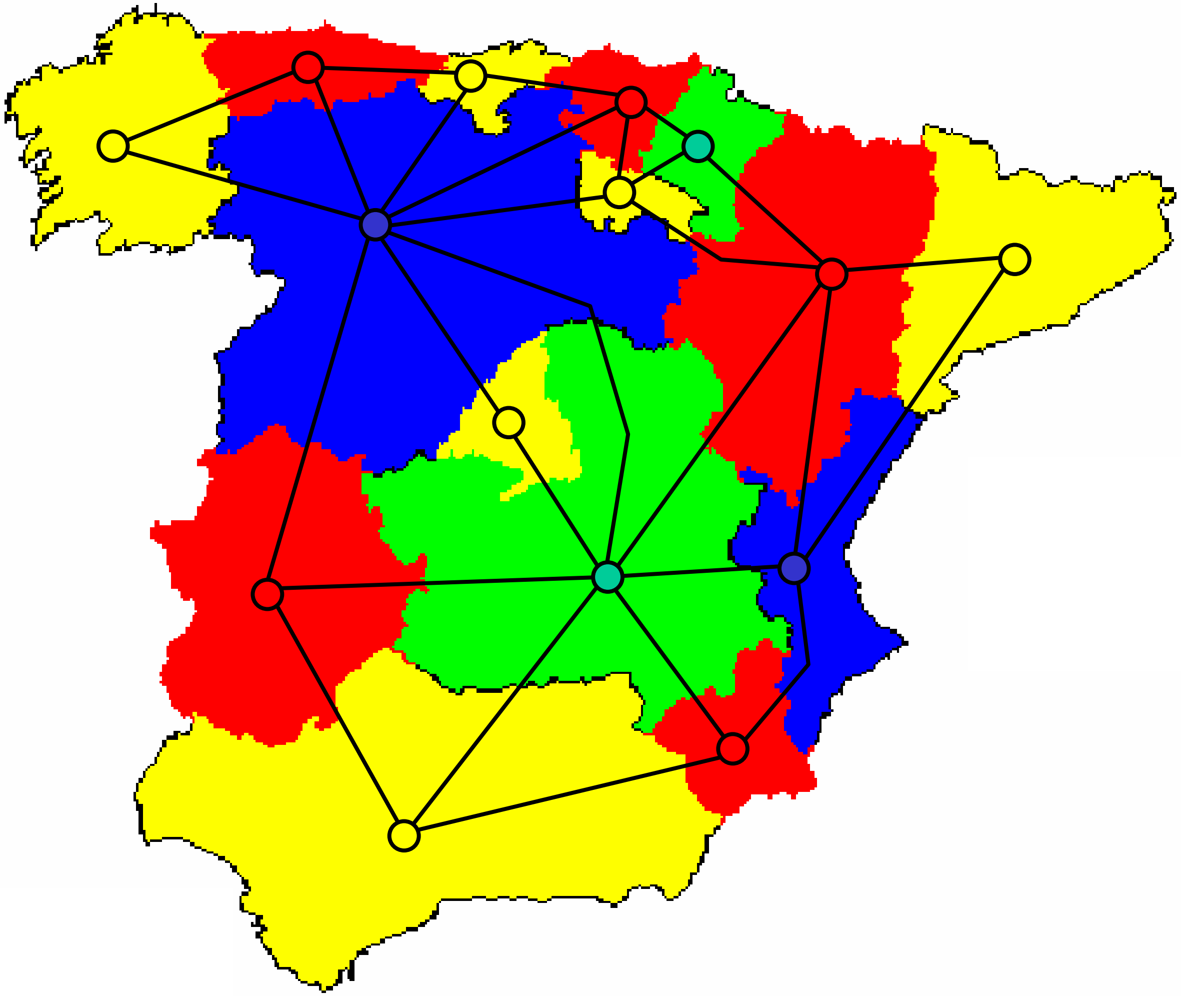
# Coloreando mapas



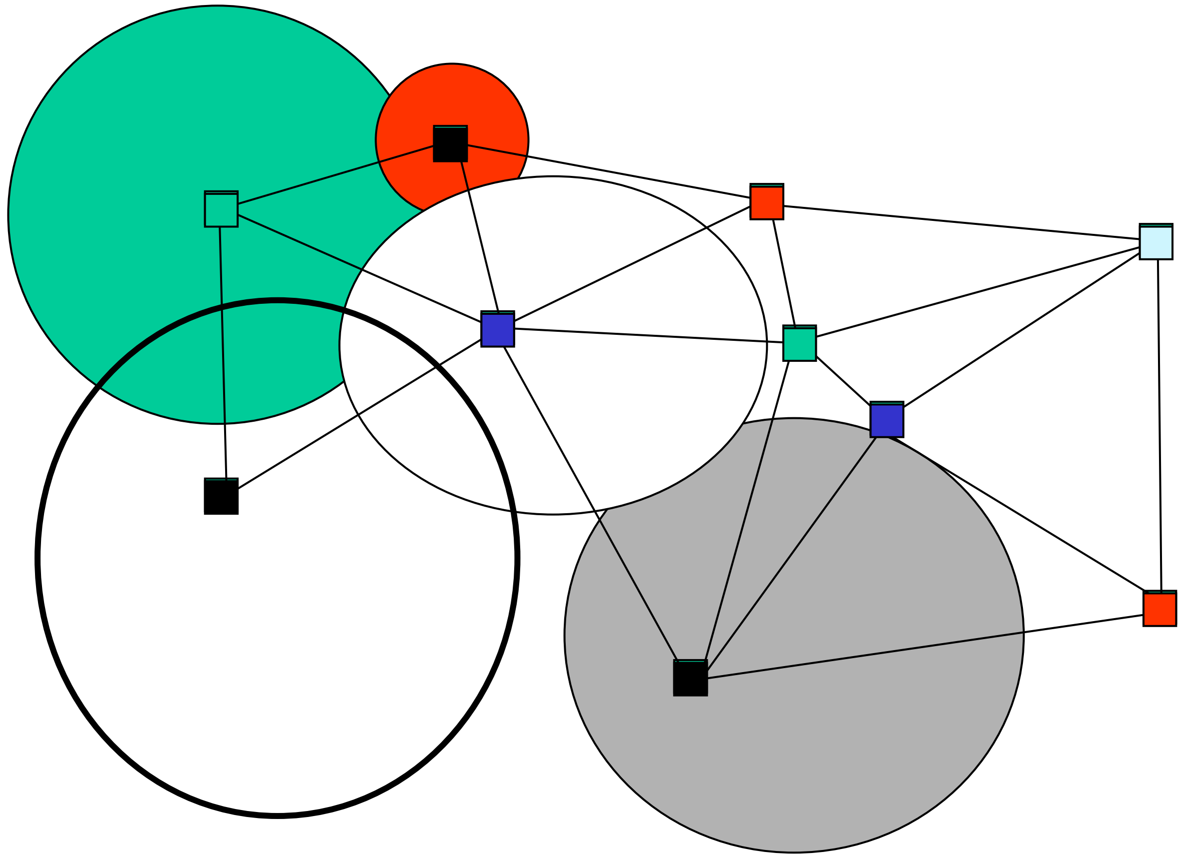
# Coloreando mapas



# Coloreando mapas

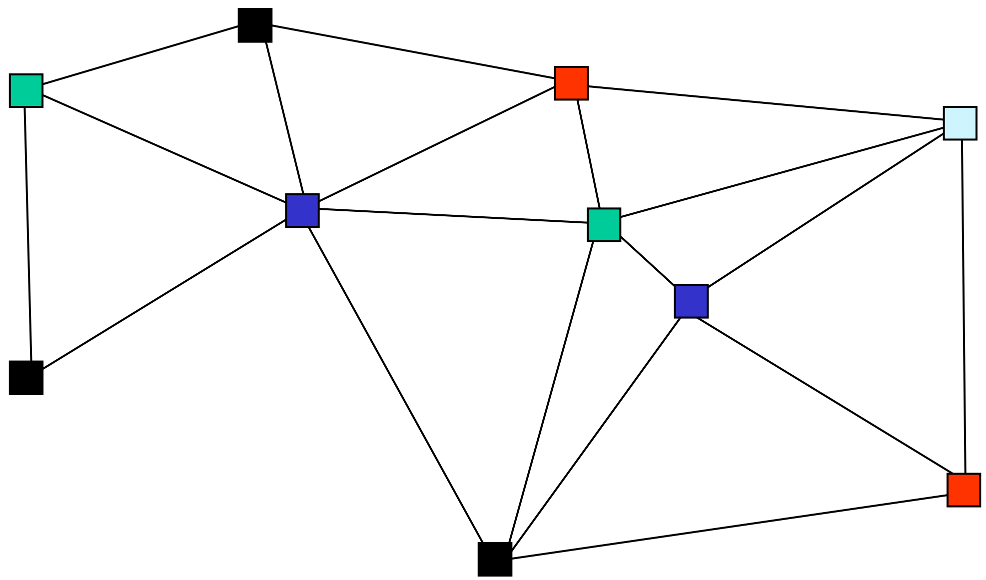


# Asignación de frecuencias de radio



# Asignación de frecuencias de radio

Cada color corresponde a una frecuencia

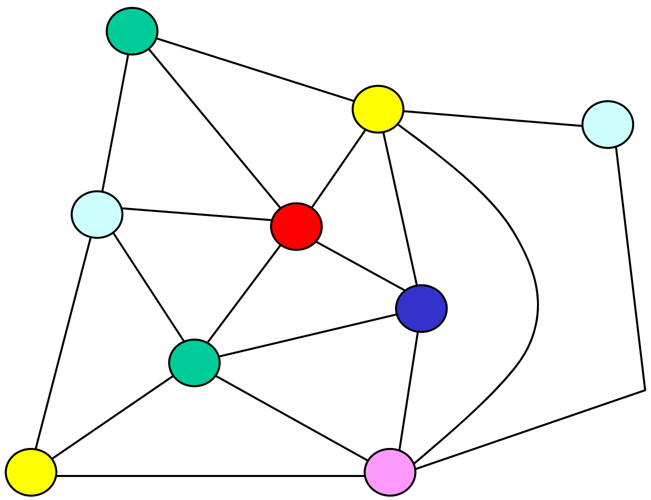


Vértices adyacentes deben recibir distinto color

¿Cómo son los vértices negros? ¿y los azules?

# Coloración de vértices en un grafo

Vértices adyacentes reciben diferente color



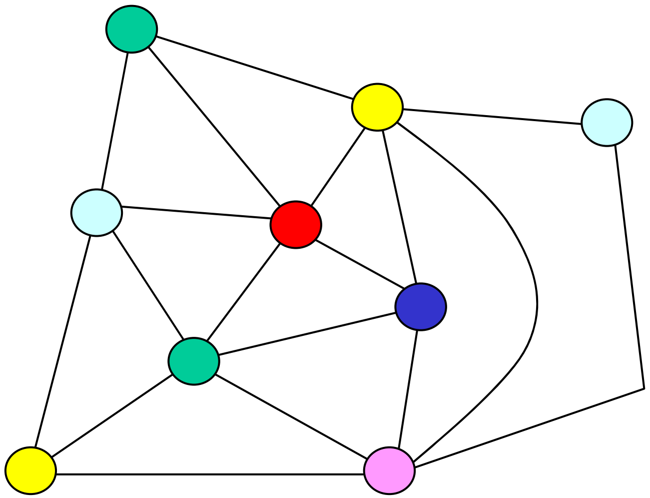
Una 6-coloración de G

Los vértices del mismo color forman una **clase de color**

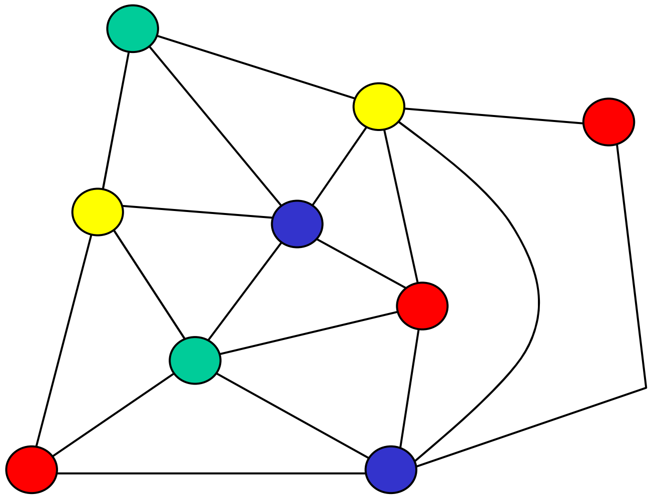
$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6$$

$V_1$={amarillos}, $V_2$={verdes}, $V_3$={rojos}, …

# Coloración de vértices en un grafo



Una 6-coloración de G



Una 4-coloración de G

No hay 3-coloración de G

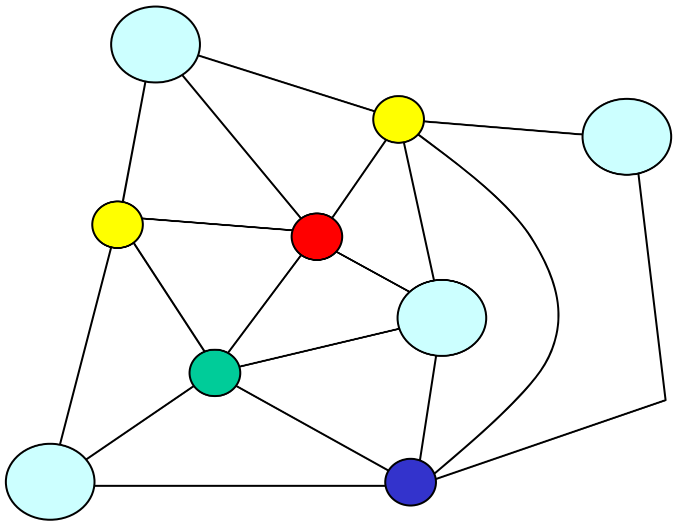
El nº cromático de G es 4

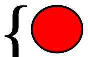
$\chi(G) = 4$

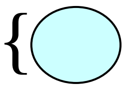
# INDEPENDENCIA

Conjunto **independiente** de vértices

$S \subset V$ es independiente si no hay vértices adyacentes entre sí en S



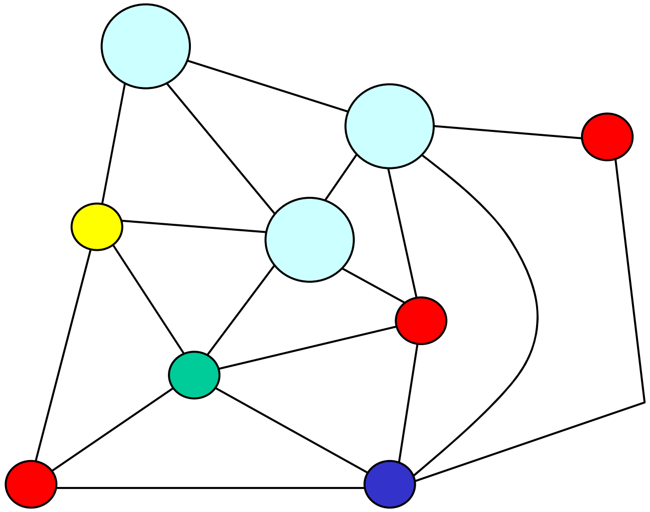
S ={}

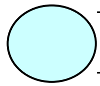
S'={}

Nº de independencia de G $\alpha(G) = 4$

## Clique o clan en un grafo

$S \subset V$ es **clique** si dos vértices cualesquiera de S son adyacentes

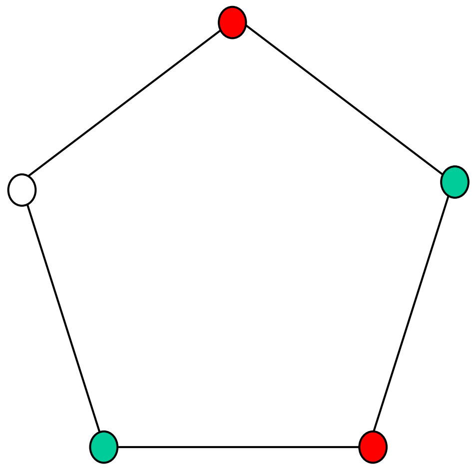


S={  }

Nº de clique de G $\omega(G) = 3$

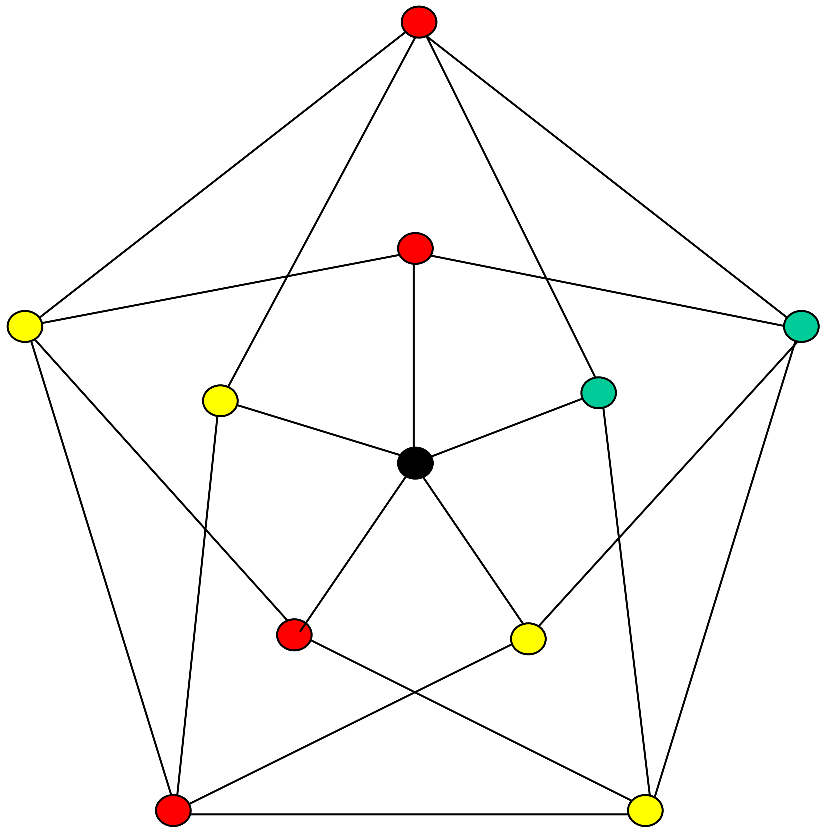
# Propiedades del nº cromático

- Si un grafo tiene n vértices entonces $\chi(G) \leq n$
- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ G es un grafo bipartido
- $\chi(G) \geq 3 \Leftrightarrow$ G tiene ciclo impar



- Si G contiene a $K_n$ como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq n$.
- Los vértices de una clique necesitan diferentes colores, luego $\chi(G) \geq \omega(G)$
- Vértices independientes pueden recibir el mismo color, luego $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$

# Grafo de Grötzsch



## Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo entero positivo c, existe un grafo sin triángulos y de nº cromático c

# Algoritmos de coloración

Tipos:

- –Algoritmos secuenciales
- –Algoritmos que buscan conjuntos independientes

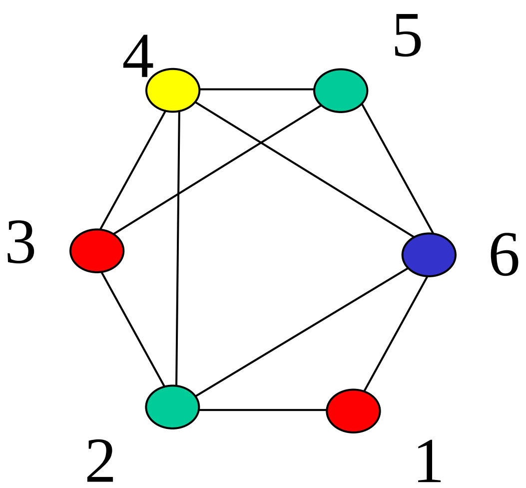
# Algoritmo secuencial básico

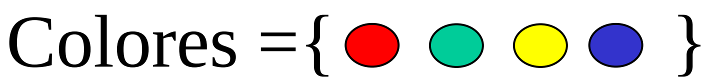
*Entrada*: Una ordenación de los vértices de un grafo G

*Salida*: Una coloración de los vértices

*Paso* 1: Asignar el color 1 al vértice $v_1$

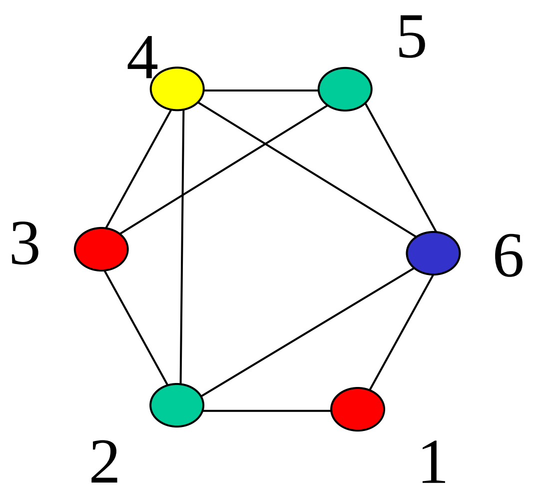
*Paso* 2: Si hemos coloreado $v_1$, $v_2$, …, $v_k$ con j colores, asignamos a $v_{k+1}$ el color t, donde $t \leq j+1$ es el mínimo color permitido para $v_{k+1}$, según los colores ya asignados a sus vecinos.



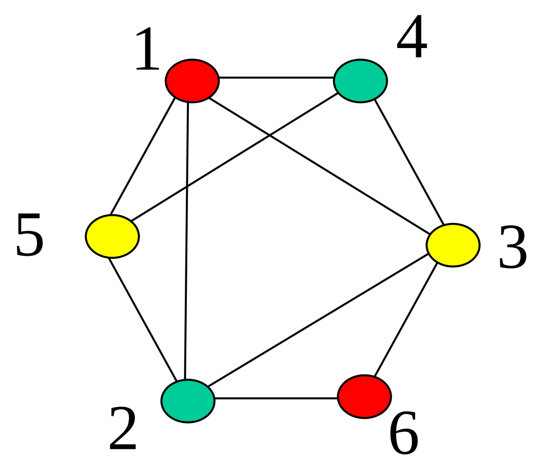
## *“Primero el de mayor grado”*

En esta variante, debida a Welsh y Powell, se ordenan los vértices inicialmente de acuerdo a sus grados. Es decir, ordenamos de forma que $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.




Una 4-coloración con

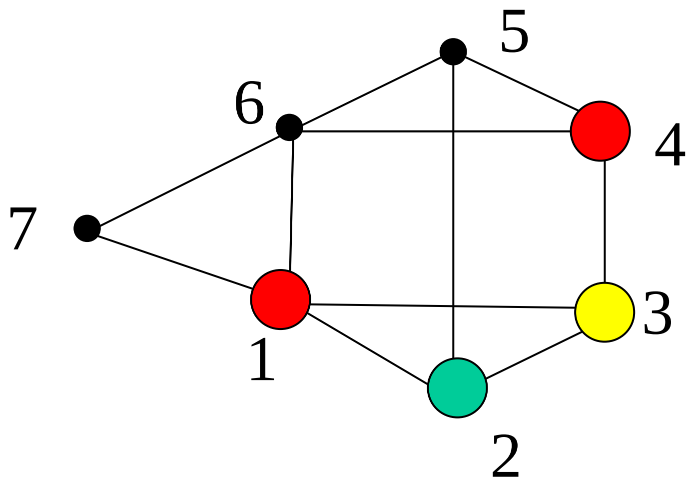
el algoritmo básico




Una 3-coloración con la variante

# Algoritmo de Brelaz

**Grado de color** o **grado de saturación** de un vértice v es el nº de colores usados en los vecinos de v.



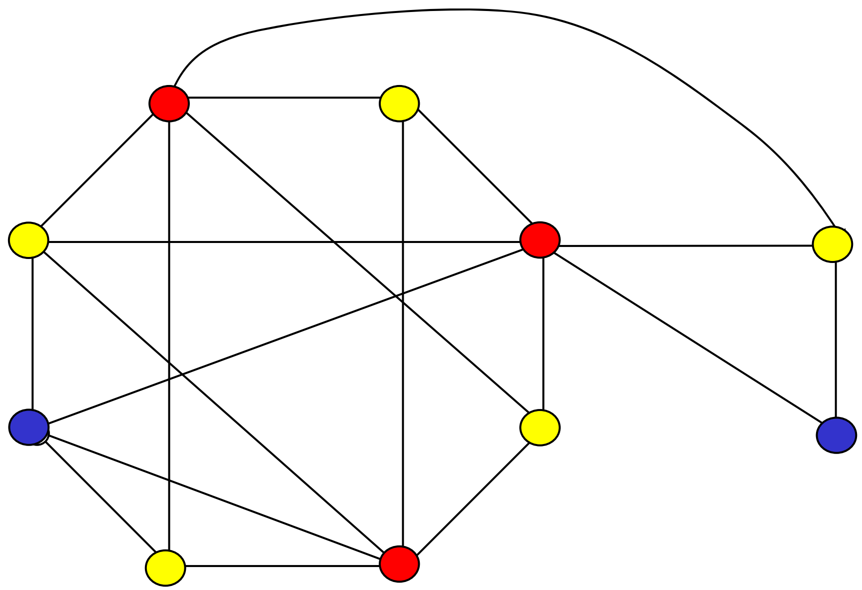

gs(5)=2

gs(6)=1

El orden en que iremos coloreando vértices depende del grado y del grado de saturación

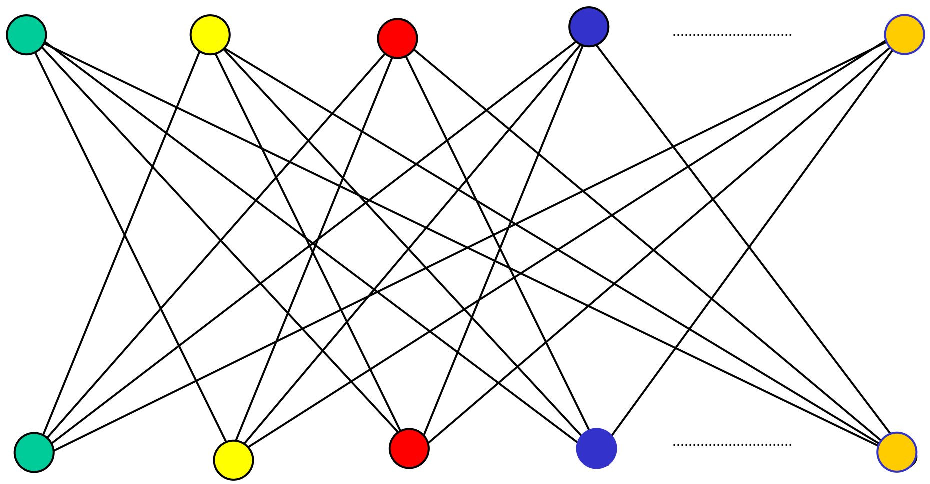
# Algoritmo de Brelaz

*Paso 1*: Ordenar los vértices en orden decreciente de grados
*Paso 2*: Coloreamos un vértice de grado máximo con el color 1
*Paso 3*: Seleccionamos un vértice, aún sin colorear, con grado de color máximo. Si hay varios, elegimos el de grado máximo.
*Paso 4*: Colorear el vértice seleccionado en el paso 3 con el menor color posible.
*Paso 5*: Si todos los vértices se han coloreado, FIN. En caso contrario, volver al paso 3.



**Teorema**

El algoritmo de Brelaz colorea con dos colores a los grafos bipartidos



– **Algoritmos secuenciales**

atienden a la cota $\chi(G) \geq \omega(G)$

– **Algoritmos que buscan conjuntos independientes**

- atienden a la cota $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$
- esta cota es mejor para grafos grandes

Aplicaciones informáticas para colorear grafos desarrolladas en la Facultad de Informática (UPM)

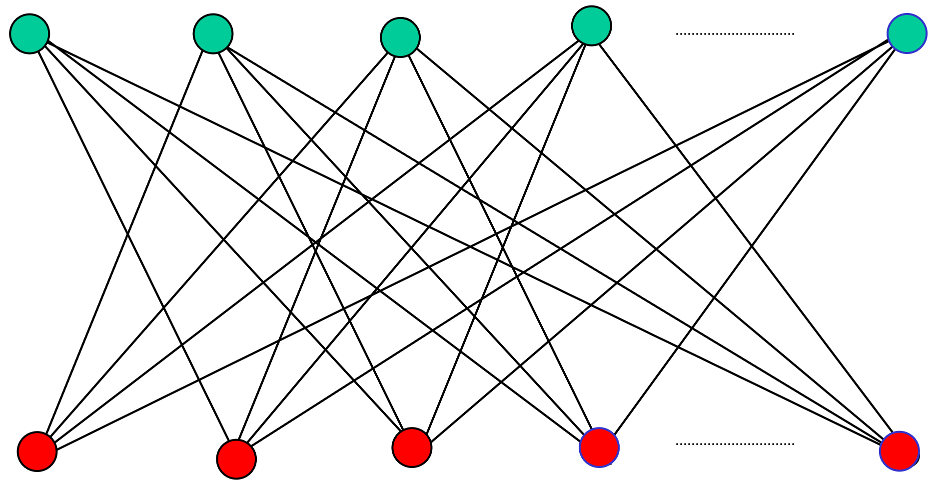
• **IAGraph** http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/iagraph/ (secuenciales, Brelaz, independencia)
• Coloración (secuencial, Brelaz, por **listas de colores**) y **Juego** para colorear http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/coloracion_listas_juego/html/Inicio.html

# Coloreando con listas de colores

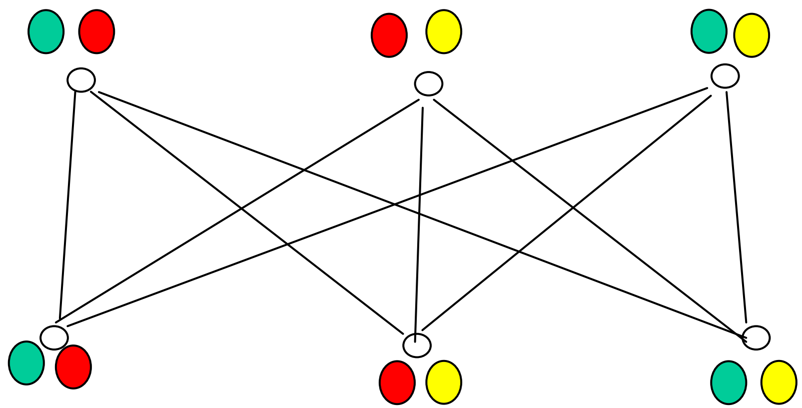
¿Qué sucede si en cada vértice sólo están disponibles los colores de una lista (que no es la misma en cada vértice)?

Un grafo G es ***k-elegible*** si cualquier asignación de k-listas de colores a sus vértices origina una coloración propia

Si G es un grafo bipartido entonces $\chi(G)=2$



Pero puede no ser *2-elegible*

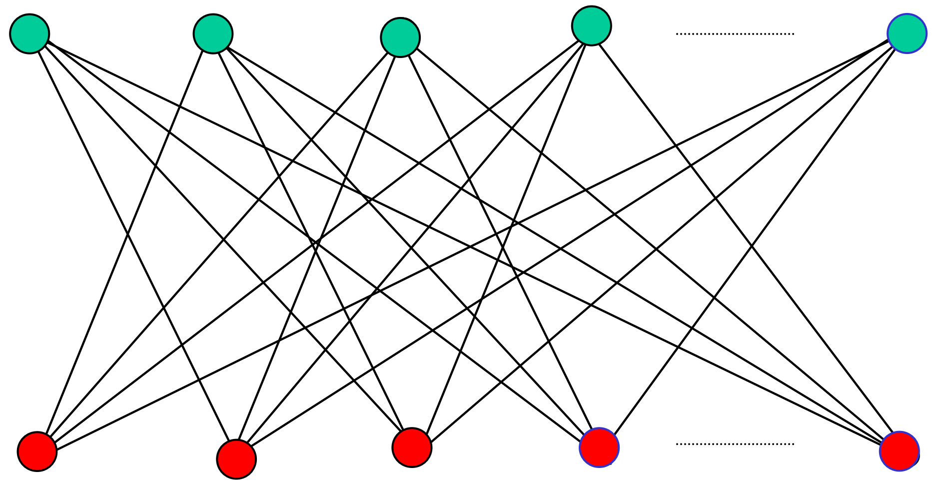


Con estas 2-listas

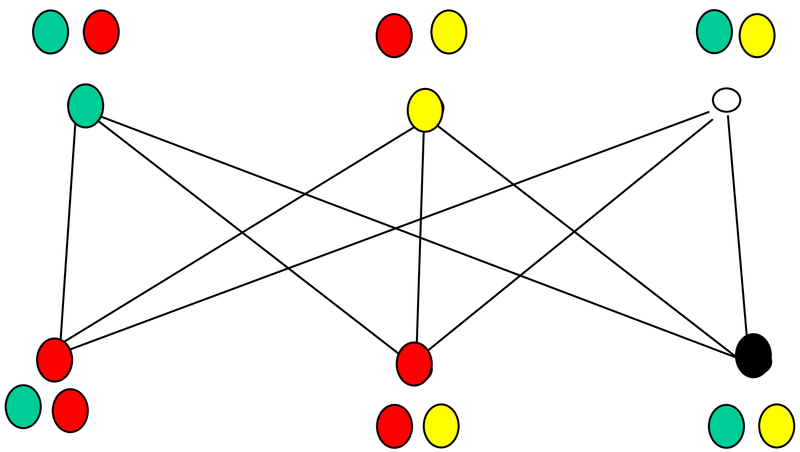
el grafo NO tiene

una coloración propia

Si G es un grafo bipartido entonces $\chi(G)=2$



Pero puede no ser *2-elegible*



Con estas 2-listas

el grafo NO tiene

una coloración propia

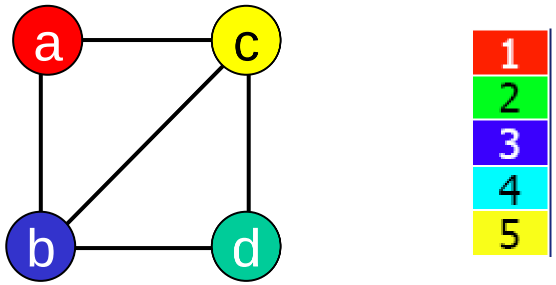
# Radio coloring

FAP (Frequency Assignment Problem) http://fap.zib.de/

Asignar frecuencias a los emisores minimizando interferencias

$f{:}V \to N$ $\quad |f(u) - f(v)| \geq 2$ si u,v adyacentes

$|f(u) - f(v)| \geq 1$ si dist(u,v)=2



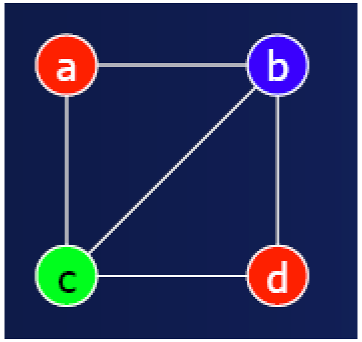

| | |
|---|---|
| Nº de colores | 4 |
| Rango | 4 |

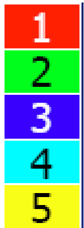
# T-coloring

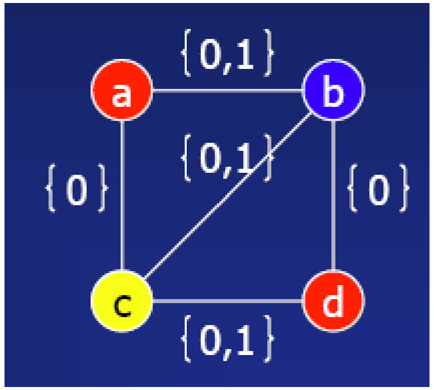
## FAP (Frequency Assignment Problem)

Cada arista tiene unas “distancias entre colores” prohibidas $T_{uv}$

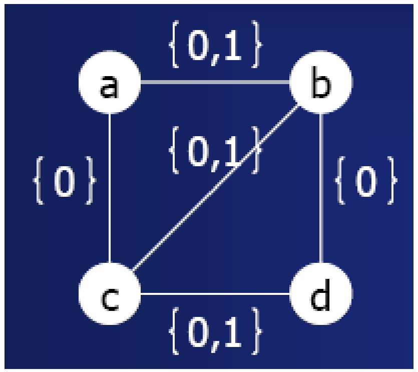
$$f:V\rightarrow N \qquad |f(u) - f(v)| \notin T_{uv}$$

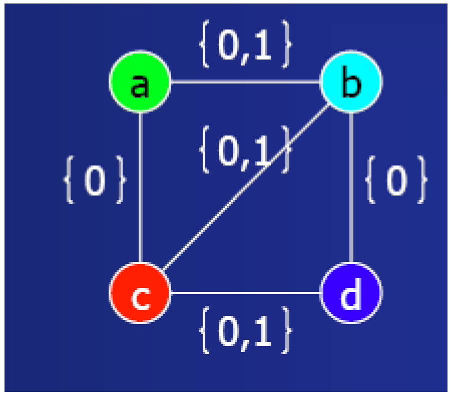



colores 3
rango 4




colores 4
rango 3

# Número cromático $\chi$ y grado máximo $\Delta$

**Teorema**

Para todo grafo G se tiene $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Basta colorear los vértices del grafo de forma secuencial. Al asignar color a cada vértice sus vecinos ya coloreados serán, a lo más, $\Delta$ Como se dispone de $\Delta$+1 colores, siempre queda uno libre.

La cota anterior no se puede mejorar:

$\chi(K_n) = n = \Delta + 1$

$\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta + 1$

## Teorema (Brooks, 1941)

Sea G un grafo conexo que no es ni completo ni un ciclo impar.
Entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$

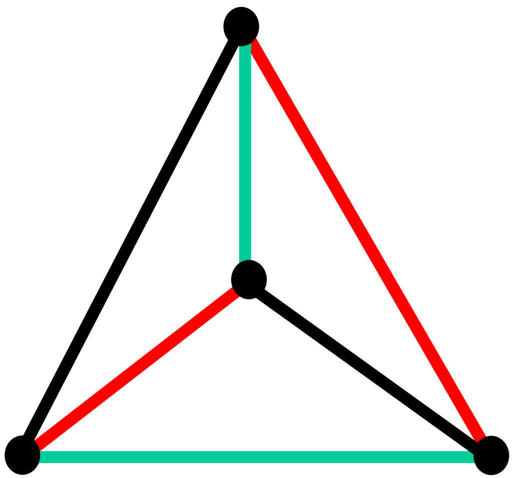
*Demostración si G no es regular*

Basta buscar una ordenación adecuada y colorear secuencialmente

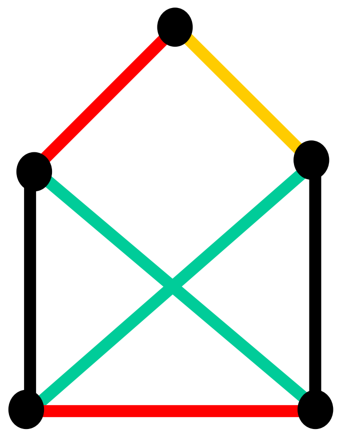
- $v_n$ será un vértice tal que $d(v_n) < \Delta$ (que existe por la no regularidad).
- $v_{n-1}$, $v_{n-2}$, …serán los vecinos de $v_n$
- luego los vecinos de $v_{n-1}$, luego los de $v_{n-2}$,…
- Como G es conexo estarán todos los vértices
- En $v_1, v_2, \ldots, v_n$ cada vértice es adyacente, a lo más, a $\Delta - 1$ de los anteriores. Luego al colorear en este orden bastan $\Delta$ colores

# Coloración de aristas

Índice cromático



$\chi'(G)=\Delta$

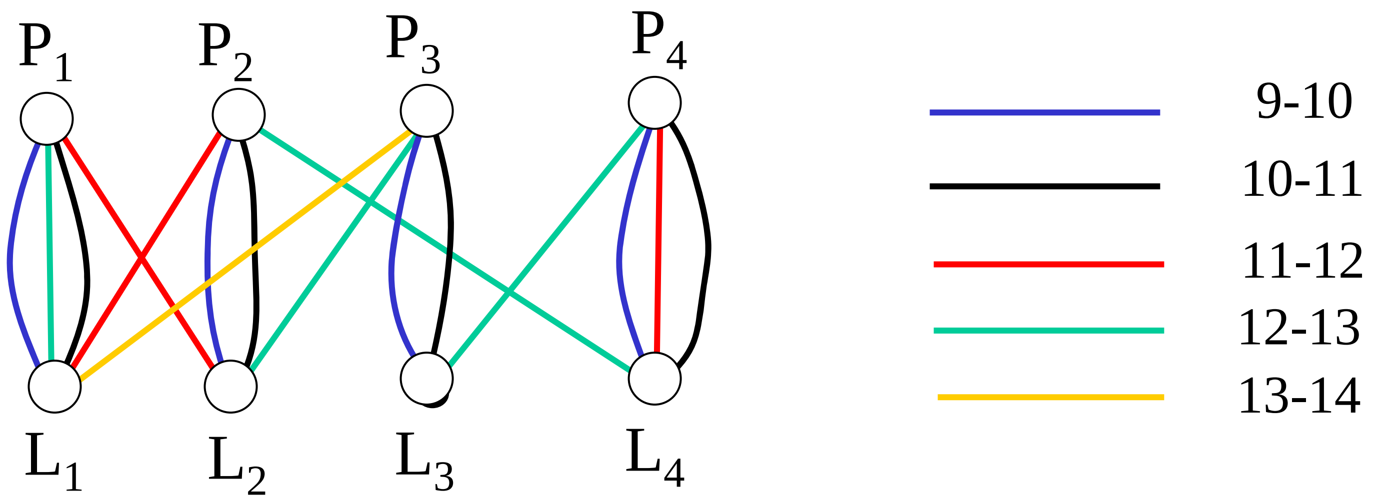


$\chi'(G)=\Delta +1$

# Elaboración de horarios

En una escuela hay r profesores, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ y s aulas $L_1, L_2, \ldots, L_s$. Cada profesor $P_i$ debe explicar en el aula $L_j$ durante $w_{ij}$ períodos lectivos diarios.

El problema de los horarios consiste en distribuir la docencia de modo que se minimice el nº de períodos usados.
Representamos la situación por un grafo bipartido G con los vértices $P=\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ y $L=\{L_1, L_2, \ldots, L_s\}$ y $w_{ij}$ aristas de $P_i$ a $L_j$



# Algoritmos de coloración de aristas

SECUENCIAL

*Entrada*: Una ordenación de las aristas de un grafo G
*Salida*: Una coloración de las aristas
*Paso* 1: Asignar el color 1 a la arista $a_1$
*Paso* 2: Si hemos coloreado $a_1$, $a_2$, …, $a_k$ con los colores $\{1, 2,..., j\}$, asignamos a $a_{k+1}$ el color t, donde $t \leq j+1$ es el mínimo color permitido para $a_{k+1}$, según los colores ya asignados a sus aristas adyacentes.

# Algoritmos de coloración de aristas

## INDEPENDENCIA - EMPAREJAMIENTOS

*Entrada*: Un grafo G
*Salida*: Una k-coloración de las aristas de G

Iniciar k:=1

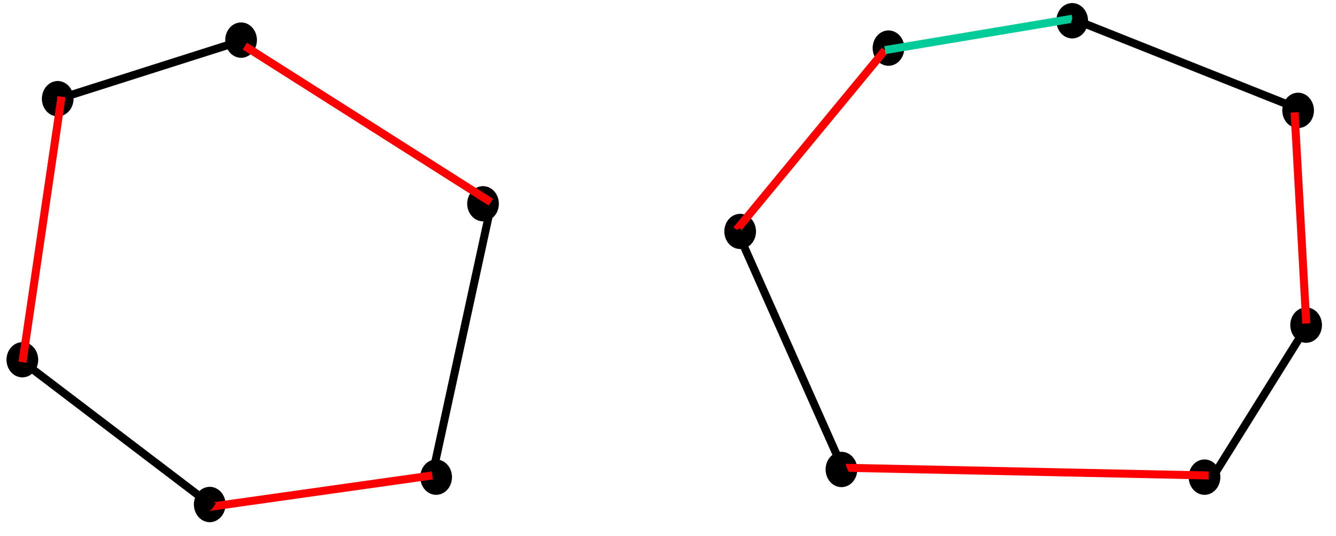
*Paso* 1: Encontrar un emparejamiento (conjunto independiente de aristas) máximo M de G , y colorear todas las aristas de M con el color k.

Hacer G:=G – M

*Paso* 2: Si A(G)=∅, FIN. En caso contrario hacer k:=k+1 y volver al paso 1

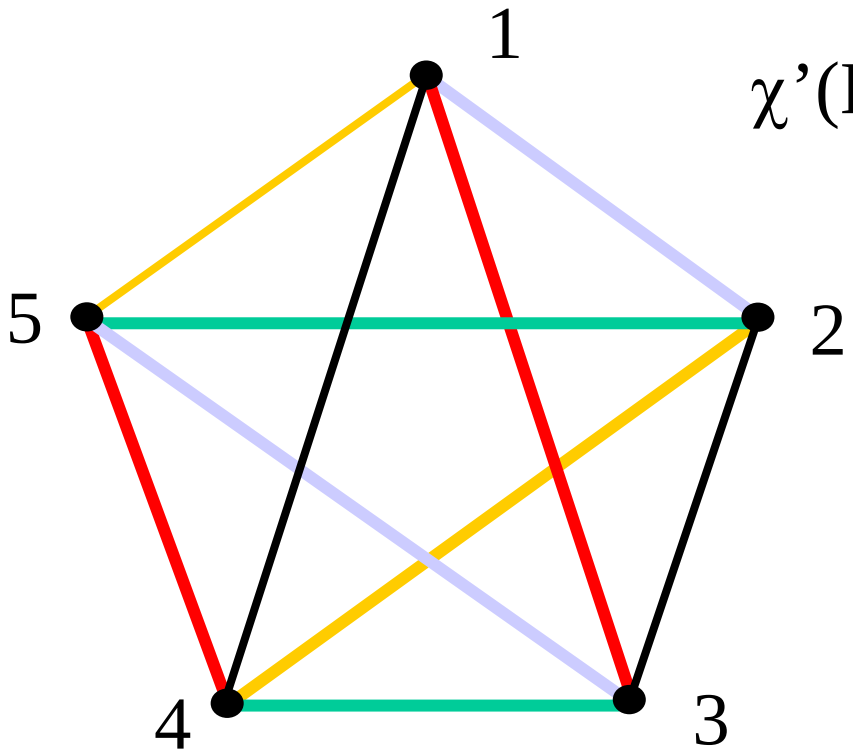
# Propiedades del índice cromático

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
- $\chi'(C_{2p})=2, \quad \chi'(C_{2p+1})=3$

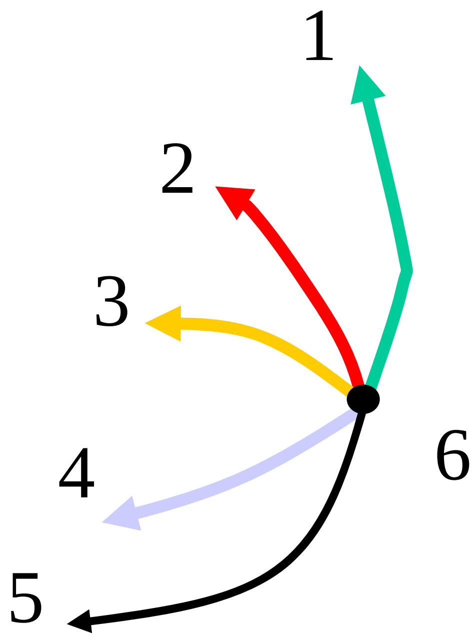


- Si G es un grafo bipartido entonces $\chi_1(G)=\Delta(G)$

Si n es impar, $K_n$ admite una n-coloración en las aristas




$\chi'(K_n)=n=\Delta+1$ si n es impar




Si n es par bastan n –1 colores

$\chi'(K_n)= n - 1 = \Delta$ si n es par

- Otra aplicación
  Calendario de una competición liguera

¿Cómo se elabora el calendario de la liga de fútbol?

Una coloración de aristas de $K_{20}$

## **Teorema** (Vizing, 1964)

Si G es un grafo simple entonces

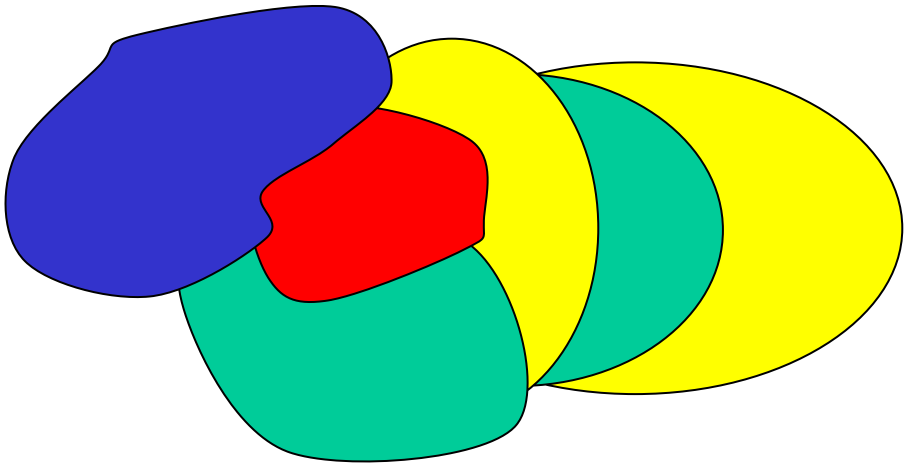
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

- La demostración conduce a un algoritmo eficiente para obtener una $(\Delta+1)$-coloración en las aristas de un grafo

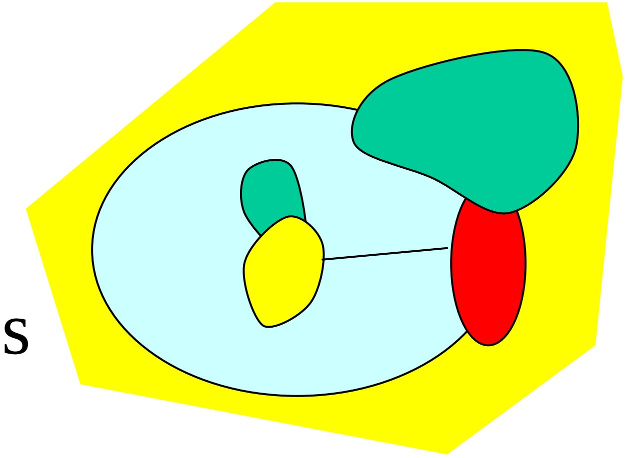
- Calcular el índice cromático de un grafo es un problema NP-completo

# El Problema de los cuatro colores

¿Se pueden colorear las regiones de cualquier mapa en el plano con sólo cuatro colores, de forma que regiones adyacentes reciban diferente color?



Mapa: Grafo plano conexo y sin puentes

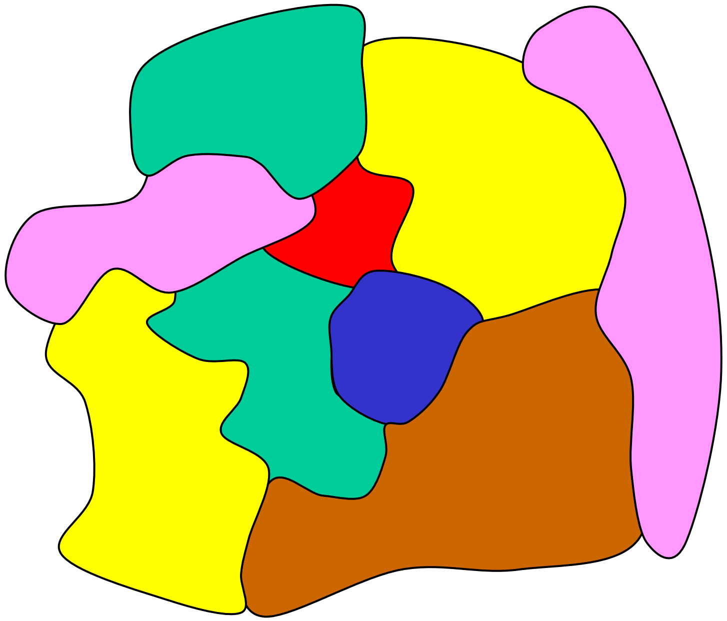


# Un poco de historia

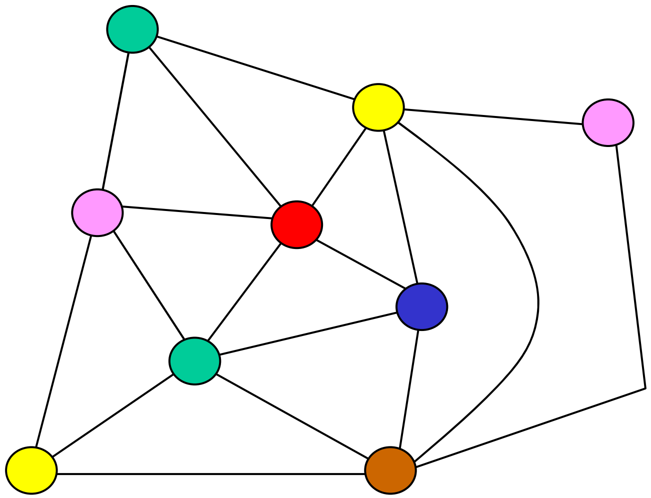
- Francis Guthrie, 1850
- Augustus de Morgan, 1852, 1860
- Arthur Cayley, 1878
- Alfred Kempe, 1879 Amer. J. Math.
- Percy Heawood, 1890, Quart. J. P. A. Math.

Pasemos el problema a grafos,

M



G(M)



M es k-coloreable $\Leftrightarrow$ G(M) es k-coloreable

# Teorema de los cuatro colores

**Todo grafo planar es 4-coloreable**

Appel, Haken, 1976
Demostración con ayuda de ordenadores

Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, 1997
Simplificación de la demostración

## Juego para colorear grafos

http://www.dma.fi.upm.es/gregorio/grafos/ColorListasJuego/html/inicio.html

## El Teorema de los cuatro colores en la RED

- Un poco de historia
  http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
- Una excelente página con un resumen de la demostración de Robertson, Sanders, Seymour y Thomas de 1996
  http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html