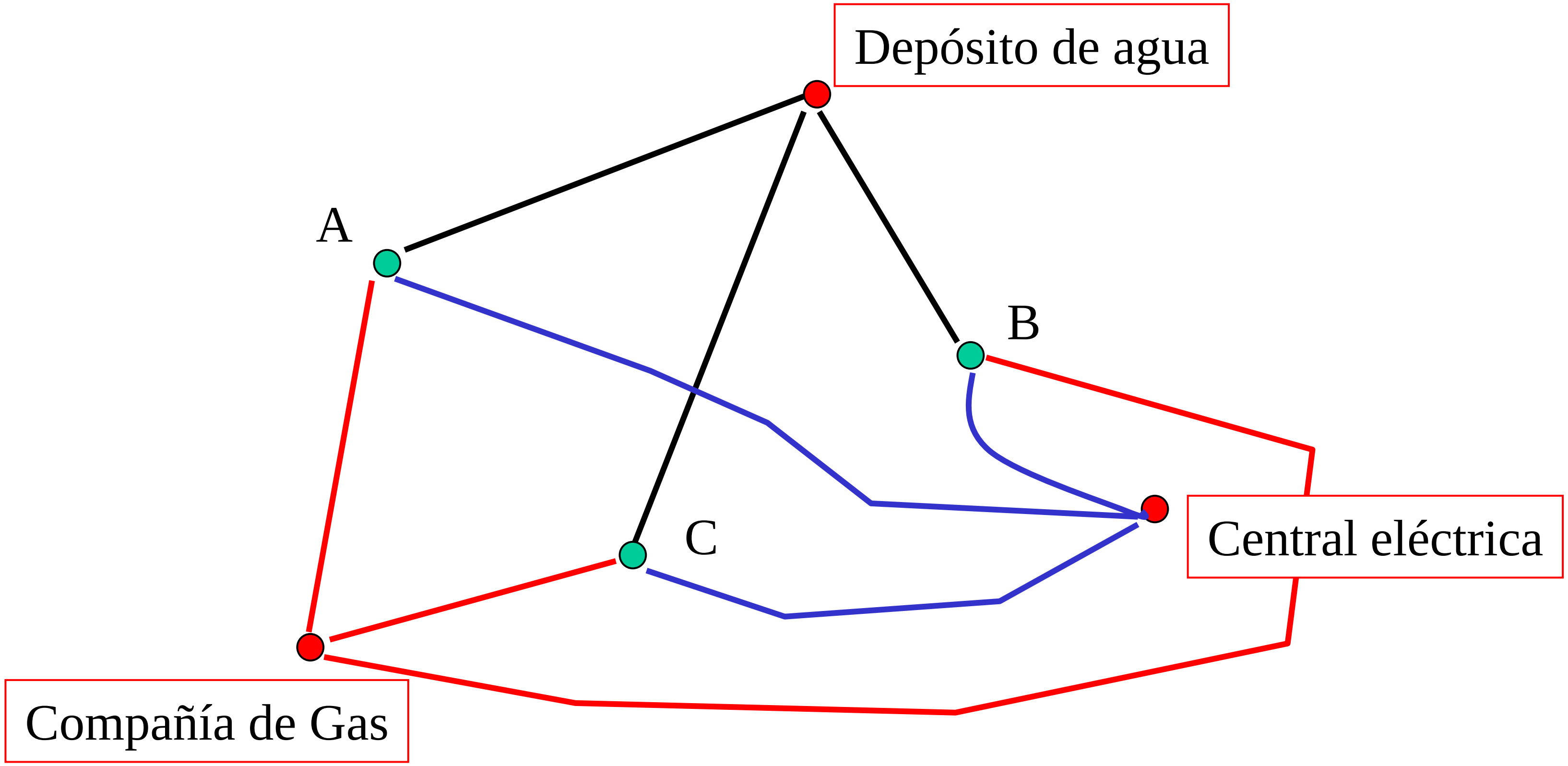
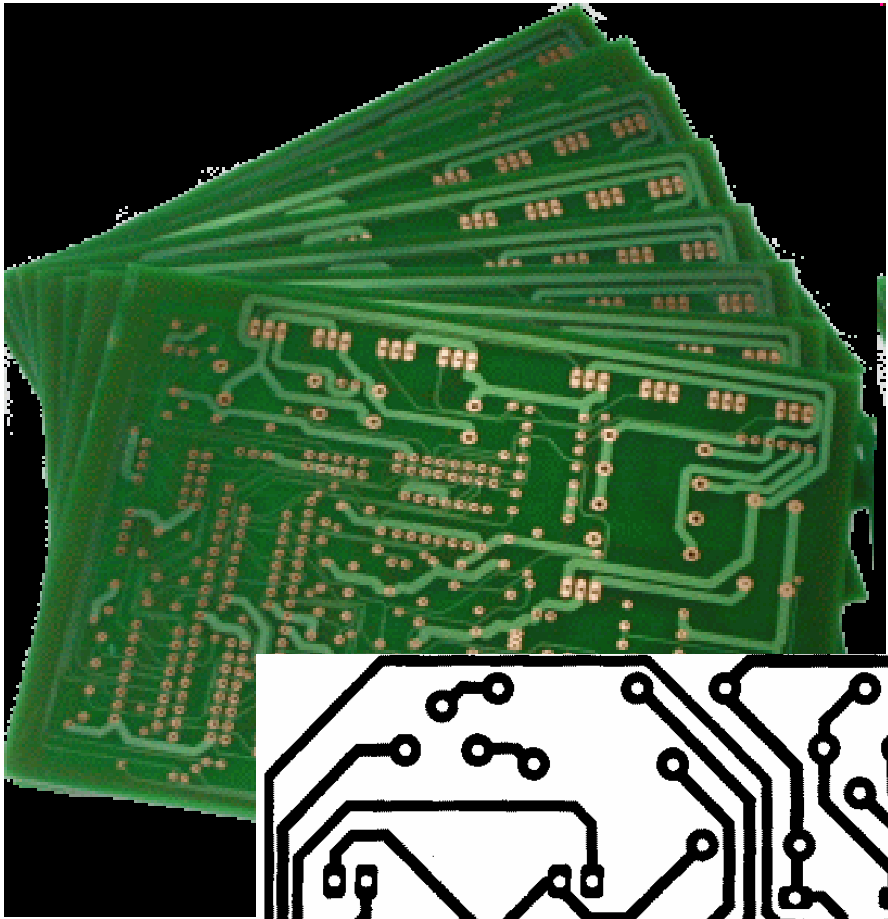
Planaridad

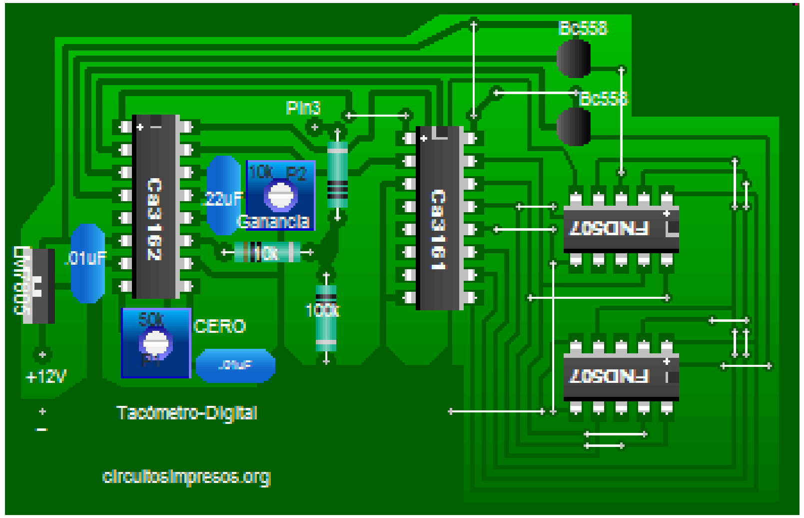
Gregorio Hernández Peñalver

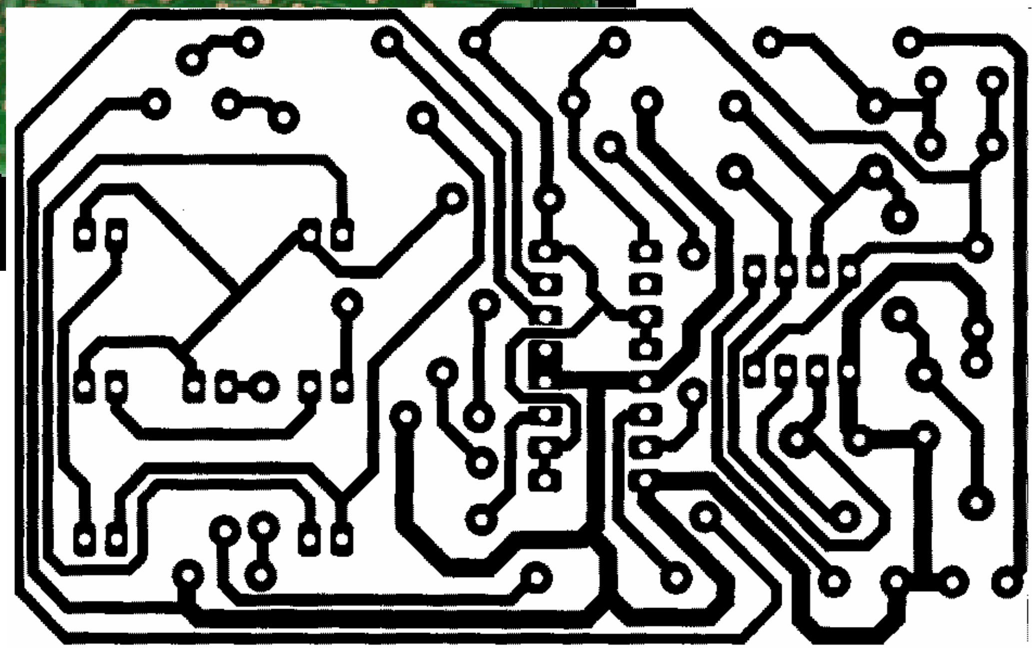
Matemática Discreta II

Se desea dotar a tres casas de suministro de agua, gas y electricidad.
¿Es posible trazar las conducciones sin que se crucen?

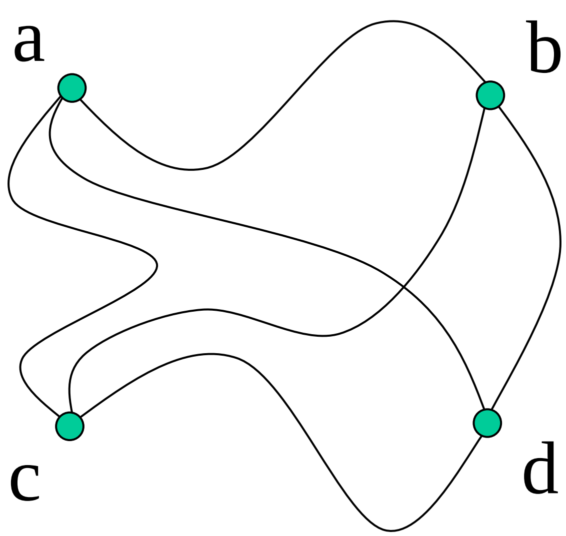


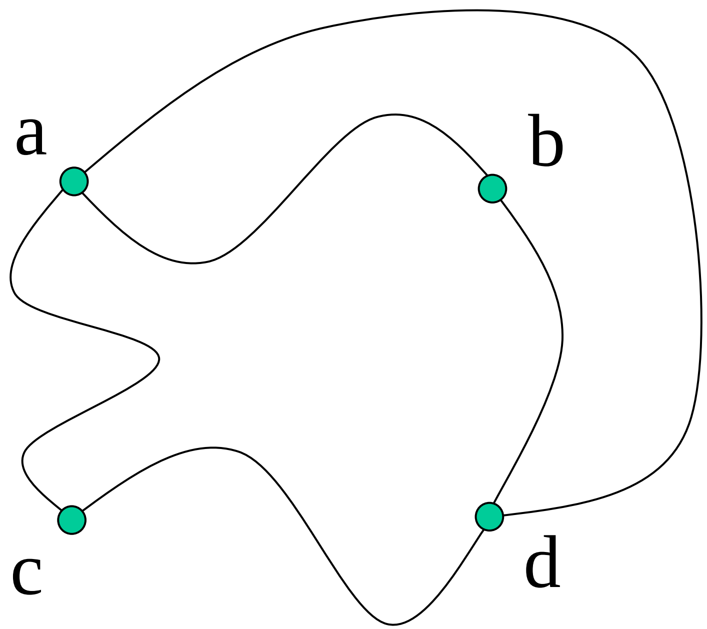



Bc558
Bc558
Pin3
Ca3162
Ca3161
.22uF
10k P2
Ganancia
10k
.01uF
100k
50k
CERO
+12V
Tacómetro-Digital
circuitosimpresos.org



Un grafo G es **planar** si admite una representación en el plano de tal forma que las aristas no se cortan, salvo en sus extremos.
A dicha representación se le denomina grafo **plano**



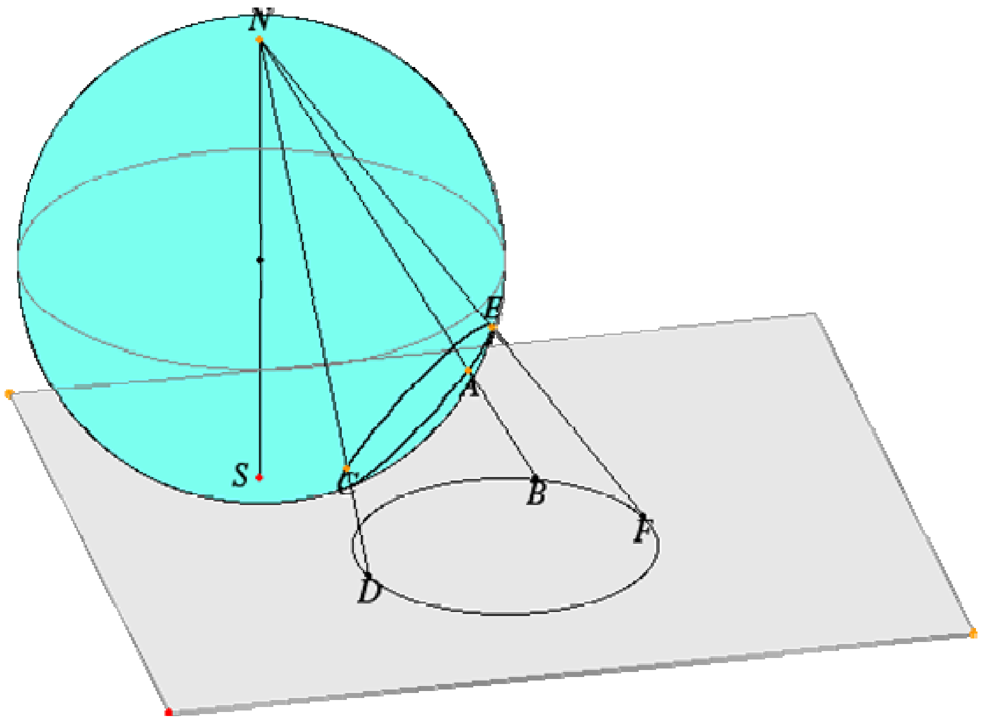


GRAFO PLANO

En R^3, todo grafo se puede representar sin cortes

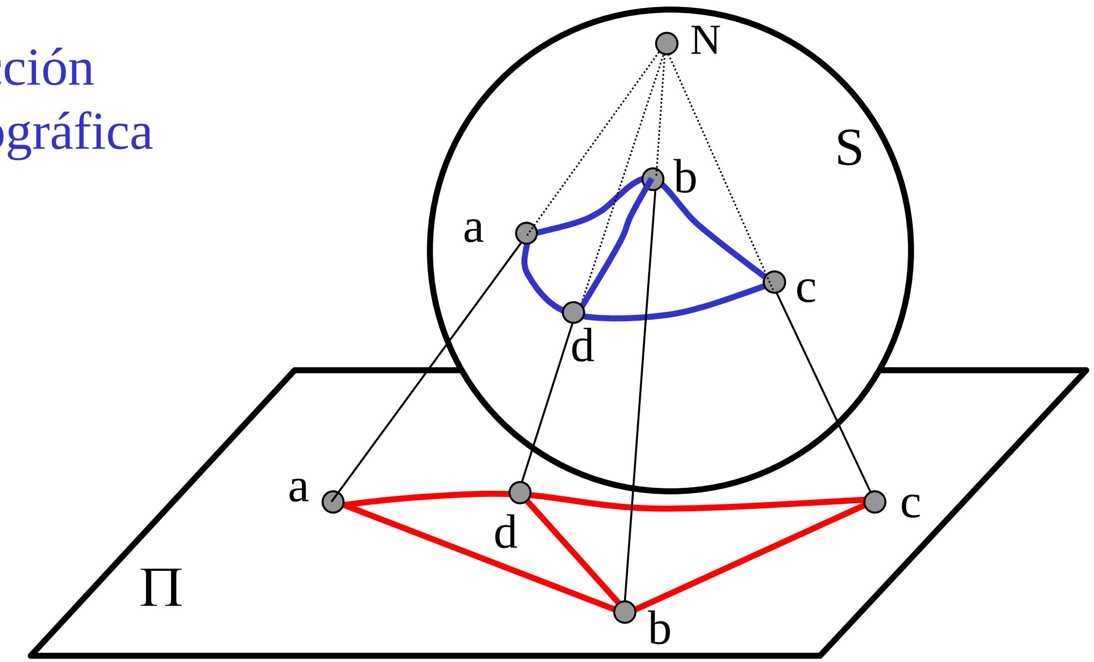
Representar sin cortes un grafo en el plano es equivalente a realizarlo sobre le superficie esférica

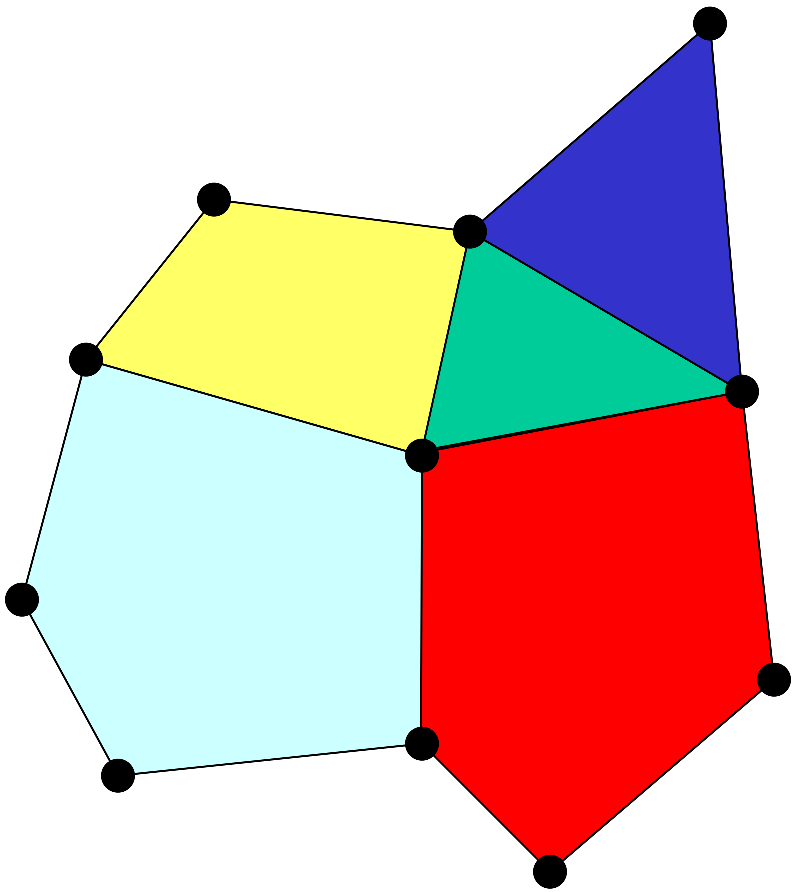
Proyección estereográfica



Representar sin cortes un grafo en el plano es equivalente a realizarlo sobre le superficie esférica

Proyección estereográfica





11 vértices

15 aristas

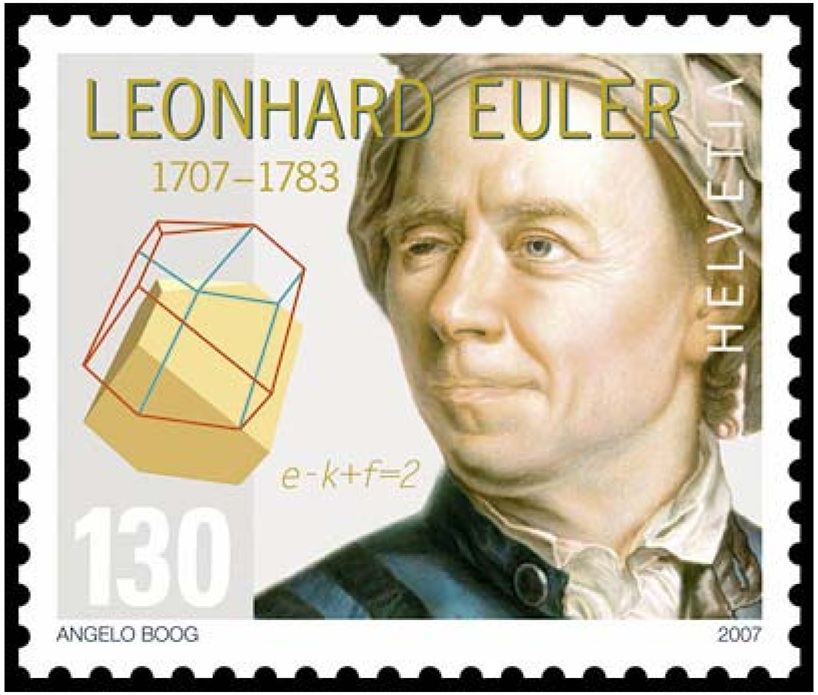
6 regiones o caras

$n = 11$

$q = 15$

$r = 6$

$$\boxed{\mathbf{n - q + r = 2}}$$



Fórmula de Euler

Si G es un grafo plano, conexo, con **n** vértices, **q** aristas y que descompone al plano en **r** regiones (o caras), entonces

$$\boxed{\mathbf{n - q + r = 2}}$$

Demostración:

Por inducción sobre **q**

Si **q**=0, entonces **n** =1, **r** =1 y se cumple que **n–q+r = 2**

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos y conexos con **q-1** aristas, donde q≥1.

Sea G un grafo plano y conexo con q aristas.

Si G es un árbol, entonces n=q+1 y r=1.

Luego **n – q + r = 2**

(19 demostraciones) http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/

Fórmula de Euler

Si G es un grafo plano, conexo, con **n** vértices, **q** aristas y que descompone al plano en **r** regiones (o caras), entonces

$$\boxed{\mathbf{n - q + r = 2}}$$

Demostración:

Por inducción sobre **q**

Si **q**=0, entonces **n** =1, **r** =1 y se cumple que **n–q+r = 2**

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos y conexos con **q-1** aristas, donde $q \geq 1$.

Sea G un grafo plano y conexo con q aristas.

Si G no es árbol, entonces existe alguna arista *a* de un ciclo de G

G–{*a*} es plano, conexo con n vértices, q–1 aristas y r –1 regiones.

La hipótesis de inducción asegura entonces que:

$n - (q-1) + (r-1) = 2$, es decir, **n–q+r = 2**

Consecuencias

Si G es un grafo simple y planar con **n** vértices y **q** aristas

1.- Si $n \geq 3$, entonces

$$\mathbf{q \leq 3n-6} \qquad \mathbf{r \leq 2n-4}$$

Si el borde de cada región es un triángulo, como cada arista pertenece al borde de dos regiones resulta, $3r=2q$

Por la fórmula de Euler **$3n-3q+3r = 6$**, sustituyendo resulta

$$\mathbf{q = 3n-6}$$

Análogamente como **$2n-2q+2r = 4$,** sustituyendo resulta

$$\mathbf{r = 2n-4}$$

Consecuencias

Si G es un grafo simple y planar con **n** vértices y **q** aristas

2.- Si $n \geq 3$ y G no tiene ciclos de longitud 3, entonces

$$\mathbf{q \leq 2n-4}$$

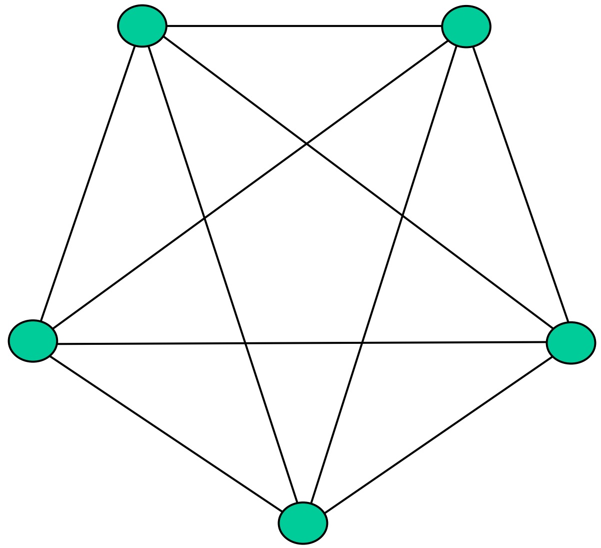
Ahora el borde de cada región tiene, al menos, 4 aristas y cada arista pertenece al borde de dos regiones.
Así contando el nº de aristas, resulta que $4r \leq 2q$
Sustituyendo en la fórmula de Euler $2n-2q+2r = 4$,

$$\mathbf{q \leq 2n-4}$$

3.- G tiene, al menos, un vértice **v** con grado $\mathbf{d(v) \leq 5}$

Si para cada vértice **x**, se tiene que $d(x) \geq 6$ entonces
$2q = \Sigma d(x) \geq 6n$, luego $q \geq 3n$

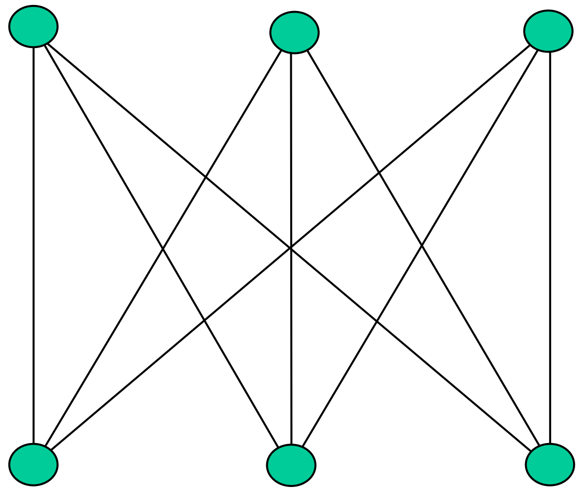
El grafo K_5 no es planar



En K_5 se tiene $n=5$, $q=10$

Si fuera planar, sería $10 = q \leq 3n - 6 = 9$

El grafo $K_{3,3}$ no es planar



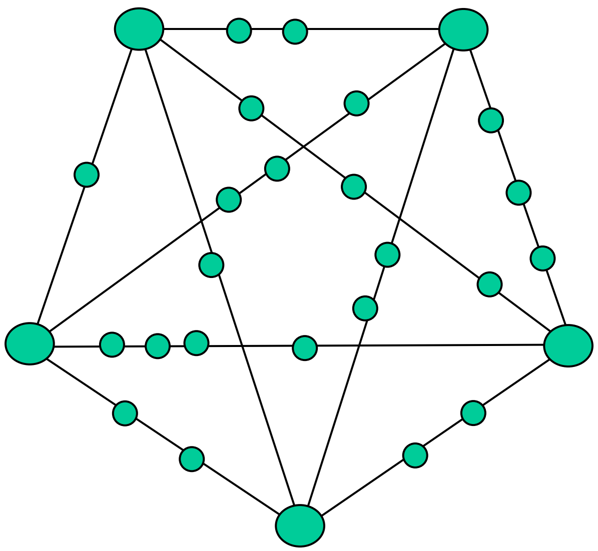
En $K_{3,3}$ no hay triángulos luego

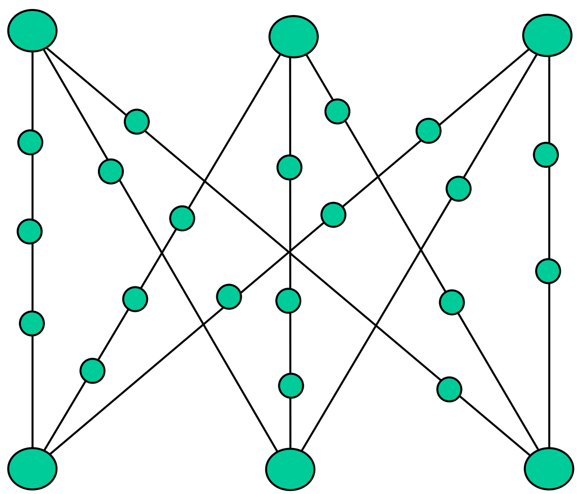
debe ser $q \leq 2n - 4$

pero ahora $n = 6$, $q = 9$

Teorema de Kuratowski

Un grafo G es planar $\Leftrightarrow$ G no contiene subgrafos homeomorfos a K_5 ni a $K_{3,3}$



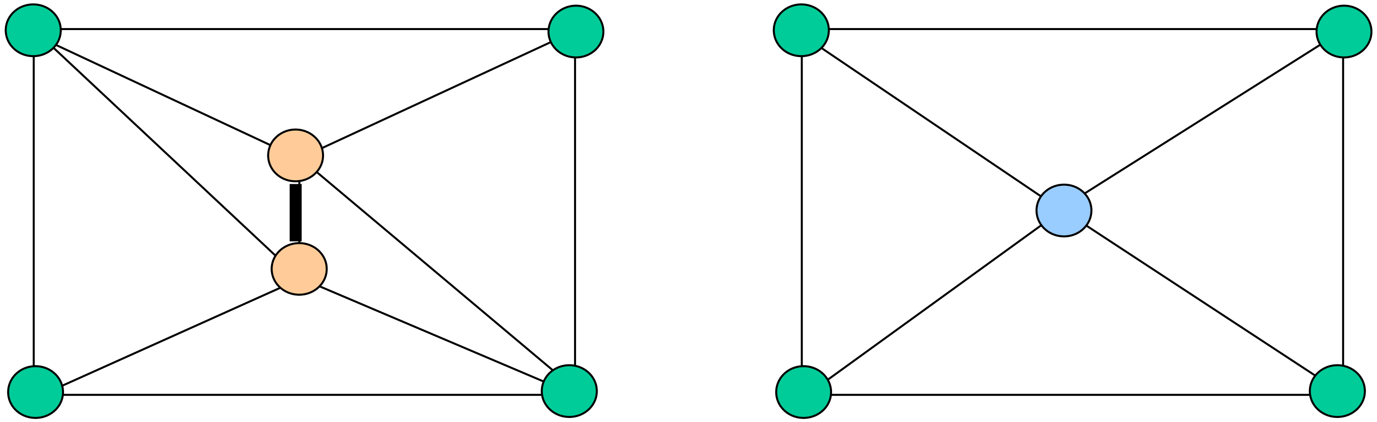


Dos grafos son homeomorfos si se puede obtener uno de otro mediante inserciones y borrados de vértices de grados dos

Contracción de un grafo $G = (V,A)$ con una arista $e = uv$

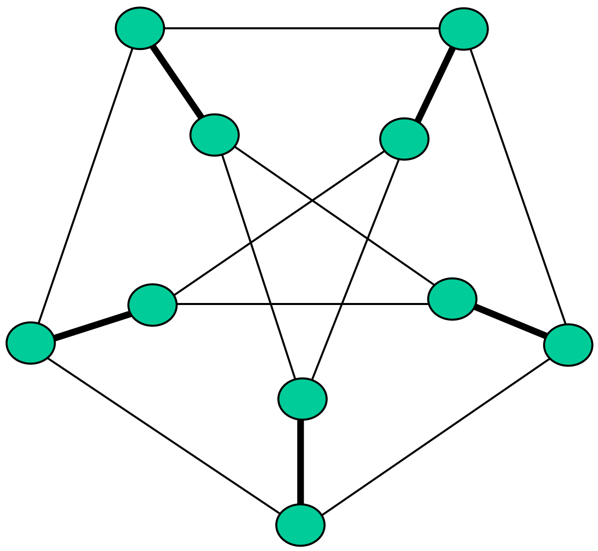
$V' = (V - \{u,v\}) \cup \{u'\}$ y $A' = A \cup \{wu' \mid wu \in A$ ó $wv \in A\}$

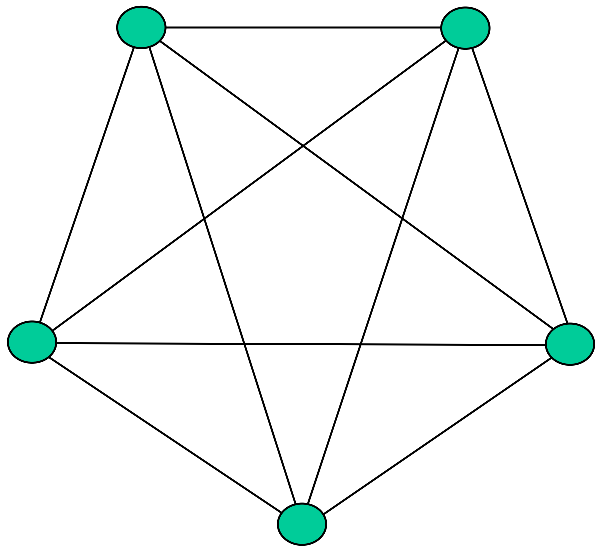
El nuevo grafo se designa $G * e$



G es contractible a H

Si a partir de G se puede obtener H mediante contracciones

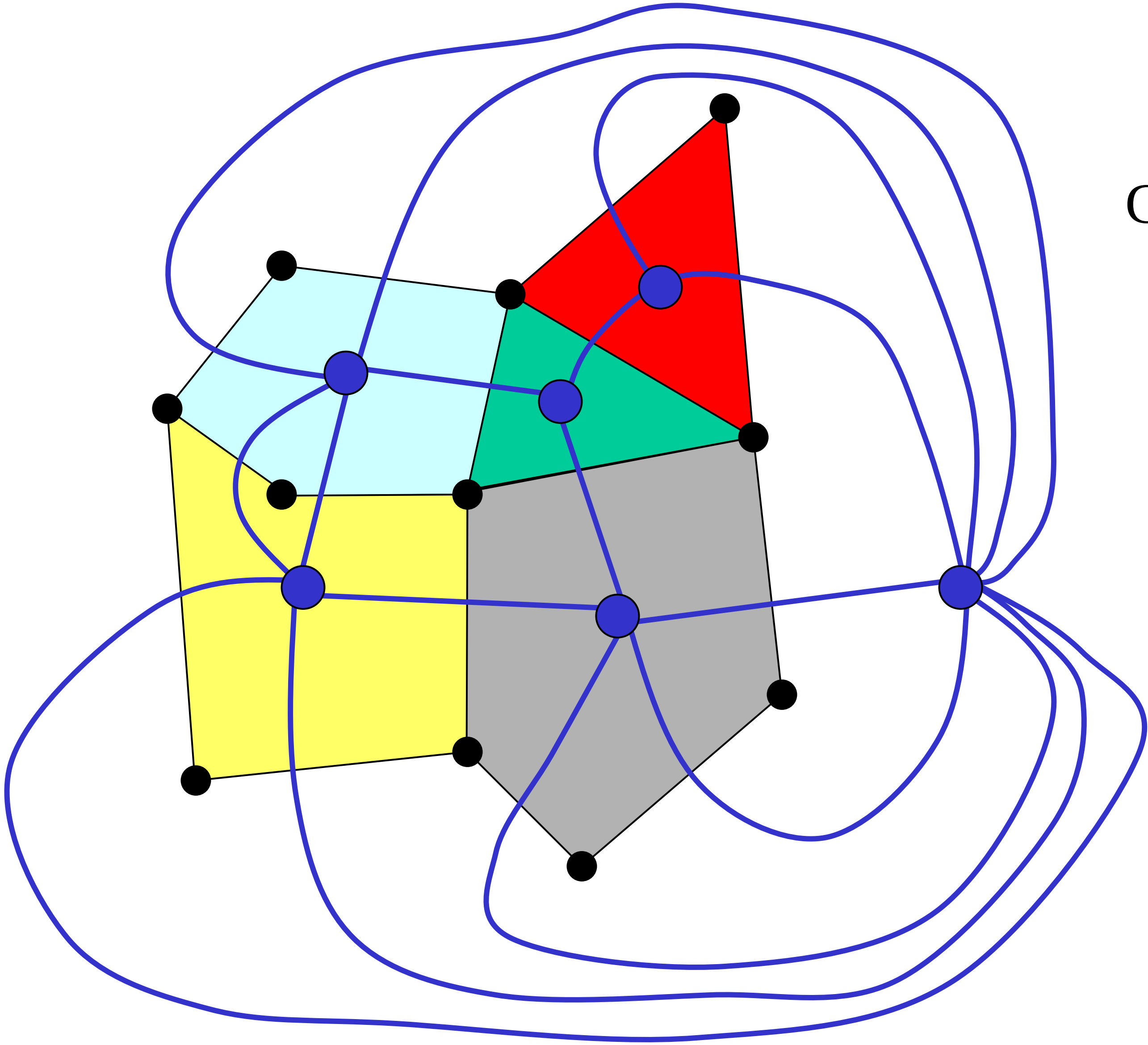




Teorema de caracterización (Wagner)

G es planar $\Leftrightarrow$ G no contiene subgrafos contractibles a K_5 ni a $K_{3,3}$

DUAL GEOMÉTRICO DE UN GRAFO PLANO



G

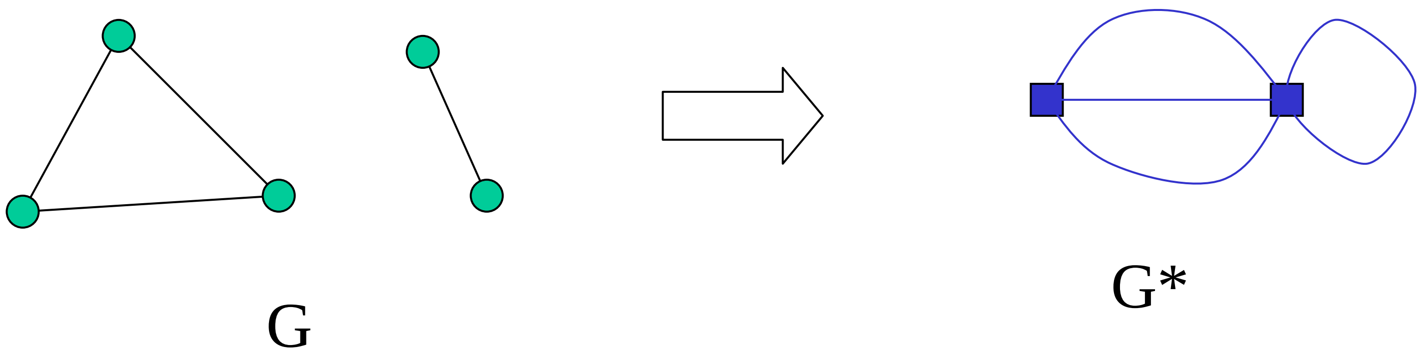
11 vértices
15 aristas
6 regiones

G*

11 regiones
15 aristas
6 vértices

DUAL GEOMÉTRICO DE UN GRAFO PLANO

- G* es un grafo planar y conexo
- Si G es conexo entonces G es bipartido $\Leftrightarrow$ G* es euleriano
- Si G es conexo entonces G $\approx$ G**
- Si G no conexo .....



Algoritmos de detección de la planaridad

- Intentan construir una representación plana del grafo
- Algoritmos de adición de caminos
  - Demoucron, Malgrange y Pertuiset, 1964, $O(n^2)$
  - Hopcroft y Tarjan, 1974, $O(n)$

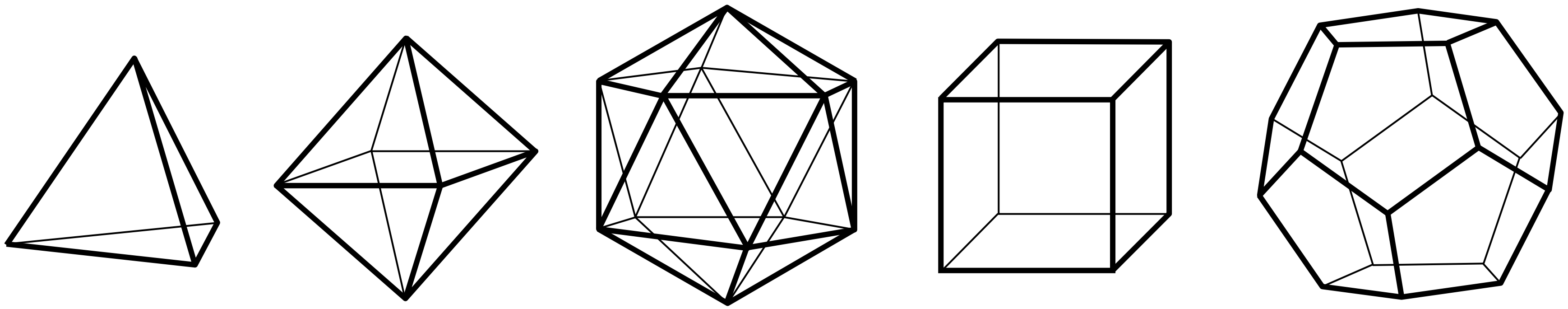
- Algoritmos de adición de vértices
  - ordenación especial de los vértices
  - Lempel, Even y Cederbaum, 1976

Poliedros regulares

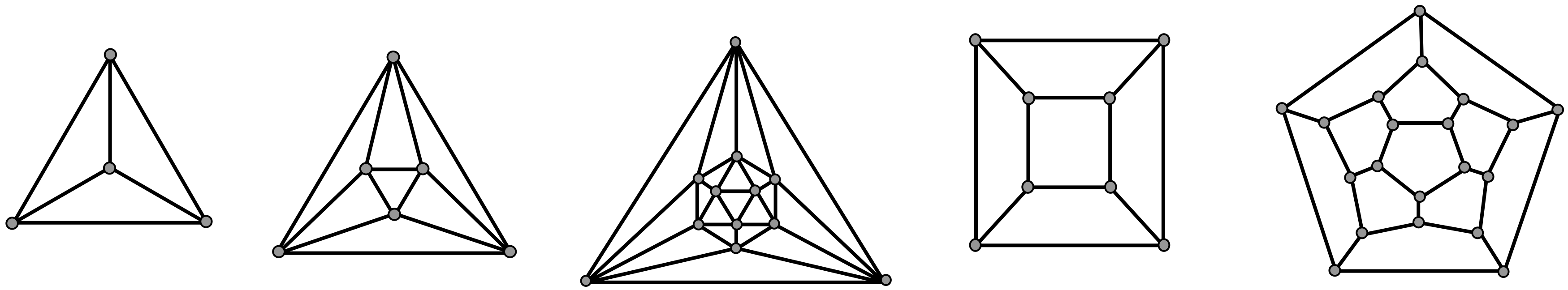
Caras ---- polígonos regulares del mismo nº de lados

Vértices inciden el mismo nº de aristas.

Los grafos correspondientes reciben el nombre de grafos platónicos



TETRAEDRO OCTAEDRO ICOSAEDRO CUBO DODECAEDRO



Poliedros regulares

Grado de cada cara s $s \geq 3$

Grado de cada vértice k $k \geq 3$

Contemos las aristas $2q = kn = sr$

sustituyendo en $n - q + r = 2$

$n - kn/2 + kn/s = 2 \Rightarrow n(2s - ks + 2k) = 4s \Rightarrow$

$2s + 2k - ks > 0 \Rightarrow (k - 2)(s - 2) < 4$

s	k	n	q	r	
3	3	4	6	4	**TETRAEDRO**
3	4	6	12	8	**OCTAEDRO**
3	5	12	30	20	**ICOSAEDRO**
4	3	8	12	6	**CUBO**
5	3	20	30	12	**DODECAEDRO**

¿Poliedro con caras hexagonales?

$2q = 6r \qquad 3n \leq 2q \qquad$ sustituyendo en $\quad 2 = n - q + r$

$2 \leq 2/3q - q + q/3 \qquad 2 \leq 0 \qquad$ No hay!!

Poliedros con caras hexagonales y pentagonales

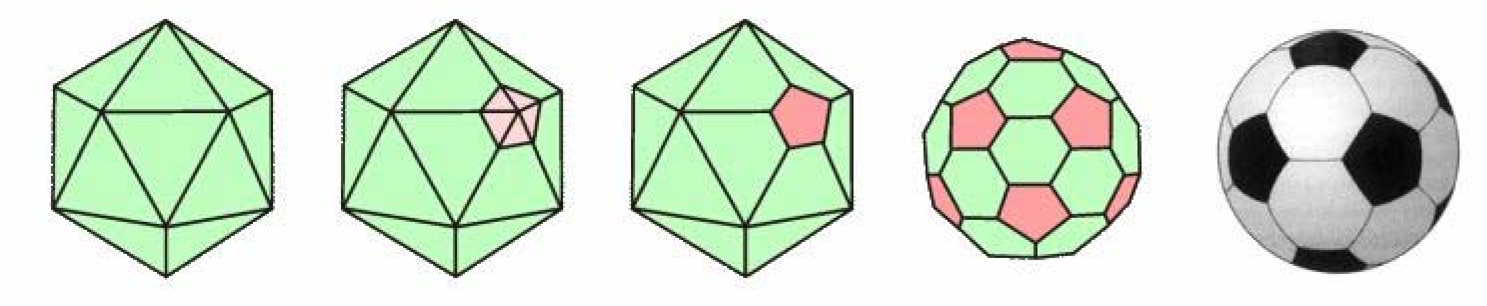
$r = p + h \qquad 2q = 5p + 6h = 6p + 6h - p = 6r - p \quad \Rightarrow \quad r = q/3 + p/6$

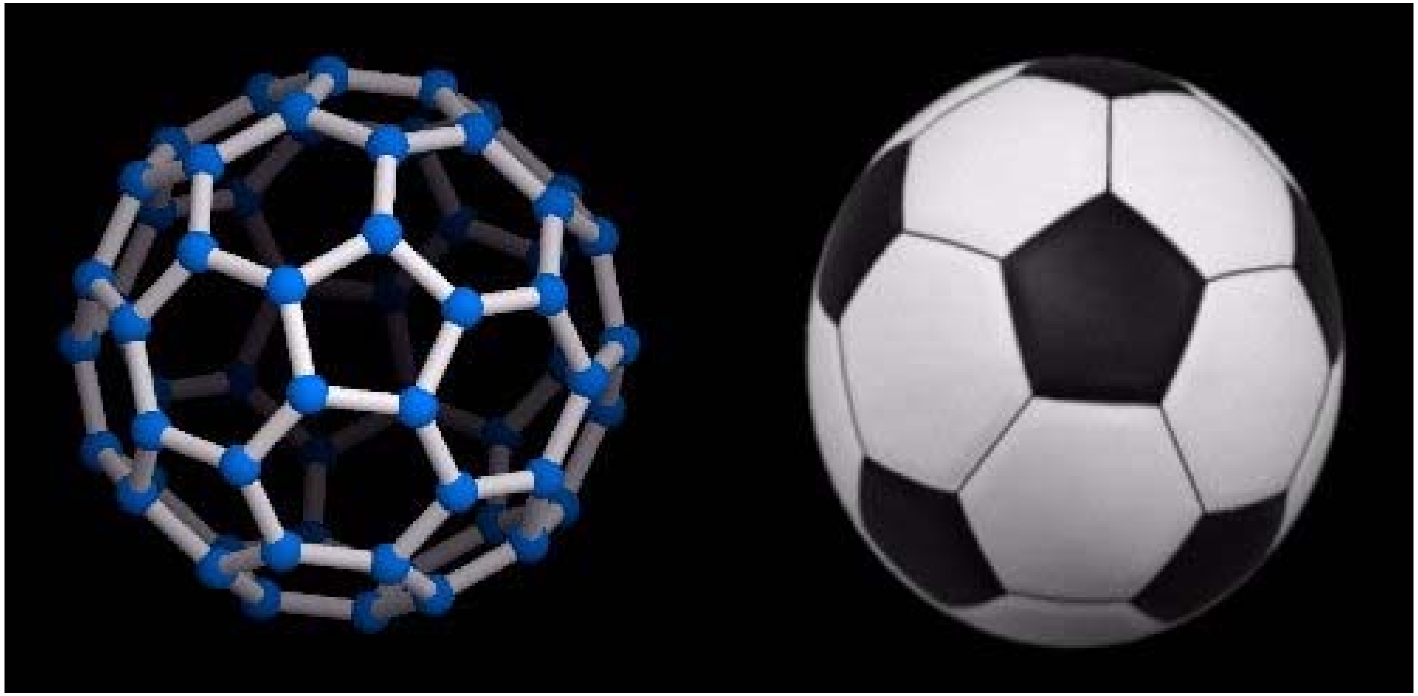
$2q = 3n \qquad$ sustituyendo en $\quad n - q + r = 2$

$2/3q - q + q/3 + p/6 = 2 \quad \Rightarrow \quad p = 12$

Todos tienen exactamente 12 pentágonos

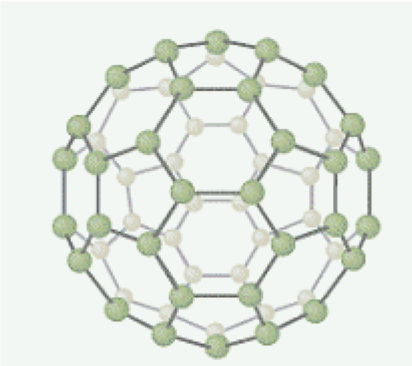
Poliedros con caras hexagonales y 12 caras pentagonales



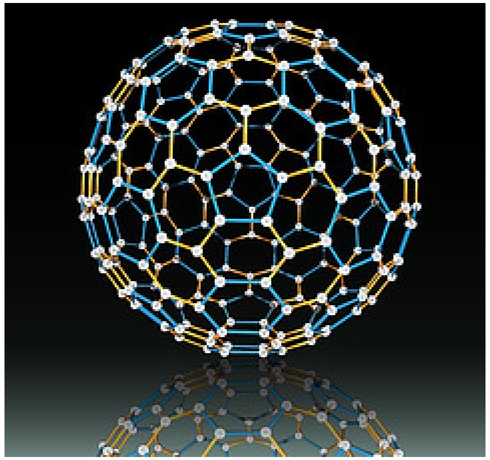


Poliedros con caras hexagonales y 12 caras pentagonales

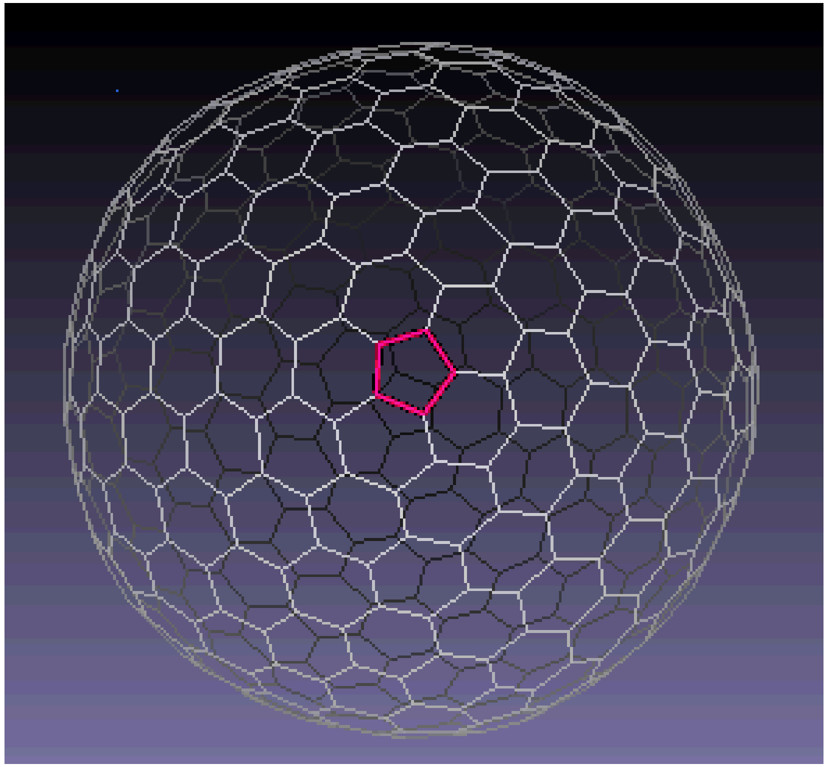
FULLERENO C_{60}



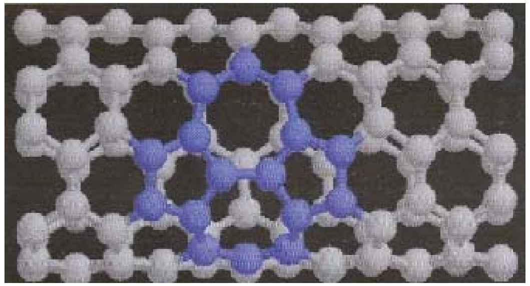
FULLERENO C_{240}

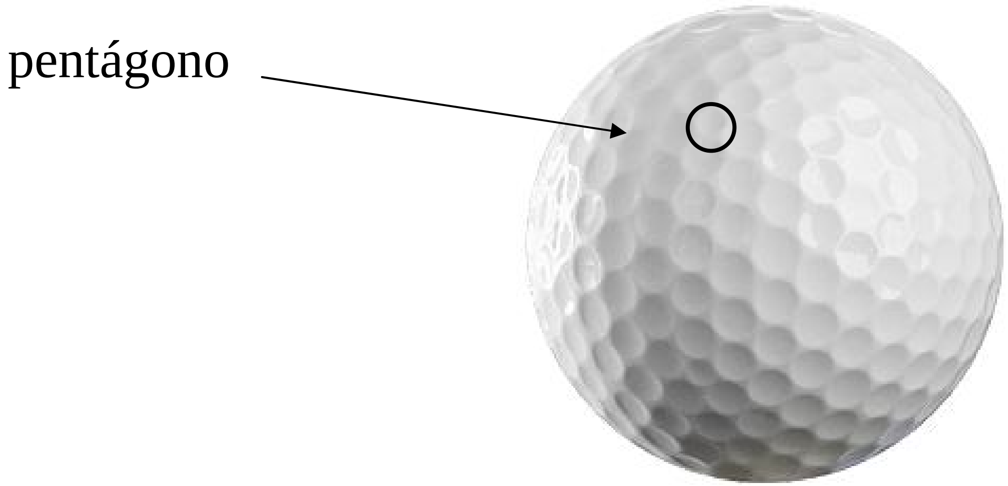


FULLERENO C_{540}



NANOTUBOS




pentágono