Caminos hamiltonianos
Problema del viajante (TSP)

Gregorio Hernández Peñalver

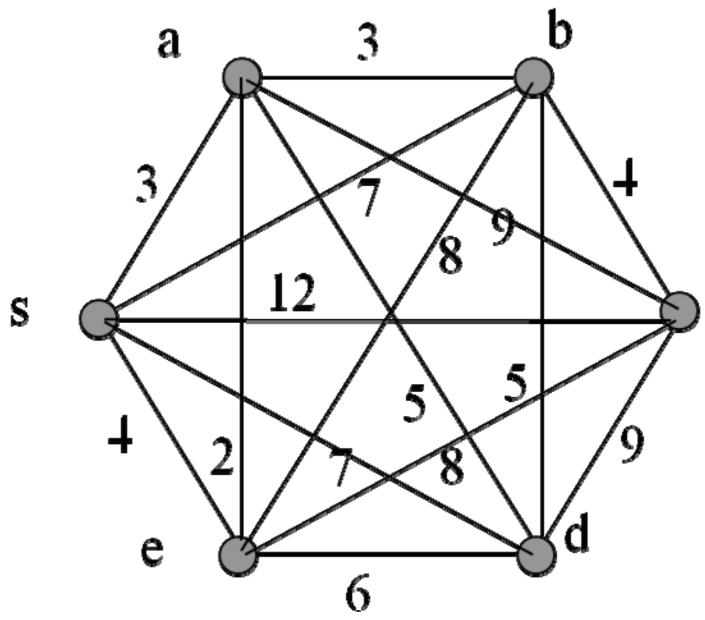
UPM

Matemática Discreta II

(MI)

Problema del viajante

Un viajante de comercio desea visitar n ciudades volviendo al punto de partida. ¿Qué ruta debe seguir para minimizar la distancia total recorrida?



Algoritmo

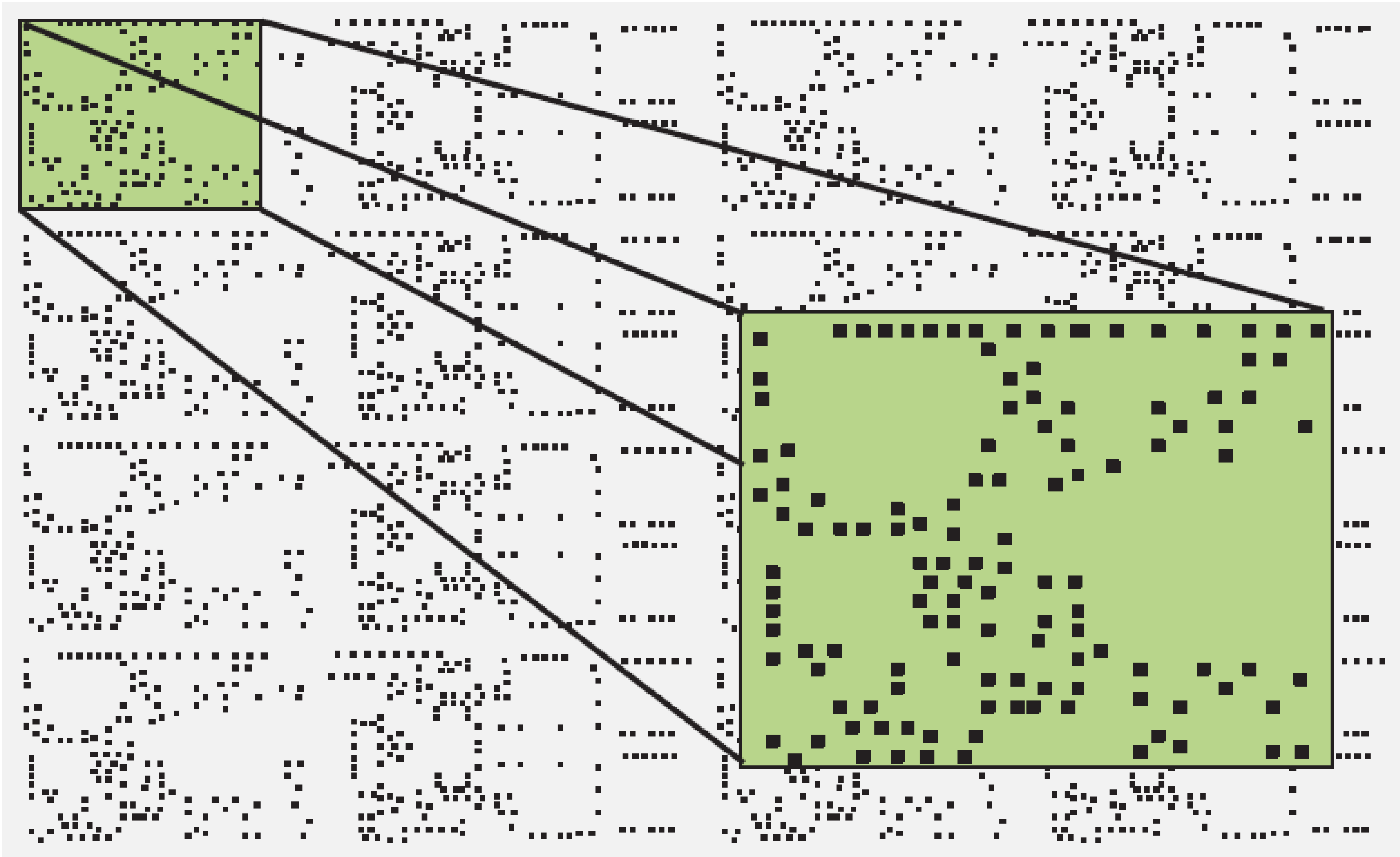
1. Calcular la distancia total de cada ciclo.

2. Hallar la mínima de las distancias anteriores

Cada ruta es un ciclo que pasa por todos los vértices una única vez.

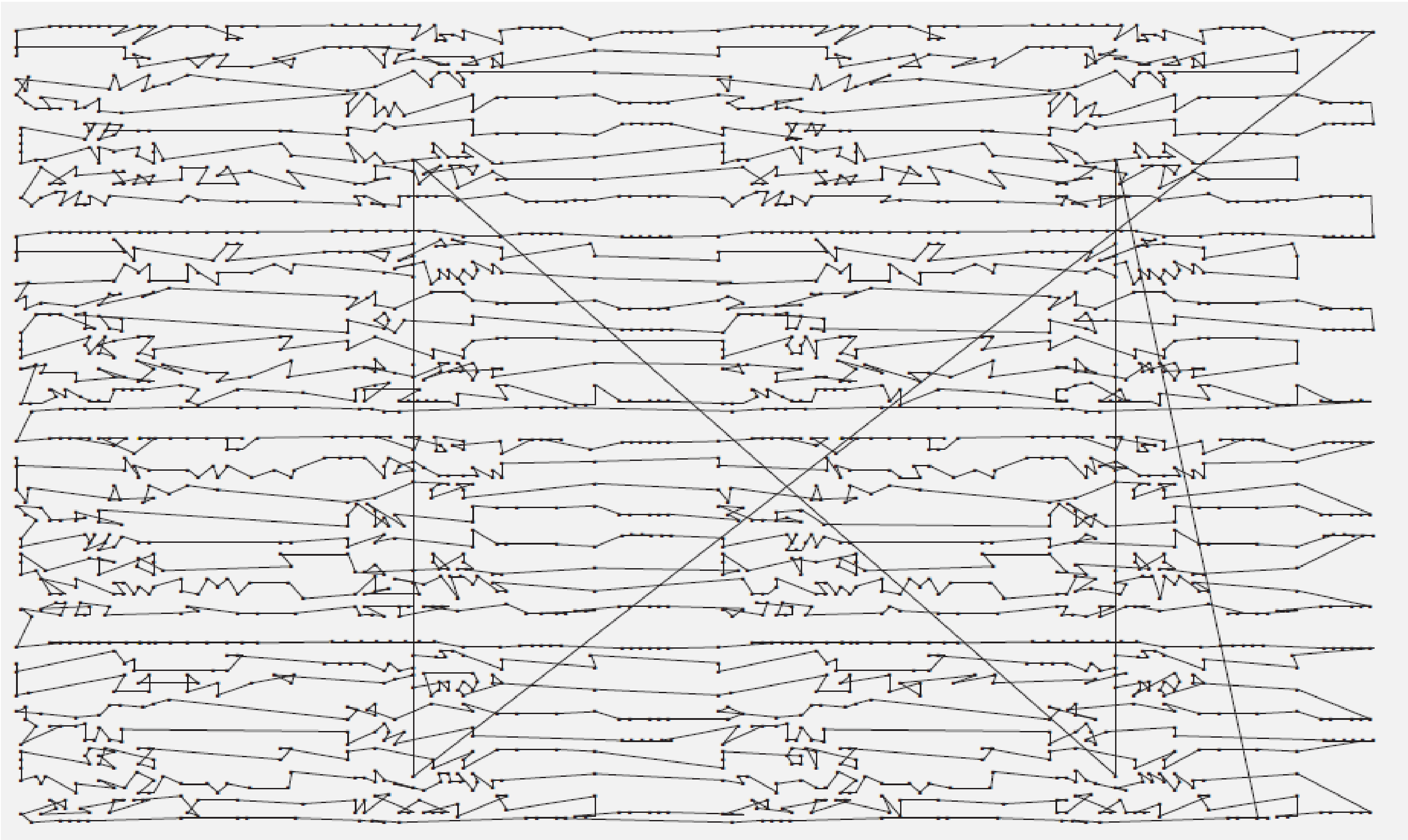
Problema del viajante

Agujeros en circuitos impresos. Para fijar los componentes tenemos que perforar agujeros. ¿Qué recorrido debe seguir la máquina perforadora?



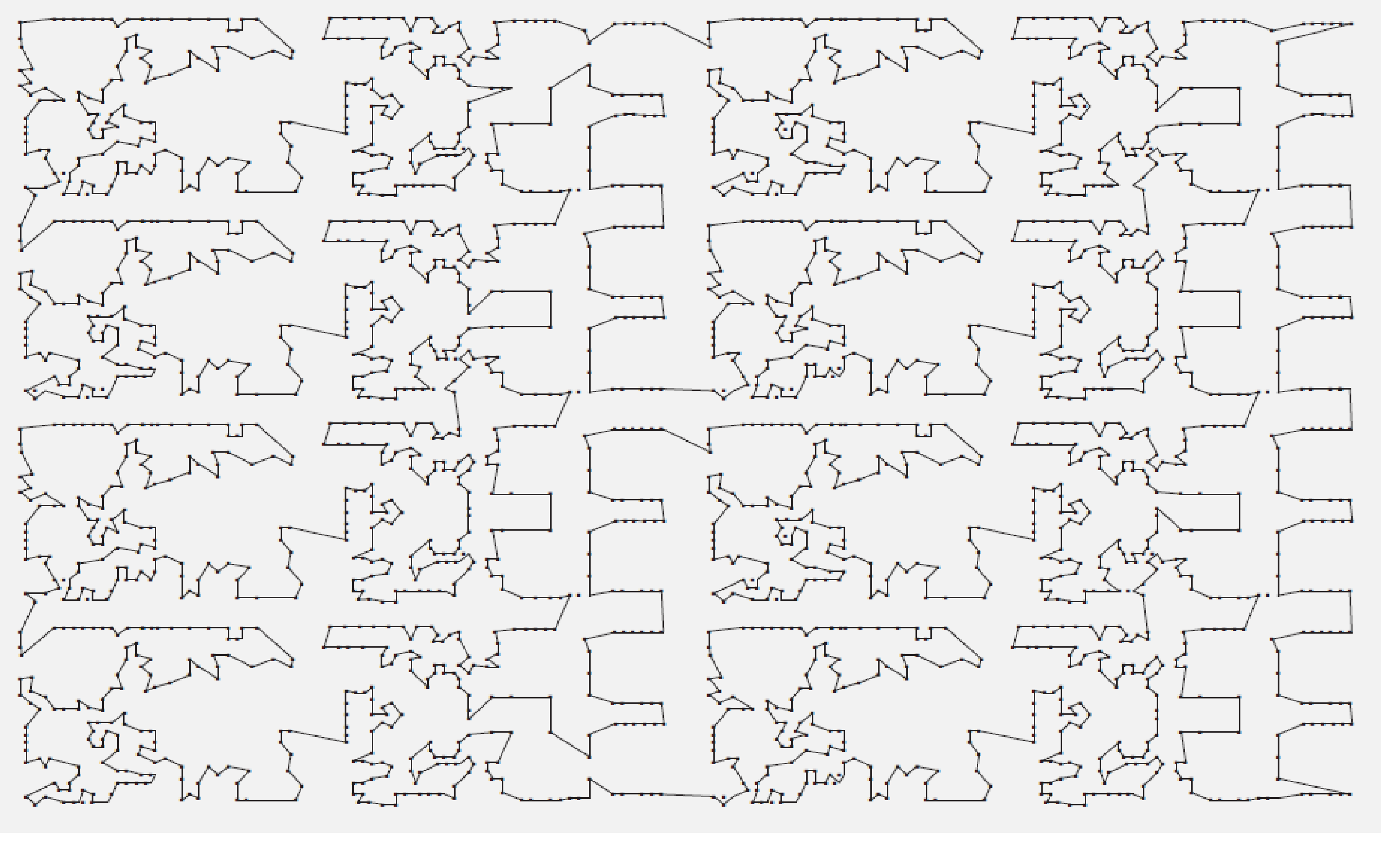
Problema del viajante

Agujeros en circuitos impresos. Para fijar los componentes tenemos que perforar agujeros. ¿Qué recorrido debe seguir la máquina perforadora?



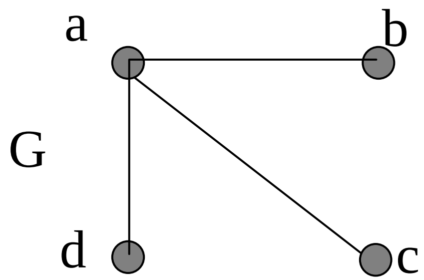
Problema del viajante

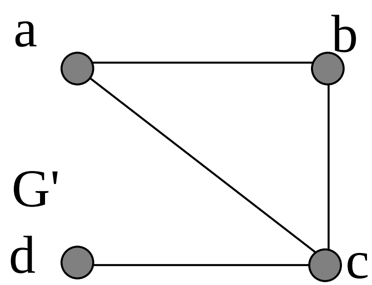
Agujeros en circuitos impresos. Para fijar los componentes tenemos que perforar agujeros. ¿Qué recorrido debe seguir la máquina perforadora?

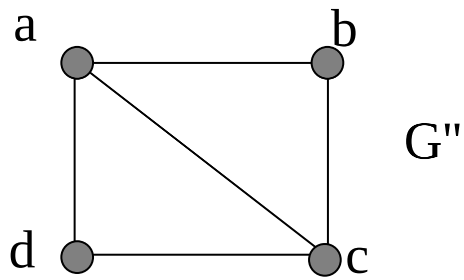


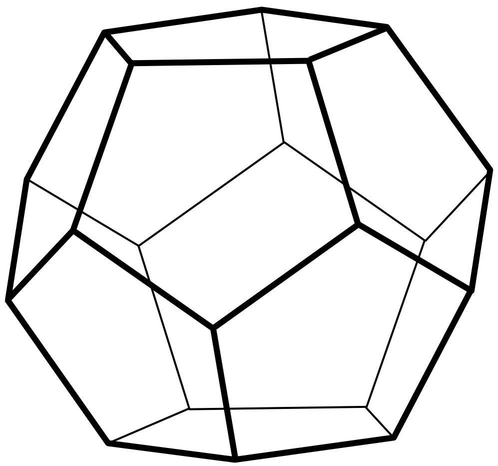
Un **camino hamiltoniano** en un grafo es un camino que contiene a todos los vértices del grafo exactamente una vez (salvo $v_0=v_n$, si el camino es cerrado).

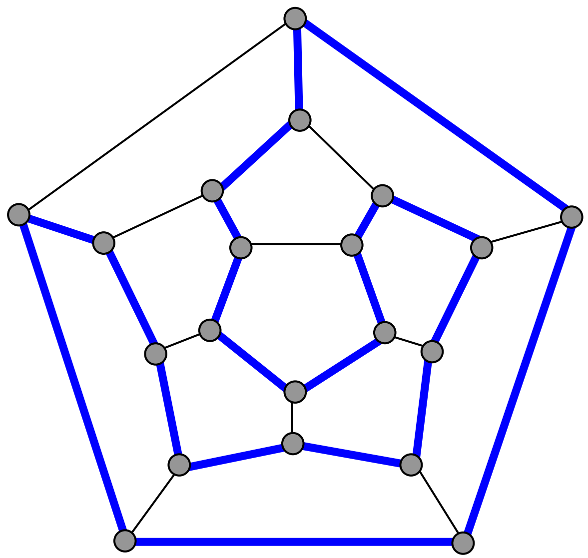
Un **grafo hamiltoniano** es aquel que contiene un ciclo hamiltoniano.

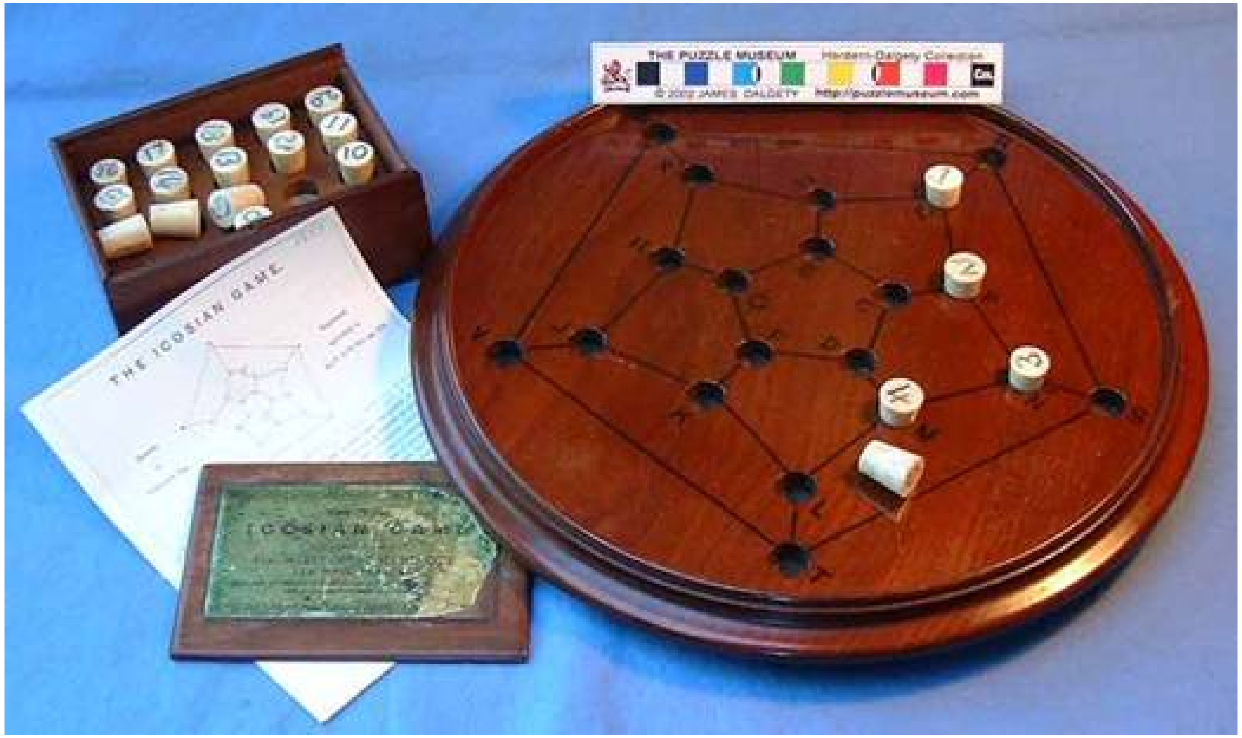






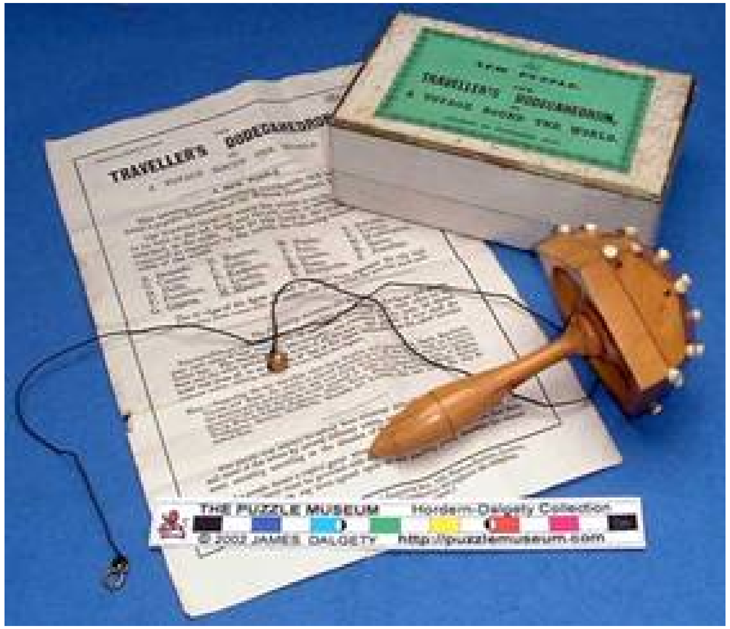






W. Hamilton

Juego icosiano

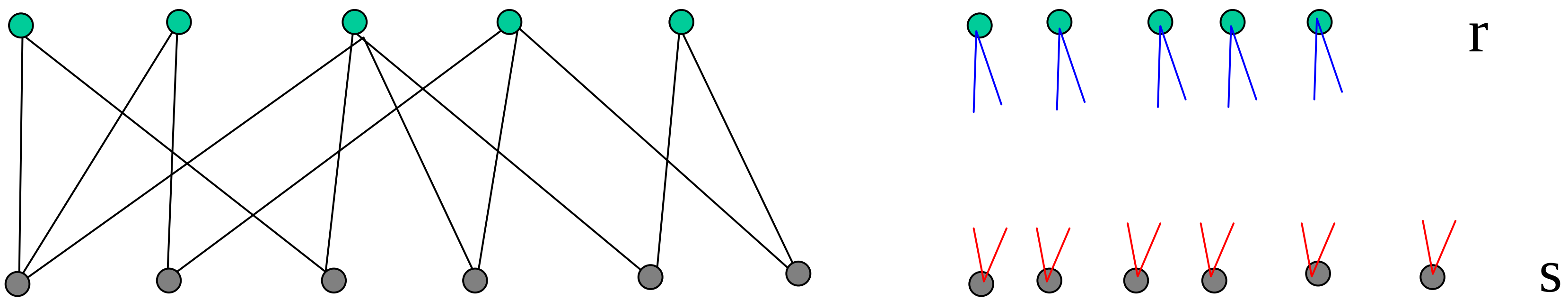


En un grafo hamiltoniano

- No puede haber vértices de grado 1
- No puede haber vértices-corte
- Todas las aristas incidentes a vértices de grado 2 pertenecen a todos los ciclos hamiltonianos.

Propiedad

Un grafo bipartido $G=(V_1 \cup V_2, A)$ con $|V_1| \neq |V_2|$ no es hamiltoniano



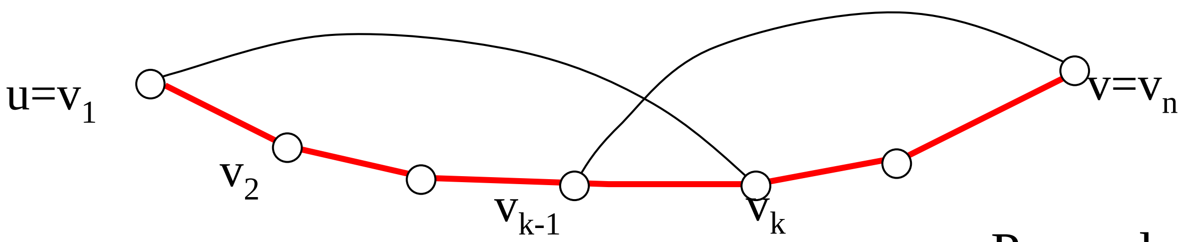
Si el grafo posee un ciclo hamiltoniano C y $|V_1|$ = r, entonces hay 2r aristas de C incidentes con vértices de V_1.
Por la misma razón, si $|V_2|$ =s, habrá 2s aristas de C incidentes con vértices de V_2.
Como G es bipartido todas las aristas son incidentes con un vértice de V_1 y otro de V_2, por lo que el ciclo C posee 2r = 2s aristas, es decir, r = s.

Teorema (condición suficiente)

Sea G un grafo simple de n vértices. Si para todo par de vértices **x** e **y** no adyacentes se cumple que **d(x)+d(y) ≥ n** , entonces G es **hamiltoniano.**

Dem.: Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un grafo G* no hamiltoniano que cumple la condición del enunciado. Añadiendo aristas a G* se construye otro grafo G que sigue cumpliendo la condición y que es maximal no hamiltoniano.

Si uv no es arista de G, en G hay camino hamiltoniano $u=v_1, v_2, \ldots, v_n= v$



Si u y v_k son adyacentes entonces v y v_{k-1} no son adyacentes

⇒ Por cada vecino de u hay un vértice de G – {v} que no es adyacente a v

⇓

$$d(v) \leq (n-1) - d(u)$$

⇐

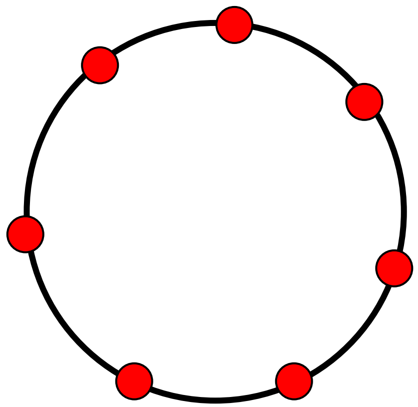
$$d(u) + d(v) \leq n-1$$

Contradicción!!

Teorema (condición suficiente)

Sea G un grafo simple de n vértices. Si para todo par de vértices **x** e **y** no adyacentes se cumple que $\mathbf{d(x)+d(y) \geq n}$, entonces G es **hamiltoniano.**

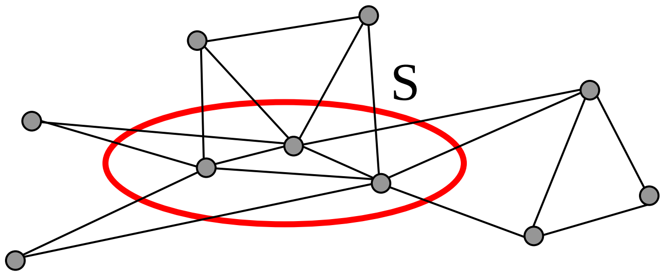
Esta condición **NO** es **necesaria**, existen grafos que no la cumplen pero **SÍ** son hamiltonianos

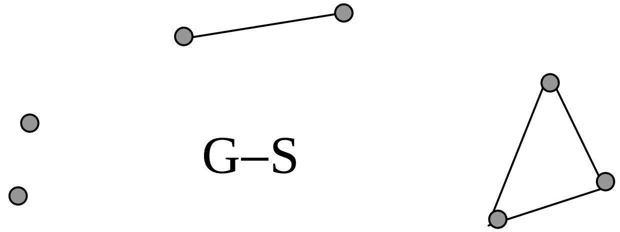


Teorema (condición necesaria)

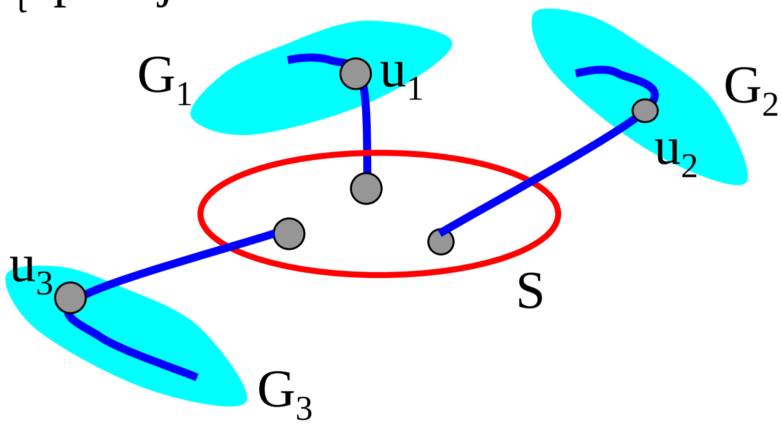
Si G es un grafo **hamiltoniano** entonces,

$\forall\ S \subset V$ se cumple que $\quad |\text{ comp. conexas de } (G - S)\,| \leq |S|$





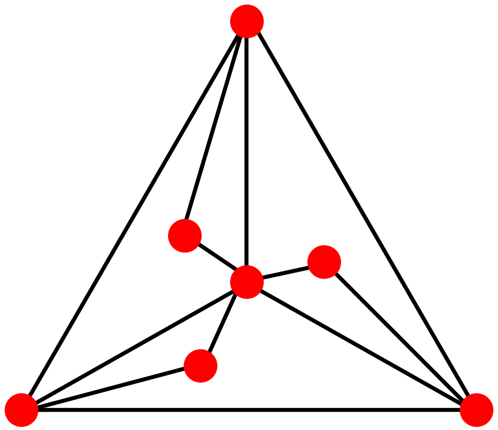
C un ciclo hamiltoniano de G y supongamos que G –S tiene k componentes conexas, G_1, G_2, ... , G_k. Llamemos u_j al último vértice de C que pertenece a G_j y v_j al siguiente vértice en C. Necesariamente v_j debe ser un vértice del conjunto eliminado S y además $v_j \neq v_t$ para $j \neq t$.

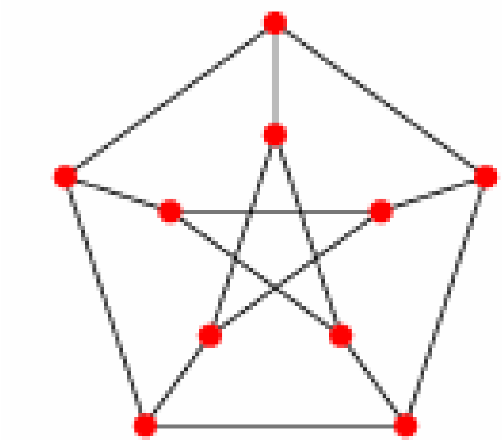


Por tanto, hay al menos tantos vértices en S como componentes en G – S

Teorema (condición necesaria)
Si G es un grafo **hamiltoniano** entonces,
$\forall\ S \subset V$ se cumple que $|\text{comp. conexas de } (G - S)| \leq |S|$

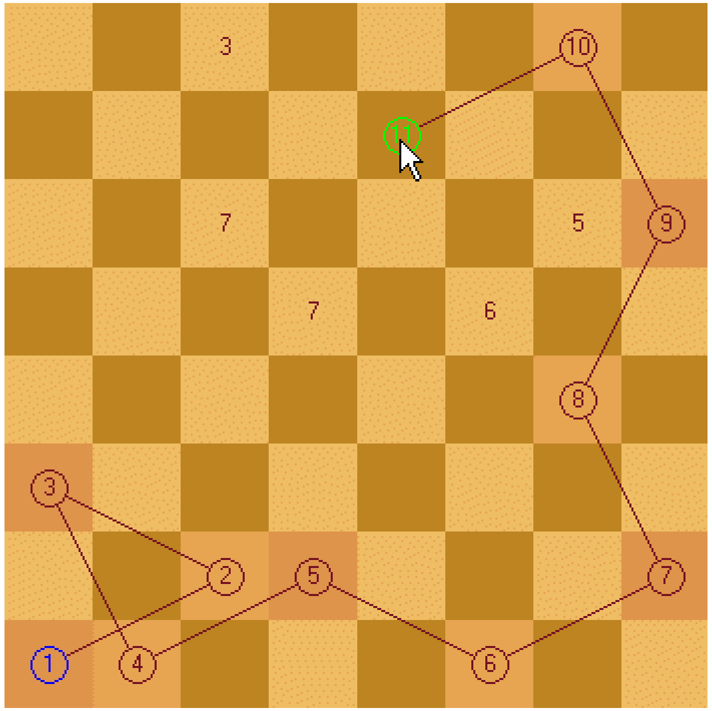
Esta condición **NO** es **SUFICIENTE**, es decir, existen grafos que **SÍ** la cumplen pero no son hamiltonianos.

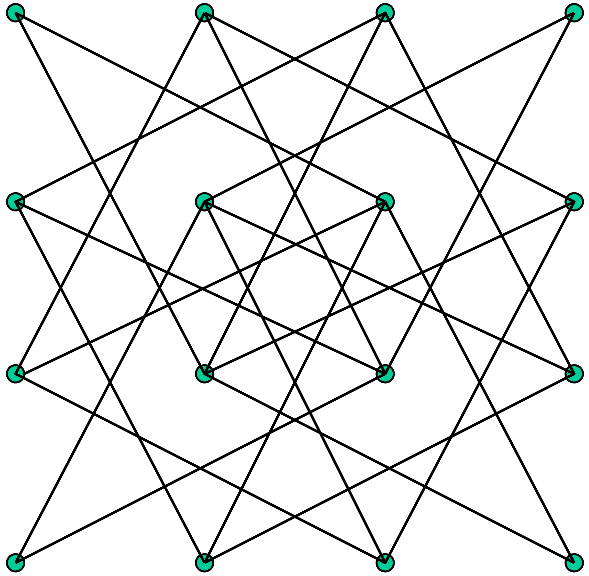




NO hay caracterización para los grafos **hamiltonianos**.

Recorrido del caballo en un tablero de ajedrez



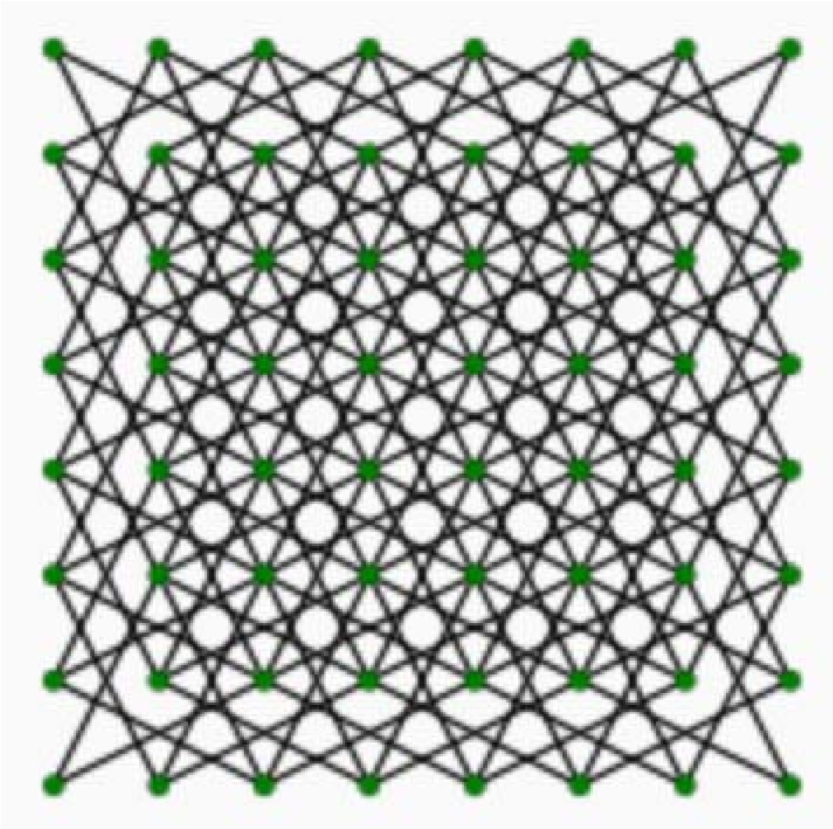


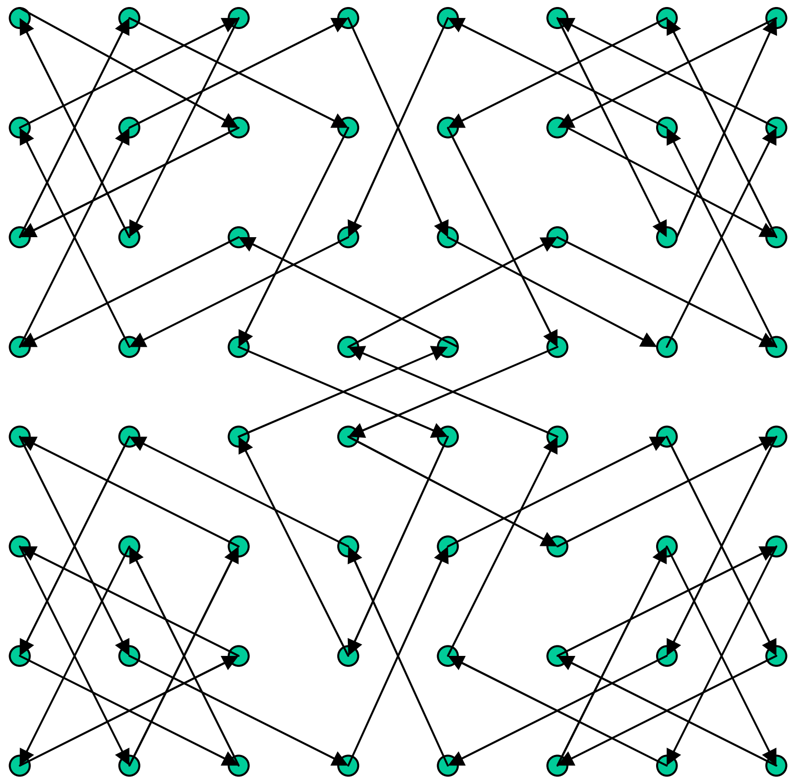
Tablero 4×4

¿Tablero 5×5?

Recorrido del caballo en un tablero de ajedrez

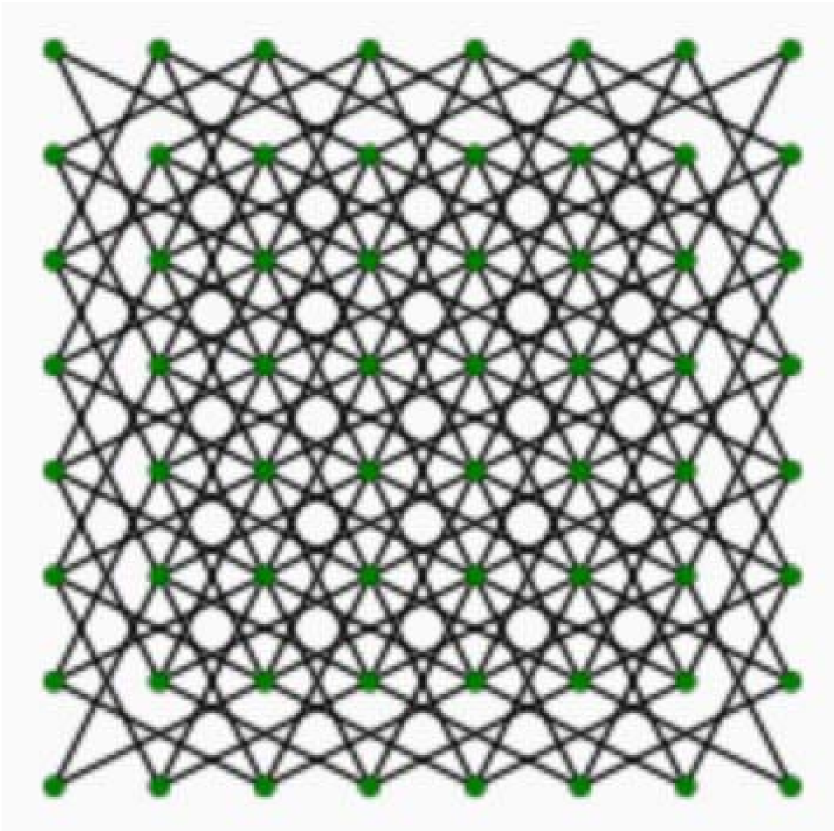
Tablero 8×8

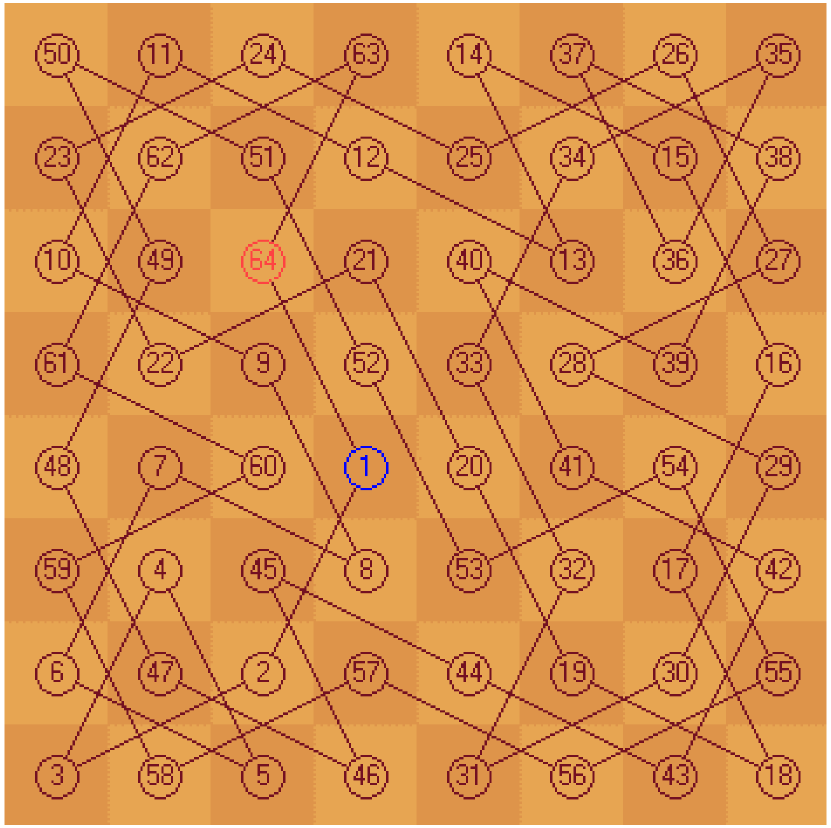




Recorrido del caballo en un tablero de ajedrez

Tablero 8×8



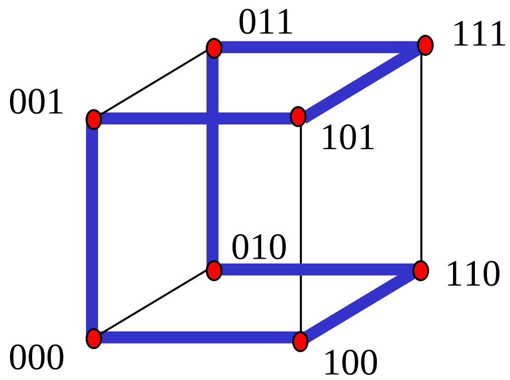


CÓDIGOS DE GRAY

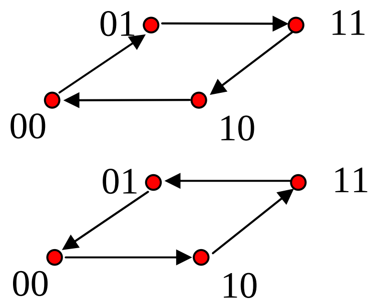
Alfabeto I={0,1} 2^n palabras de longitud n

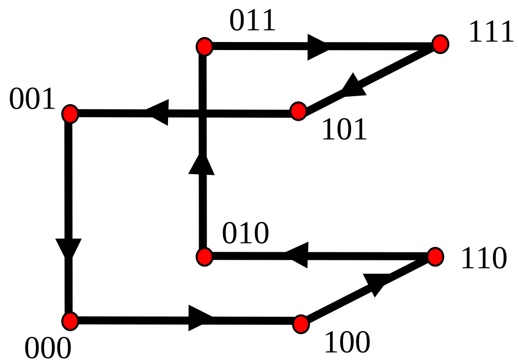
Un **código de Gray** de orden n es una ordenación de esas 2^n palabras tal que palabras consecutivas difieren en un sólo dígito.

{000, 100, 110, 010, 011, 111, 101, 001, 000} es un código de Gray de orden 3.



Un ciclo hamiltoniano en Q_3

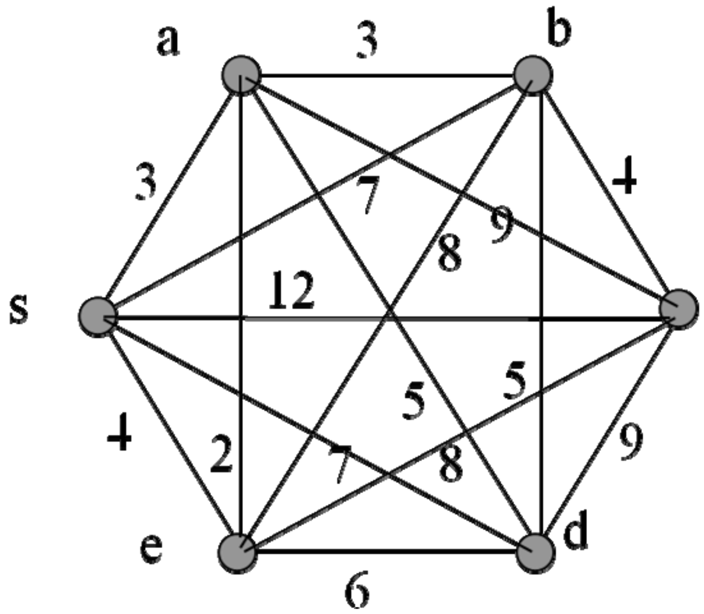




Problema del viajante   TSP

Un viajante de comercio desea visitar n ciudades volviendo al punto de partida. ¿Qué ruta debe seguir para minimizar la distancia total recorrida?

Hallar el ciclo hamiltoniano del grafo completo ponderado K_n con mínimo peso



Algoritmo

1. Hallar todos los ciclos de longitud n
2. Elegir el de menor peso

El nº de ciclos es (n-1)!/2

La complejidad es O(n!)

Problema del Viajante (Travelling Salesman Problem)

Hallar la ruta de longitud mínima que visita todas las ciudades, es decir, el ciclo hamiltoniano de longitud mínima, es un problema para el que no se conoce un algoritmo eficiente.
Es un problema NP-completo

Algoritmos aproximados

- Vecino más próximo
- Doble intercambio
- Duplicando MST
- Algoritmo de Christofides

http://www.tsp.gatech.edu/index.html

http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/enlacesgrafos.html

Algoritmos aproximados TSP

Algoritmos que obtienen una solución aproximada, que podemos medir la “bondad” de la solución.

Condición adicional (Metric-TSP)

Se cumple la desigualdad triangular para cualquier terna de vértices i,j,k

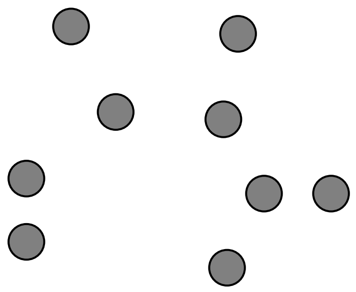
$$w(ik) \leq w(ij) + w(jk)$$

Esta condición se puede conseguir en cualquier grafo considerando como nuevo peso de una arista ik a

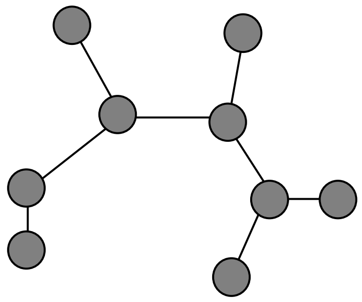
$$w^*(ik) = \min \{w(P) / \ P \text{ camino de } i \text{ hasta } k\}$$

Algoritmo de duplicación del MST

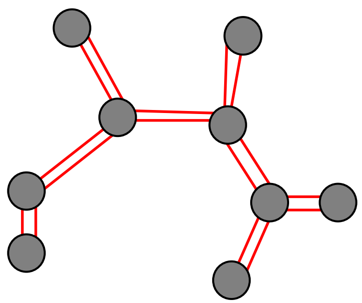
2 - aproximación



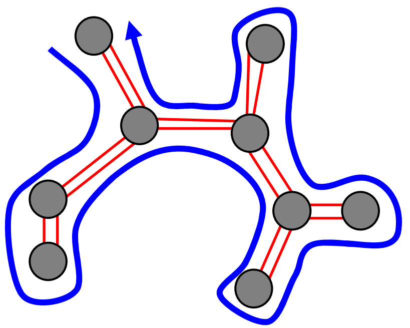
Los vértices de G



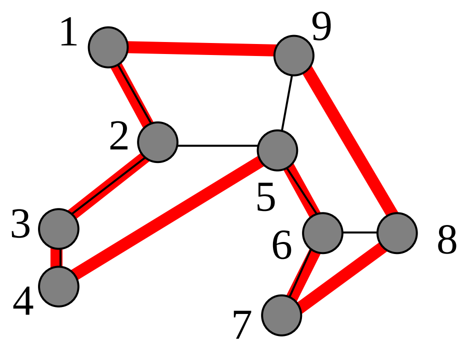
MST(G)



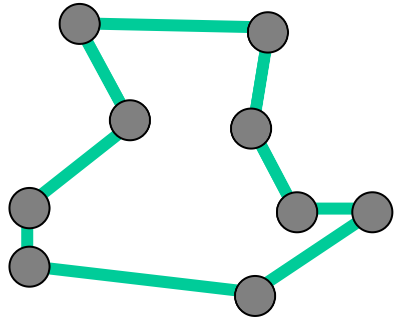
Grafo euleriano H



Recorrido euleriano
en H



Ciclo
hamiltoniano



Solución óptima

Algoritmo de duplicación del MST

Si G es un grafo completo ponderado, C un ciclo hamiltoniano obtenido por el algoritmo de duplicación del árbol y C un ciclo hamiltoniano de peso mínimo entonces*

$$w(C) \leq 2w(C^*)$$

Dem.:

Si T es un árbol generador mínimo, $w(T) \leq w(C^*)$
El recorrido euleriano en H tiene un peso $w(H)=2w(T)$
El ciclo C tiene un peso menor que H, luego
$w(C) \leq w(H) = 2w(T) \leq 2w(C^*)$

Algoritmos aproximados. Medida de la bondad

Un algoritmo aproximado para un problema de optimización es un algoritmo que alcanza una solución del problema pero que no garantiza la solución óptima.
¿Cómo medimos cuánto nos acercamos a ella?

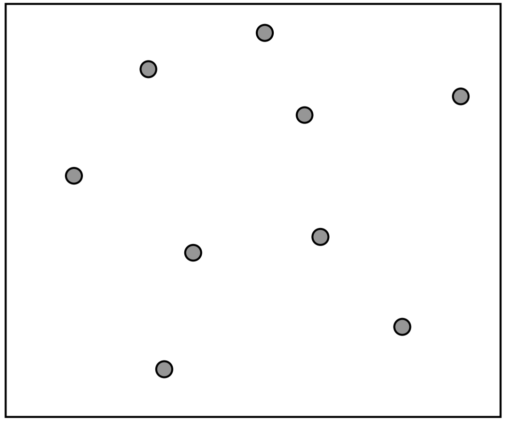
Si S^* es la solución óptima con un coste $c(S^*)$,
un **algoritmo δ-aproximado** es un algoritmo que devuelve una solución S tal que

$c(S) \leq \delta\, c(S^*)$ (para un problema de minimización)

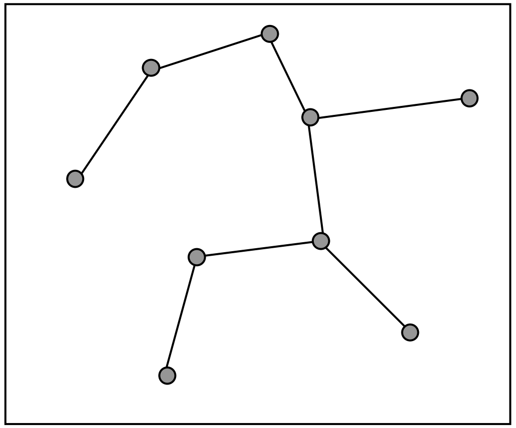
$c(S^*) \leq \delta\, c(S)$ (para un problema de maximización)

Algoritmo de Christofides

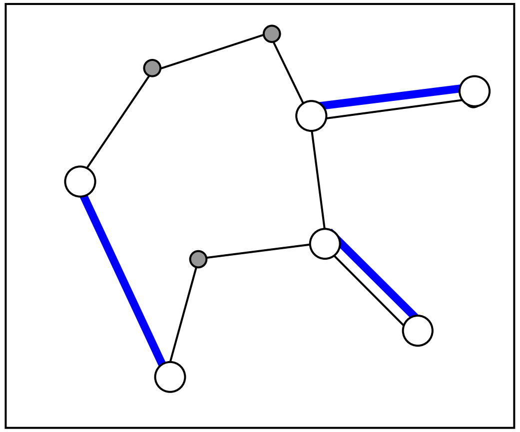
(3/2) - aproximación



Los vértices de G



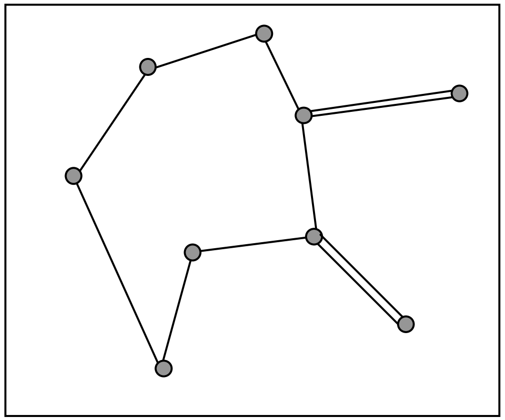
MST(G)



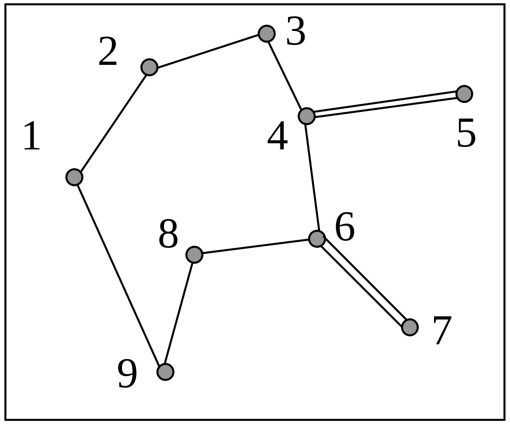
Emparejamiento de peso mínimo entre los vértices impares de MST(G)

Algoritmo de Christofides

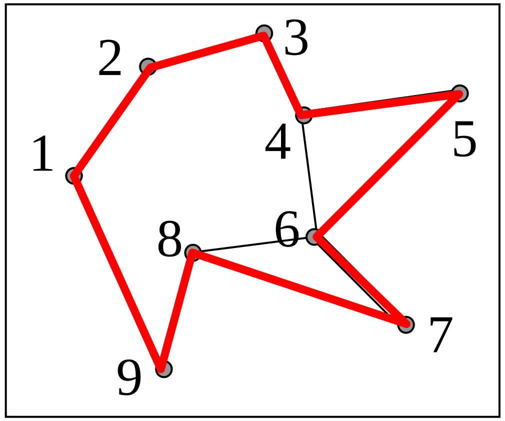
(3/2) - aproximación al Problema Euclídeo del Viajante (ETSP)



G* grafo
euleriano



Recorrido
euleriano en G*



Ciclo **C** siguiendo el mismo
orden en los vértices

C ciclo obtenido por el algoritmo

Algoritmo de Christofides

Si G es un grafo completo ponderado, C un ciclo hamiltoniano obtenido por el algoritmo de Christofides y C un ciclo hamiltoniano de peso mínimo entonces*

$$w(C) \leq \frac{3}{2} w(C^*)$$

Dem.:

Si T es un árbol generador mínimo, $w(T) \leq w(C^*)$

$$w(C) \leq w(G^*) = w(T) + w(M) \leq w(C^*) + w(M)$$

donde M es el emparejamiento perfecto obtenido en el algoritmo.

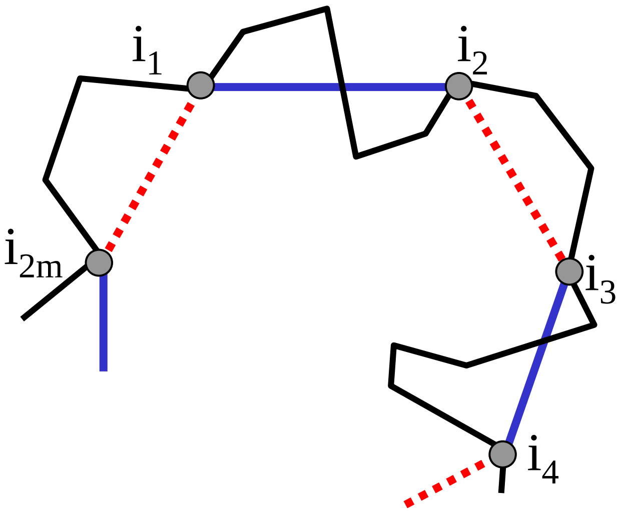
Relación entre $w(C^*)$ y $w(M)$

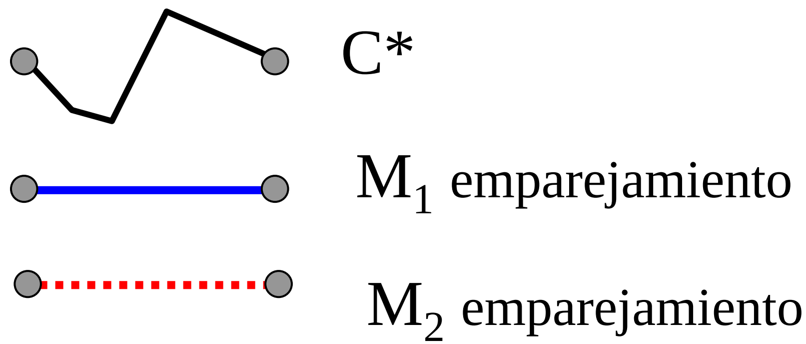
Algoritmo de Christofides

$$w(C) \leq \frac{3}{2} w(C^*)$$

Relación entre $w(C^*)$ y $w(M)$

$i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$, los vértices impares de T





$$w(M_1) + w(M_2) \leq w(C^*) \Rightarrow 2w(M) \leq w(C^*)$$

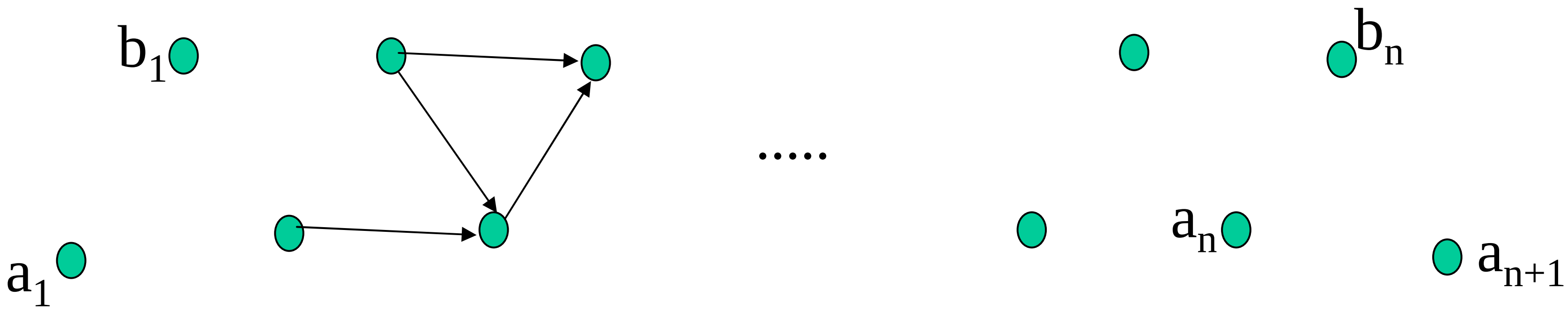
por M mínimo

$$w(C) \leq w(C^*) + w(M) \leq w(C^*) + \frac{1}{2} w(C^*) = \frac{3}{2} w(C^*)$$

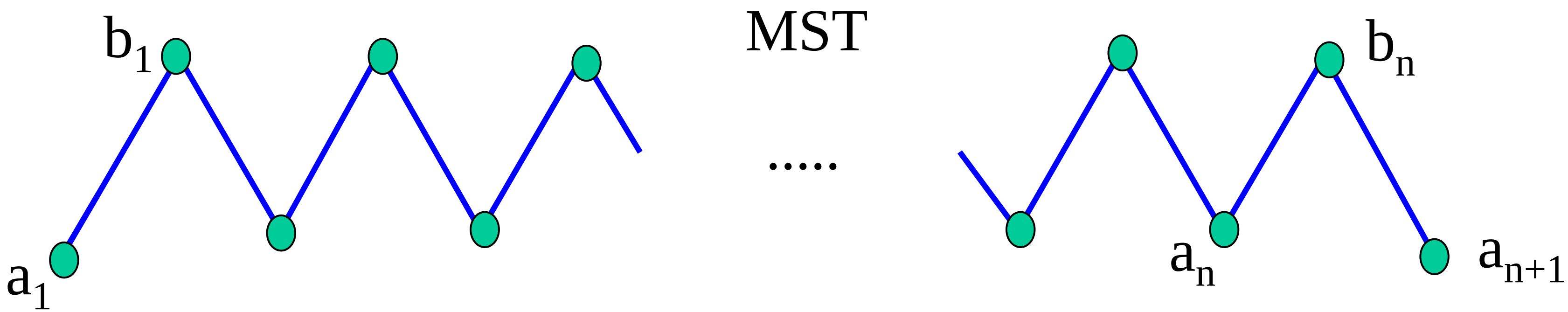
Algoritmo de Christofides

$$w(C) \leq \frac{3}{2} w(C^*)$$

Existen grafos para los que el algoritmo obtiene su peor cota

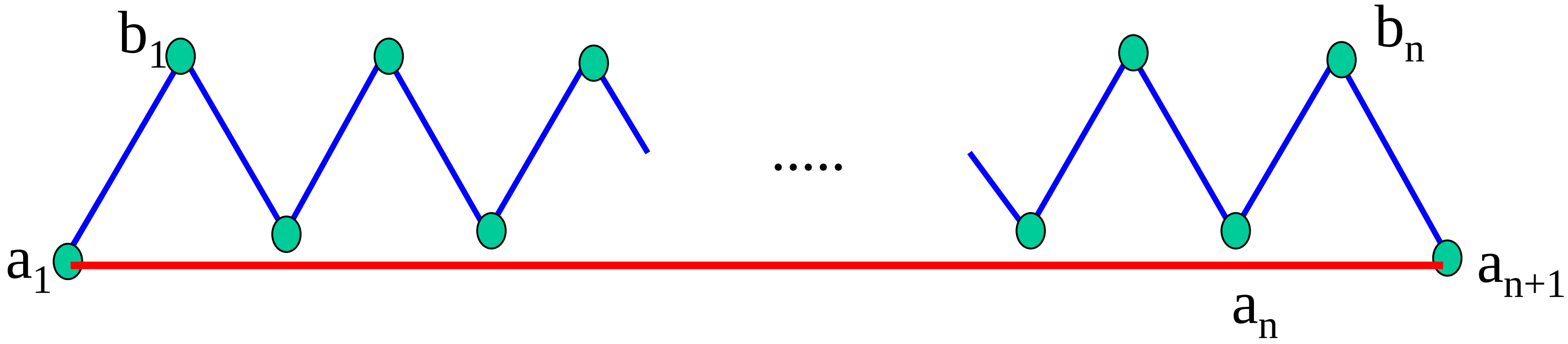


$\text{dist}(a_k, b_k) = \text{dist}(b_k, b_{k+1}) = 1$



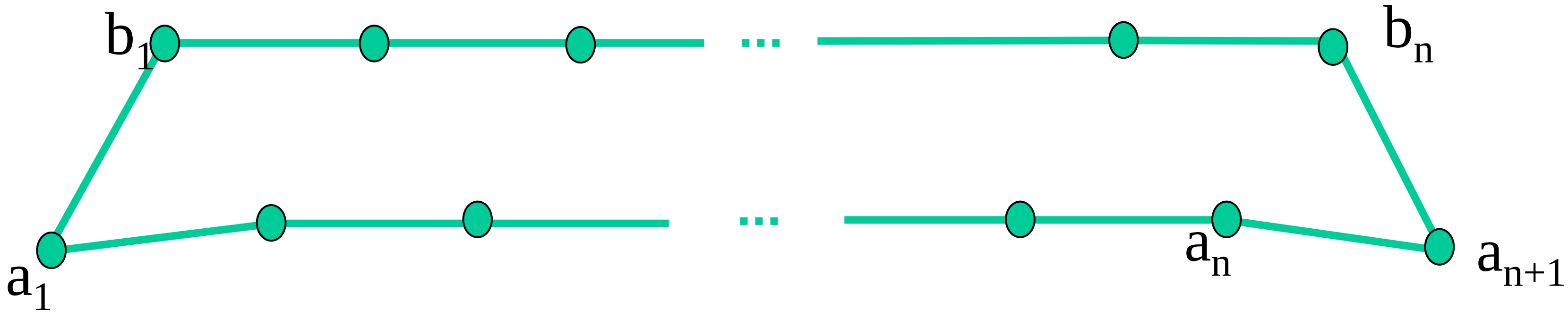
Algoritmo de Christofides

$$w(C) \le \frac{3}{2} w(C^*)$$



C ciclo del algoritmo

$w(C)= 3n$



C* óptimo

$w(C^*) = 2n +1$

Recorridos cerrados (circuitos) en un grafo

Circuito EULERIANO

Visita todas las aristas, sin repetir ninguna

Circuito del CARTERO

Visita todas las aristas, se permiten repeticiones

Ciclo HAMILTONIANO

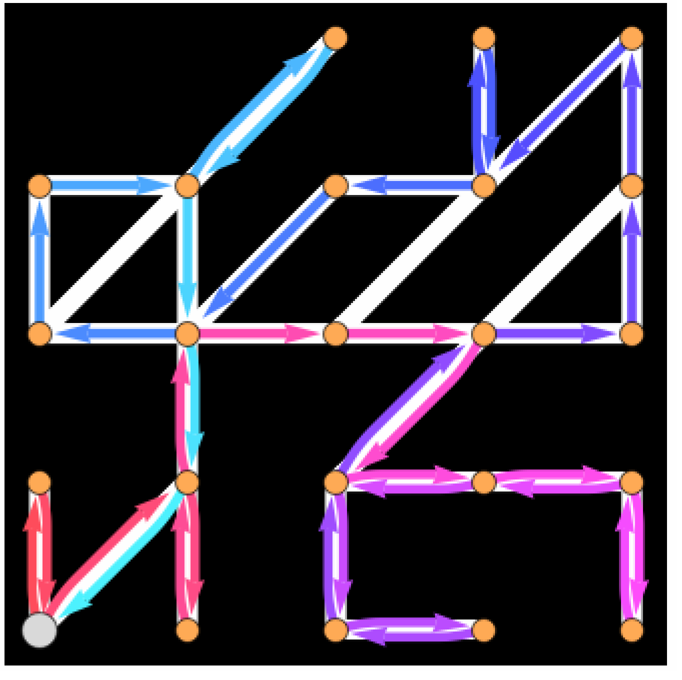
Visita todos los vértices sin repetir ninguno

Recorrido del VIAJANTE

Ciclo hamiltoniano de peso mínimo

Recorridos cerrados (circuitos) en un grafo

Ruta de un VEHÍCULO **(VEHICLE ROUTING PROBLEM)**
Circuito de longitud mínima que visita todos los vértices, se permite repetir vértices y aristas

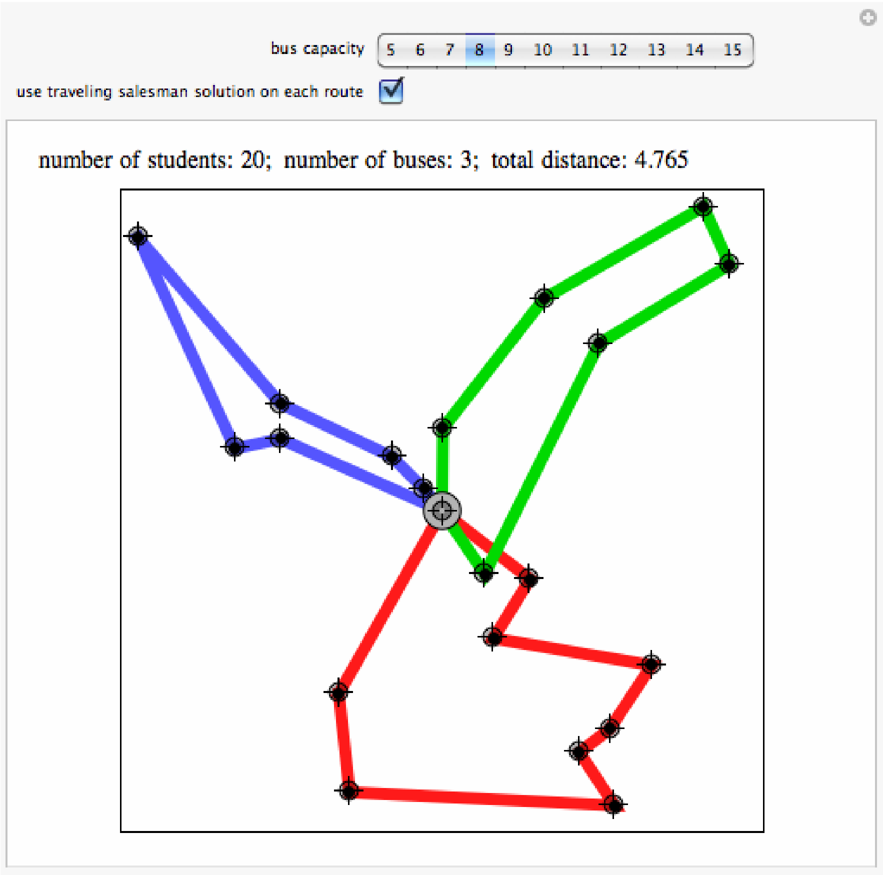


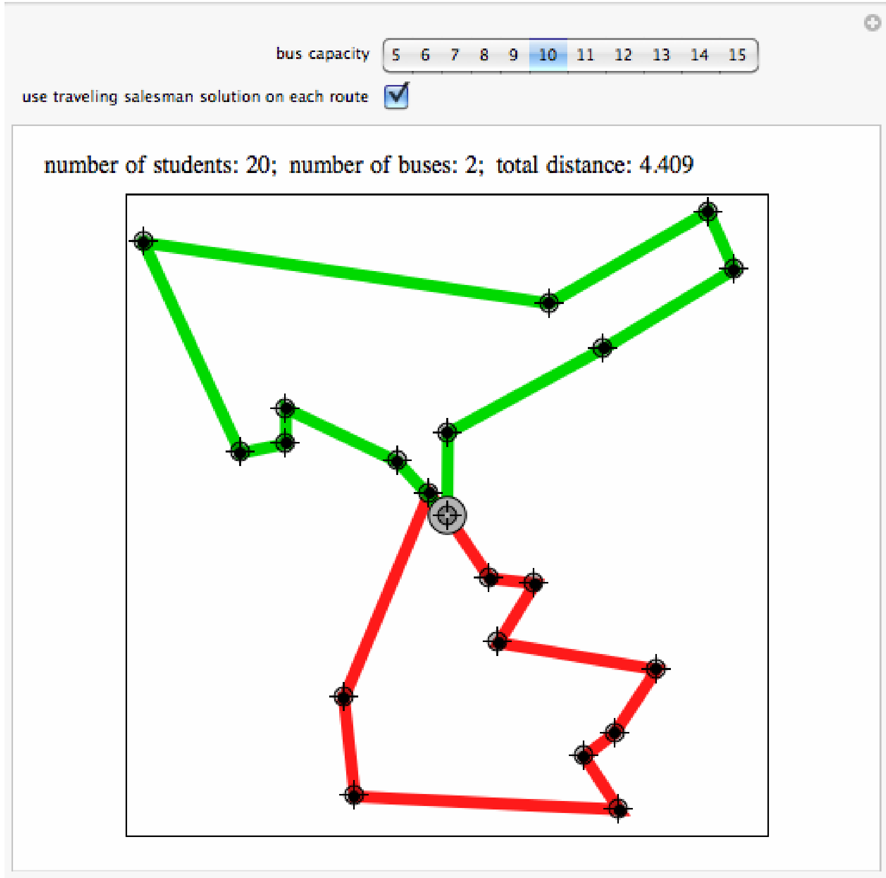
http://demonstrations.wolfram.com/ToursThroughAGraph/

Recorridos cerrados (circuitos) en un grafo

AUTOBÚS ESCOLAR **(SCHOOL BUS PROBLEM)**

Conjunto de rutas de autobús que minimizan la distancia total recorrida por los autobuses para recoger a todos los alumnos.



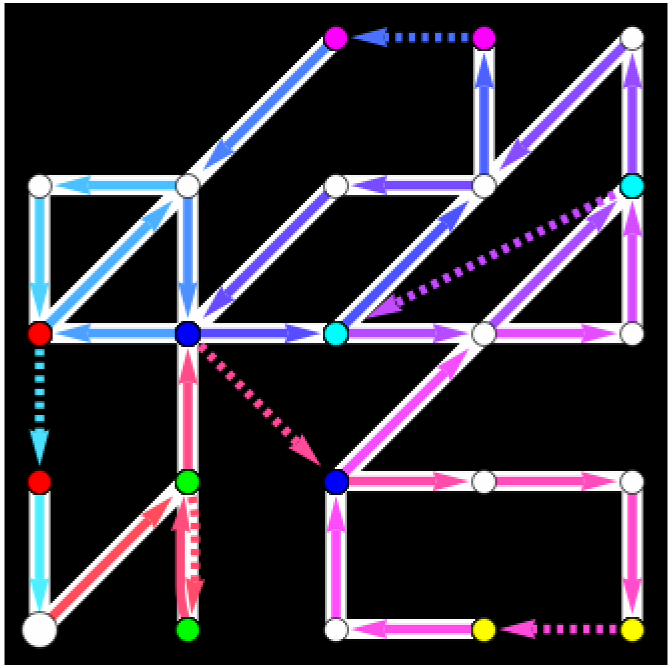


http://demonstrations.wolfram.com/TheVehicleRoutingProblem/

Recorridos cerrados (circuitos) en un grafo

Ruta del PLOTTER

Ruta de longitud mínima que visita todas las aristas; se permiten segmentos adicionales en que la pluma está en el aire



http://demonstrations.wolfram.com/ToursThroughAGraph/