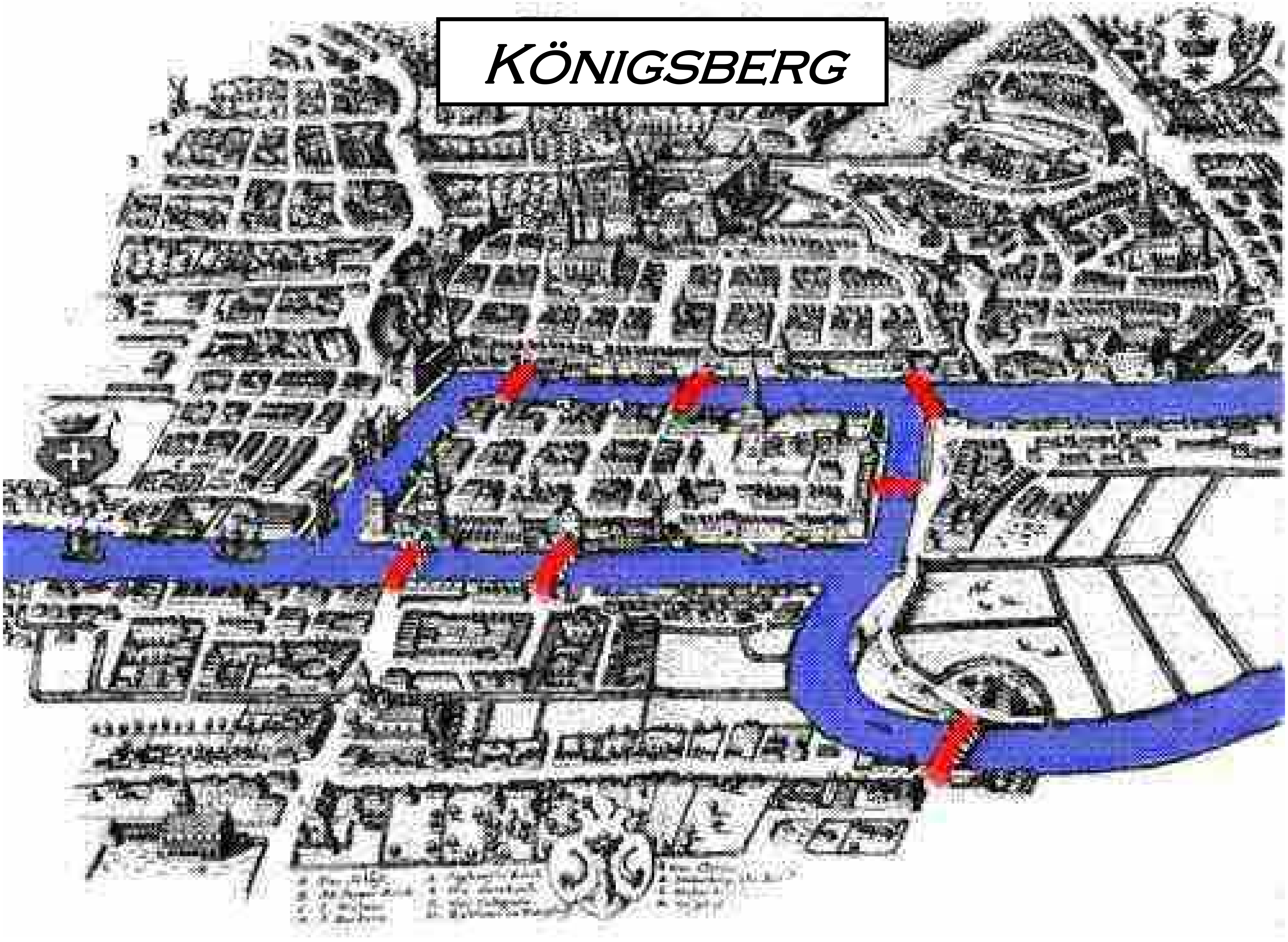
Recorridos eulerianos

Gregorio Hernández Peñalver

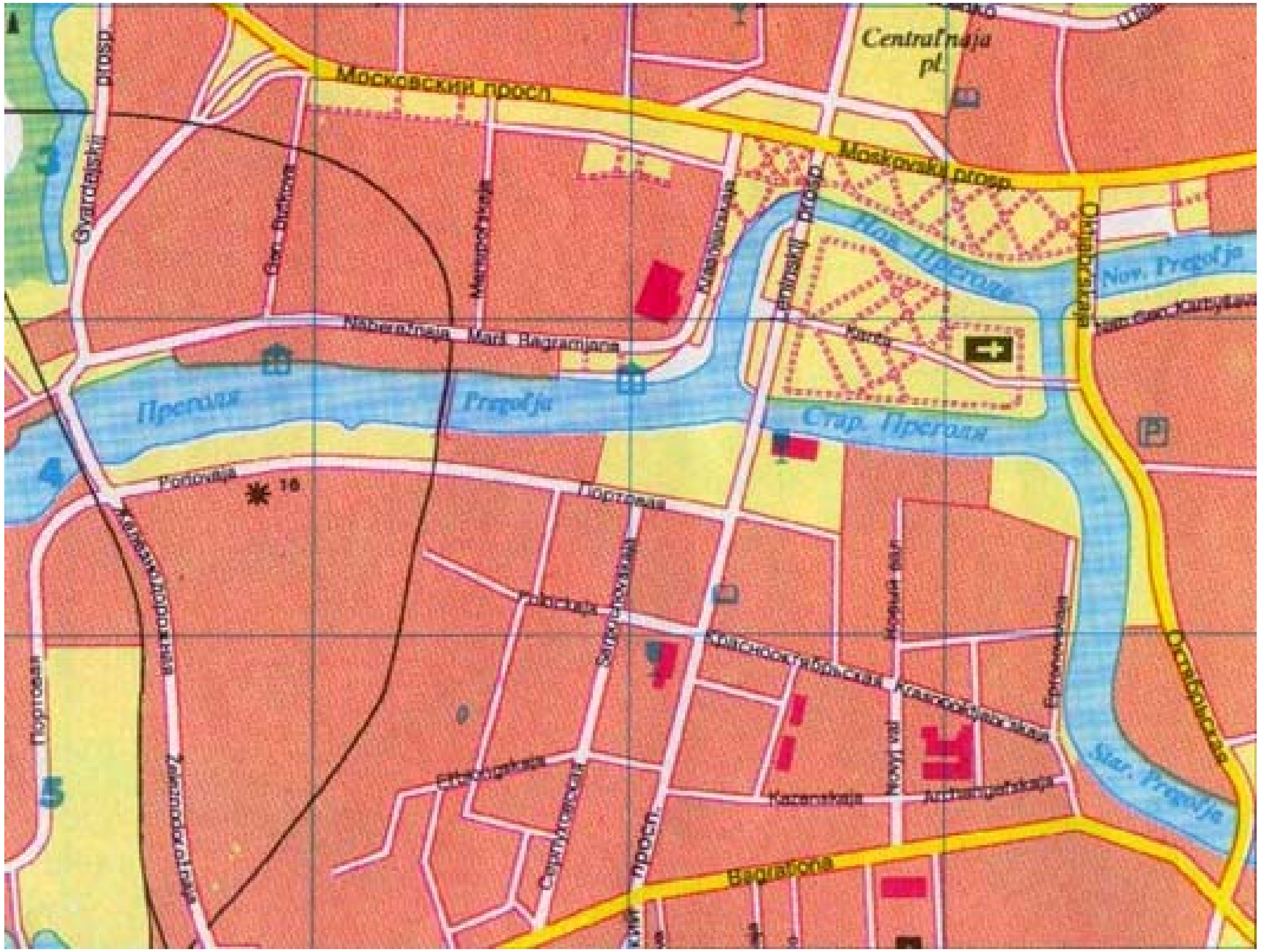
UPM

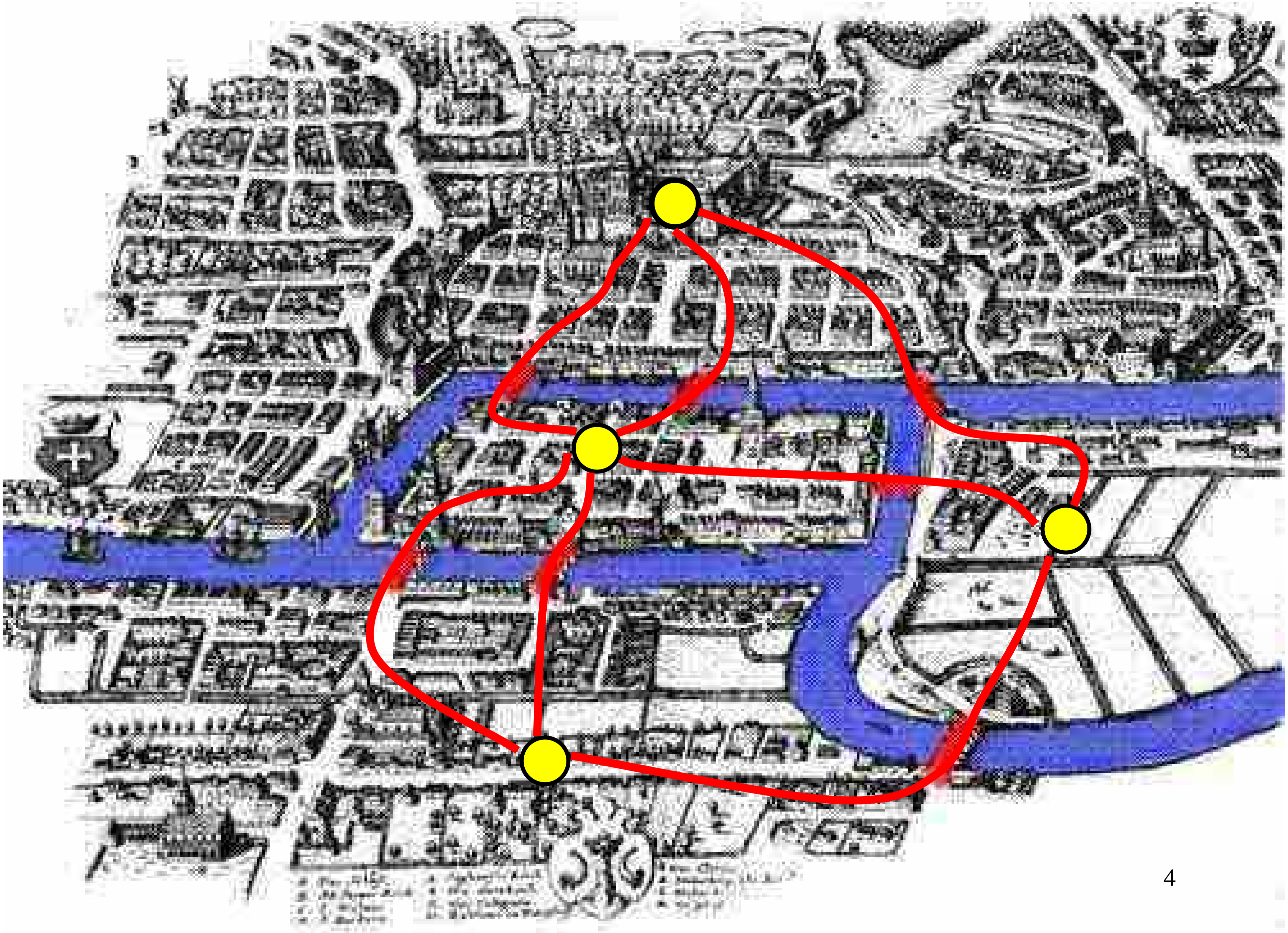
Matemática Discreta II

(MI)

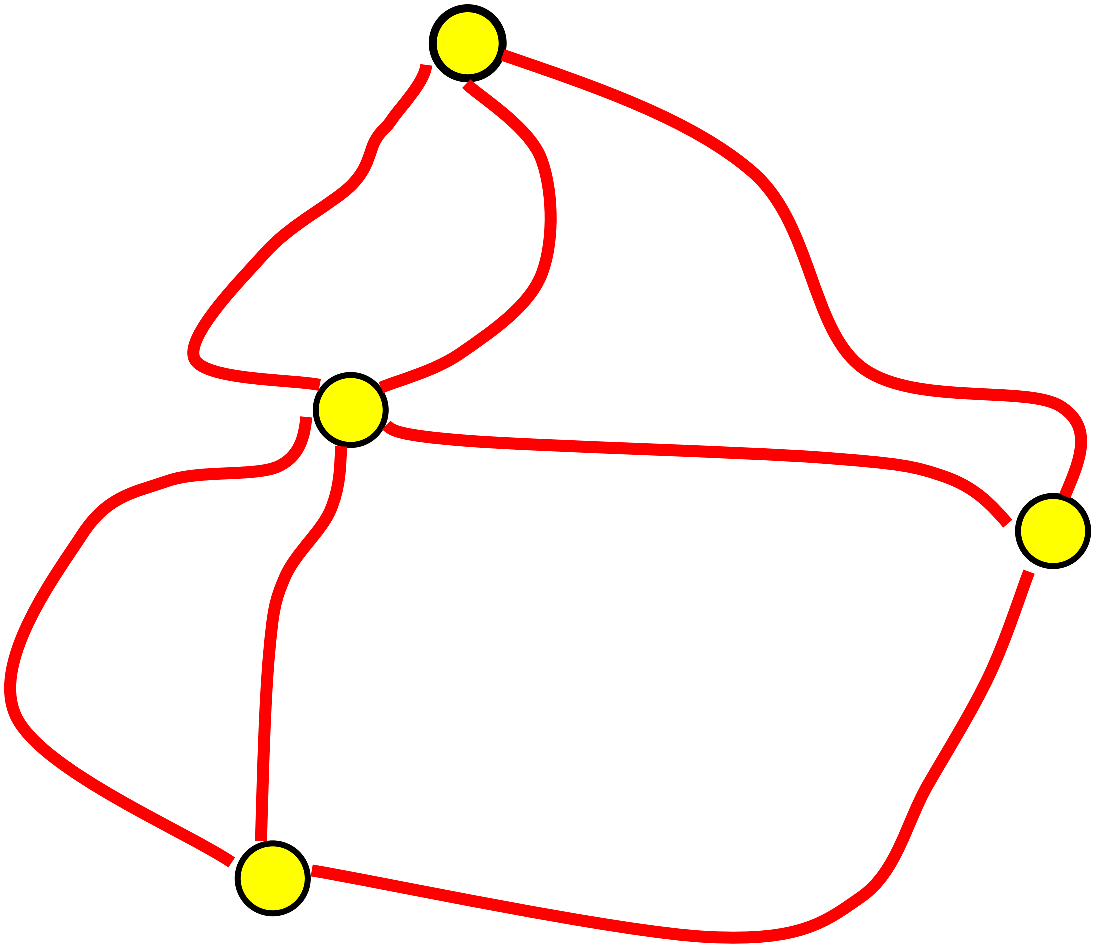

Königsberg

KALININGRADO



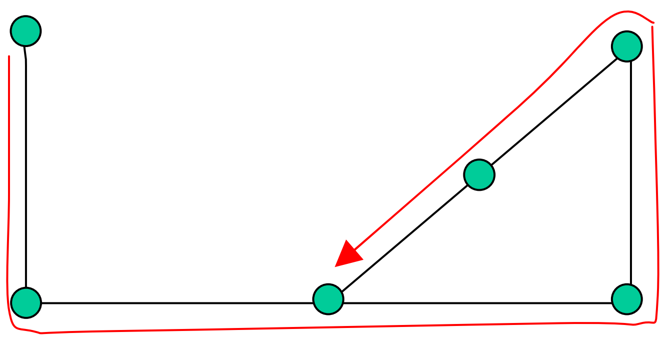


Euler 1736

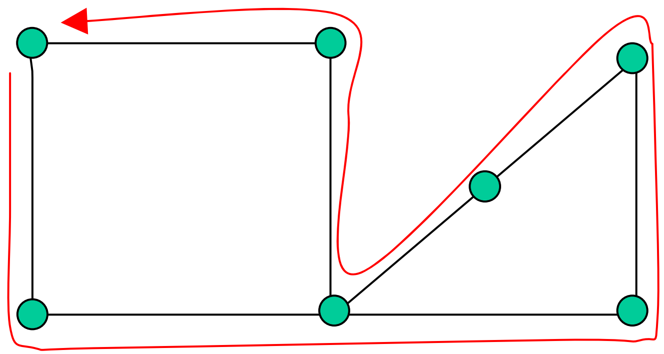


Un **recorrido euleriano** en un grafo es un recorrido que contiene a todas las aristas del grafo exactamente una vez.

Un **grafo** es **euleriano** si contiene un recorrido euleriano cerrado.



Recorrido euleriano
Grafo **NO** euleriano



Grafo euleriano

Teorema

Sea G un grafo conexo

G es euleriano $\Leftrightarrow$ Todos los vértices de G tienen grado par.

Dem.:

$\Rightarrow$) Si G es euleriano todos los vértices son pares

$\Leftarrow$) Demostramos la suficiencia de la condición por inducción sobre q

Paso base: si q=1, entonces el grafo tiene un vértice y una única arista que es un bucle. Y este grafo es euleriano

Paso de inducción: Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de q aristas.

Como el grado de cada vértice de G es al menos 2, G contiene un ciclo C

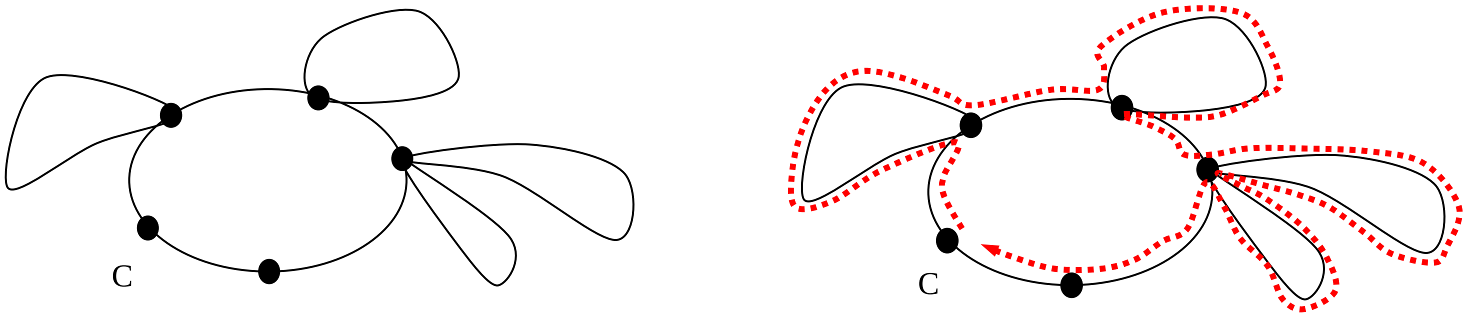
Teorema

Sea G un grafo conexo

G es euleriano $\Leftrightarrow$ Todos los vértices de G tienen grado par.

Paso de inducción:

El grafo G−{aristas de C} tiene menos de q aristas. En cada una de sus componentes conexas podemos aplicar la hipótesis de inducción, (los grados siguen siendo pares). Así tenemos en cada componente no trivial un recorrido euleriano cerrado. Todos estos recorridos tienen un vértice, al menos, en común con el ciclo C. Concatenando adecuadamente C y estos recorridos obtenemos un recorrido euleriano cerrado en G



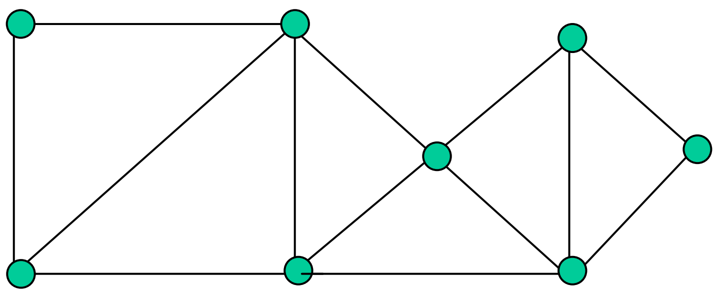
Teorema

Sea G un grafo conexo

G es euleriano $\Leftrightarrow$ Todos los vértices de G tienen grado par.

Consecuencia

Un grafo conexo G tiene un recorrido euleriano no cerrado $\Leftrightarrow$ G tiene, exactamente, dos vértices de grado impar.



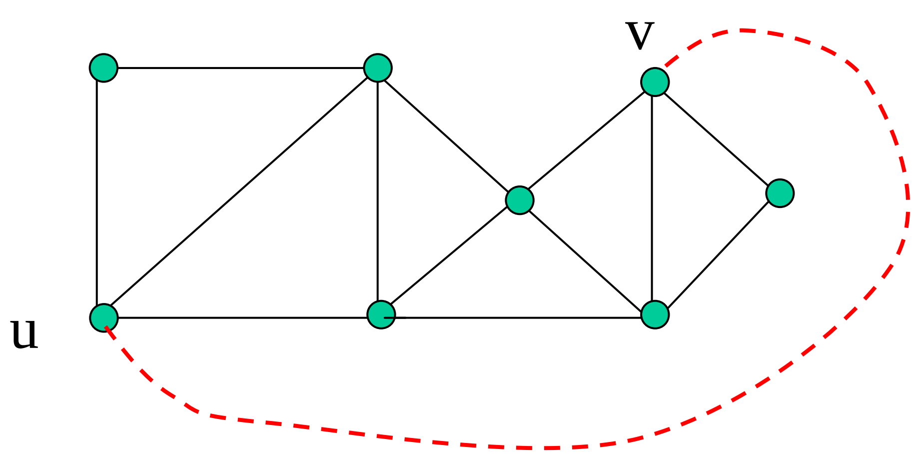
Teorema

Sea G un grafo conexo

G es euleriano ⇔ Todos los vértices de G tienen grado par.

Consecuencia

Un grafo conexo G tiene un recorrido euleriano no cerrado ⇔ G tiene, exactamente, dos vértices de grado impar.



2,5, … ,7,1,u---v,63,…,2

v,6,3, …, 2,5 … ,7,1,u

recorrido euleriano abierto

Algoritmo de Fleury

Paso 1.- Se comienza en un vértice cualquiera v_0 .

(O en un impar si hay dos vértices impares)

Paso 2.- Si se ha construido el camino $v_0\, a_1\, v_1\, a_2 \ldots v_{k-1}\, a_k\, v_k$ con aristas distintas, se elige la arista siguiente a_{k+1} con las condiciones:

(1) a_{k+1} incidente con v_k

(2) no ser puente en el grafo $G - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

(salvo que no haya alternativa).

Paso 3.- Se sigue hasta que el camino contenga todas las aristas.

Complejidad

En cada paso se analiza si la arista elegida para avanzar es un puente. Este análisis cuesta O(q). Como se recorren todas las aristas la complejidad total es $O(q^2)$

Algoritmo de Fleury *Justificación*

El algoritmo produce un recorrido euleriano.
Inducción sobre q
El resultado es cierto si q=1.
Supongamos cierto para q – 1 aristas.

Caso 1) Todos los vértices de G son pares
Entonces G no puede tener puentes. (Si una arista fuera puente, al borrarla tendríamos grafos con sólo un vértice impar).
Así empezando en un vértice v y una primera arista uv, el grafo G–{uv} tiene q – 1 aristas y dos vértices impares, luego por hipótesis de inducción el algoritmo construye un recorrido euleriano en G –{uv} que con extremos u y v. Junto con la arista uv se completa un recorrido euleriano cerrado en G.

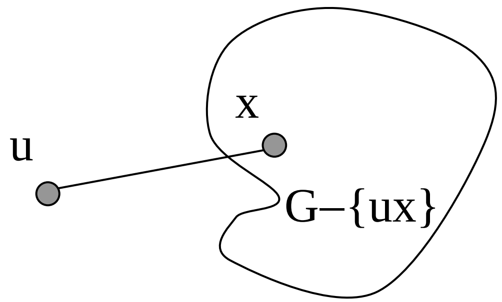
Algoritmo de Fleury *Justificación*

Caso 2) Supongamos ahora que G tiene dos vértices impares u, v.

Si d(u)=1

Se considera el vértice adyacente x y la arista ux,

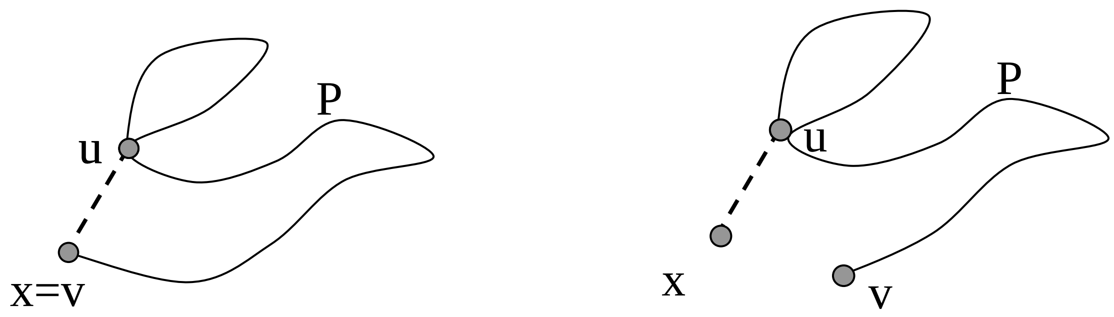
Por inducción en G –{ux} tenemos el recorrido euleriano de u hasta v.



Algoritmo de Fleury *Justificación*

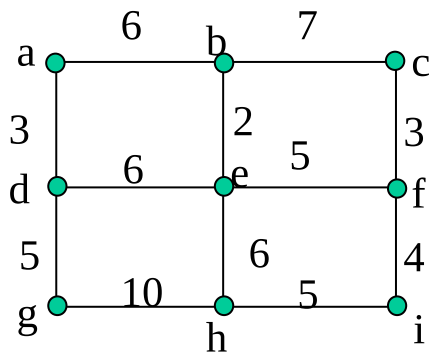
Caso 2) Supongamos ahora que G tiene dos vértices impares u, v.
Si d(u)>1,

Sea P un camino de u a v, y sea ux una arista incidente con u que no está en P. La arista ux no es puente, pues si lo fuera x sería el único impar en su componente conexa de G –{ux}. Por tanto G –{ux} es conexo.

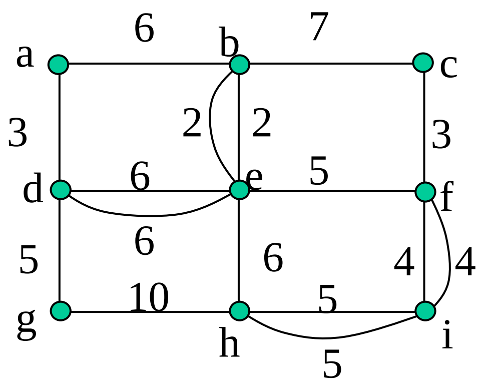


Si x=v, entonces todos los vértices de G –{ux} son pares.
Si x no es v, entonces hay dos vértices impares que son x y v.
En ambos casos podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtener un recorrido euleriano de x a v en G –{ux}. Este recorrido, con la arista ux, nos proporciona el recorrido euleriano de u a v en G.

Problema del cartero



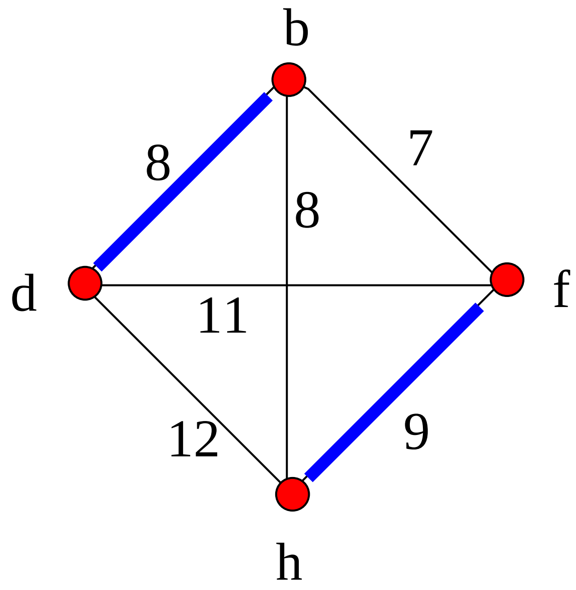
G



G*

El cartero parte de la oficina de Correos, recorre todas las calles de su zona y vuelve a la oficina. ¿Cuál es el recorrido de longitud mínima?

Si el grafo es euleriano ….
Si tiene sólo dos impares ….

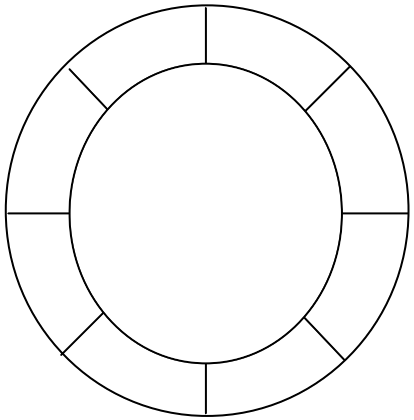


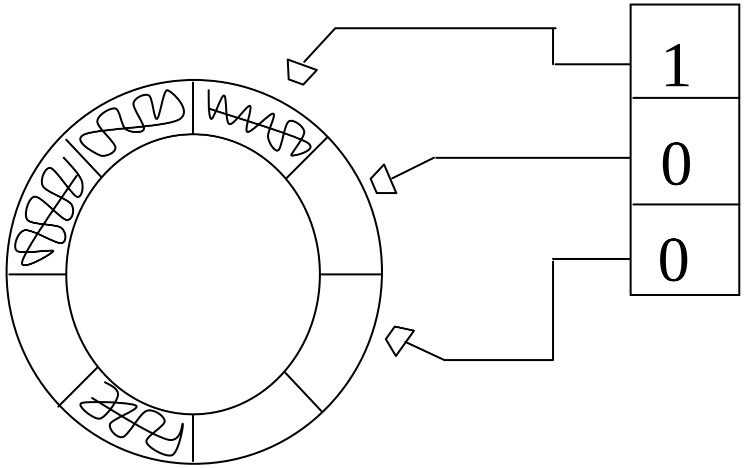
Problema del cartero

Algoritmo (Edmonds, Johnson 1973)

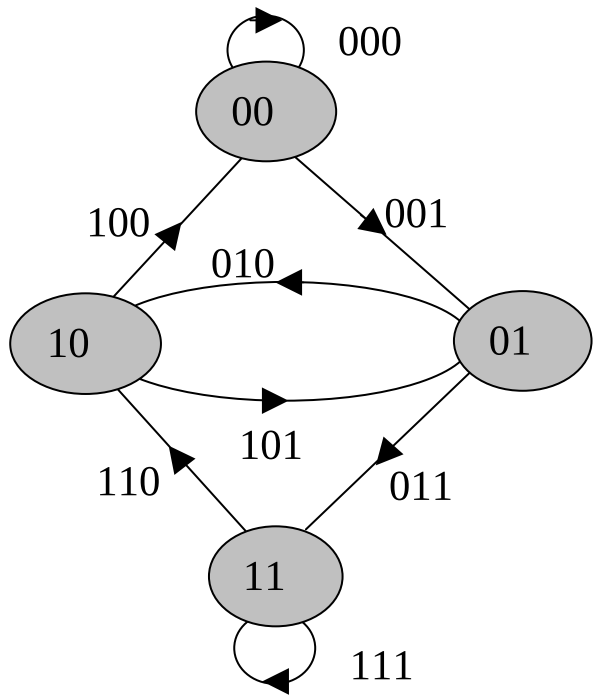
Entrada: Un grafo conexo ponderado G
Salida: Un recorrido óptimo de cartero
Paso 1: Hallar el conjunto de vértices impares S de G.
Para cada par de vértices u, $v \in S$, hallar el camino más corto de u a v y su longitud d_{uv}
Paso 2: Construir el grafo completo sobre el conjunto S.
Asignar a cada arista uv el peso d_{uv}.
Paso 3: Hallar un emparejamiento perfecto M en K_S de peso mínimo
Paso 4: Construir G* a partir de G añadiendo las aristas de los caminos correspondientes a las aristas de M
Paso 5: Construir un recorrido euleriano en G*.
Este será el recorrido del cartero en G

Conversión analógico-digital

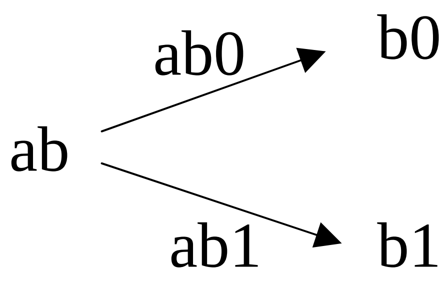




Cadena de 0's y 1's con todas las ternas distintas



Digrafo de De Bruijn   D(2,3)



Sucesión de De Bruijn
recorrido euleriano en el digrafo

Digrafos eulerianos,
¿cuál es la condición necesaria y suficiente para ser euleriano?