RELACIONES DE RECURRENCIA

Gregorio Hernández

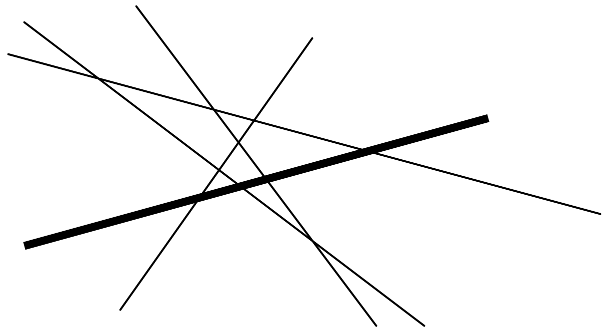
UPM

Matemática Discreta I

RELACIONES DE RECURRENCIA

n rectas en el plano, ¿cuántas regiones determinan? a_n

a_1=2, a_2=4, ...



$a_n = a_{n-1} + n$

RELACIONES DE RECURRENCIA

Cadenas binarias de longitud n sin dos ceros consecutivos

$a_1=2,\ a_2=3,\ \ldots$

_ _ _ _ _ _ 1

_ _ _ _ _ 1 0

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

Cadenas de longitud n con los símbolos 0,1, 2, 3, ... , 9 que tengan un número par de ceros

$a_1= 9,\ a_2 =$ ...

$$\boxed{a_n = 9\,a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})}$$

Añadir un 1, o un 2, o un 3, ….. , a una cadena válida de long. n – 1

Añadir un 0 a una cadena no válida de long. n – 1

RELACIONES DE RECURRENCIA

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES

$$a_{\mathrm{n}} = c_1 a_{\mathrm{n}-1} + c_2 a_{\mathrm{n}-2} + \ldots + c_{\mathrm{m}} a_{\mathrm{n}-\mathrm{m}} + \mathrm{g(n)} \qquad \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{m},$$

relación de recurrencia **lineal** y de coeficientes constantes.
Si además g(n) = 0 diremos que la relación es **homogénea**.

Esta es homogénea de segundo orden:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \qquad \forall \mathrm{n} \geq 2$$

$$a_1 = b, \quad a_2 = b' \qquad \text{Condiciones iniciales}$$

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES HOMOGÉNEAS

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \\ a_0 = b, \quad a_1 = b' \end{cases}$$

Ecuación característica

La ecuación $x^2 = c_1 x + c_2$ se llama ecuación característica, sus raíces se llaman **raíces** características.

Teorema

- α es raíz característica $\Leftrightarrow$ α^n es una solución de la recurrencia
- Si α es raíz doble de la ecuación característica entonces $n\alpha^n$ es solución de la relación
- Si T y Z son soluciones de la relación de recurrencia entonces T+ Z y kT también lo son.

Teorema

- α es raíz característica $\Leftrightarrow$ α^n es una solución de la recurrencia

  $\alpha^2 = c_1\,\alpha + c_2$ $\qquad\qquad$ $\alpha^n = c_1\,\alpha^{n-1} + c_2\,\alpha^{n-2}$

- Si α es raíz doble de la ecuación característica entonces $n\alpha^n$ es solución de la relación

b es raíz doble del polinomio f(x) $\quad$ si $\quad f(x) = (x - b)^2\, g(x)$ $\Leftrightarrow$ b es raíz común de los polinomios $\quad f(x)$ y $f'(x)$

α es raíz doble de la ecuación $\qquad \alpha^2 = c_1\,\alpha + c_2$

$$2\alpha = c_1$$

mult. por $(n-2)\,\alpha^{n-2}$ $\qquad (n-2)\,\alpha^n = (n-2)c_1\,\alpha^{n-1} + (n-2)c_2\,\alpha^{n-2}$

mult. por α^{n-1} $\qquad 2\,\alpha^n = c_1\,\alpha^{n-1}$

Sumando $\qquad n\,\alpha^n = (n-1)c_1\,\alpha^{n-1} + (n-2)c_2\,\alpha^{n-2}$

Teorema

- Si $T=(t_n)$ y $Z=(z_n)$ son soluciones de la relación de recurrencia entonces $T+Z$ y kT también lo son

T solución significa $\quad t_n = c_1\, t_{n-1} + c_2\, t_{n-2}$

Z solución significa $\quad z_n = c_1\, z_{n-1} + c_2\, z_{n-2}$

Sumando, $\quad t_n + z_n = c_1\,(t_{n-1}+ z_{n-1}) + c_2\,(t_{n-2} + z_{n-2})$

T + Z es solución de la recurrencia

Multiplicando por k $\quad kt_n = c_1\, kt_{n-1} + c_2\, kt_{n-2}$

kT es solución

Teorema

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (*) \\ a_0 = b, \quad a_1 = b' \end{cases}$$

1) Si α y β son las raíces de la ecuación característica, $\alpha \neq \beta$, entonces todas las soluciones de (*) son de la forma

$$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n$$

2) Si α es raíz doble de la ecuación característica, entonces todas las soluciones de (*) son de la forma

$$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 n\alpha^n$$

Para obtener la solución en las condiciones iniciales $a_0 = b$, $a_1 = b'$ basta determinar las constantes k_1 y k_2 con esas condiciones, es decir,

$b = k_1 + k_2$, $b' = k_1\alpha + k_2 \beta$ en el primer caso y
$b = k_1 + k_2$, $b' = k_1\alpha + k_2 n\alpha$ en el segundo

Teorema

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (*) \\ a_0 = b, \quad a_1 = b' \end{cases}$$

1) Si α y β son las raíces de la ecuación característica, $\alpha \neq \beta$, entonces todas las soluciones de (*) son de la forma

$$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 \beta^n$$

2) Si α es raíz doble de la ecuación característica, entonces todas las soluciones de (*) son de la forma

$$a_n = k_1 \alpha^n + k_2 n\alpha^n$$

El conjunto de las soluciones de (*) es un espacio vectorial de dimensión dos y una base es:

$\{(\alpha^n), (\beta^n)\}$ si hay dos raíces características $\alpha \neq \beta$

$\{(\alpha^n), (n\alpha^n)\}$ si hay una raíz característica doble, α

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES
NO HOMOGÉNEAS

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_m a_{n-m} + g(n) \qquad (*)$$

donde $c_1, \dots, c_m$ son constantes y $g(n) \neq 0$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_m a_{n-m}$$

relación **homogénea asociada**

1. Si T y Z son soluciones de la relación no homogénea, entonces T – Z es una solución de la ecuación homogénea asociada.

2. **Solución particular** es una solución de (*)

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES
NO HOMOGÉNEAS

¿Cómo resolver una ecuación no homogénea?

1. Hallar la solución general, f(n), de la relación homogénea asociada
2. Hallar una solución particular p(n) de la recurrencia inicial
3. La suma f(n) + p(n) es una solución general de la relación no homogénea.
4. Imponer las condiciones iniciales dadas

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES
NO HOMOGÉNEAS

¿Cómo resolver una ecuación no homogénea?

Hallar una solución particular $p(n)$ de la recurrencia inicial

Si $g(n)$ es un polinomio de grado k, y 1 no es raíz característica, entonces $p(n)$ es un polinomio de grado k

Si $g(n)$ es un polinomio de grado k, y 1 es raíz característica de multiplicidad s, entonces $p(n)$ es un polinomio de grado $k + s$

Si $g(n)$ es una función exponencial, $g(n) = b^n$, entonces $p(n) = cb^n$

Si además b es raíz característica de la homogénea de multiplicidad m, se toma como solución particular $p(n) = cn^m b^n$

Ejemplo 1

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2n$$

Solución particular $p(n) = cn + d$.
Los coeficientes c, d se calculan por el método de los coeficientes indeterminados.

$$cn + d = c(n-1) + d + c(n-2) + d + 2n$$

$$\begin{cases} c = 2c + 2 \\ d = -c + d - 2c + d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $c = -2$, $d = -6$,

y la solución particular es $p(n) = -2n - 6$

Ejemplo 2

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

Ecuación característica de la homogénea $x^2 = x + 6$

Solución general de la homogénea asociada es

$$f(n) = k_1 3^n + k_2(-2)^n$$

Solución particular de la recurrencia $p_n = c2^n$,

$c2^n = c2^{n-1} + 6c2^{n-2} + 2^n$, $4c = 2c + 6c + 4$ luego $c = -1$

La solución particular es $p(n) = -2^n$

Solución general de la no homogénea $a_n = -2^n + k_1 3^n + k_2(-2)^n$

Imponemos condiciones iniciales,

$$0 = -1 + k_1 + k_2, \quad 1 = -2 + 3k_1 - 2k_2,$$

luego $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, y la solución de la recurrencia es:

$$a_n = -2^n + 3^n \quad \text{para } n \geq 0$$

DIFERENCIAS (opcional, es decir, sólo para lectores interesados)

$A = (a_n)$ una sucesión.
Se llama **sucesión de diferencias** de (a_n) a la sucesión ΔA

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Si $A = (0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ entonces $\Delta A = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$
Si $B = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ entonces $\Delta B = (1, 2, 4, 8, \ldots)$

Sucesiones de **diferencias repetidas**
$\Delta^2 A = (\Delta^2 a_n)$ donde $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta(a_{n+1} - a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$
y, de forma recursiva, $\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n \quad \forall k \geq 1$

$\Delta^2 A = (2, 2, 2, \ldots)$, $\Delta^3 A = (0, 0, 0, \ldots)$, $\Delta^k A = (0, 0, 0, \ldots)$
$\Delta^2 B = B$, $\Delta^k B = B$

DIFERENCIAS

Sucesiones aritméticas de grado k

Una sucesión aritmética (a_n) satisface la ecuación $a_n = a_{n-1} + d$.

$\Delta A = (d, d, d, \ldots)$ $\Delta^2 A = 0$

A es **sucesión aritmética de grado k**
si $\Delta^k A = (d,d,d,\ldots)$ pero $\Delta^{k-1} A$ no es constante

Ejemplos
A = (0, 1, 4, 9, 16, 25, …) es una sucesión aritmética de grado 2
B = (1, 2, 4, 8, 16, …) no es aritmética de ningún grado.

DIFERENCIAS

Teorema

$A = (a_n)$ es una sucesión aritmética de grado k $\Leftrightarrow$
la sucesión A está definida por un polinomio de grado k

En este caso, la expresión (única) de a_n es

$$a_n = a_0\binom{n}{0} + \Delta a_0\binom{n}{1} + \Delta^2 a_0\binom{n}{2} + \cdots + \Delta^k a_0\binom{n}{k}$$

Además, si f(n) es un polinomio de grado k, la sucesión que satisface la recurrencia $a_n = a_{n-1} + f(n)$, $a_0 = c$
es un polinomio de grado k + 1

DIFERENCIAS

$$a_n = a_0\binom{n}{0} + \Delta a_0\binom{n}{1} + \Delta^2 a_0\binom{n}{2} + \cdots + \Delta^k a_0\binom{n}{k}$$

Ejemplo

Consideremos la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2n^2 - n + 1$, $a_0 = 3$

Diferencias							
A	3	5	12	28	57	103	…
ΔA		2	7	16	29	46	
Δ^2A			5	9	13	17	
Δ^3A				4	4	4	

Por tanto,

$$a_n = 3\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n + 3$$

DIFERENCIAS

$$a_n = a_0\binom{n}{0} + \Delta a_0\binom{n}{1} + \Delta^2 a_0\binom{n}{2} + \cdots + \Delta^k a_0\binom{n}{k}$$

Ejemplo 2

Calcular la suma $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

Se define la sucesión $a_n = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$.

Como $a_n - a_{n-1} = n^4$, la sucesión a_n es una sucesión aritmética de grado 5.

La sucesión está definida por un polinomio de grado 5, que se obtiene tomando diferencias repetidas

$$a_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}$$

RELACIONES DEL TIPO *DIVIDE Y VENCERÁS*

Dividamos un problema en otros más pequeños.

Problema 1. Detectar un elemento en un conjunto ordenado

Un conjunto ordenado $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, buscamos c

Partimos A en dos mitades, $A' = \{a_1, a_2, ..., a_{n/2}\}$, $A'' = \{a_{n/2+1}, ..., a_n\}$.

Comparamos c con $a_{n/2}$ y así se decide si c está en A' o en A''.

El número f(n) de comparaciones necesarias será

$$f(n) = f(n/2) + 1$$

Supongamos $n = 2^k$, para resolver la relación

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n/2) + 1 \\ f(n/2) &= f(n/4) + 1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(2) &= f(1) + 1 \end{aligned}$$

Sumando

$$f(n) = f(1) + k = 1 + \log_2 n$$

Problema 2. Hallar el máximo y el mínimo de A = {a_1, a_2, ..., a_n}

¿Cuántas comparaciones necesitamos para calcular max(A)?

Razonando del mismo modo que antes el número de comparaciones f(n) cumple que

$$f(n) = 2f(n/2) + 1 \qquad f(1) = 0,\ f(2) = 1$$

Comprueba que la solución es $f(n) = n - 1$

Si queremos calcular min(A) debemos repetir el proceso realizando otras $n - 1$ comparaciones. En total $2n - 2$

¿Se puede mejorar?

Problema 2. Hallar el máximo y el mínimo de $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Intentamos calcular, simultáneamente, el máximo y el mínimo de A
Si n=1, entonces a_1=max(A) = min(A)
Si n=2, necesitamos sólo UNA comparación para hallar max(A) y min(A)
Si n>1, descomponemos A en dos subconjuntos A_1 y A_2 del mismo tamaño y resolvemos el problema para A_1 y A_2
Comparando max(A_1) y max(A_2) hallaremos max(A)
y análogamente calcularemos mín(A).

Si f(n) es el nº de comparaciones efectuadas, resulta que

$$f(n) = 2f(n/2) + 2$$

Supongamos $n=2^k$, para resolver la relación

$$f(n) = f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 2$$
$$2f(2^{k-1}) = 2^2 f(2^{k-2}) + 2^2$$
$$2^{k-2} f(4) = 2^{k-1} f(2) + 2^{k-1}$$

Sumando

$$f(n) = 2^{k-1} f(2) + (2+2^2+...+2^{k-1}) =$$
$$= 2^{k-1} + 2^k - 2 = n/2 + n - 2$$
$$= 3n/2 - 2$$

Resolver la relación de recurrencia $f(n) = 2f(n/2) + 3n$, $f(1) = 6$

Resolvamos cuando $n = 2^k$

$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 3 \cdot 2^k$ | | $f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 3 \cdot 2^k$
$f(2^{k-1}) = 2f(2^{k-2}) + 3 \cdot 2^{k-1}$ | mult. por 2 | $2f(2^{k-1}) = 2^2 f(2^{k-2}) + 3 \cdot 2^k$
$f(2^{k-2}) = 2f(2^{k-3}) + 3 \cdot 2^{k-2}$ | mult. por 2^2 | $2^2 f(2^{k-2}) = 2^3 f(2^{k-3}) + 3 \cdot 2^k$
……………………… | | ……………………………………
$f(2) = 2f(1) + 3 \cdot 2$ | mult. por 2^{k-1} | $2^{k-1} f(2) = 2^k f(2^0) + 3 \cdot 2^k$

Sumando las igualdades de la derecha resulta:
$f(2^k) = 2^k \cdot f(1) + k \cdot 3 \cdot 2^k$
luego $f(n) = 6n + 3n\log_2 n$