SUCESIONES ESPECIALES

Números de Fibonacci
Números de Catalan

Gregorio Hernández Peñalver
UPM

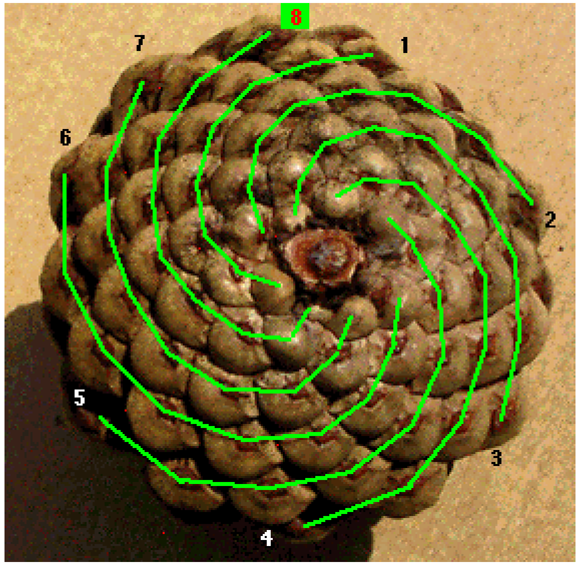
Matemática Discreta I

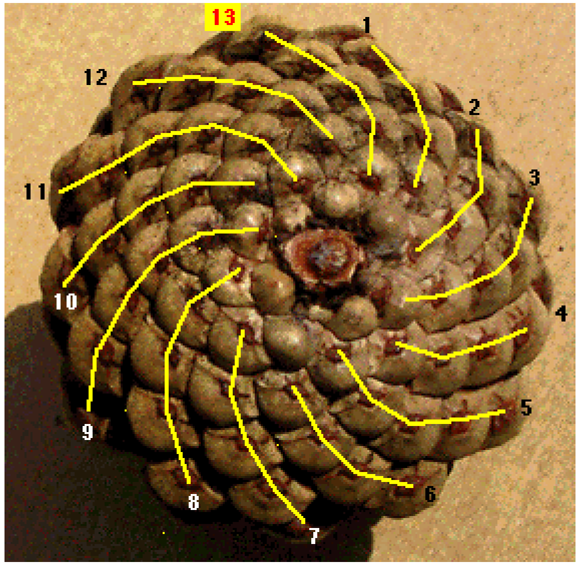
SUCESIÓN DE FIBONACCI

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/

Disposición de las escamas
en una piña

8 espirales a derecha
13 espirales a izquierda





SUCESIÓN DE FIBONACCI

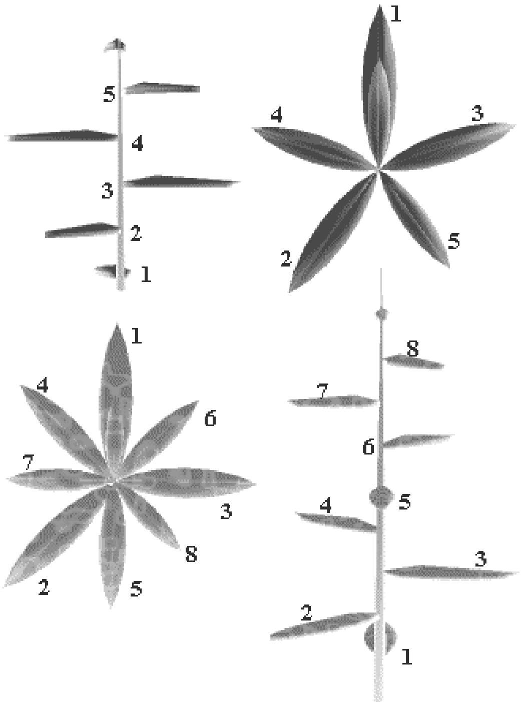
Espirales en el girasol

Hay 21 que giran a la izquierda y 34 que giran a la derecha.

La sucesión
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13**, 21, 34**, 55,…
se llama sucesión de **Fibonacci**.
Sus elementos aparecen en muchas cuestiones botánicas.

Las semillas de girasol adoptan esa configuración, pues así se consigue un empaquetamiento óptimo con las semillas igualmente espaciadas, independientemente del tamaño de la flor.

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html#packings



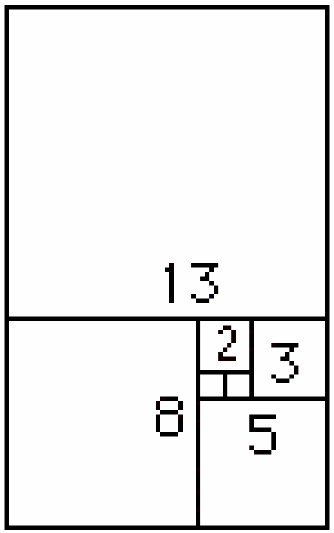
SUCESIÓN DE FIBONACCI

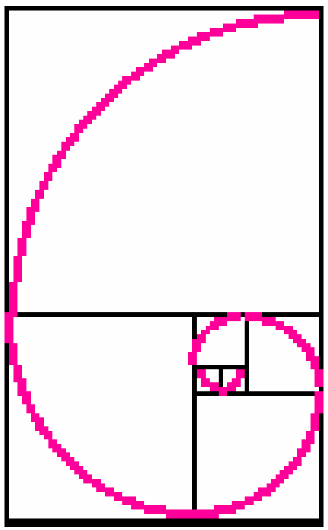
Disposición de las hojas en el tallo

5 tras 2 ó 3 vueltas

8 tras 3 ó 5 vueltas

Cámaras del nautilus

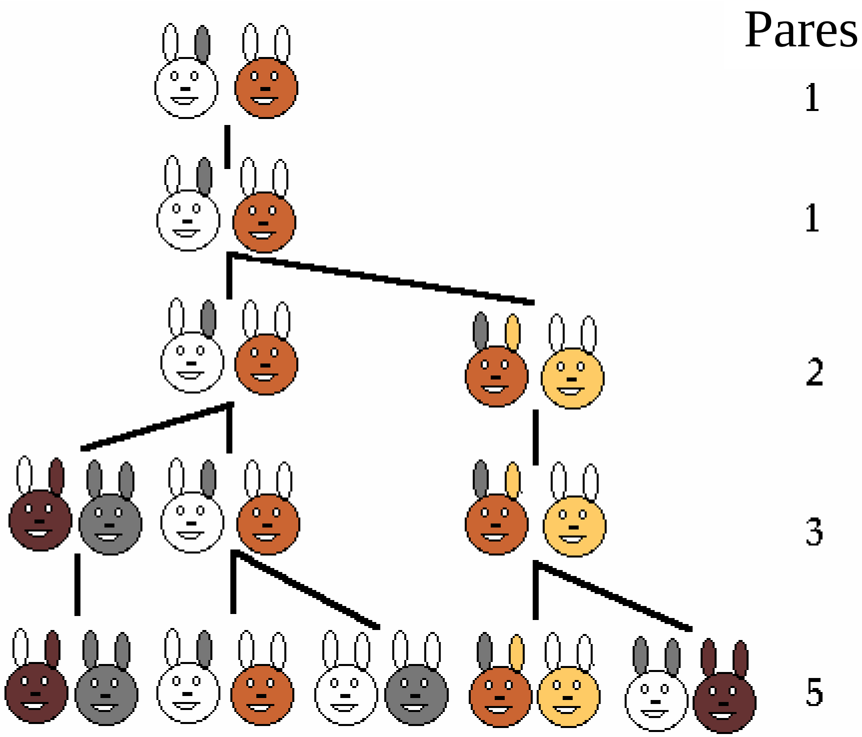




SUCESIÓN DE FIBONACCI

Fibonacci, “Liber abaci”, 1202

"*Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también*".



SUCESIÓN DE FIBONACCI

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $F_1=1$, $F_2=1$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Propiedades

- ¿Cómo aparecen en el Triángulo Aritmético (o de Pascal)?
- $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F^2_1 + F^2_2 + \ldots + F^2_n = F_n F_{n+1}$
- $F^2_{n+1} = F_n F_{n+2} + (-1)^n$ $F^2_{n+1} - F^2_{n-1} = F_{2n}$
- F_k es un divisor de F_{km}
- Si $d=\mathrm{mcd}(m,n)$ entonces $F_d = \mathrm{mcd}(F_m, F_n)$
- Sucesión de Fibonacci y el número áureo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi \approx 1{,}6180\ldots$$

NÚMERO ÁUREO - SECCIÓN ÁUREA - PROPORCIÓN DIVINA

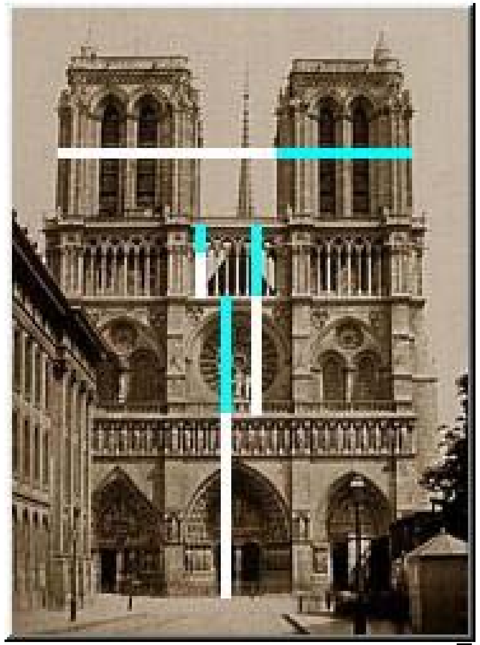
Dividir el segmento AB en media y extrema razón

Hallar C tal que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB}$

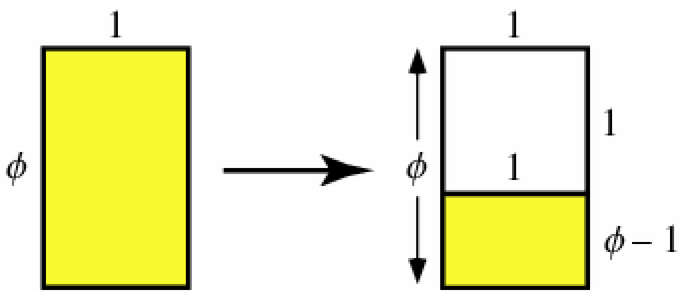
Si |AC|=1, la longitud x de AB verifica que

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{x-1}$ es decir, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \approx 1{,}61803\ldots}$$



rectángulo áureo

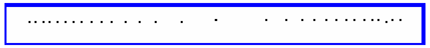


SUCESIÓN DE FIBONACCI - NÚMERO ÁUREO

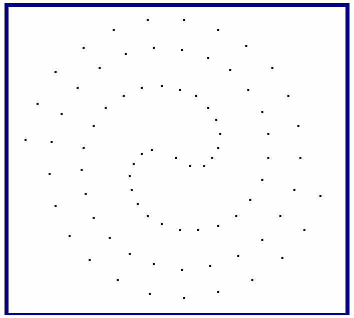
Crecimiento de las plantas (MERISTEMO)
hojas, semillas, ...

El siguiente brote se produce tras un giro de k vueltas

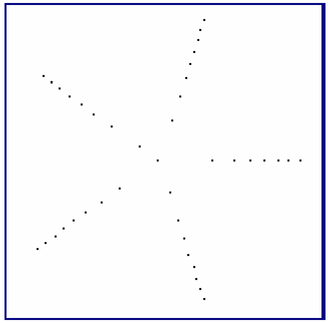
k =0,5



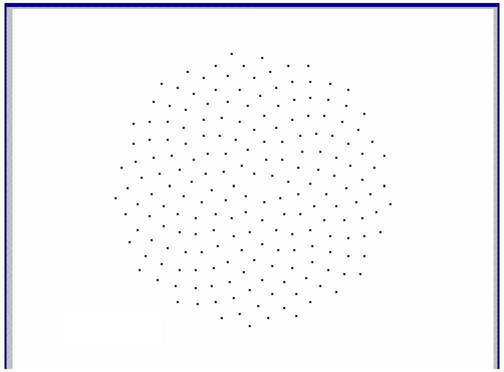
k =0,48



k =0,6



k =1,6183

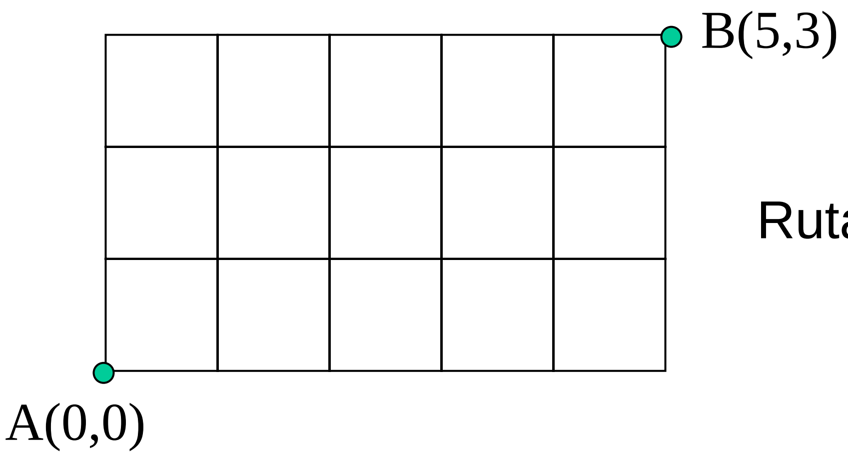


k =0,6183

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html#packings

NÚMEROS DE CATALAN

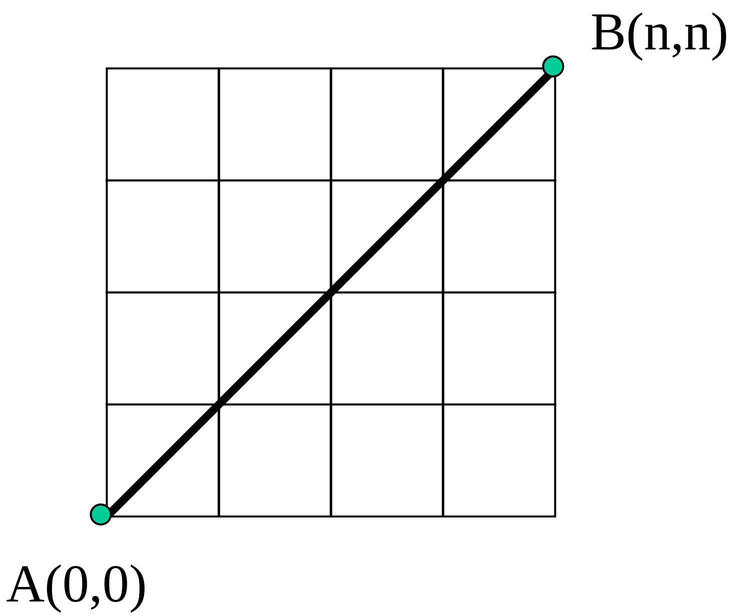
Rutas en una cuadrícula



Rutas N-E de A a B hay $\binom{8}{3}$

Rutas N-E desde A(0,0) hasta B(m,n)

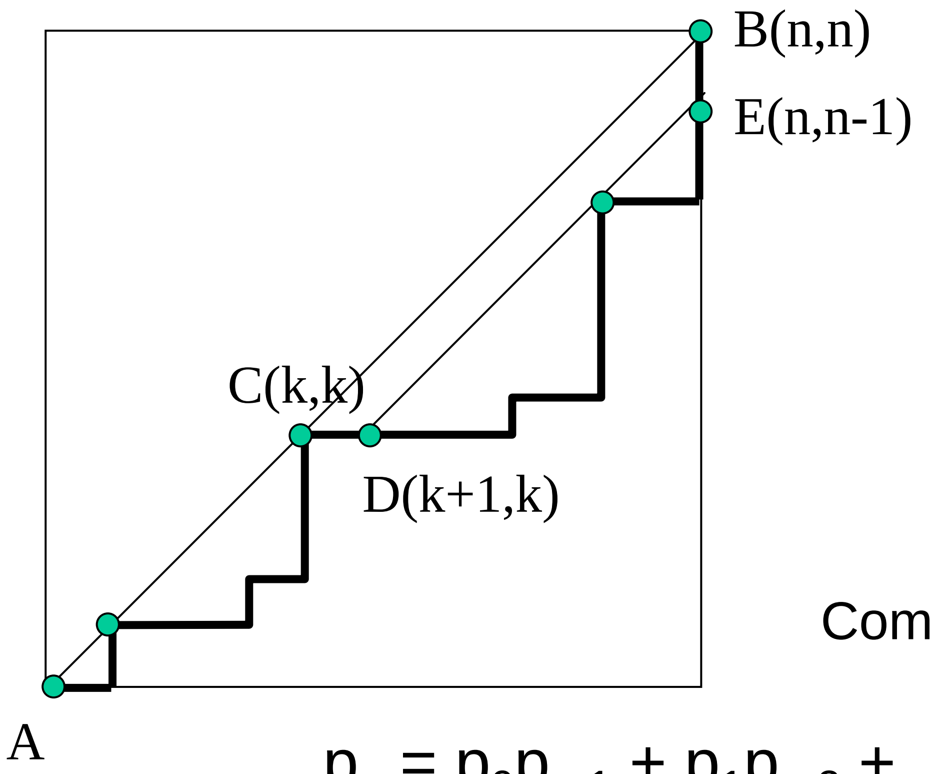
$$\binom{m+n}{n}$$



Rutas A-B sin sobrepasar la diagonal

p_1=1, p_2=2, p_3=5, ... , p_n =?

NÚMEROS DE CATALAN



C último punto en la diagonal

Ruta A-B es A-C-D-E-B

Rutas A-C p_k

Rutas D-E p_{n-k-1}

Rutas A-B con C último punto hay $p_k\, p_{n-k-1}$

Como k toma los valores 0,1, 2, ... , n-1

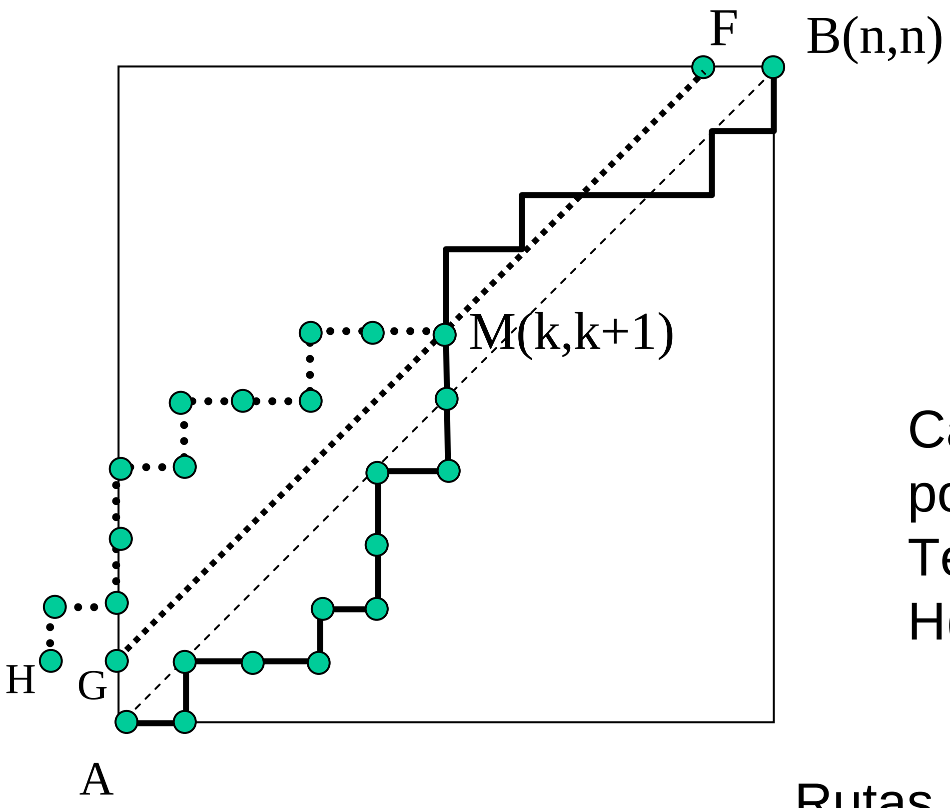
$$p_n = p_0p_{n-1} + p_1p_{n-2} + \dots + p_{n-1}p_0 \quad (\text{con } p_0=1)$$

relación de recurrencia NO lineal

La solución es: $p_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ para $n \geq 0$

Números de Catalan 1, 1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, ...

NÚMEROS DE CATALAN



Rutas totales A-B $\binom{2n}{n}$

Rutas "malas" ?

M primer punto encima diagonal

Cambiamos la parte de ruta "mala" A-M por su simétrica respecto de GF
Tenemos así ruta Norte-Este desde H(-1,1) hasta B(n,n)

Rutas malas $\binom{n+1+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$

Rutas bajo la diagonal $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

NÚMEROS DE CATALAN

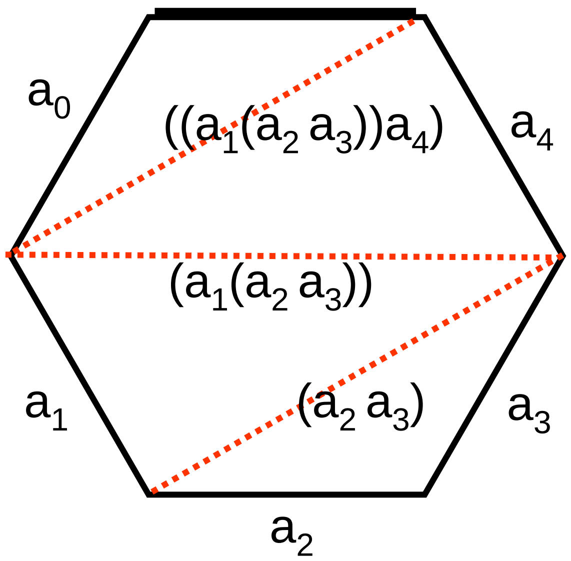
1,1,2,5,14,42,132,429,... sucesión de Catalan

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- Caminos monótonos en una malla desde (0,0) a (n,n) sin sobrepasar la diagonal
- Formas de colocar paréntesis en un producto de n+1 factores
- Triangulaciones de un polígono convexo de n+2 vértices
- Sucesiones de longitud 2n con n signos + y n signos –, tales que segmento inicial +
- Árboles planos binarios con n+1 hojas
- …. más de 60 estructuras

NÚMEROS DE CATALAN

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices

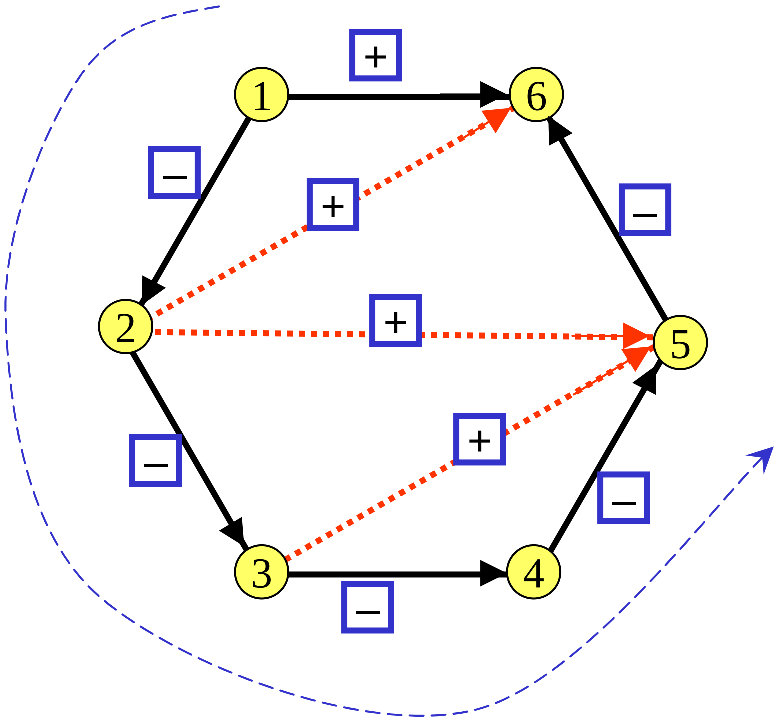


$(a_0((a_1(a_2\,a_3))\,a_4))$

Paréntesis para n+1 factores

NÚMEROS DE CATALAN

Triangulación de un polígono convexo de n+2 vértices



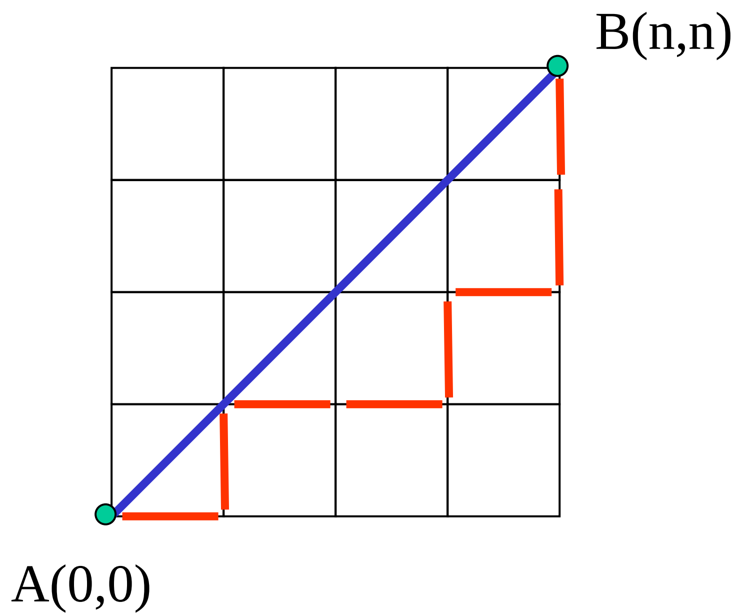
+ – + + – + – –

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

NÚMEROS DE CATALAN

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

$$+ - + + - + - -$$



Caminos en la cuadrícula n×n de A
hasta B sin sobrepasar la diagonal

NÚMEROS DE CATALAN

Sucesiones de longitud 2n
con n signos + y n signos –,
tales que segmento inicial +

$$+ - + + - + - -$$

$$(a_0((a_1(a_2\ a_3))\ a_4))$$

Paréntesis para n+1 factores

Signo +	→	abrir paréntesis (
Signo –	→	poner un factor