Emparejamientos y recubrimientos

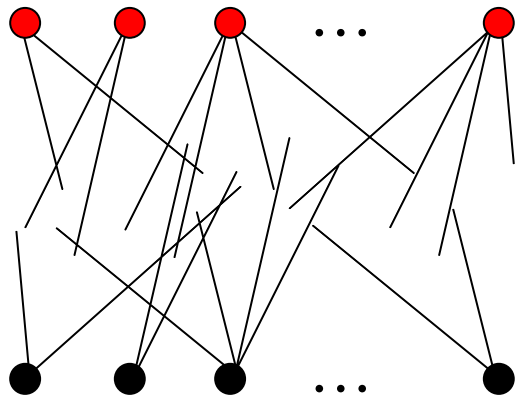
Gregorio Hernández Peñalver

UPM

Matemática Discreta II (MI)

Problema en el baile

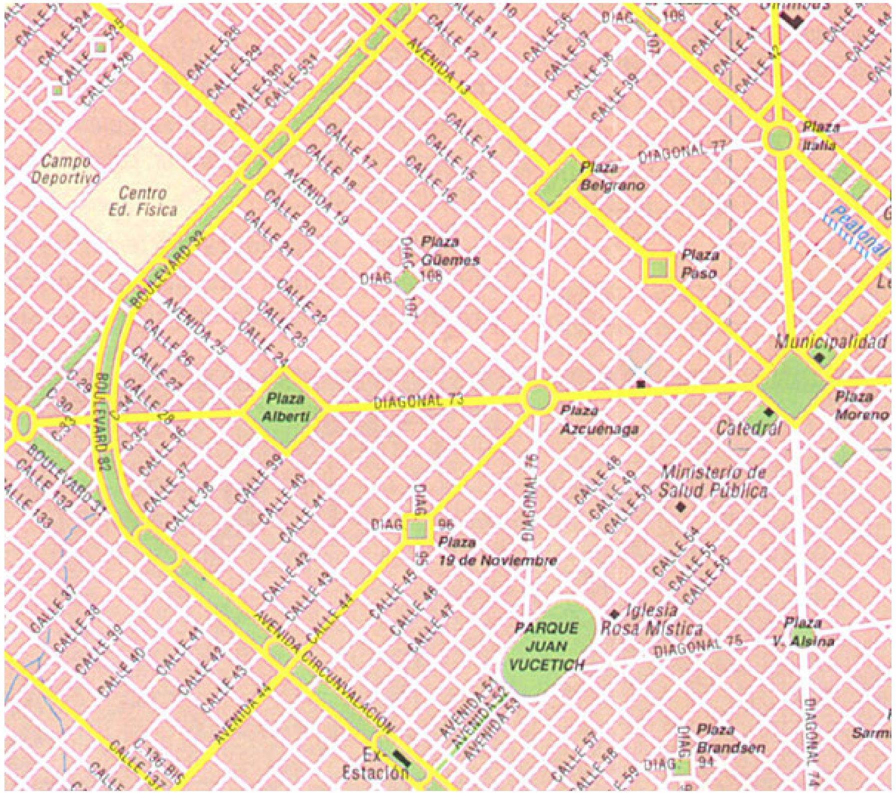
En cierta universidad se organiza el baile de fin de curso.
Hay 300 asistentes, cada chica conoce a 50 chicos y cada chico a 50 chicas. Las parejas de baile deben formarse entre conocidos.
¿Es posible que todos bailen simultáneamente?



EMPAREJAMIENTO

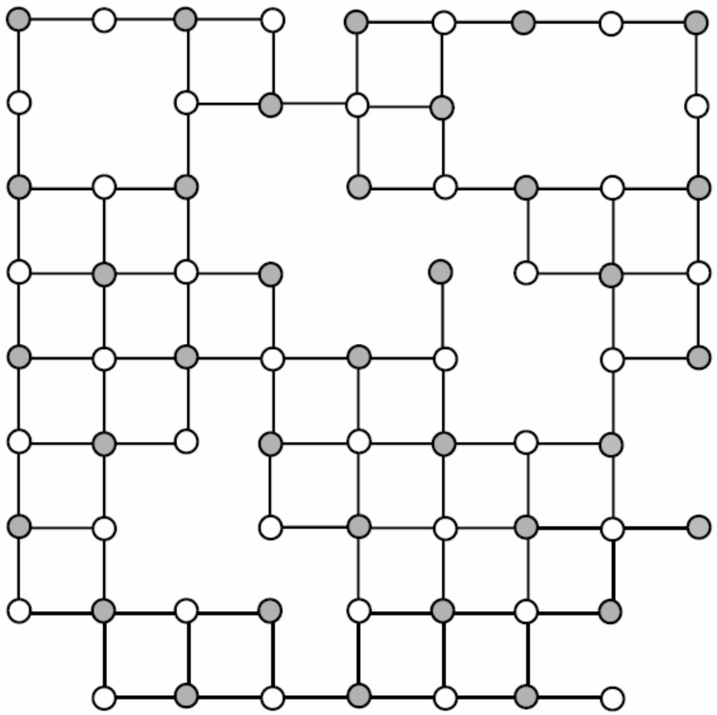
Cámaras de vigilancia

En el barrio ControlTotal se van a instalar cámaras de vigilancia para controlar todas las calles del barrio. Si se instalan en las intersecciones, ¿cuántas cámaras se necesitan?



Cámaras de vigilancia

En el barrio ControlTotal se van a instalar cámaras de vigilancia para controlar todas las calles del barrio. Si se instalan en las intersecciones, ¿cuántas cámaras se necesitan?



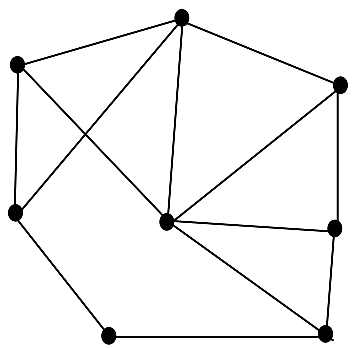
RECUBRIMIENTO

Un **emparejamiento** en un grafo G=(V,A) es un subconjunto $M \subset A$ tal que dos aristas cualesquiera de M no tienen un extremo común.

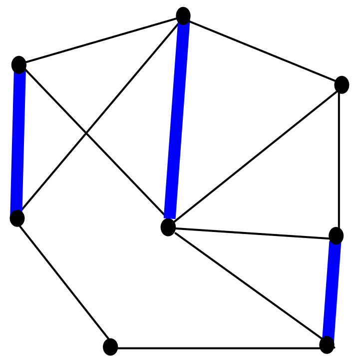
Un emparejamiento es **máximo** si no hay otro de cardinal mayor.

Un emparejamiento es **maximal** si no está contenido en otro distinto.

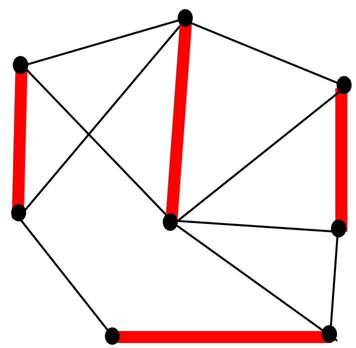
Un emparejamiento M es **perfecto** si todos los vértices de G son extremo de alguna arista de M.



Grafo G



Emparejamiento maximal

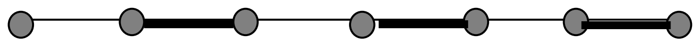


Emparejamiento máximo y perfecto

Caminos y emparejamientos

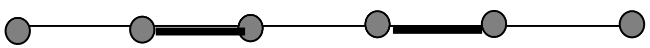
Dado un emparejamiento M, los extremos de las aristas de M se llaman vértices **saturados** por M.

Un camino de G se dice alternado para M o **M-alternado** si sus aristas alternativamente están o no están en M.

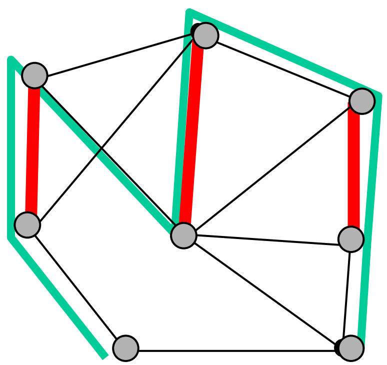


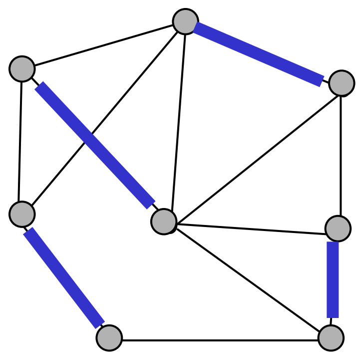
Camino M-alterno

Si además sus extremos son vértices libres o no saturados por M decimos que el camino es aumentador para M o de **M-aumento**.



Camino de M-aumento





Emparejamiento con |M| + 1 aristas

Teorema (Berge)

M es emparejamiento máximo de G $\Leftrightarrow$ G no contiene caminos de M-aumento

Algoritmo para emparejamiento máximo

Entrada: Un grafo simple G

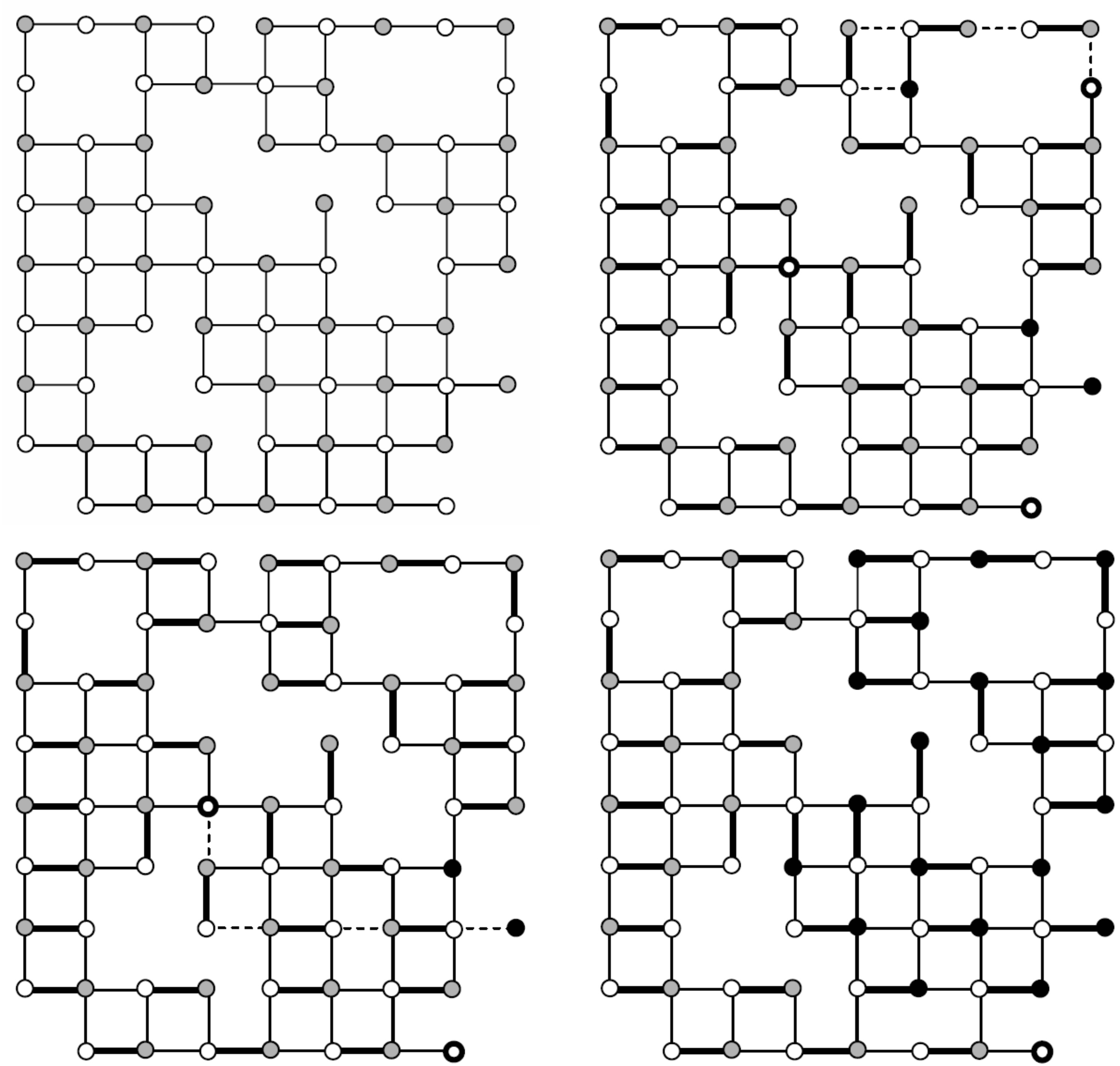
Salida: Un emparejamiento de cardinal máximo de G

Paso 1. Tomar un emparejamiento cualquiera M (Por ejemplo, una arista)

Paso 2. Buscar un camino de M-aumento.
Si existe ir al paso 3. Si no existe ir al paso 4

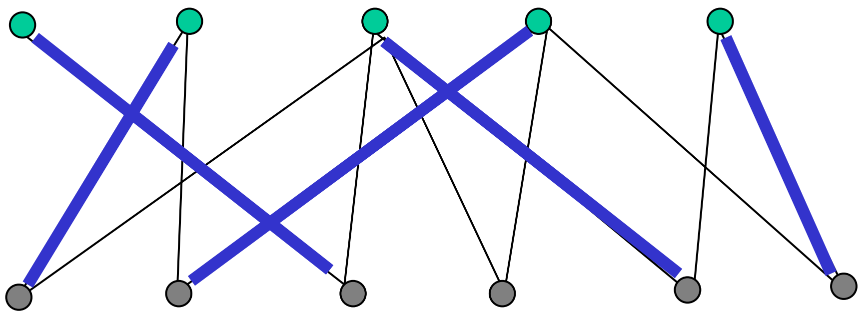
Paso 3. Construir un emparejamiento M' con $|M'| = |M| + 1$,
hacer M:=M' y volver al paso 2.

Paso 4. Devolver M, emparejamiento máximo



EMPAREJAMIENTOS EN GRAFOS BIPARTIDOS

En un grafo bipartido G=(X∪Y,A) se habla también de emparejamientos completos.
M es **completo** para X si $|M| = |X|$.



Teorema de Hall

Sea G=(X∪Y,A) un grafo bipartido.

G tiene un emparejamiento completo (para X) ⇔

∀S⊆X se verifica que $|N(S)| \geq |S|$,

N(S)={y∈Y / ∃x∈S con xy∈A}   (N(S) vecinos de los vértices de S).

Algoritmo (Construcción de árbol alternado en un grafo bipartido)

Entrada: Un grafo bipartido G, un emparejamiento M de G y un vértice x_0 no saturado por M

Salida: Un camino de M-aumento con extremo en x_0, si existe.

Paso 1: Se construye el nivel 0 del árbol T con el vértice x_0 (libre para M).

Paso 2: Mientras existan ramas abiertas en T, se construye el nivel siguiente así:

Si se llega a nivel impar 2k+1, se añade, a cada vértice z del nivel 2k, sus vértices adyacentes que no estén ya en T de modo que

a) Si z no tiene adyacentes, se cierra la rama correspondiente de T

b) Si uno de los vecinos de z es libre, entonces la rama correspondiente proporciona un camino de M-aumento. Fin del algoritmo.

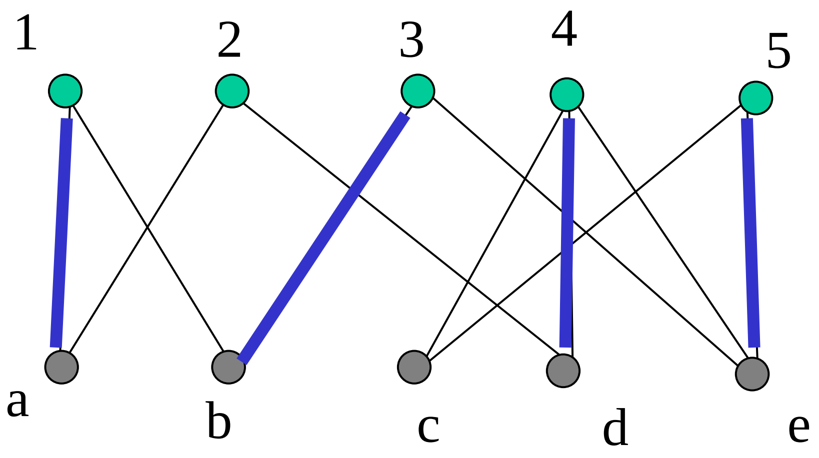
Si se llega a nivel par 2k+2, se añade a cada vértice del nivel 2k+1 su pareja en M

Paso 3: Fin del algoritmo. No existe camino de M-aumento que comience en x_0

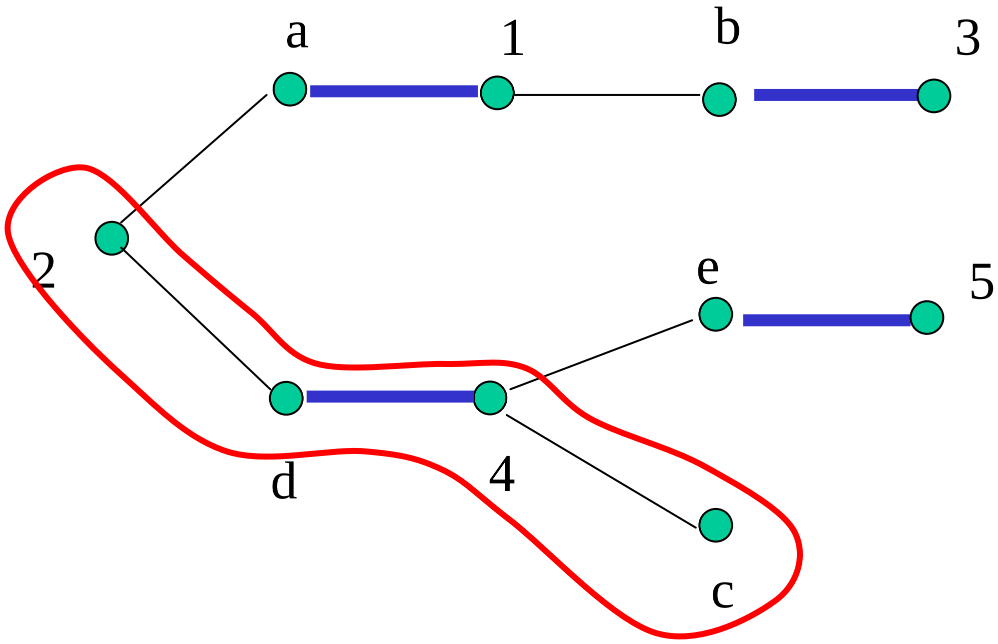
Complejidad

La construcción del árbol alternado es una búsqueda en anchura. O(q)

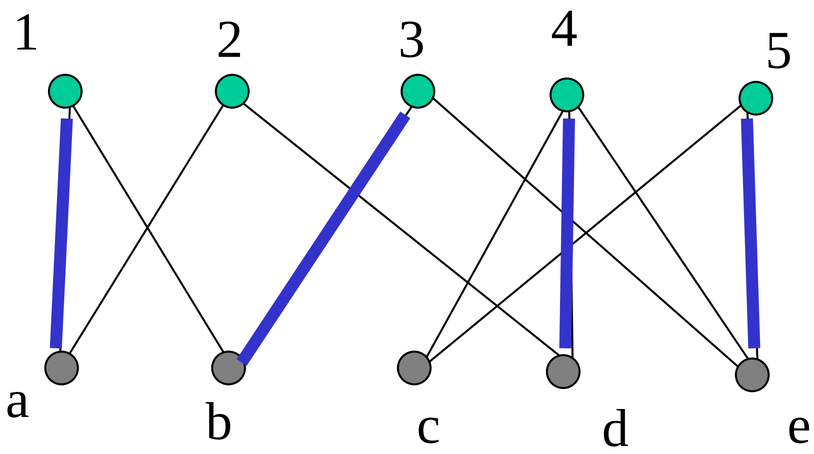
Se construyen n árboles alternados, por tanto la complejidad total es O(nq)



Emparejamiento M

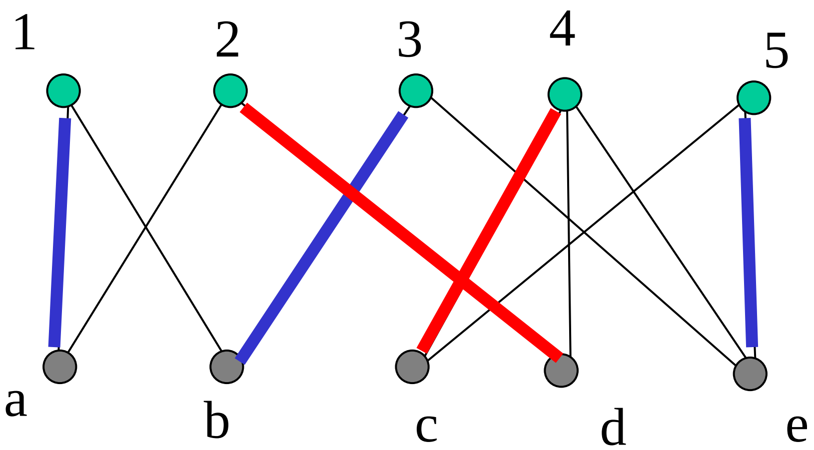


Camino de M-aumento



Emparejamiento M

Camino 2-d-4-c



Emparejamiento M’

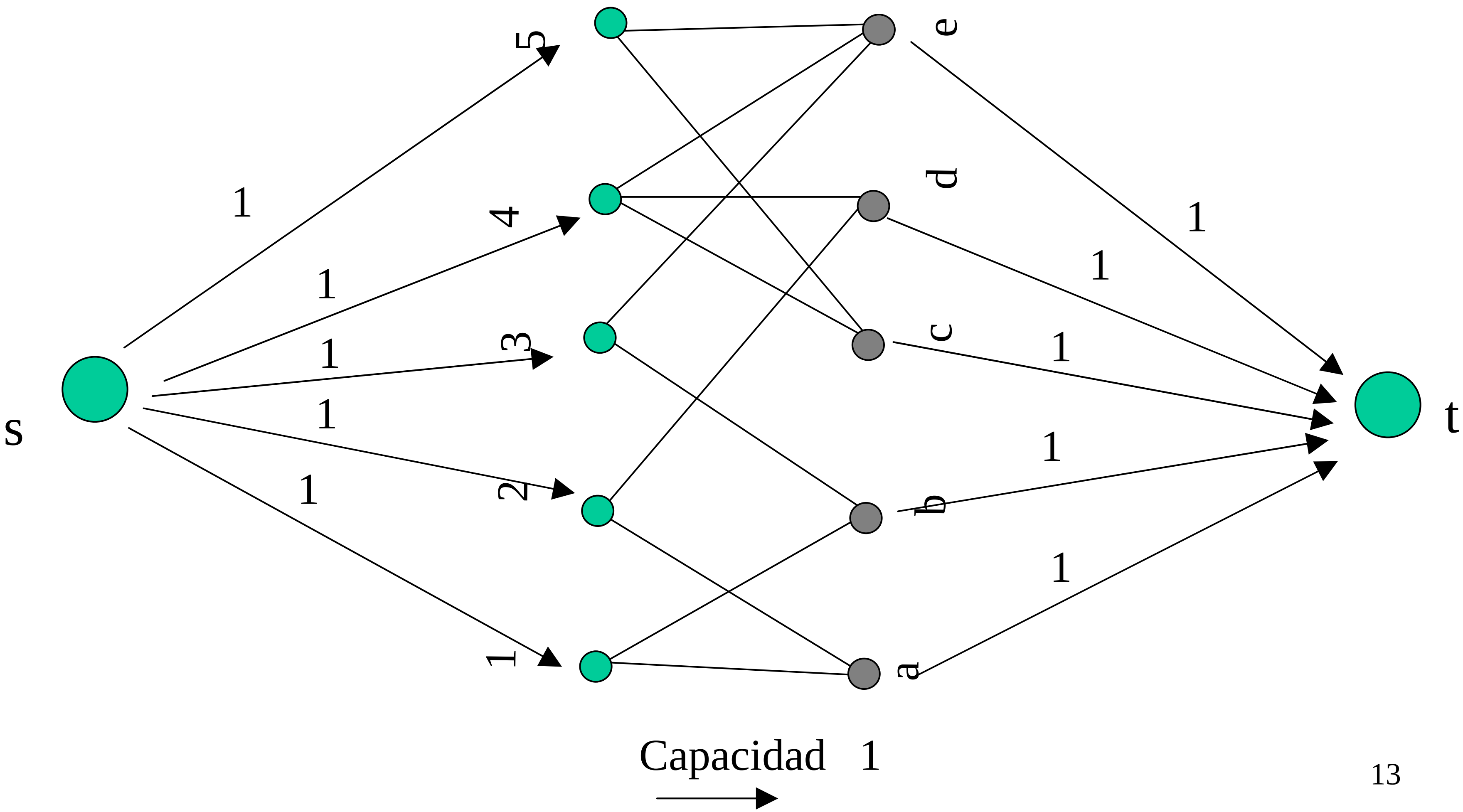
con |M’| = |M|+1

Aplicación para construir emparejamientos de cardinal máximo en grafos bipartidos y en grafos generales

http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/web/emparejamientos/index.htm

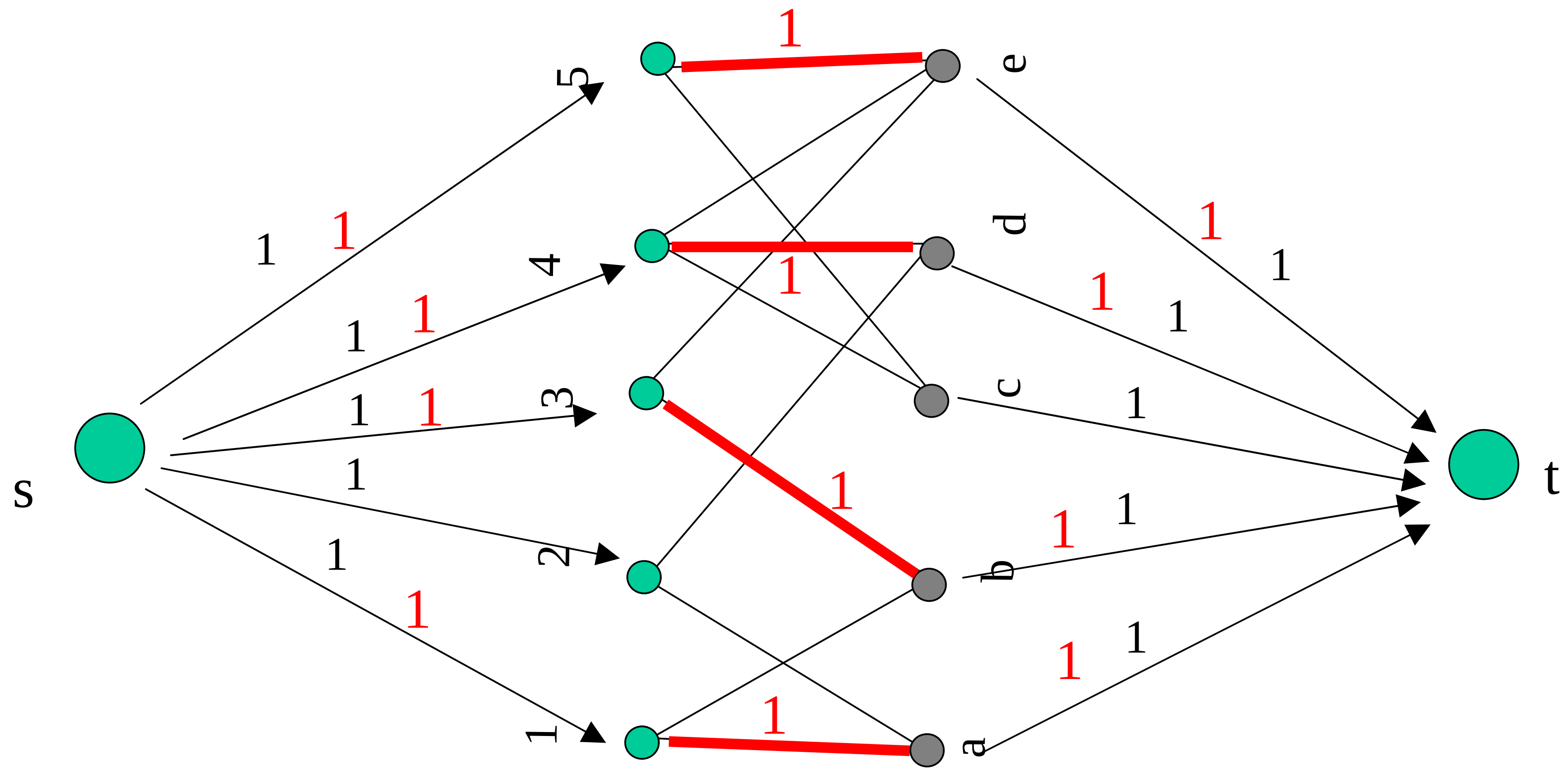
Emparejamientos en grafos bipartidos y flujos 0-1

Del grafo G se construye una red N



Emparejamientos en grafos bipartidos y flujos 0-1

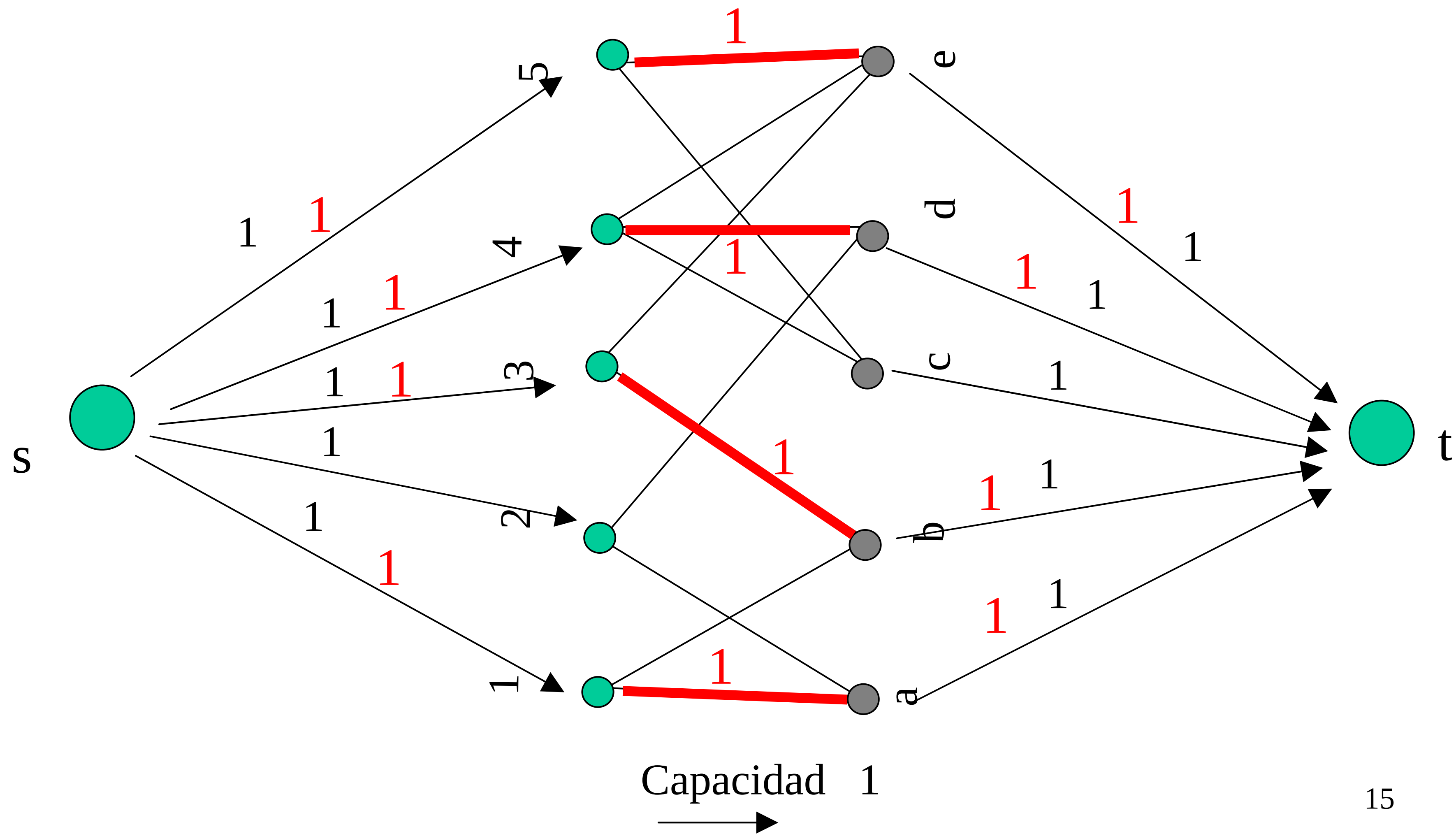
Emparejamiento con k aristas $\Leftrightarrow$ Flujo de valor k



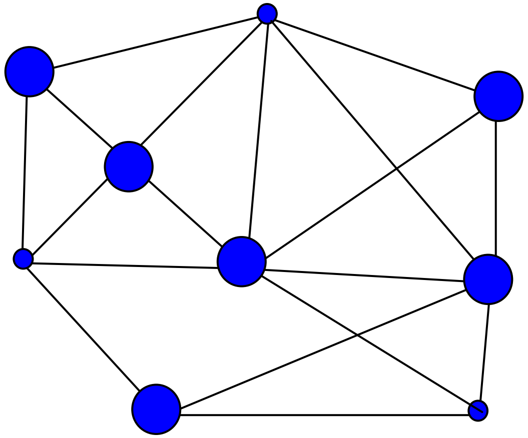
Capacidad 1

Emparejamientos en grafos bipartidos y flujos 0-1

Emparejamiento con k aristas $\Leftrightarrow$ Flujo de valor k

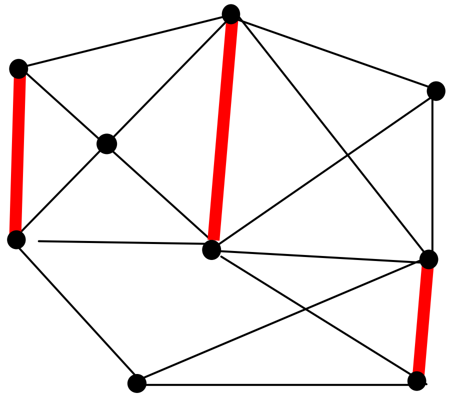


Emparejamientos y recubrimientos



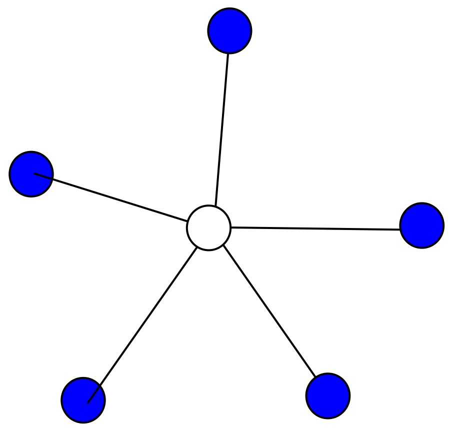
$K \subset V$ es un **recubrimiento por vértices** de G si toda arista de G tiene alguno de sus extremos en K

Si M es un emparejamiento de G, K un recubrimiento por vértices, entonces $|M| \leq |K|$

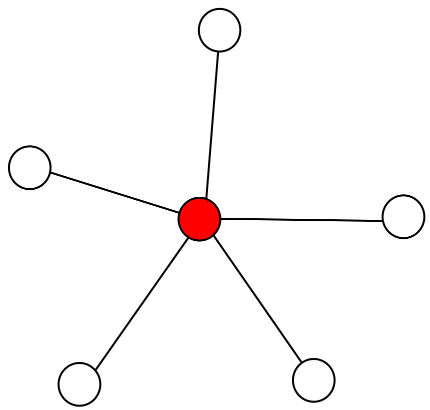


Porque cada arista (roja) del emparejamiento debe cubrirse con un vértice distinto

Emparejamientos y recubrimientos



Un recubrimiento minimal



Un recubrimiento mínimo

El mínimo nº de vértices en un recubrimiento K se indica con $\beta(G)$
El máximo nº de aristas en un emparejamiento M se indica con $\alpha'(G)$

Teorema de König
Si G es un grafo bipartido, entonces $\alpha'(G) = \beta(G)$

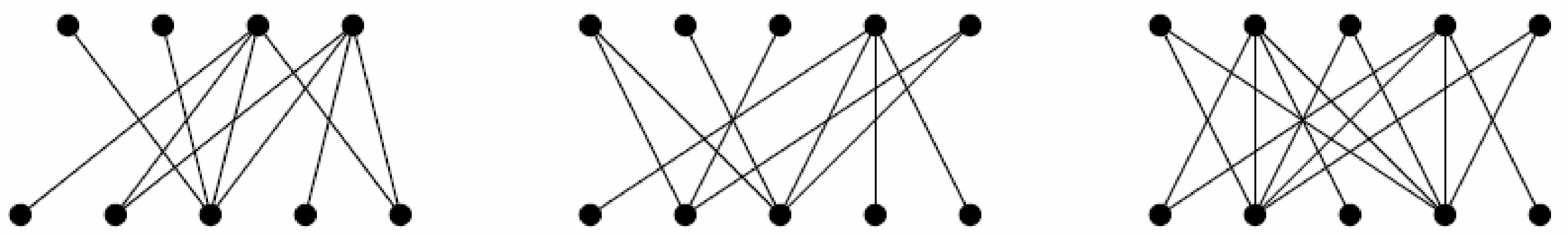
Dem.

Basta aplicar el Teorema de Menger (versión vértices) a la red asociada N con capacidad uno en cada arista.
El teorema dice:
Máximo nº de caminos de s a t de vértices distintos ==
Mínimo nº de vértices que separan s de t

Dos caminos sin vértices comunes determinan dos aristas de G sin vértices comunes (aristas de un emparejamiento)

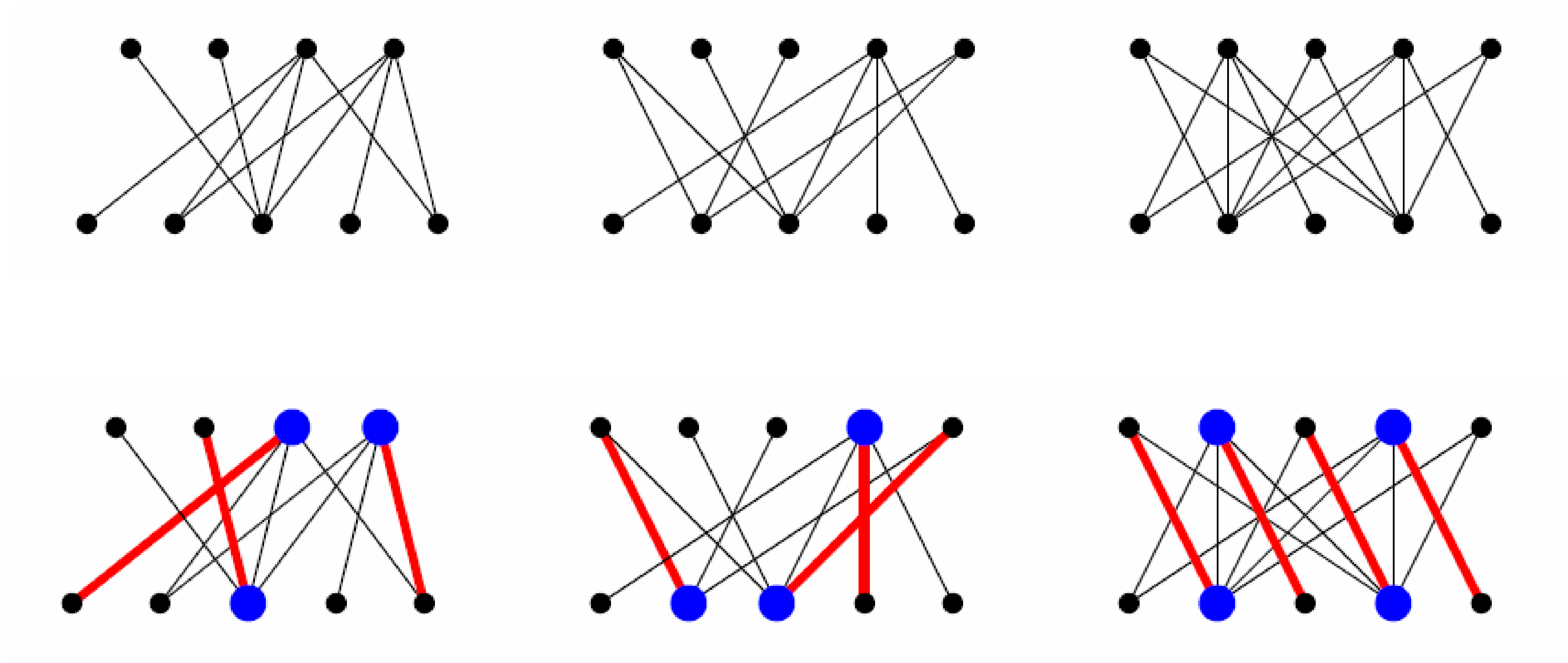
Un conjunto de vértices que desconecte s de t cubre TODAS las aristas de G (si no cubre xy se tiene camino sxyt)

Luego $\alpha'(G) = \beta(G)$



Construir, en cada uno de estos grafos, un recubrimiento por vértices mínimo y un emparejamiento máximo

¡Sin mirar la siguiente diapositiva!



Estabilidad en emparejamientos

Se atiende a las preferencias de las parejas.
Objetivo: "estabilidad"

{X,Y,Z,W} {A,B,C,D}

Listados de preferencias

X	A	B	C	D
Y	A	C	B	D
Z	C	D	A	B
W	C	B	A	D

A	Z	X	Y	W
B	Y	W	X	Z
C	W	X	Y	Z
D	X	Y	Z	W

El emparejamiento M={XA, YC, ZD, WB} no es estable
W y C se "divorciarán"

Estabilidad en emparejamientos

Algoritmo (Gale-Shapley)

Paso 1: Cada mujer propone su primera elección.
Paso 2: Los hombres con dos o más propuestas responden rechazando a todas menos a la más favorable.
Paso 3: Las mujeres rechazadas proponen su segunda elección. Las que no fueron rechazadas continúan con su propuesta.
Paso 4: Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que ninguna propuesta sea rechazada.

Una implementación interactiva del algoritmo de emparejamientos estables
http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/grafos/emparejamiento_estable/index.html

Estabilidad en emparejamientos

Algoritmo (Gale-Shapley)

X	A	B	C	D
Y	A	C	D	B
Z	C	D	A	B
W	C	B	A	D

A	Z	X	Y	W
B	Y	W	X	Z
C	W	X	Y	Z
D	X	Y	Z	W

X	A	A	A	~~A~~	B
Y	~~A~~	~~C~~	D	D	D
Z	~~C~~	D	~~D~~	A	A
W	C	C	C	C	C

Estabilidad en emparejamientos

Algoritmo (Gale-Shapley)

El algoritmo construye un emparejamiento estable

Dem.:

El proceso es finito.

La sucesión de propuestas hecha por cada hombre es no creciente en su lista de preferencias, y la sucesión de hombres a quienes una mujer dice “quizá” es no decreciente en su lista de preferencias, culminando en el hombre asignado.

Por tanto, después de a lo más n^2 pasos el algoritmo termina.

El emparejamiento construido es estable.

Supongamos que hay un par inestable de matrimonios, (x, b) y (z, c).

Si z prefiere b, debería haber propuesto a b antes que a c.

Entonces b no lo habría rechazado si realmente lo prefiere sobre x.

Por tanto esa situación inestable no puede alcanzarse.

Estabilidad en emparejamientos (grafos no bipartidos)

Problema de los compañeros de habitación

Dados 20 estudiantes, cada uno ordena a los restantes en orden de preferencia para compartir habitación. ¿Se pueden emparejar los estudiantes respetando sus preferencias?

El problema no tiene siempre solución

{a,b,c,d}

Preferencias
a: b>c>d
b: c>a>d
c: a>b>d
d: a>b>c