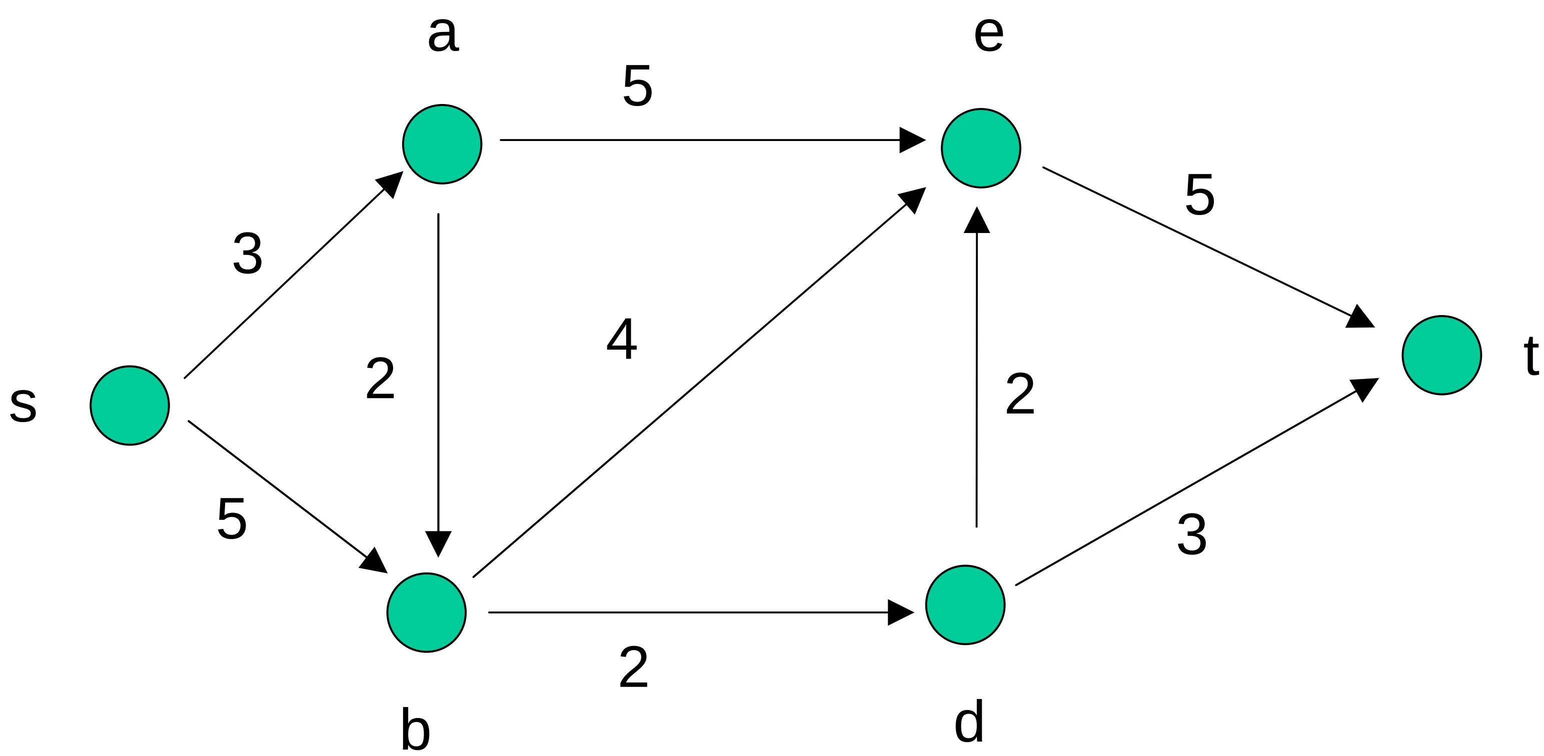
Flujos

Gregorio Hernández Peñalver

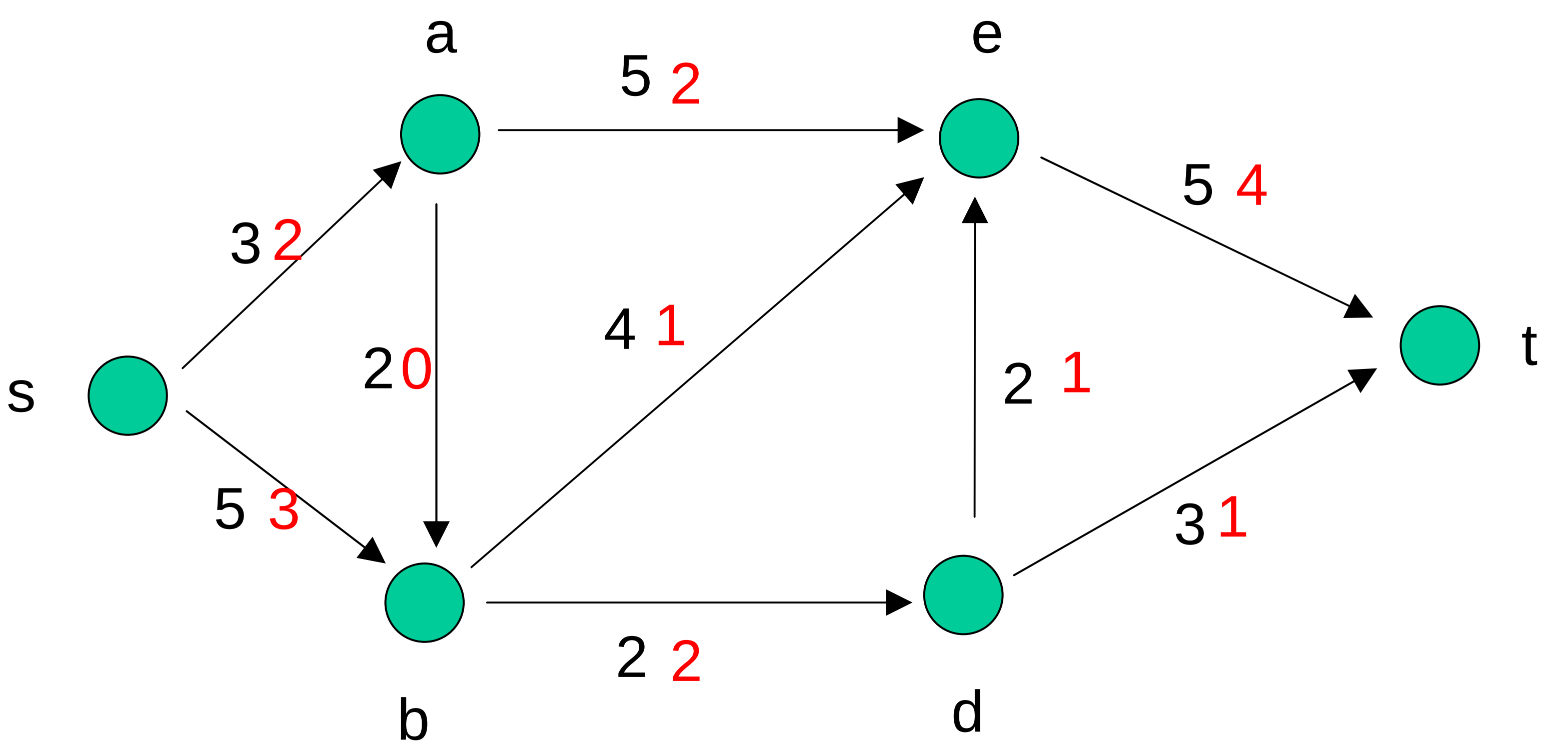
UPM

Matemática Discreta II (MI)

Red de transporte N = (D,c)



c: A $\rightarrow$ Z^+ CAPACIDAD

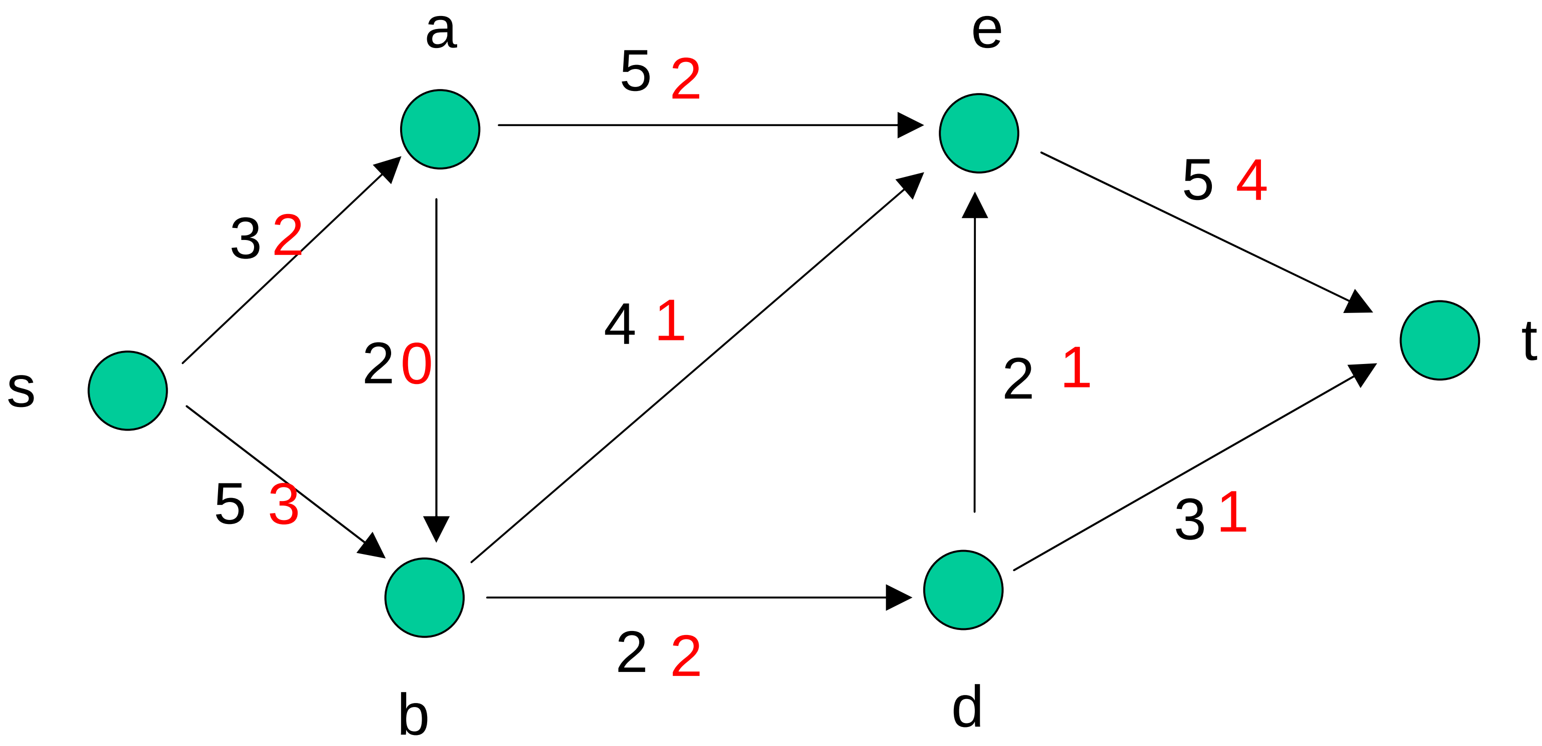


FLUJO en una red N $\quad f : A \rightarrow Z^+$

1. $f(x,y) \leq c(x,y)$ VIABILIDAD

2. $$\sum_{xv \in A} f(x,v) = \sum_{vz \in A} f(v,z)$$ Para todo $v \neq s, t$

CONSERVACIÓN

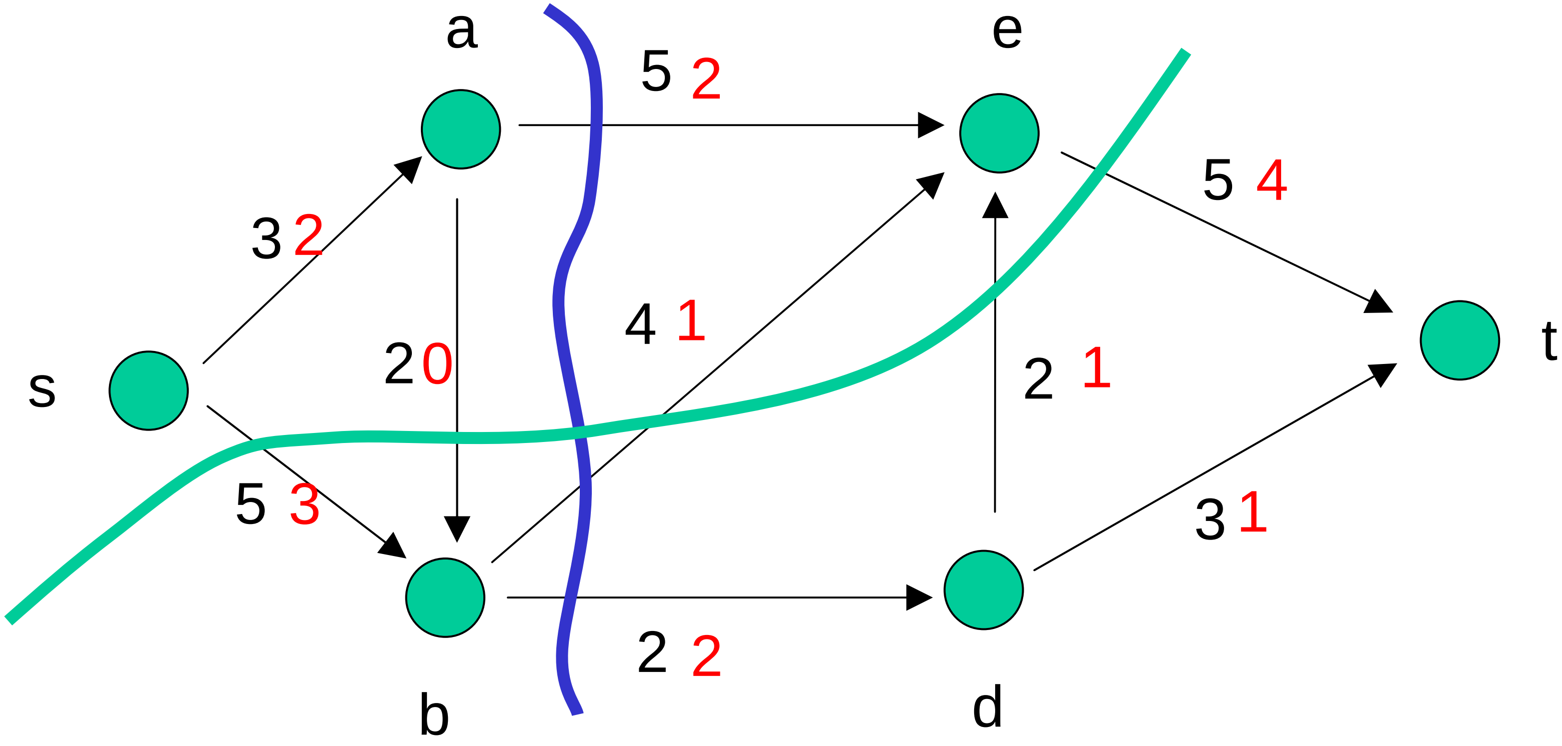


VALOR DEL FLUJO f

$$\text{val}(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

OBJETIVO

Dada una red N, hallar el valor máximo del flujo y un flujo de valor máximo

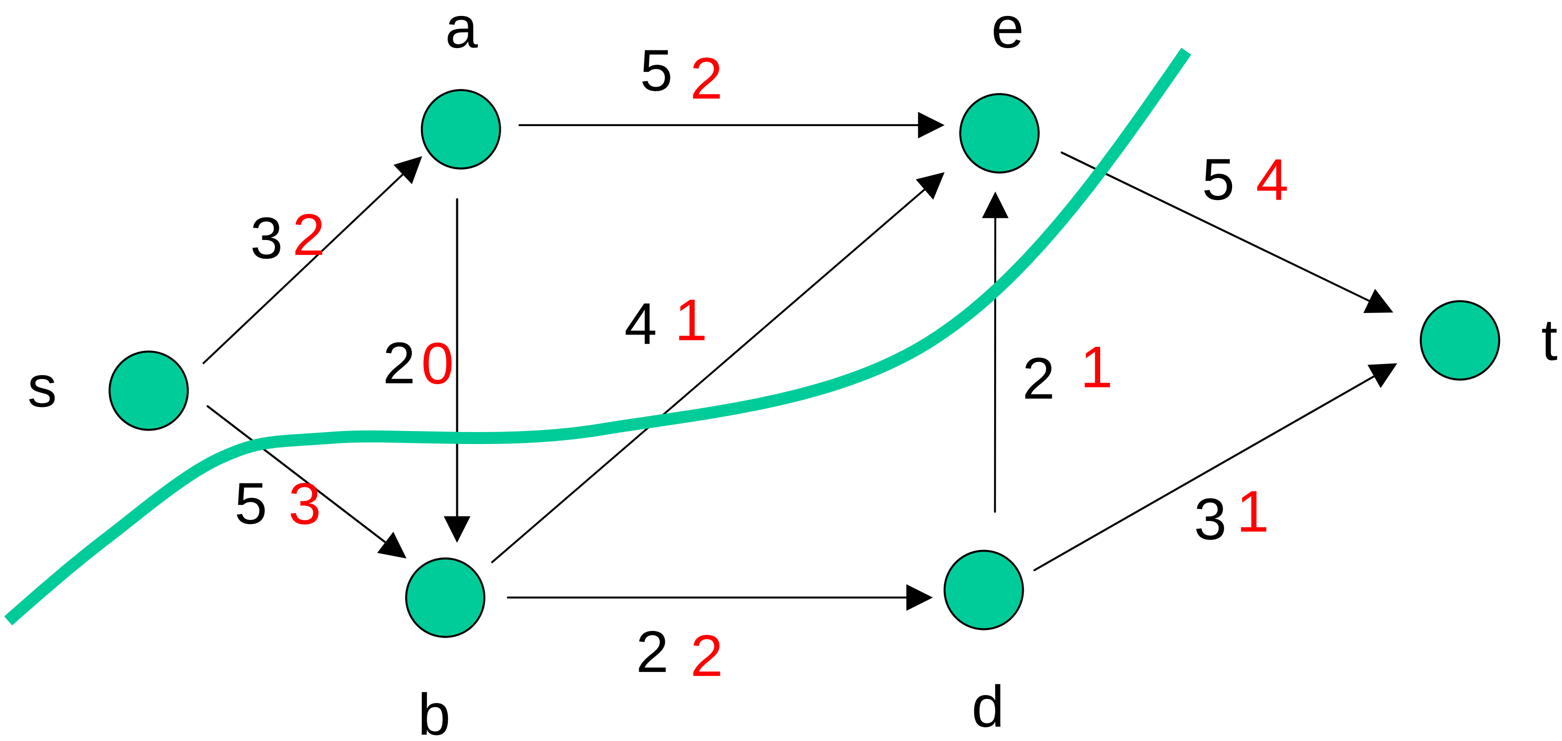


CORTE en N es una partición de $V = S \cup T$, con $s \in S$, $t \in T$

Capacidad de un corte $\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x,y)$

cap(azul)=11

cap(verde)=12



Flujo neto de S a T

$$\sum_{x \in S, y \in T} f(x,y) - \sum_{v \in T, u \in S} f(v,u) = val(f)$$

$$val(f) \le \sum_{x \in S, y \in T} f(x,y) \le \sum_{x \in S, y \in T} c(x,y) = cap(S,T)$$

Corolario

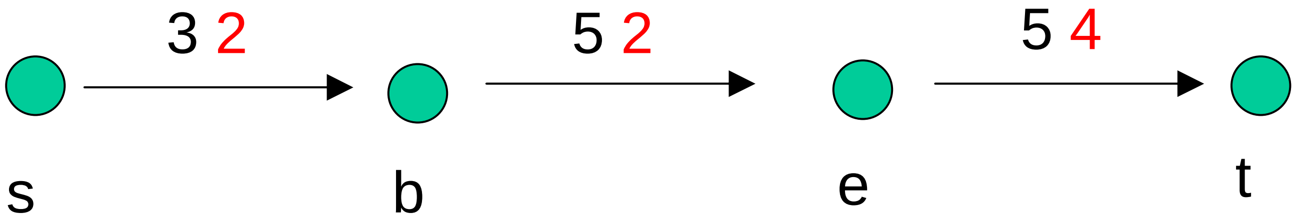
max val(f) ≤ min cap(S,T)

Teorema de Ford-Fulkerson (1955)

$$\max_{f \text{ flujo}} \operatorname{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ corte}} \operatorname{cap}(S,T)$$

¿Cómo aumentar un flujo de s a t?

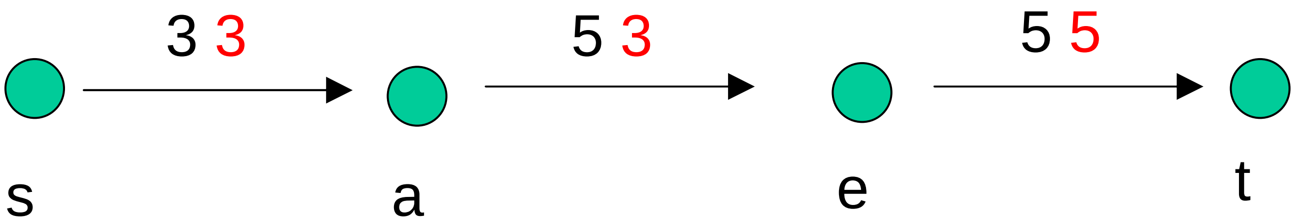
Caminos dirigidos de s a t



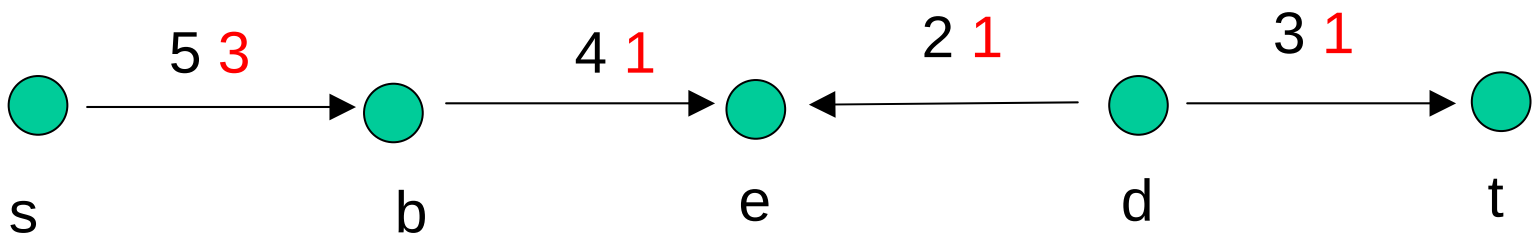
residuo $\alpha_i = c(x_i,x_{i+1}) - f(x_i,x_{i+1})$

$\alpha = \min \alpha_i$

P es camino de f-aumento si $\alpha>0$



¿Y si en el camino de s a t hay arcos hacia atrás?

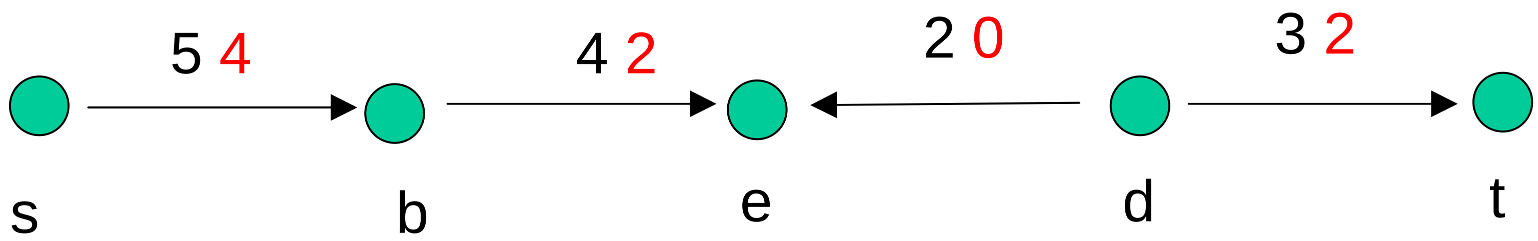


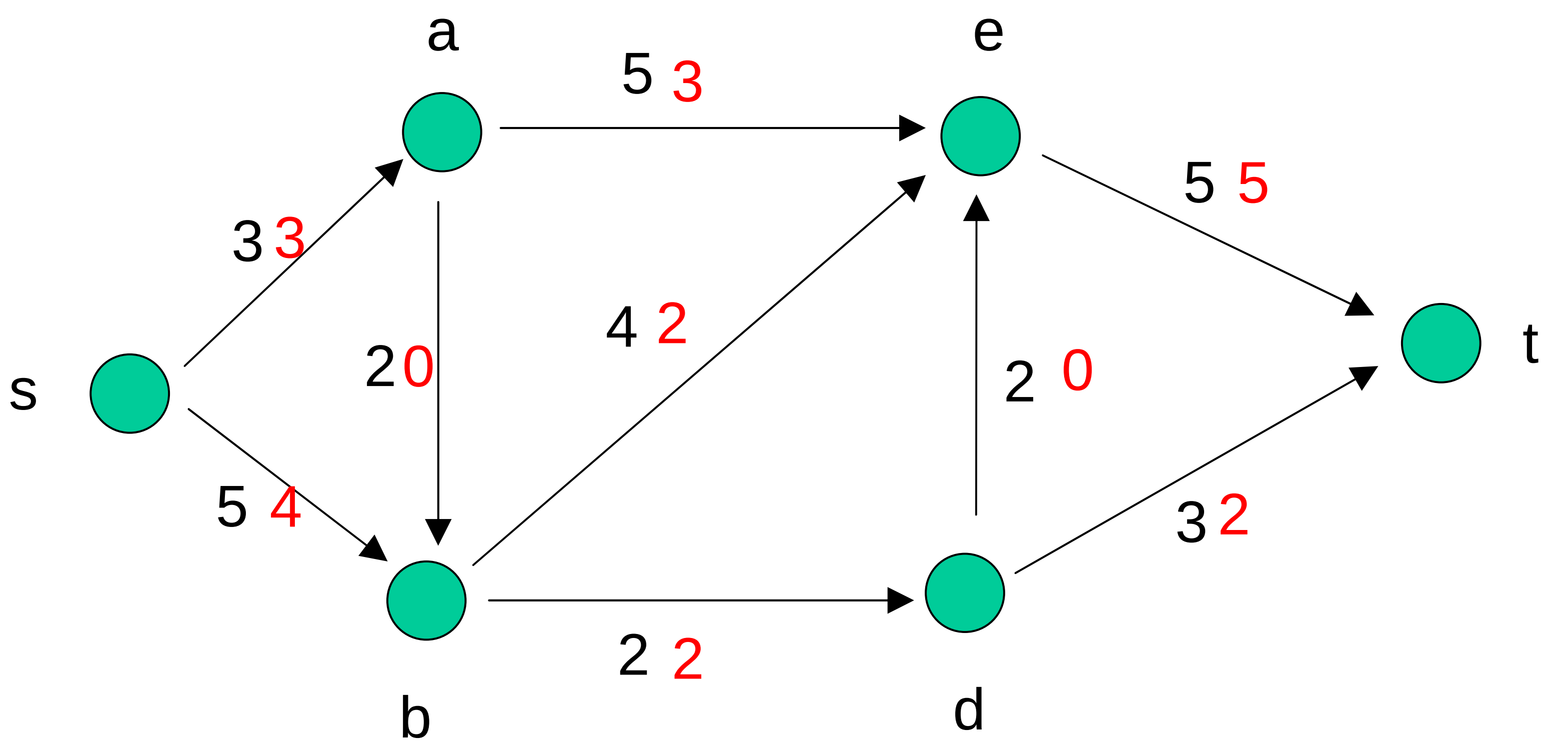
residuo $\alpha_i = c(x_i,x_{i+1}) - f(x_i,x_{i+1})$

$\alpha_i = f(x_{i+1},x_i)$

$\alpha = \min \alpha_i$

P es camino de f-aumento si $\alpha>0$





Si un flujo f es máximo, entonces la red NO puede tener caminos de f-aumento

Teorema de Ford-Fulkerson

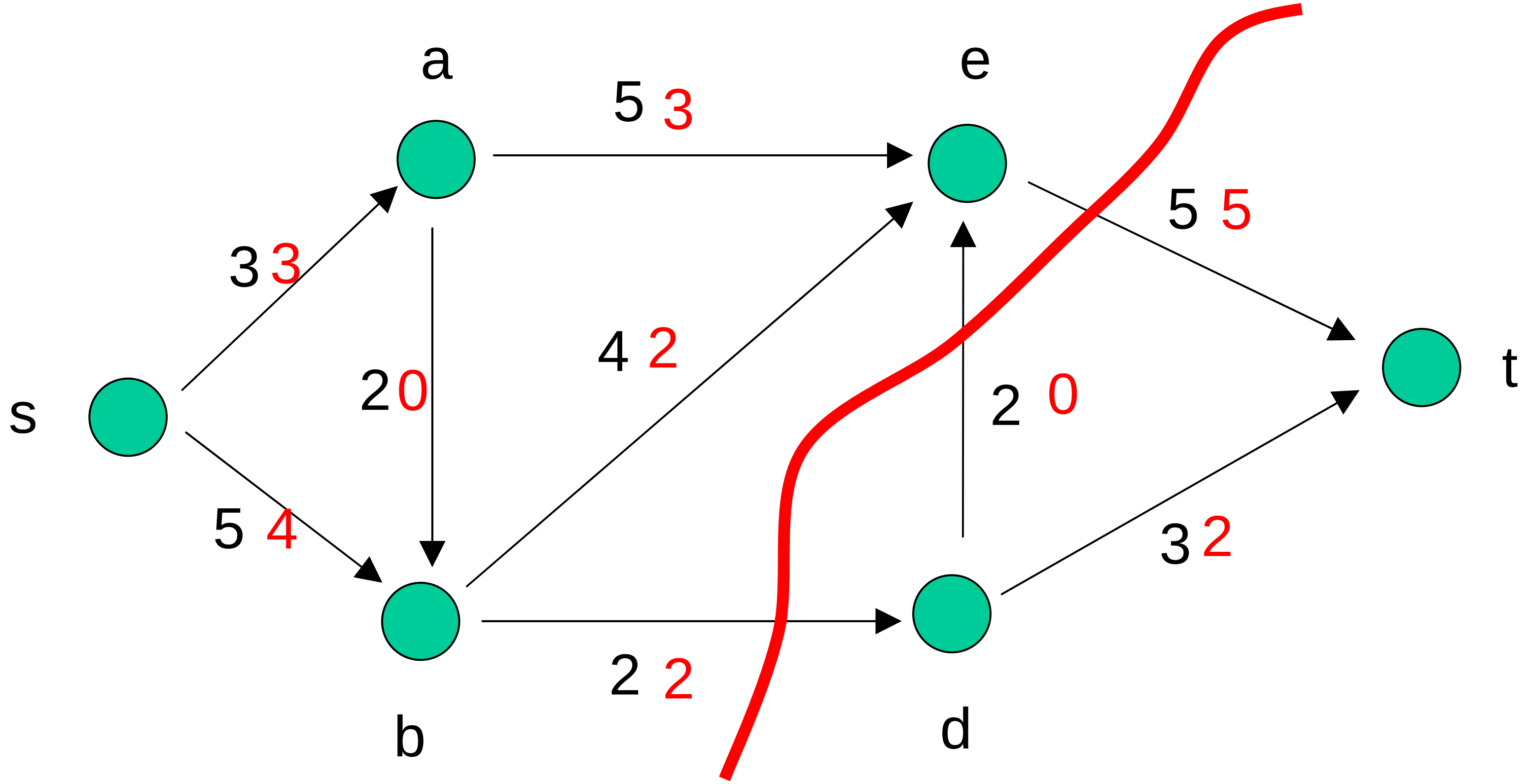
El valor máximo de un flujo en una red N es igual a la mínima capacidad de los cortes de N

Dem.

Si f es un flujo de valor máximo, no hay caminos de f-aumento de s a t. Construiremos un corte de capacidad val(f)

S = {x$\in$V/ existe un camino de f-aumento de s a x}   T= V – S

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) - \sum_{u\in S, v\in T} f(v,u) = \sum_{x\in S, y\in T} c(x,y) - 0 = \mathrm{cap}(S,T)$$



val(f)=7

El corte S={s,a,b,e} T=V – S tiene capacidad

cap(S,T)=7

¿Cómo se construye un flujo de valor máximo?

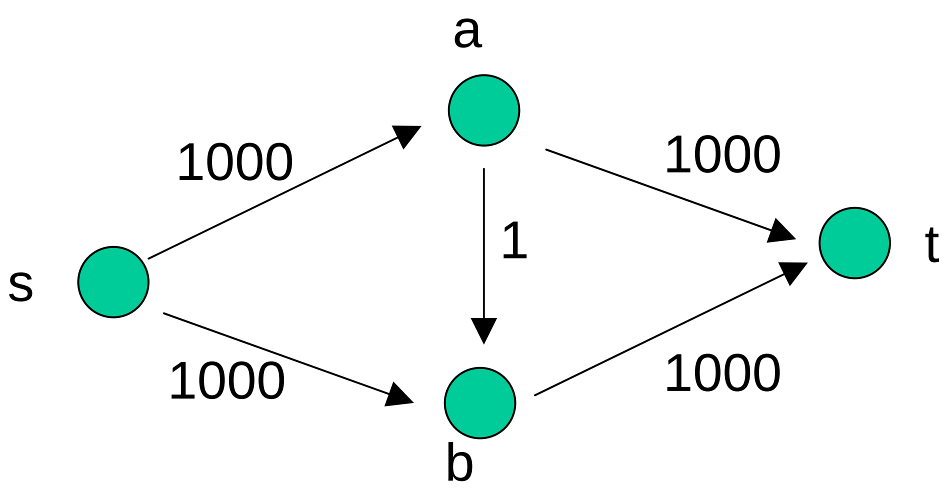
Método de Ford-Fulkerson

1. Partir de $f \equiv 0$
2. Mientras exista P camino de f-aumento en la red N, aumentar f a lo largo de P
3. Devolver f

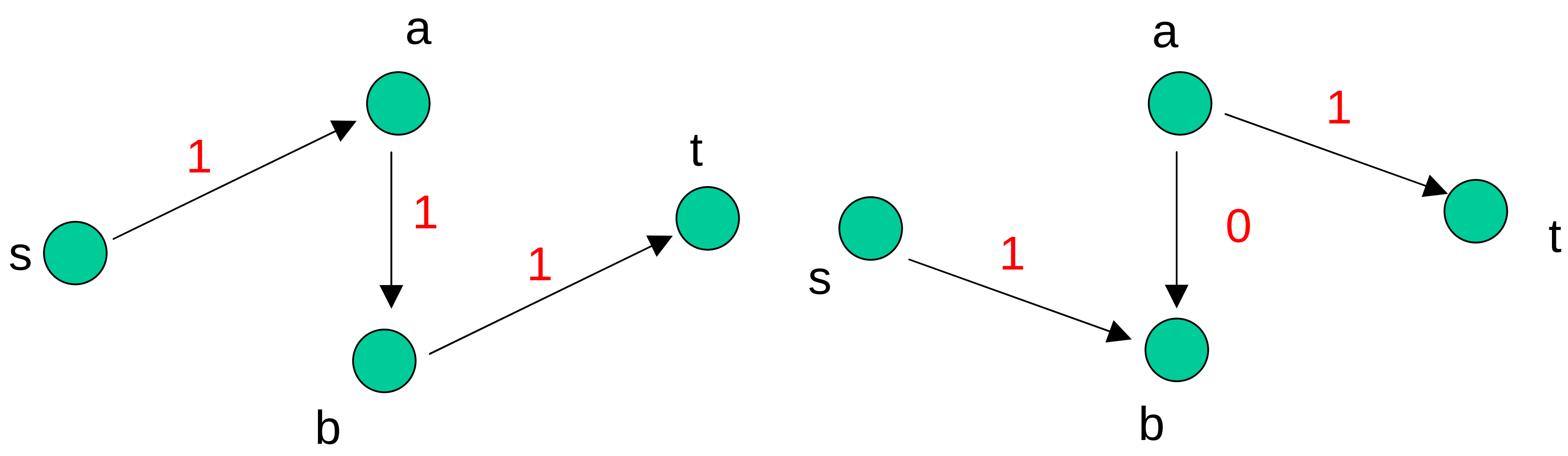
¿Este proceso acaba?

Al final, ¿se obtiene un flujo máximo?

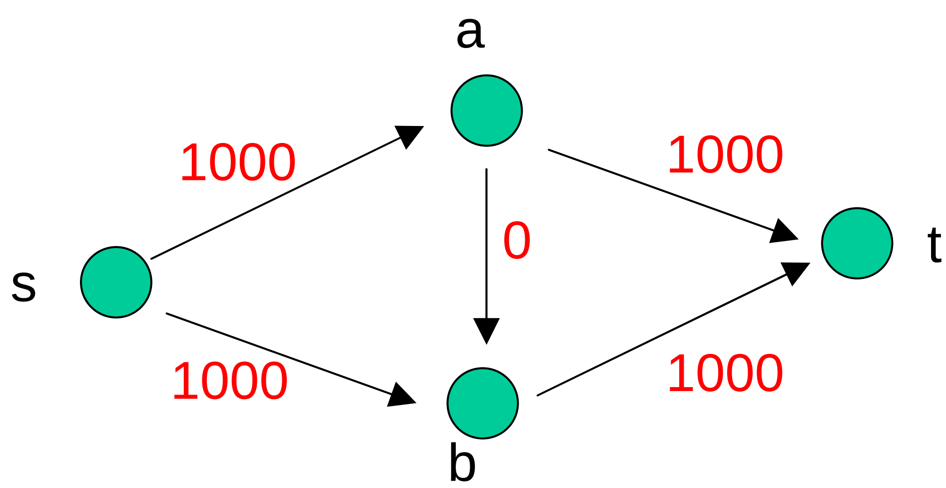
1. Se supone que existe un flujo de valor máximo
2. Si las capacidades son enteras el método de Ford-Fulkerson puede necesitar analizar val(f) caminos. Como el análisis de cada camino tiene un coste O(q), la complejidad es O(val(f)q)



max flujo=2000



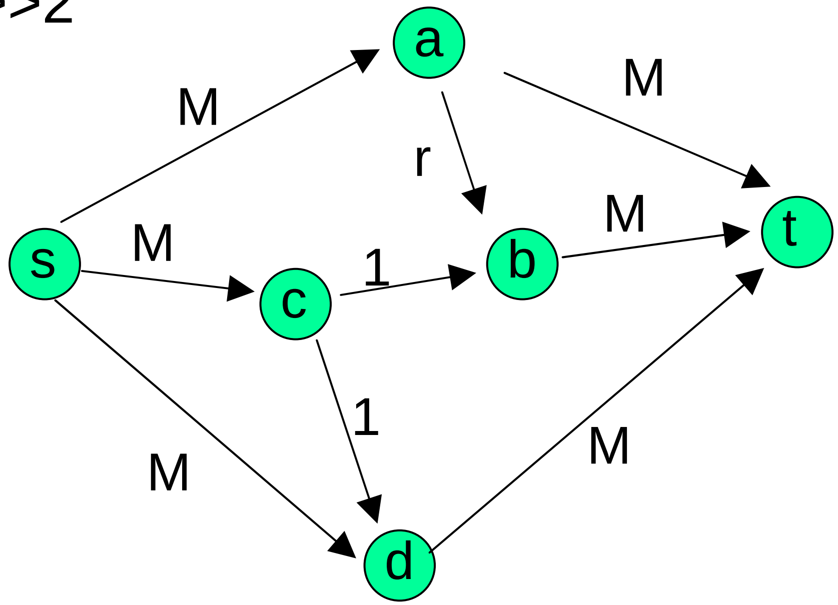
Tras 2000 caminos como los anteriores alcanzamos el flujo máximo



3. Si las capacidades son números reales, el método de Ford-Fulkerson puede no alcanzar el flujo de valor máximo.

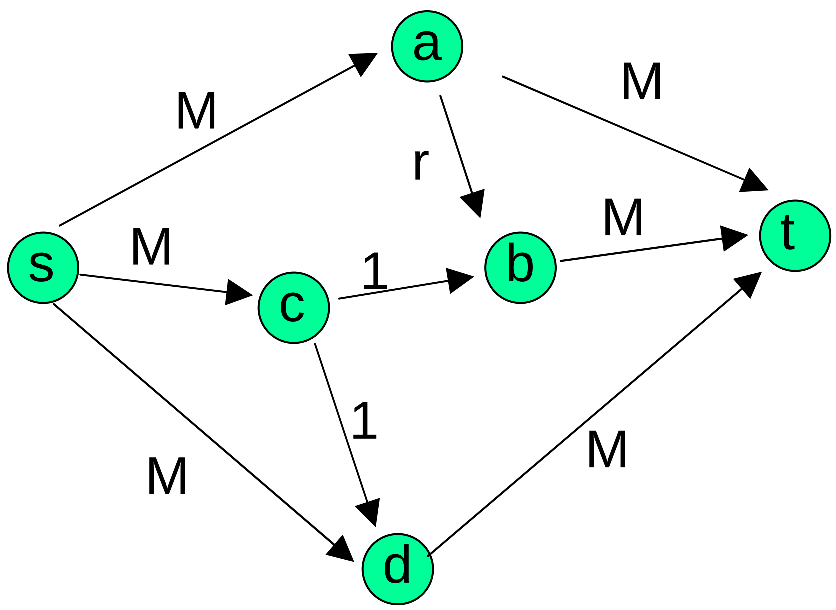
En la red de la figura el valor del flujo máximo es $2M + 1$

$M >> 2$



r es la raíz positiva de
$x^2 = 1 - x$
$r \approx 0{,}62$

Caminos considerados
p_0 = scbt
p_1 = sabcdt
p_2 = scbat
p_3 = sdcbt



p_0 = scbt
p_1 = sabcdt
p_2 = scbat
p_3 = sdcbt

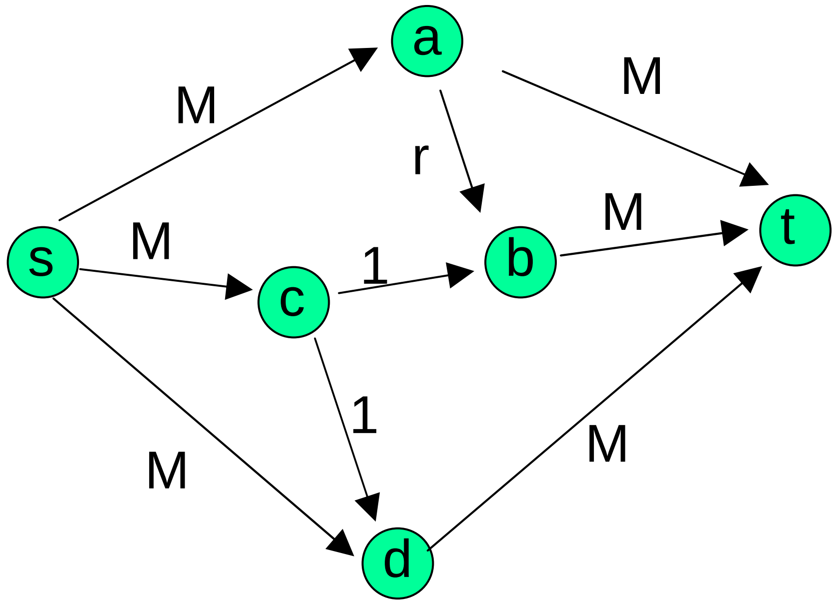
$r^2 = 1 - r$, $r^3 = r - r^2$, …

Camino de aumento	Flujo enviado	Capacidad residual		
		cd	ab	cb
p_0	1	1	r	0
p_1	r	r^2	0	r
p_2	r	r^2	r	0
p_1	r^2	0	r^3	r^2
p_3	r^2	r^2	r^3	0

Tras bloque P= $p_1p_2p_1p_3$ el flujo enviado ha aumentado en

$2(r + r^2)$

Repetimos el bloque P= $p_1p_2p_1p_3$ y …



p_0 = scbt
p_1 = sabcdt
p_2 = scbat
p_3 = sdcbt

$r^2 = 1 - r$, $r^3 = r - r^2$, …

Capacidades residuales de cd, ab y cb tras cada bloque de caminos P

$$(1,r,0) \to (r^2,r^3,0) \to (r^4,r^5,0) \to \ldots \to (r^n,r^{n+1},0) \to \ldots$$

El aumento de flujo en los sucesivos bloques es $2(r+r^2)$, $2(r^3+r^4)$, …
luego el flujo total tras infinitos pasos por P será

$$\mathrm{val}(f) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + \frac{2r}{1-r} = 3 + 2r$$

…que no converge al valor máximo conocido 2M + 1 !!

ALGORITMO DE ETIQUETADO (Edmonds, Karp)

Estrategia

Paso 1) Partir de un flujo cualquiera, $f \equiv 0$

Paso 2) Usar búsqueda en anchura para construir un árbol de caminos de f-aumento con raíz en s

- Si el árbol alcanza t, aumentar f a lo largo del camino correspondiente y volver al paso 2) con el nuevo flujo f
- Si el árbol no alcanza t, FIN del algoritmo.

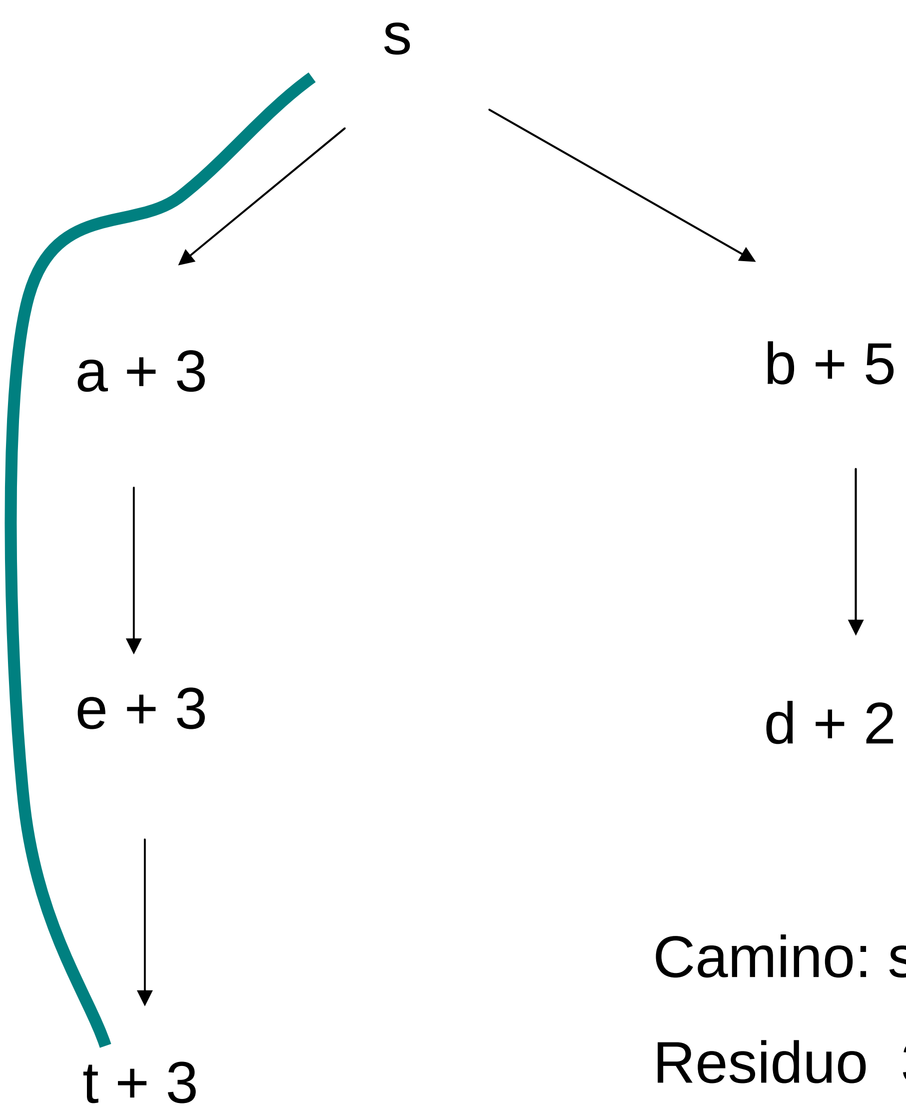
  El flujo considerado es máximo. Un corte de capacidad mínima es (S,T) donde

  S = {vértices que se alcanzan desde s en el último árbol con caminos de f- aumento},

  T = V – S

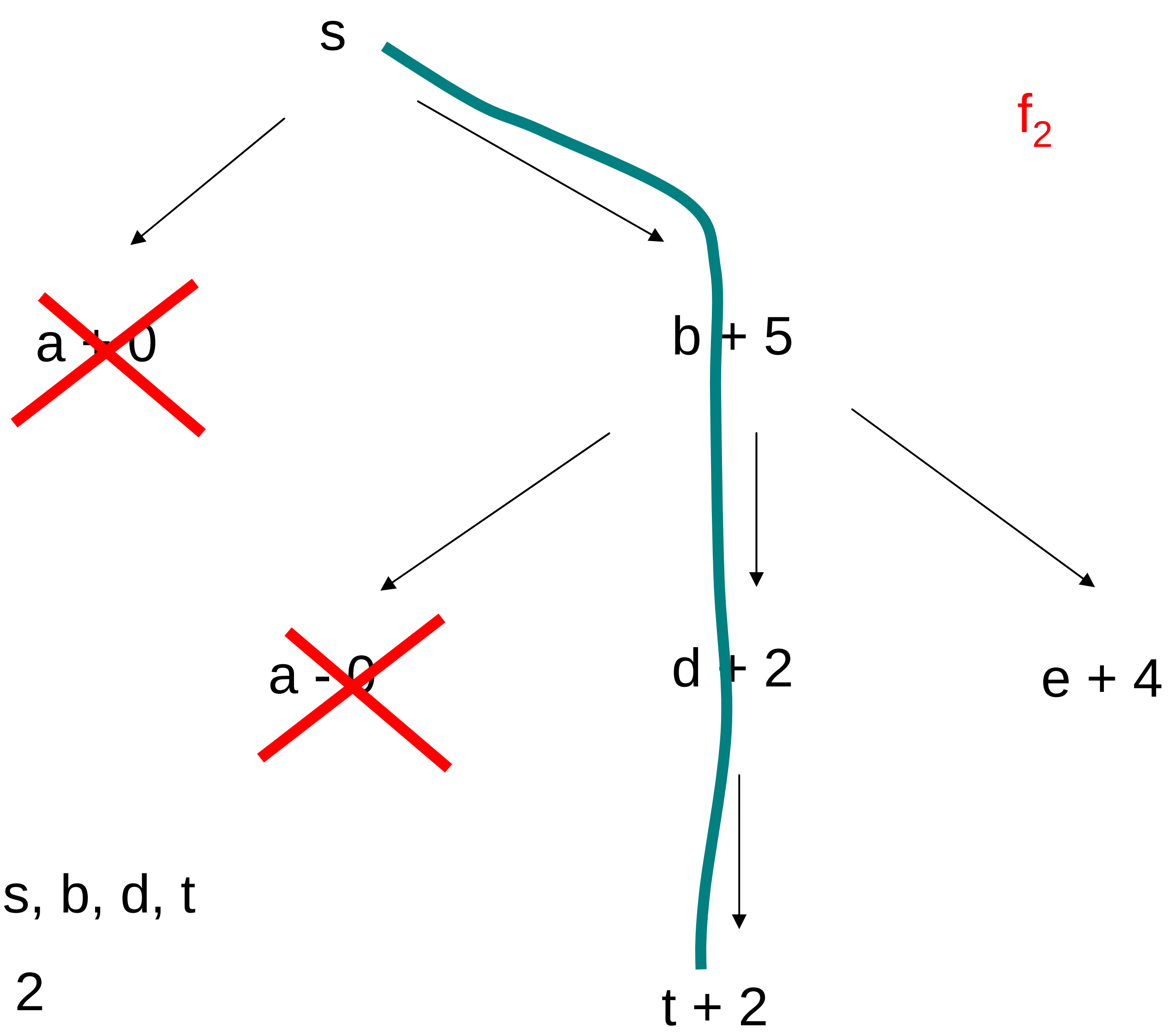
$f \equiv 0$

f_1



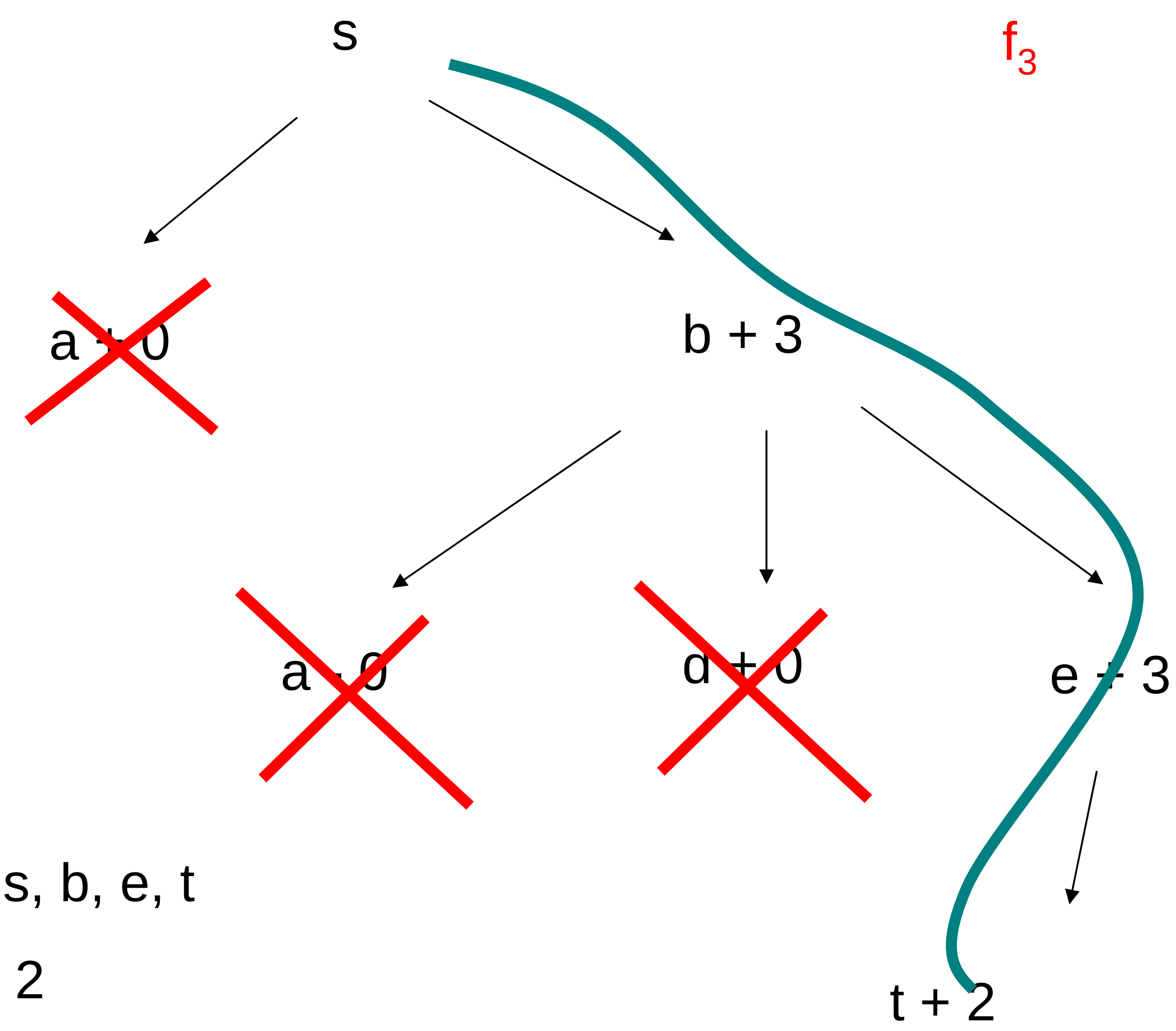
Camino: s, a, e, t

Residuo 3



Camino: s, b, d, t

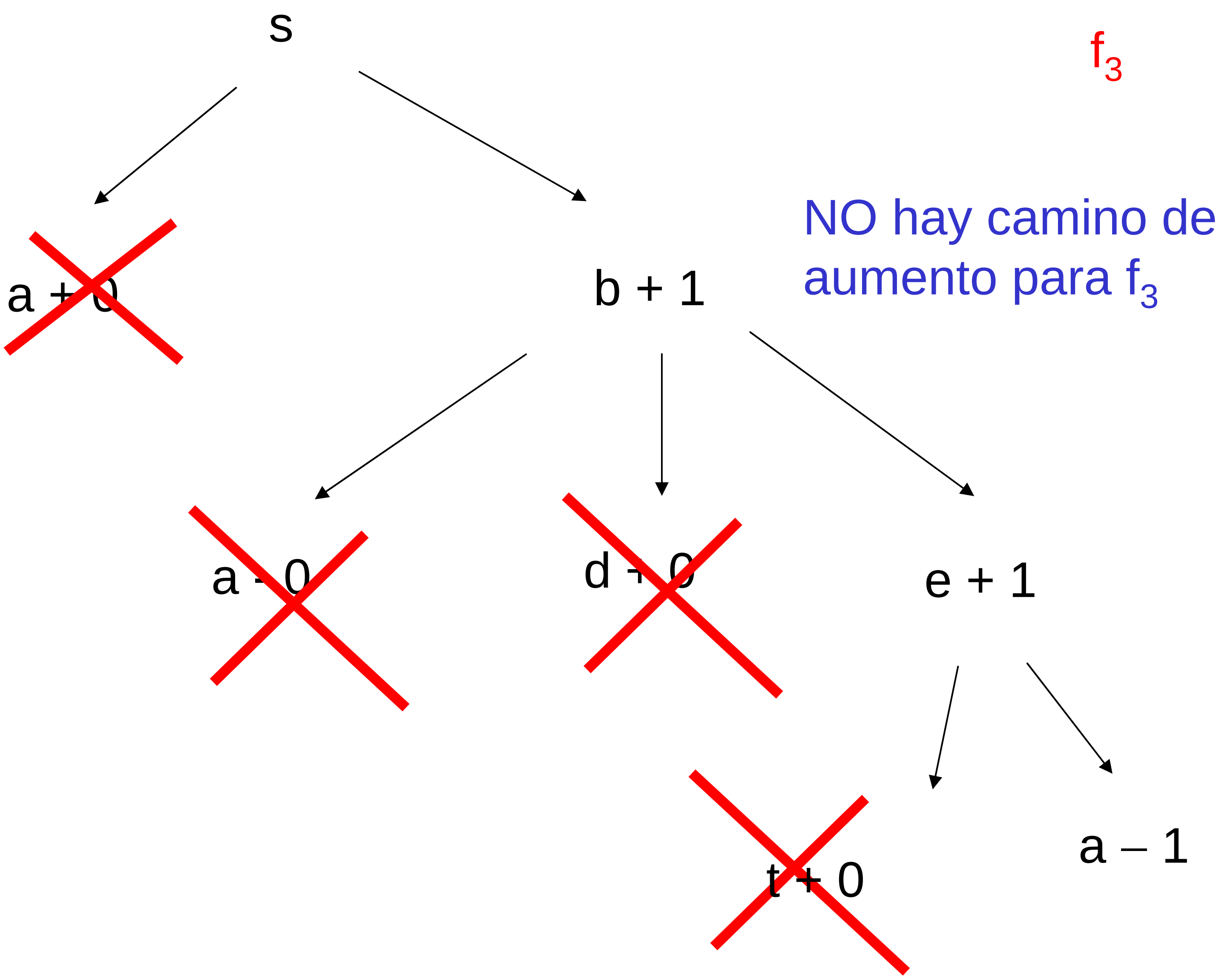
Residuo 2



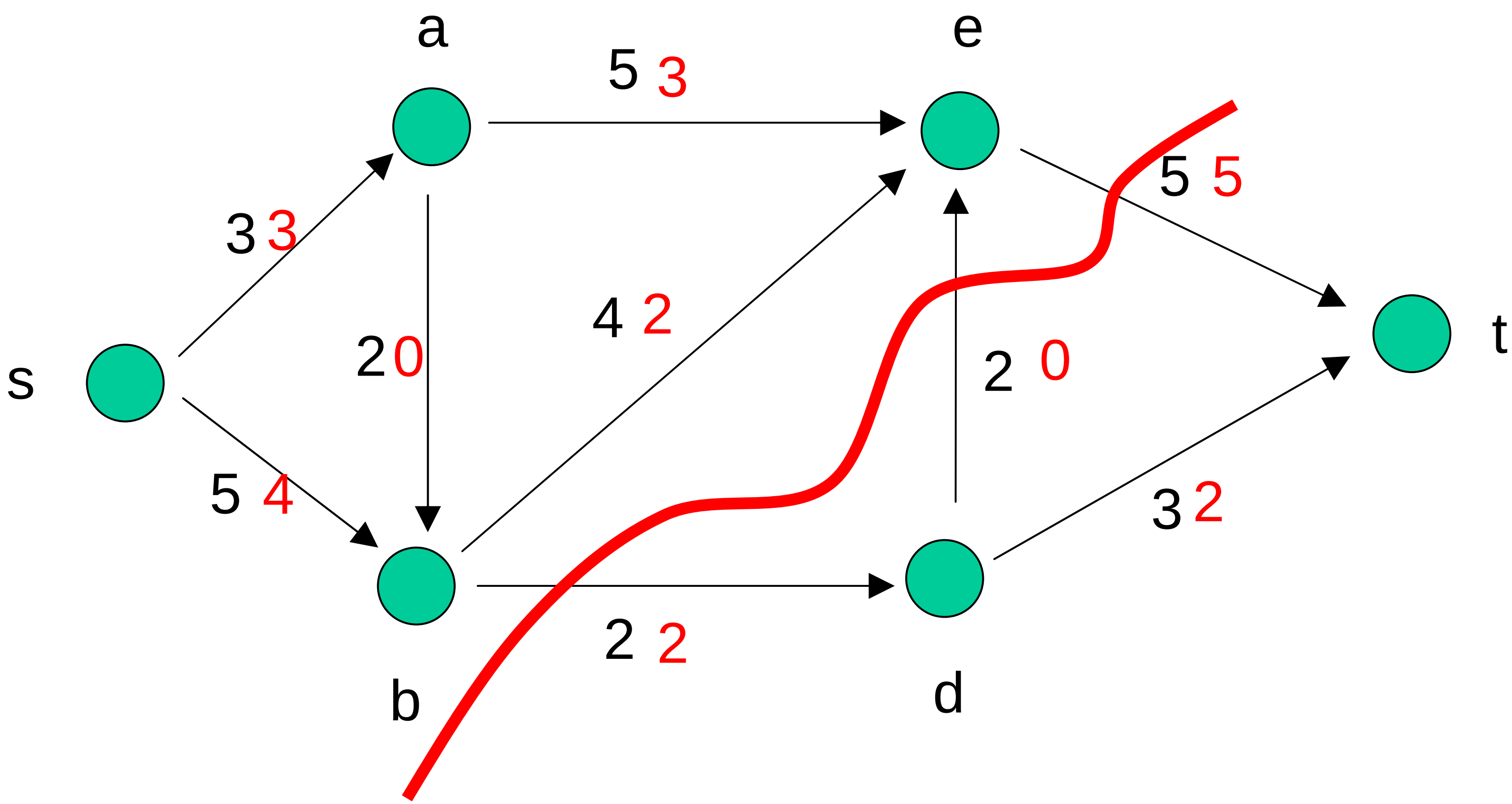
Camino: s, b, e, t

Residuo 2

f_3



NO hay camino de aumento para f_3



S={s,a,b,e}   T={d,t}

es el corte formado por los vértices que se alcanzan desde s con caminos de f-aumento

Teorema (1972)

El algoritmo de etiquetado de Edmonds y Karp calcula un flujo maximal en $O(nq^2)$

Dem. El algoritmo construye una sucesión de flujos f_0, f_1, ..., f_M , ¿cuántos flujos se construyen? y ¿cuál es el coste de cada uno?

Se puede demostrar que:
$M \leq$ nº de aristas **críticas** (aquellas que se saturan en el camino de aumento) $\leq q$ (máximo nº de veces que una arista es crítica) $\leq qn$

Como el coste de cada flujo es, básicamente, el coste de una búsqueda en anchura, es decir $O(q)$, resulta que la complejidad del algoritmo es $O(nq^2)$

Otros algoritmos:

- Algoritmo de Dinic

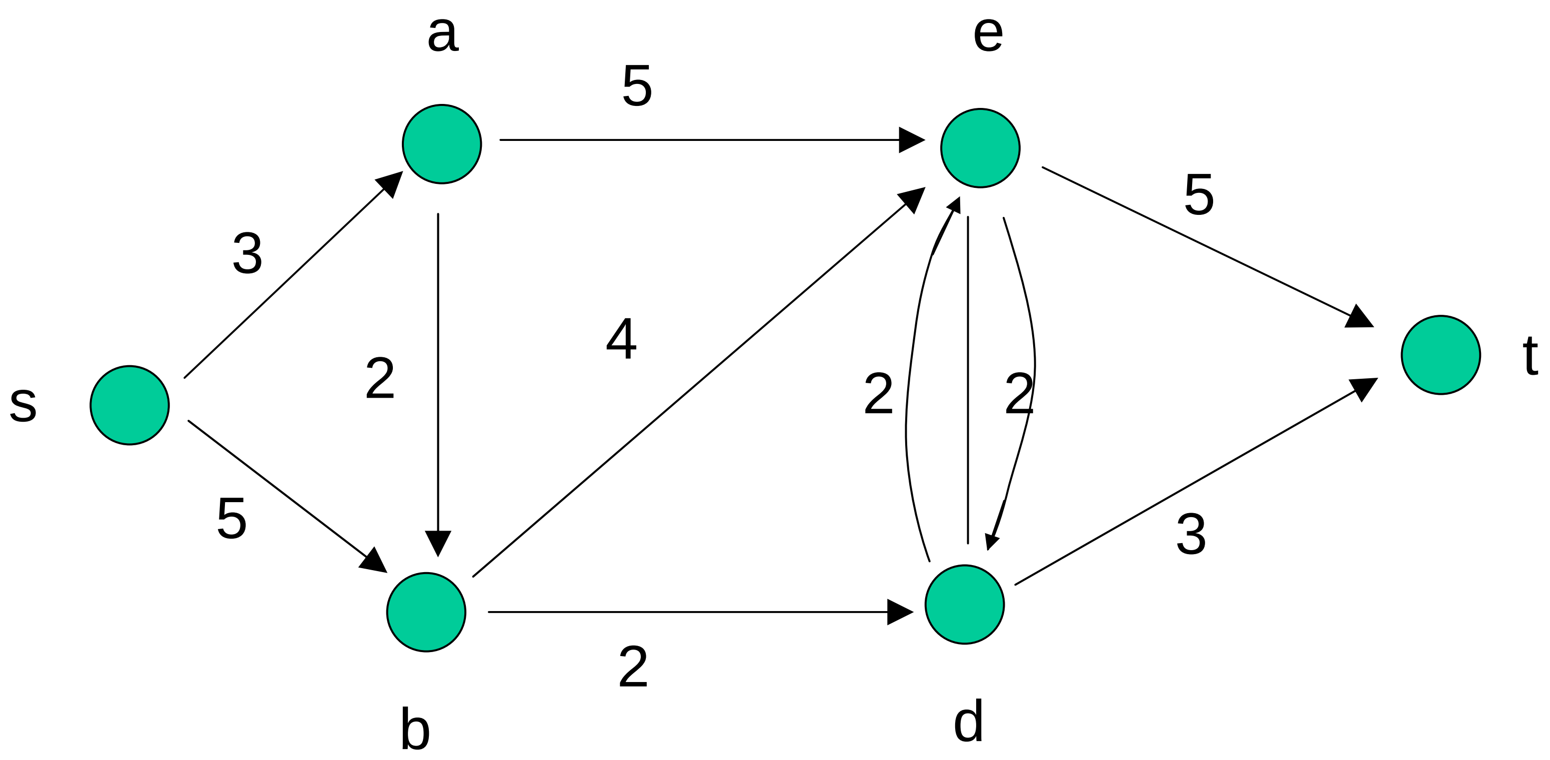
  Encuentra todos los caminos de f-aumento con sólo una búsqueda en anchura. Complejidad $O(n^2q)$

- Algoritmos de PREFLUJO (Karzanov-Goldberg-Tarjan)

  Parten de un preflujo f (cumple viabilidad pero no conservación) que no admite caminos de f-aumento y lo modifican hasta conseguir que se cumpla la ley de conservación $f^+(v) = f^-(v)$

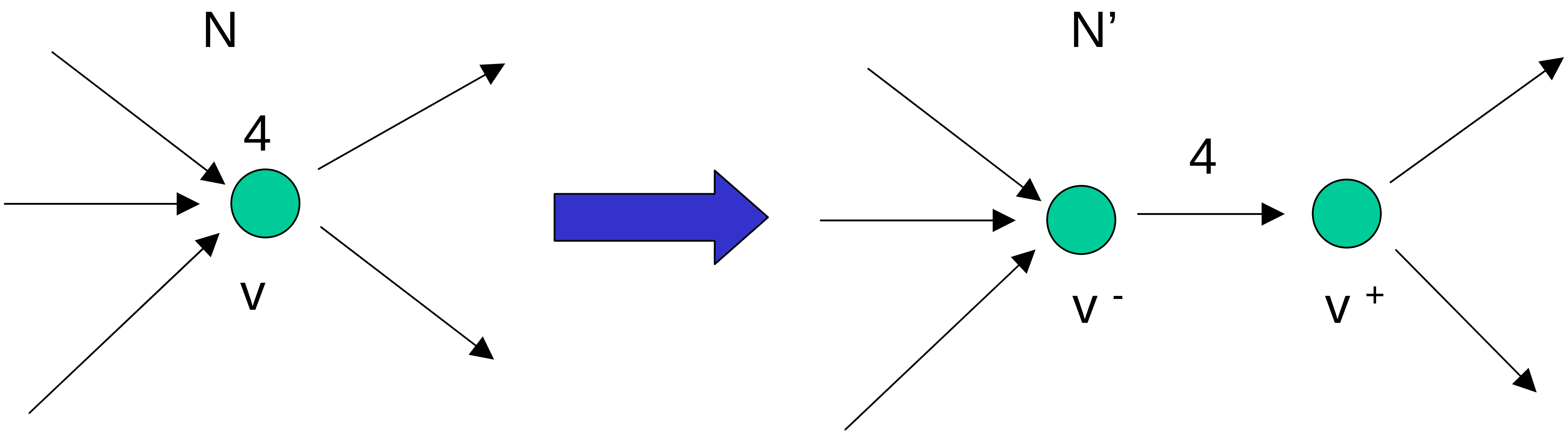
  Complejidad $O(n^3)$

REDES NO DIRIGIDAS O MIXTAS



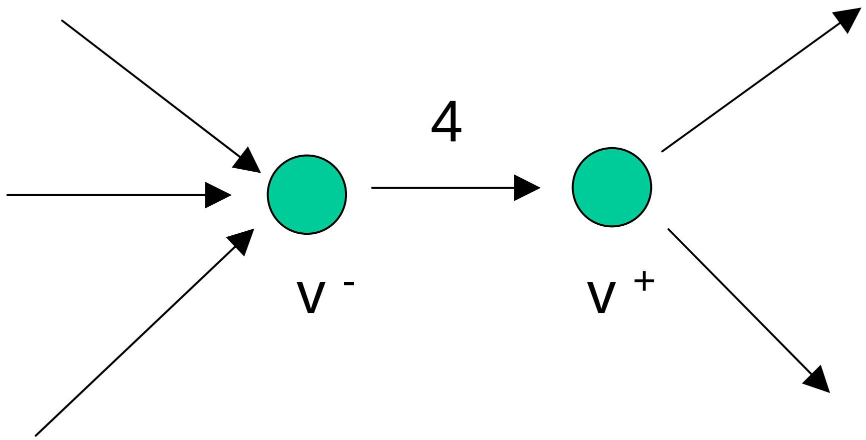
Precaución: Por los nuevos arcos NO puede haber flujo simultáneamente en los dos sentidos

REDES CON RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD EN LOS VÉRTICES



$$\sum_{xv \in A} f(x,v) = \sum_{vz \in A} f(v,z) \leq c(v)$$ Para todo $v \neq s,t$

REDES CON RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD EN LOS VÉRTICES



Las aristas de capacidad finita son $v^- v^+$

Un corte de capacidad finita en N' corresponde a un conjunto Z de V – {s,t} cuya supresión impida el flujo positivo de s a t.

Esto es lo que se llama un **corte** en N

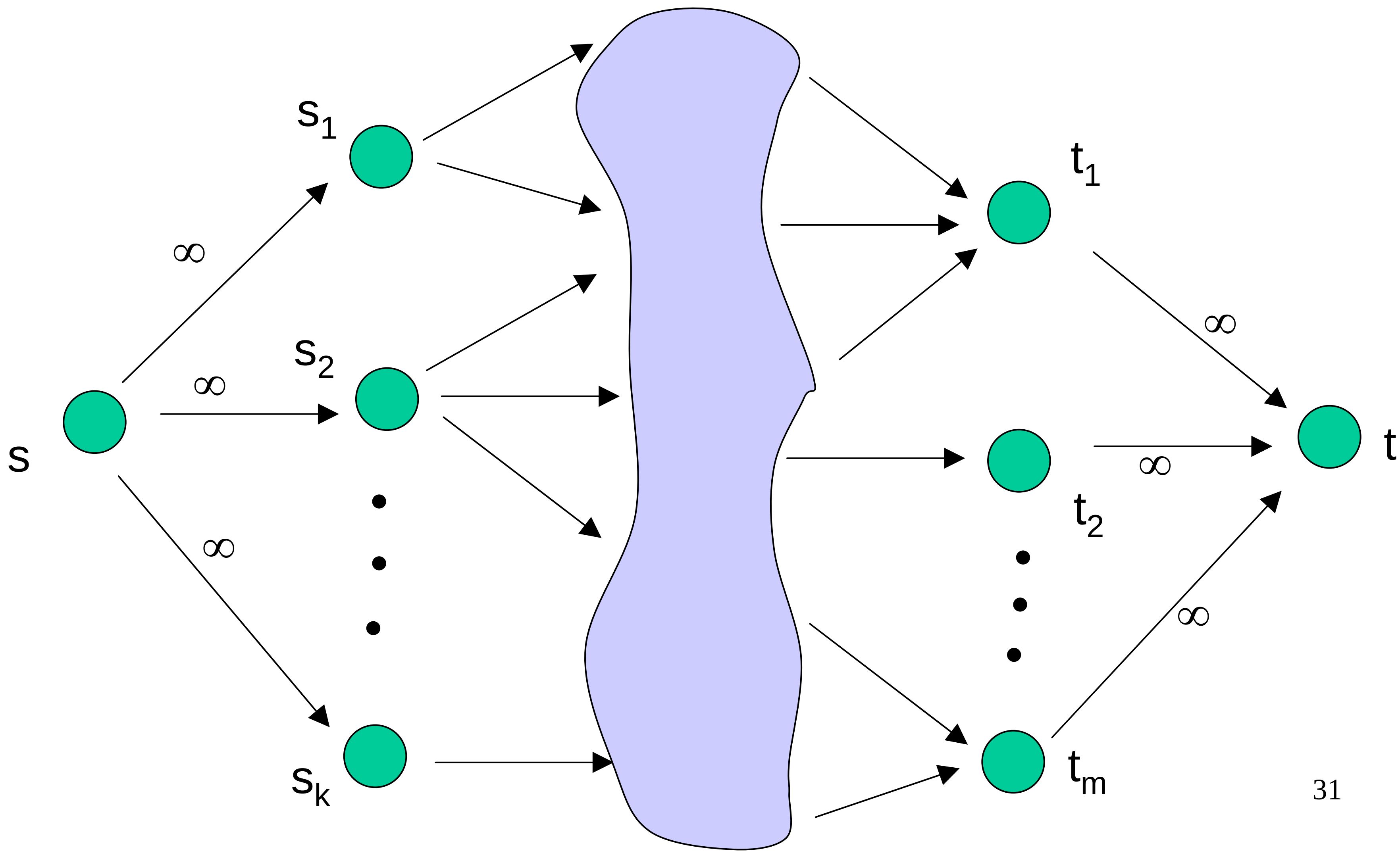
REDES CON RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD EN LOS VÉRTICES

Teorema

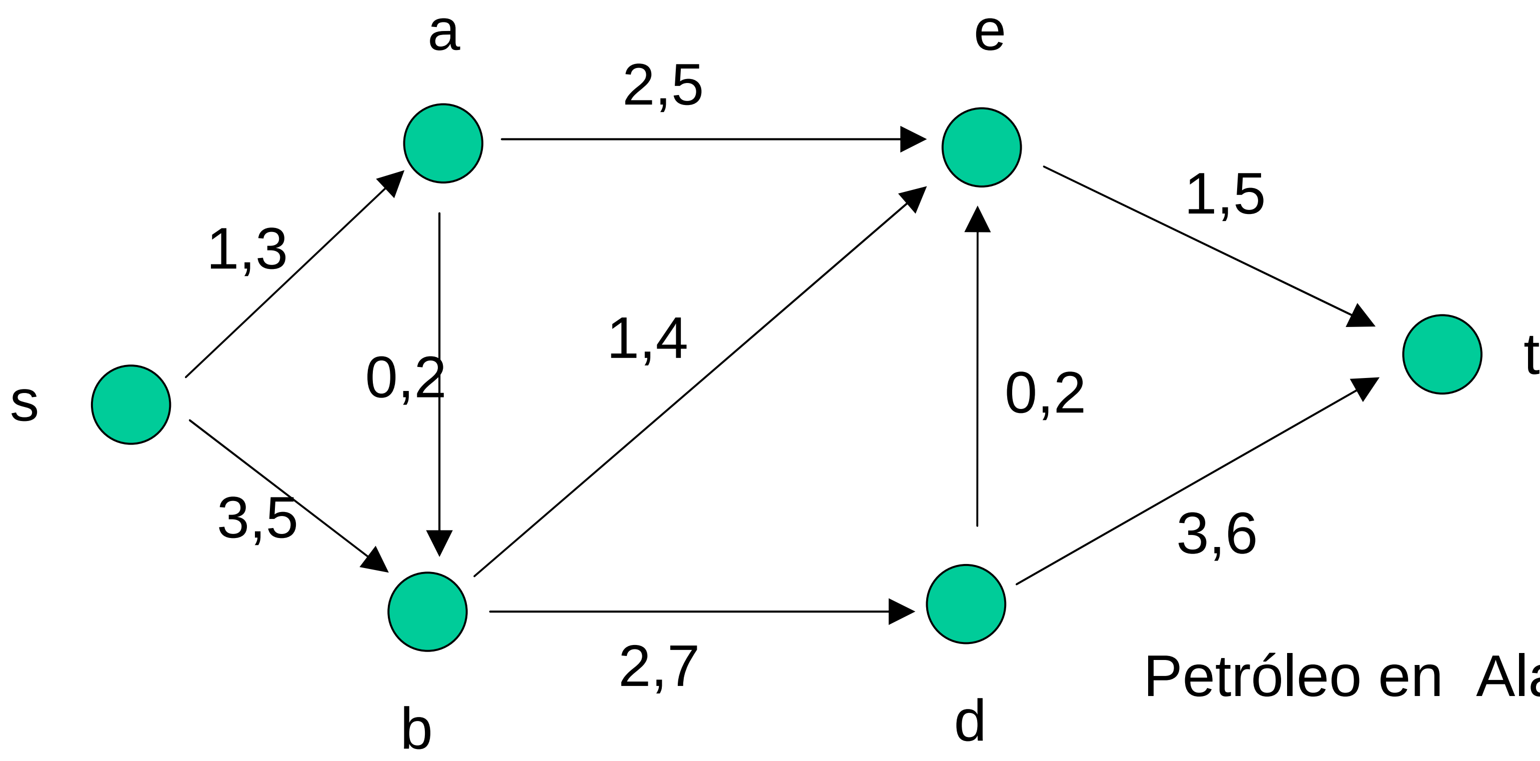
Sea N una red con capacidad acotada en los vértices, entonces

$$\max_{f \text{ flujo}} \operatorname{val}(f) = \min_{Z \text{ corte}} \operatorname{cap}(Z)$$

REDES CON VARIAS FUENTES Y/O SUMIDEROS



REDES CON ACOTACIÓN SUPERIOR E INFERIOR



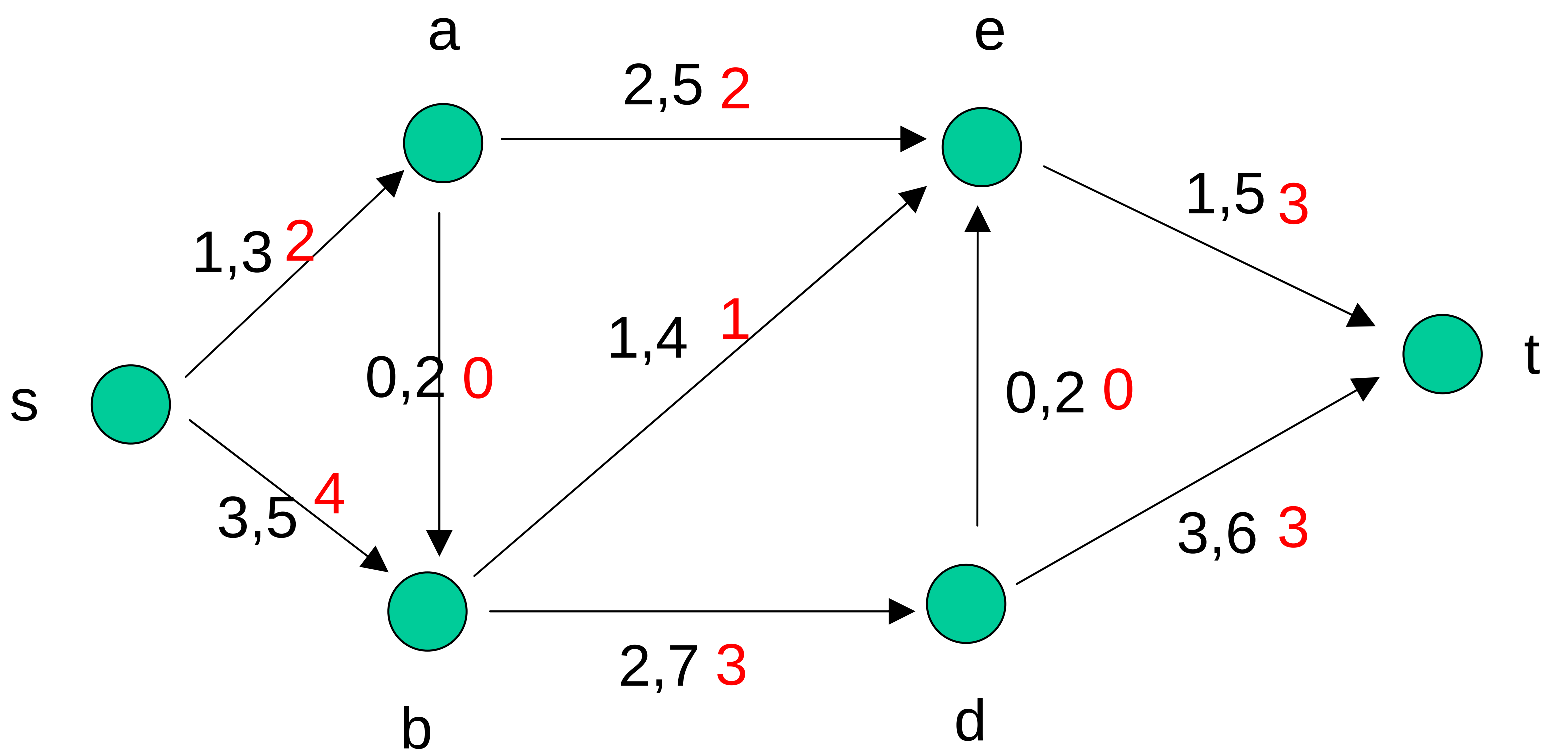
Petróleo en Alaska

$N = (D, m, u)$

$m, u: A \to Z^+$

$0 \leq m(e) \leq u(e)$ para todo arco e

REDES CON ACOTACIÓN SUPERIOR E INFERIOR

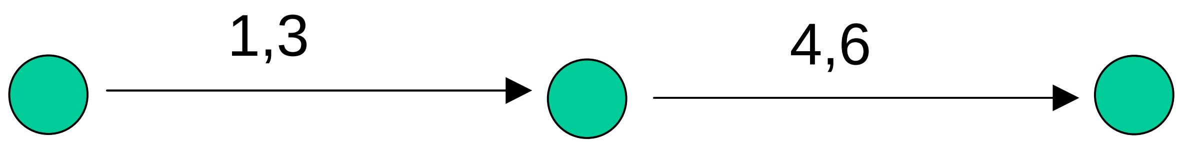


FLUJO en una red N $f : A \rightarrow Z^{+}$

1. $m(x,y) \leq f(x,y) \leq u(x,y)$ VIABILIDAD

2. LEY de CONSERVACIÓN

ATENCIÓN Hay redes NO factibles



PROBLEMAS

1. Dada N determinar si es factible

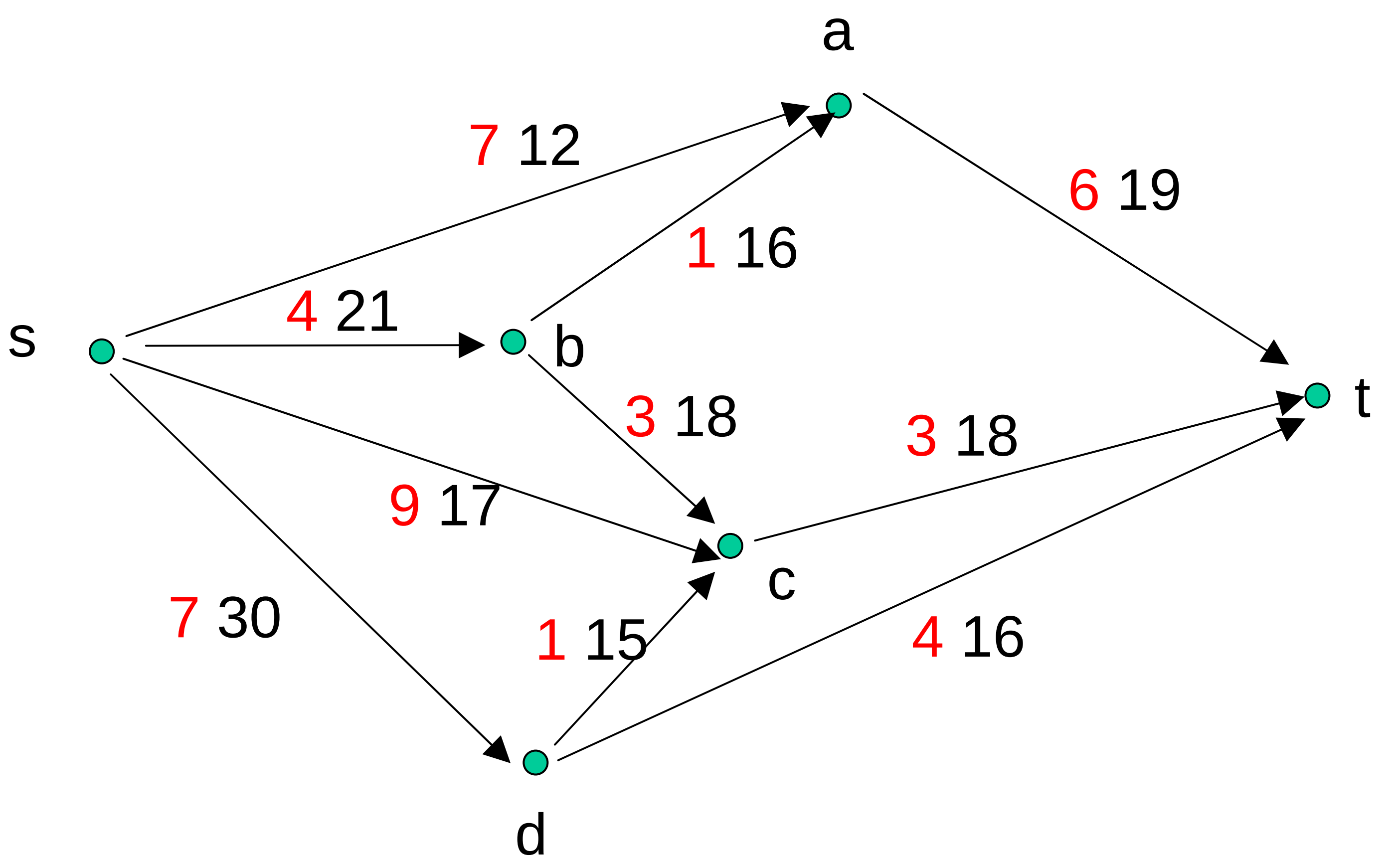
2. Si N es factible, hallar un flujo en N

3. Adaptar el método de Ford-Fulkerson a N

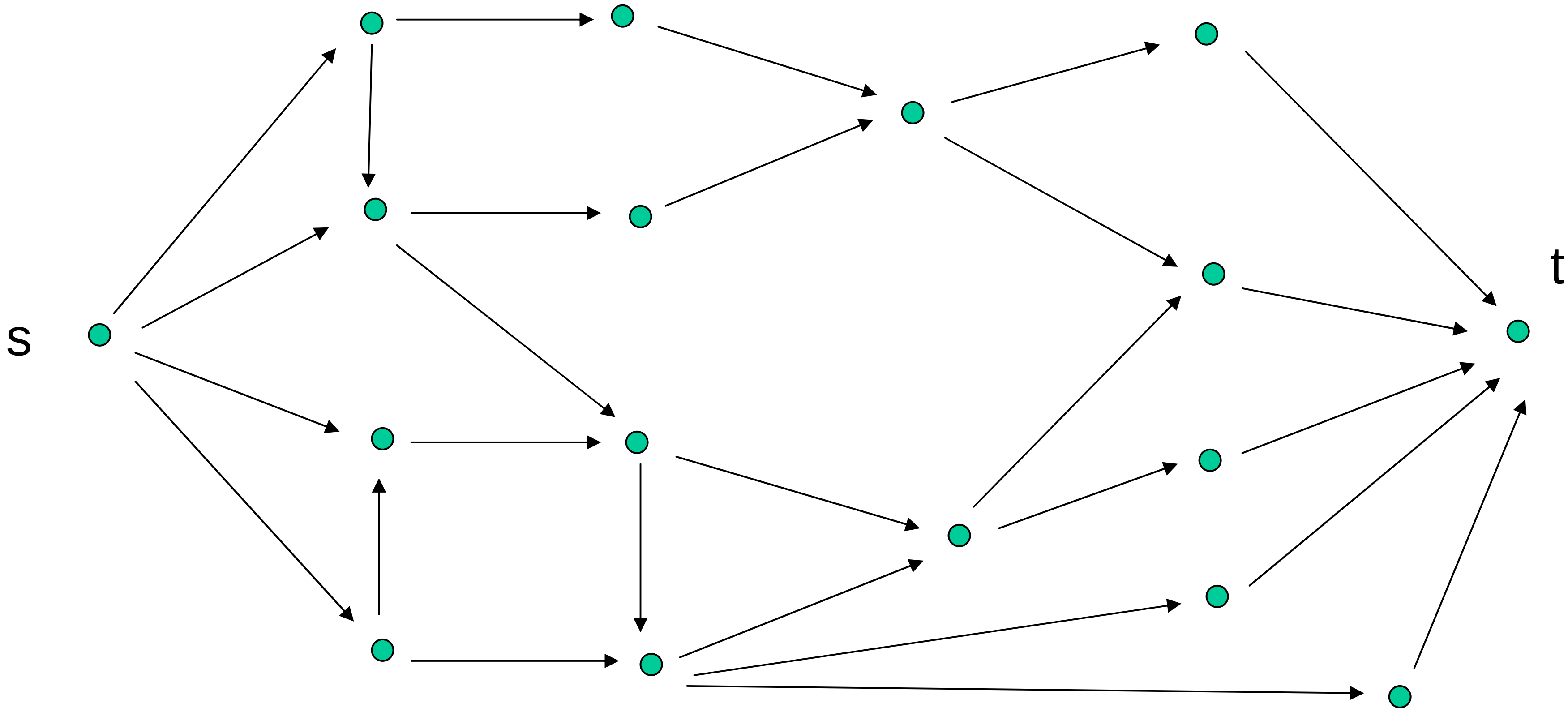
FLUJOS EN REDES CON COSTE

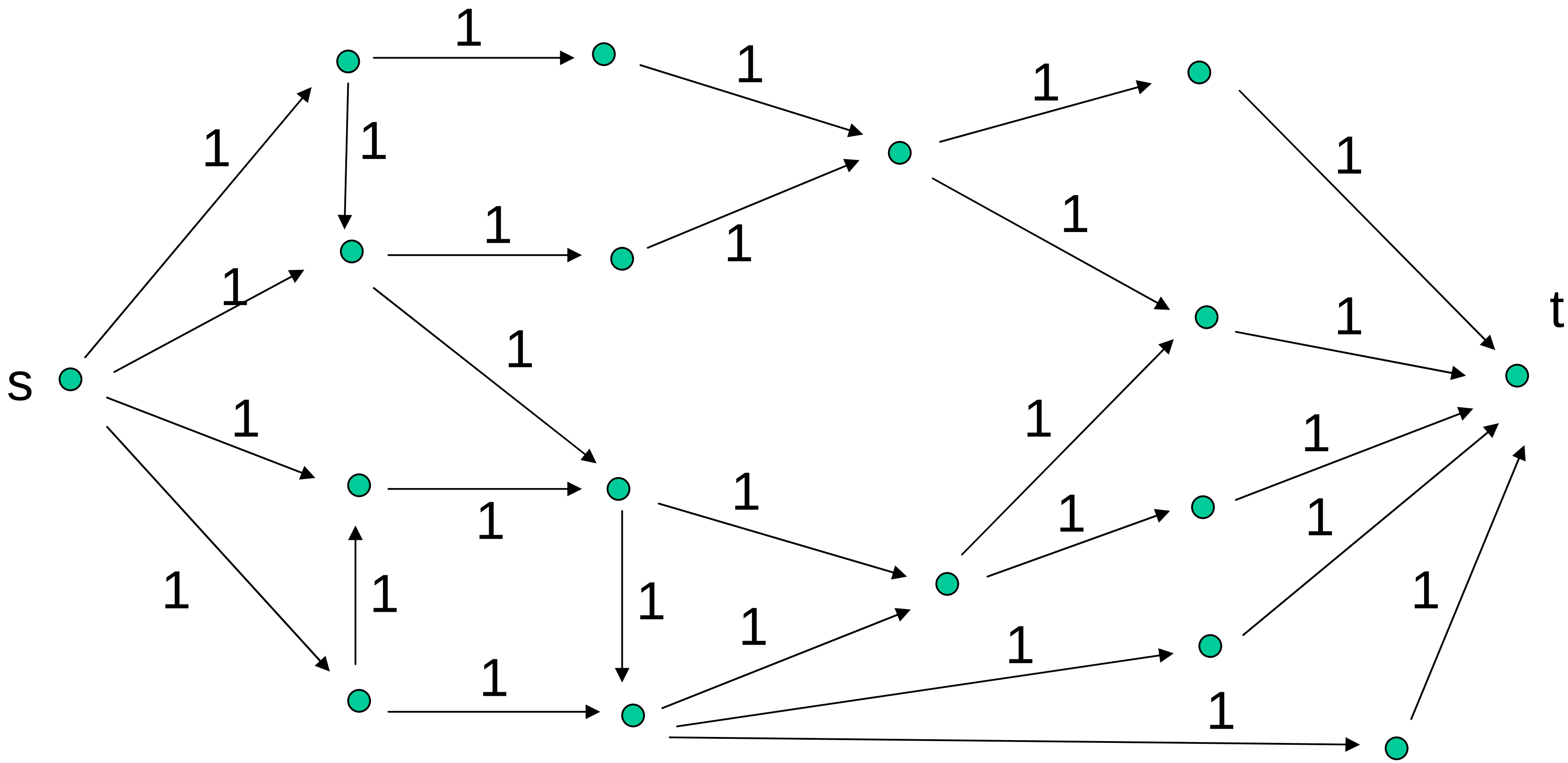
En cada arco de la red tenemos: CAPACIDAD limitada

COSTE por unidad de flujo



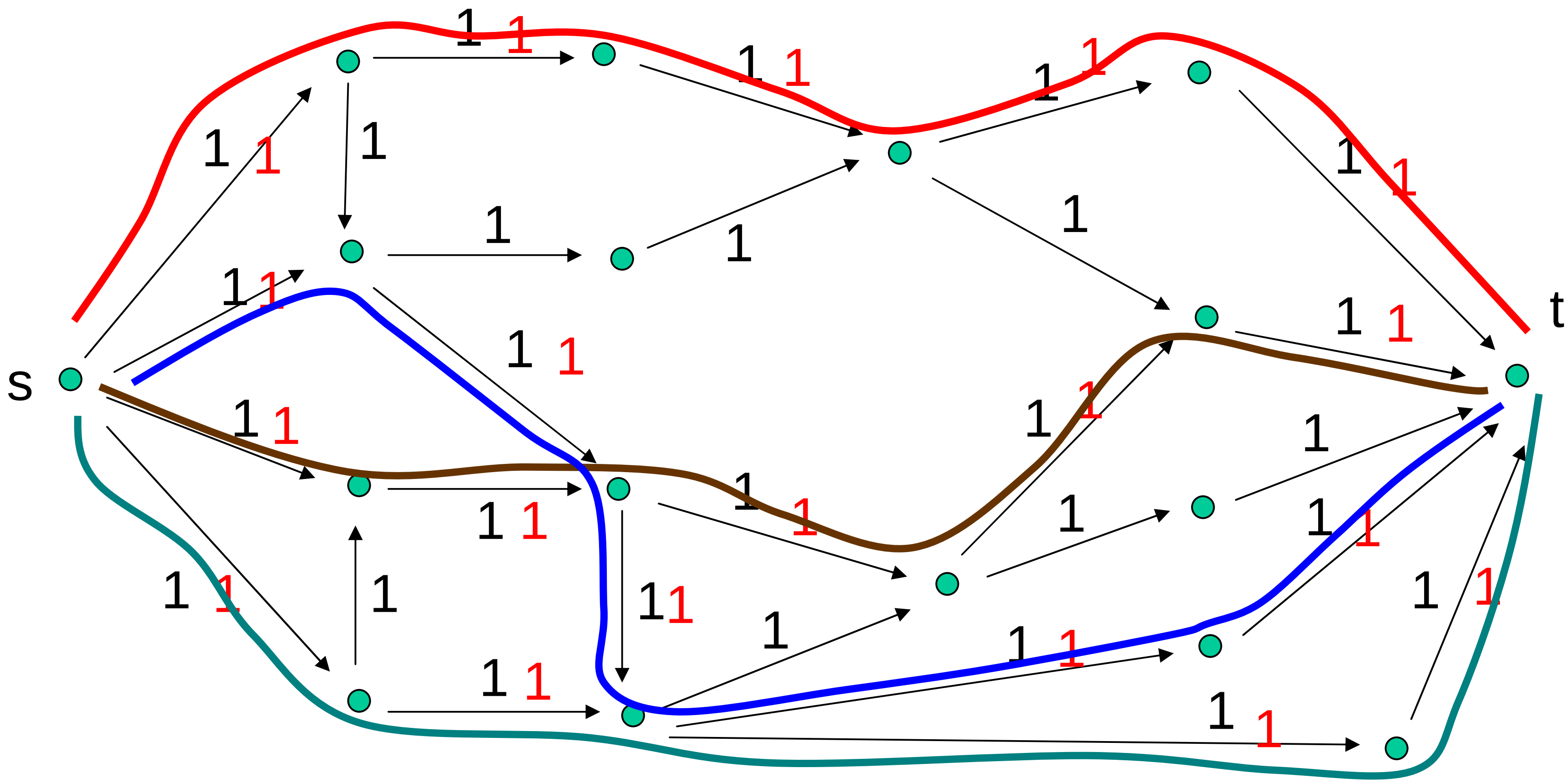
CAMINOS SIN ARISTAS COMUNES





Cap(x,y)=1

Flujo 0-1 $\quad f(x,y) \in \{0,1\}$



f flujo maximal → conjunto de caminos

val(f) → nº máximo de mensajeros

TEOREMA DE MENGER (versión aristas)

Si s y t son vértices de un grafo G, entonces el mínimo nº de aristas separando s de t es igual al máximo nº de caminos de s a t sin aristas comunes

Dem.

Basta aplicar el Teorema de Ford-Fulkerson a la red asociada N con capacidad uno en cada arista.

Conjunto de aristas separador en G = Corte en N

Número de aristas separadoras = Capacidad del corte

Camino de s a t en G = Unidad de flujo de s a t en N

Número de caminos sin aristas comunes = Valor de un flujo de s a t