Conectividad
Orientabilidad

Gregorio Hernández Peñalver

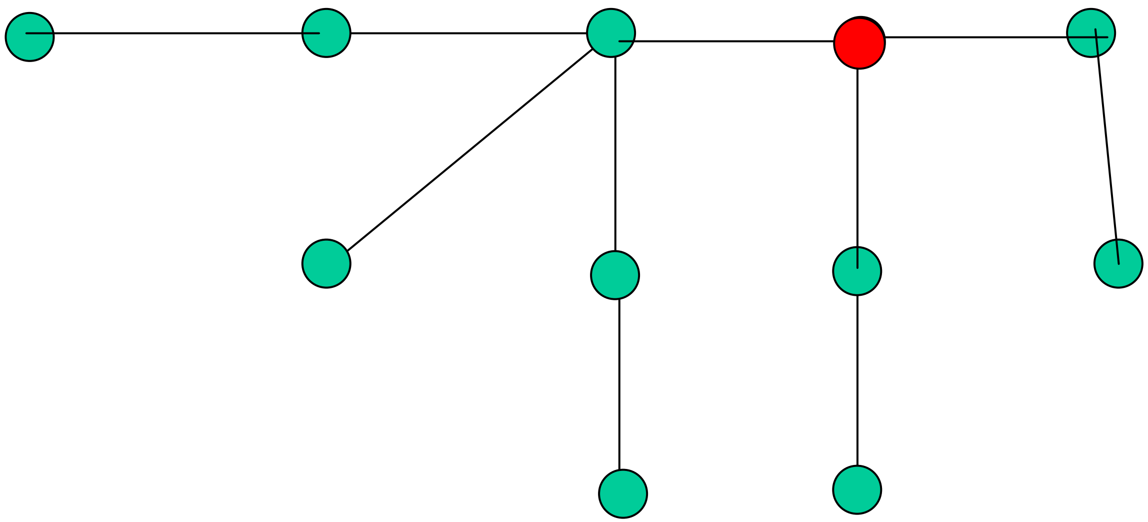
UPM

Matemática Discreta II

(MI)

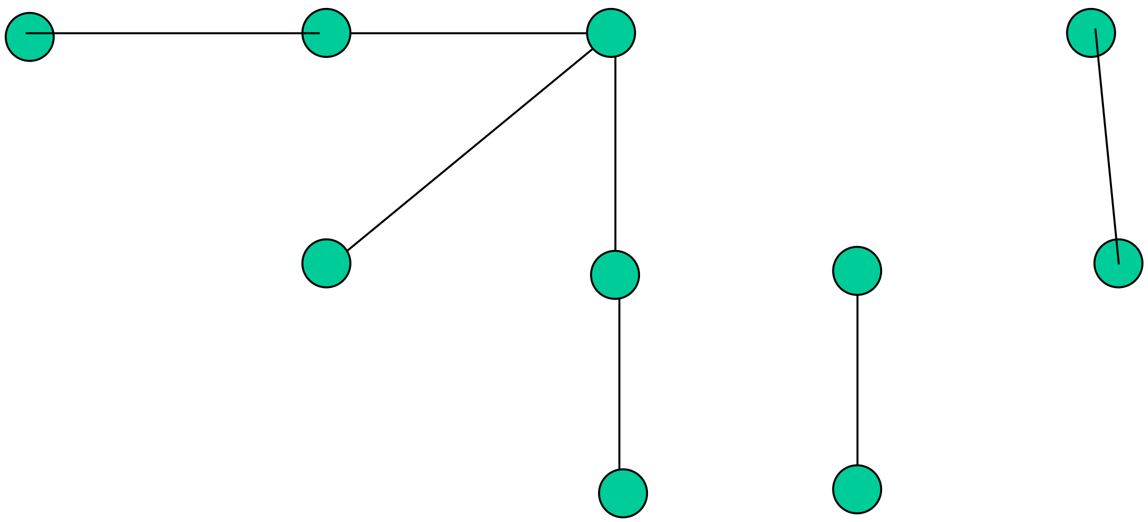
Para conectar lo más económico es un árbol generador

Pero …



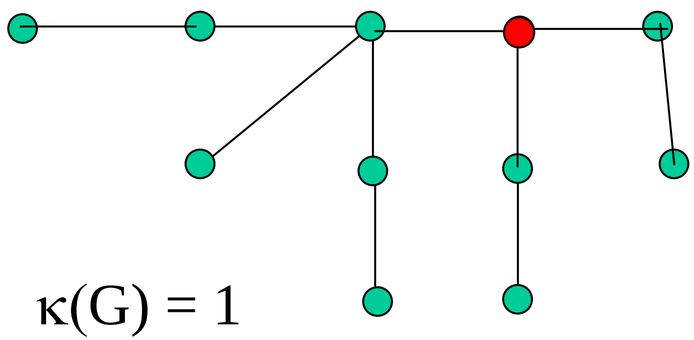
Para conectar lo más económico es un árbol generador

Pero …

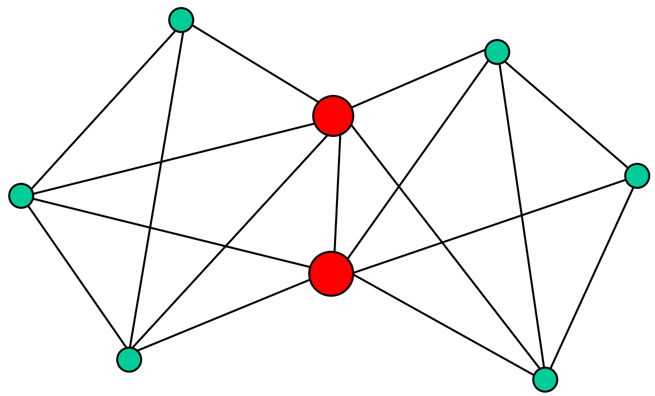


Conjunto separador (separating set, vertex cut)

$S \subset V$ tal que $G - S$ no es conexo



$\kappa(G) = 1$

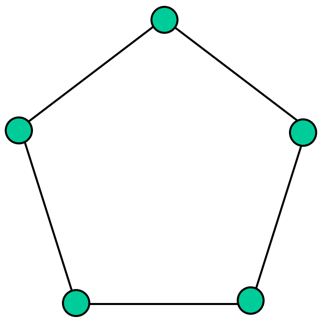


$\kappa(G) = 2$

La **conectividad** (o conectividad de vértices) de un grafo $G \neq K_n$

$$\boldsymbol{\kappa(G) = \min \{|S| \ / \ S \text{ es conjunto separador de } G\}}$$

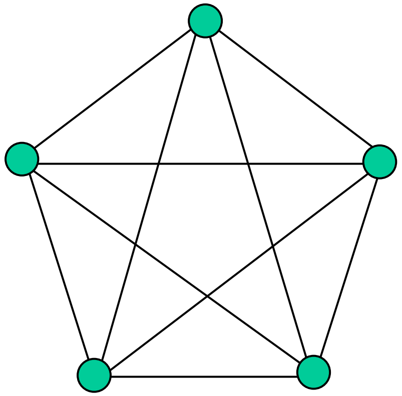
Un grafo es **k-conexo** si no existe un conjunto separador de tamaño k – 1, es decir, si $\kappa(G) \geq k$



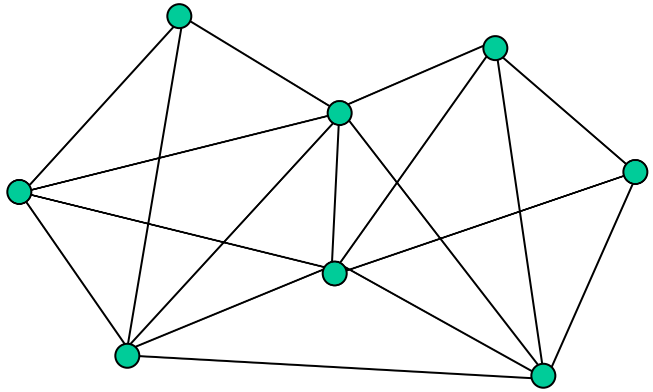
$\kappa(C_n) = 2$

C_n es 2-conexo

C_n es 1-conexo



K_n es (n-1)-conexo



$\kappa(H) = 3$

H es 3-conexo

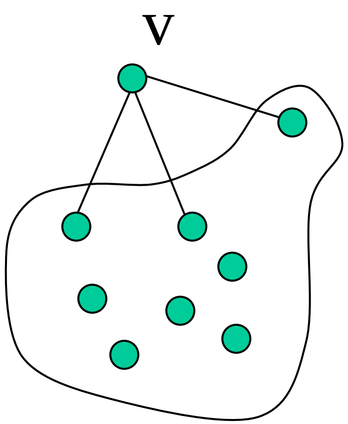
H es 2-conexo

H es 1-conexo

Un grafo es k-conexo si hay que eliminar al menos k vértices para que el grafo deje de ser conexo

Propiedades

1) Si δ es el grado mínimo de los vértices de G entonces $\kappa(G) \leq \delta$



2) Como $d(v) \geq \delta$ para todo v, se tiene que

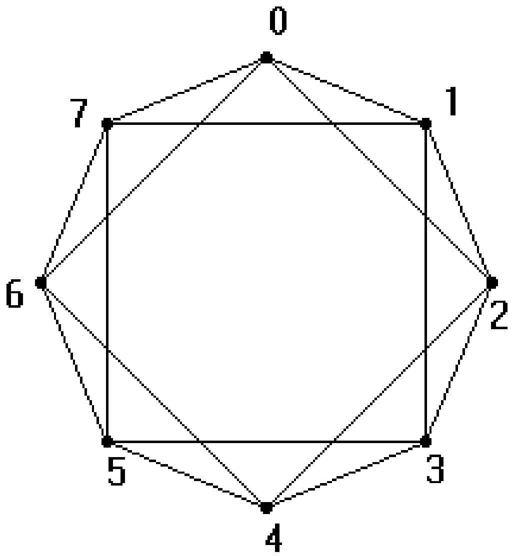
$$2q = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} \delta = n\delta \geq n\kappa \geq nk$$

Si G es k-conexo tiene como mínimo $\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ aristas

Un grafo de **Harary**, **H(k,n)**, es un grafo de n vértices, k-conexo y con $\lceil kn/2 \rceil$ aristas

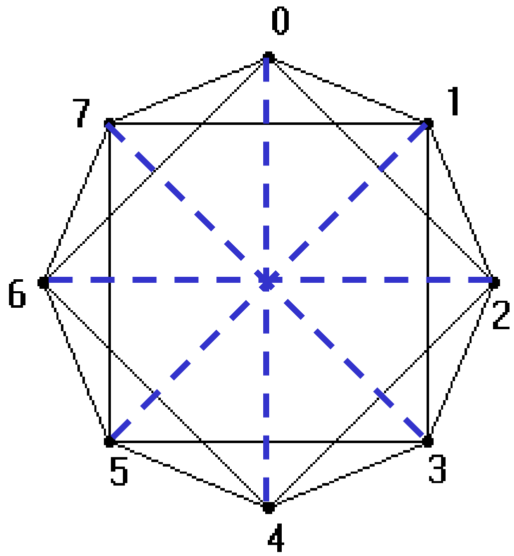
Construcción de H(k,n)

k par



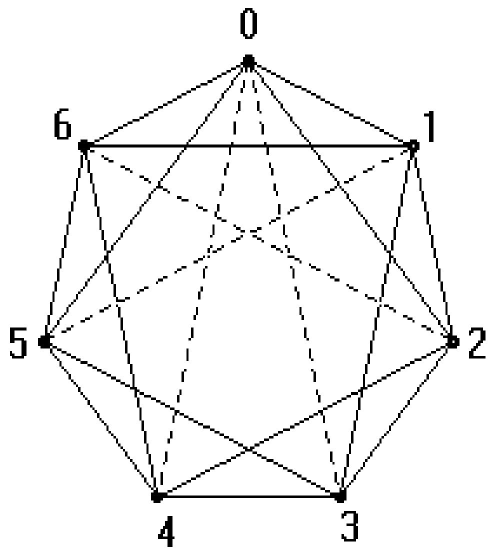
H(4,8)

k impar, n par



H(5,8)

k impar, n impar

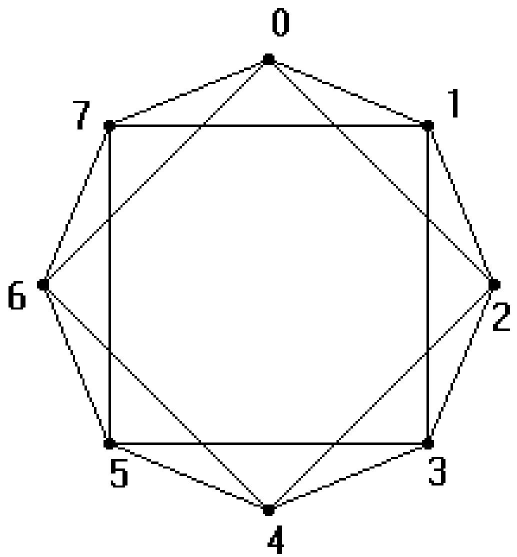


H(5,7)

Teorema

El grafo H(k,n) es k-conexo y contiene $\lceil kn/2 \rceil$ aristas

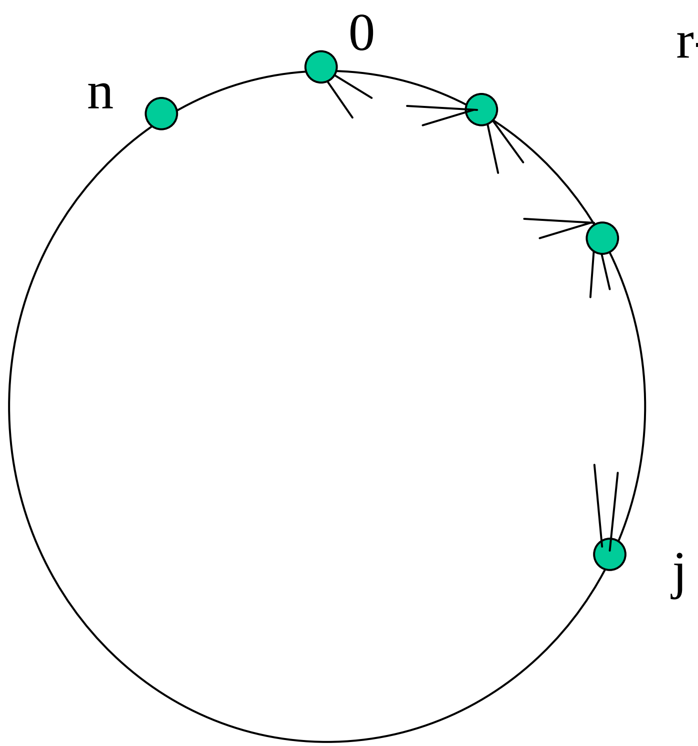
Caso k par, k=2r



El grado de cada vértice es k, luego q=kn/2.

Hay simetría en los vértices. Veremos que hay camino entre v_0 y v_j al suprimir 2r-1 vértices

Caso k par, k=2r



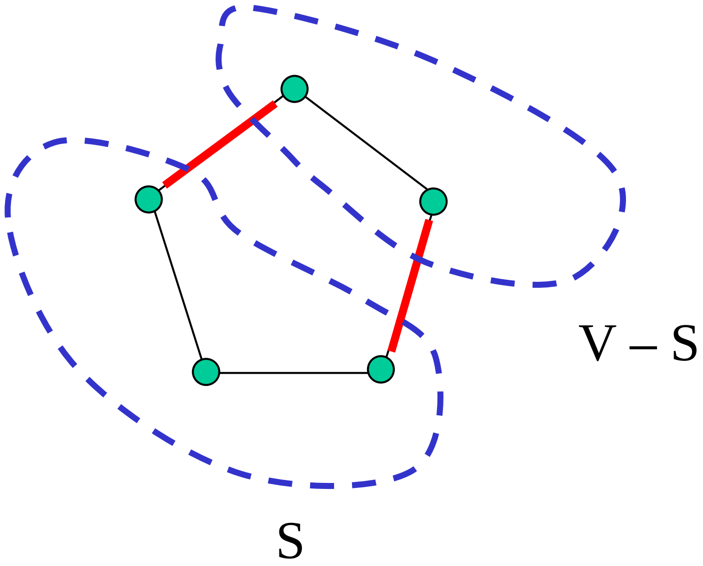
Borramos 2r-1 vértices.

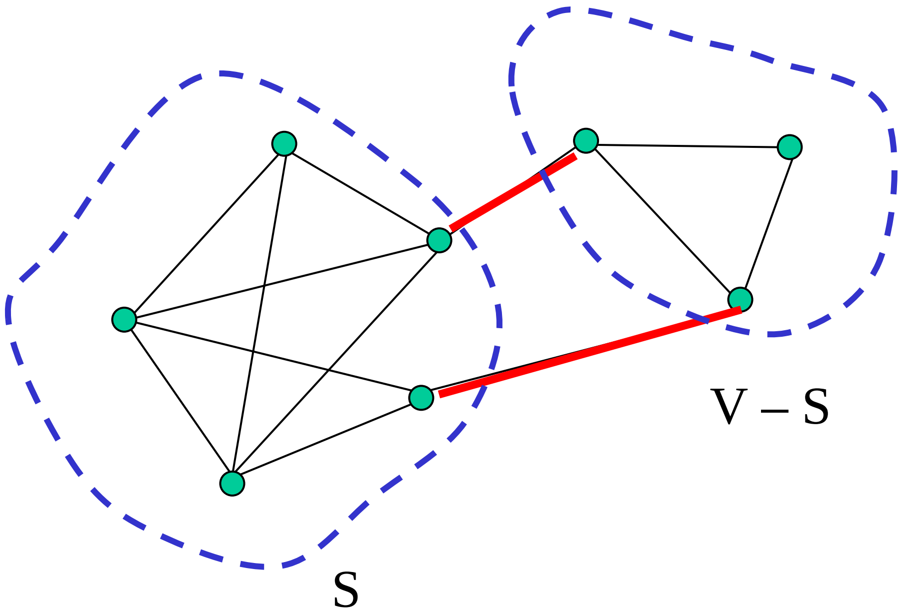
O bien en [0,j], o bien en [j,n] hay a lo más r-1 de los vértices borrados

Si es en [0,j], existe un camino de 0 a j que conecta todos los vértices que queden. Cada vértice tenía r vecinos a cada lado y sólo se han eliminado r-1 vértices, luego les queda un vecino a cada lado

Conjunto corte

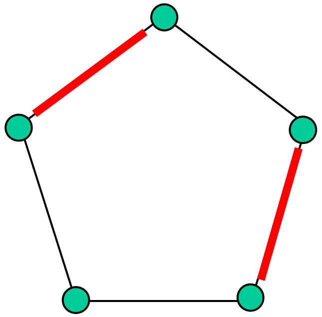
F = [S, V – S] ⊂ A(G)



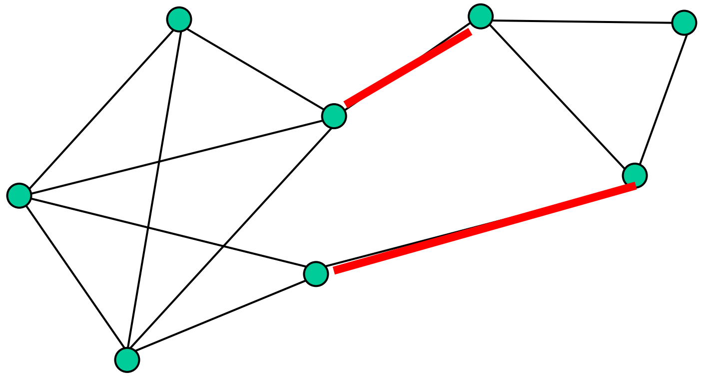


Conjunto corte

$F = [S, V - S] \subset A(G)$
$G - F$ no es conexo



$\lambda(C_n) = 2$

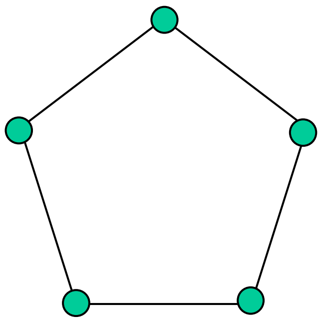


$\lambda(G) = 2$

La **conectividad por aristas** de un grafo G

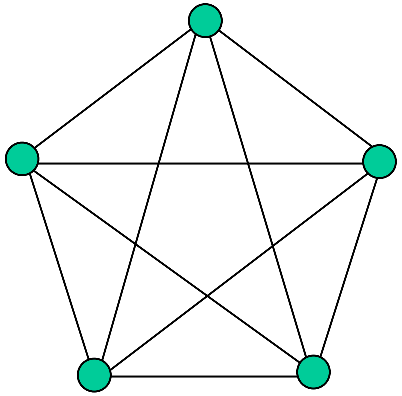
$$\boldsymbol{\lambda(G) = \min \{|F| \;/\; F \text{ es conjunto corte de } G\}}$$

Un grafo es j-**aristoconexo** si no existe un conjunto corte de tamaño j – 1, es decir, si $\lambda(G) \geq j$

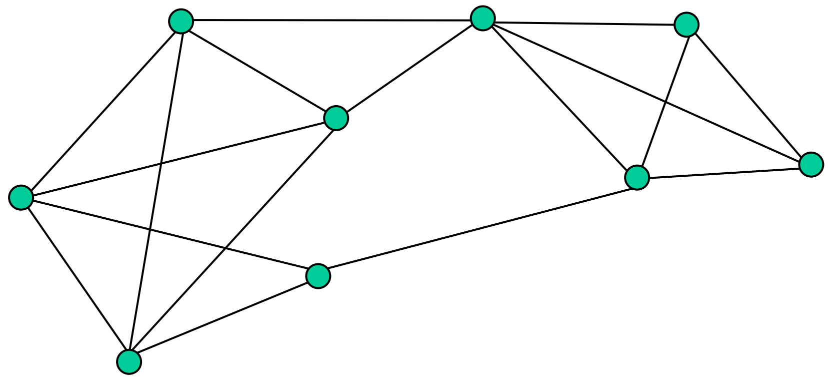


$\kappa(C_n) = 2$

C_n es 2-aristoconexo
C_n es 1-aristoconexo



K_n es (n-1)-aristoconexo

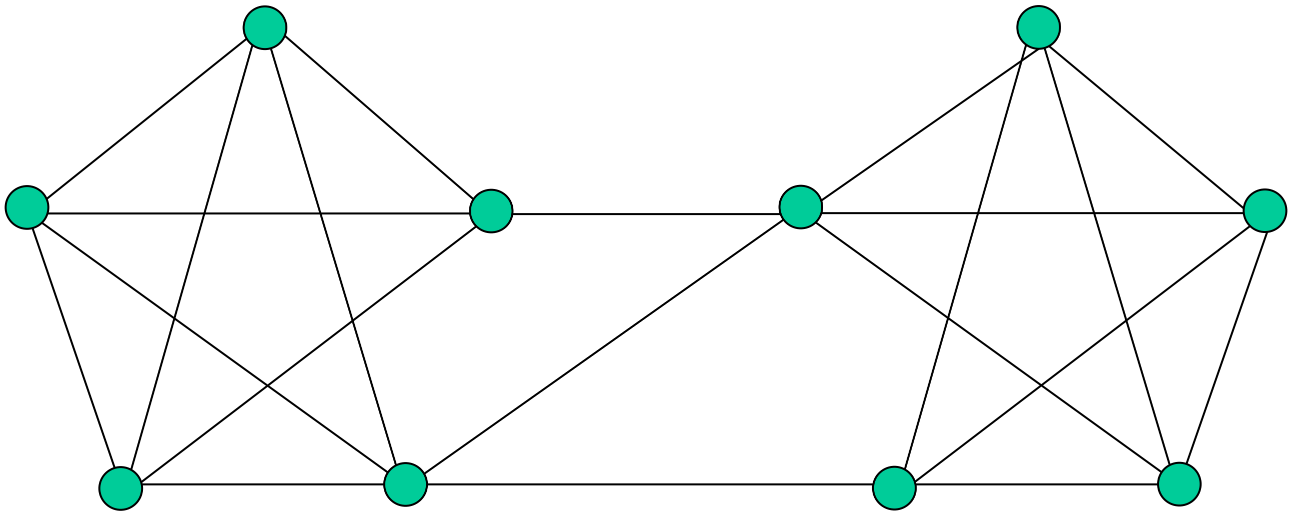


$\lambda(H) = 3$
H es 3-aristoconexoconexo
H es 2-aristoconexo

Un grafo es j-aristoconexo si hay que eliminar al menos j aristas para que el grafo deje de ser conexo

Teorema

Si G es un grafo simple entonces $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$



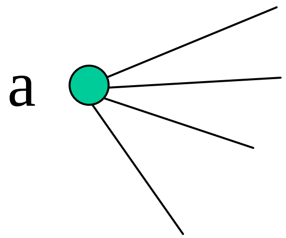
$\kappa(G) = 2$ $\lambda(G) = 3$ $\delta(G) = 4$

Teorema

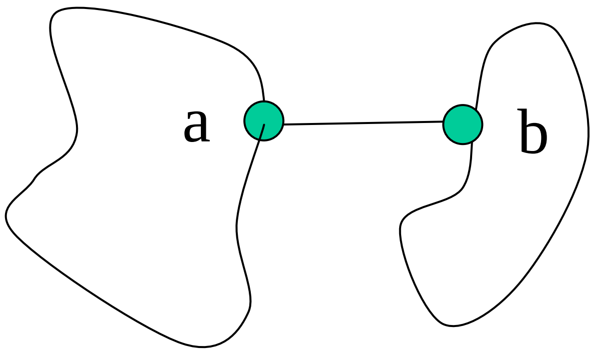
Si G es un grafo simple entonces $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Dem

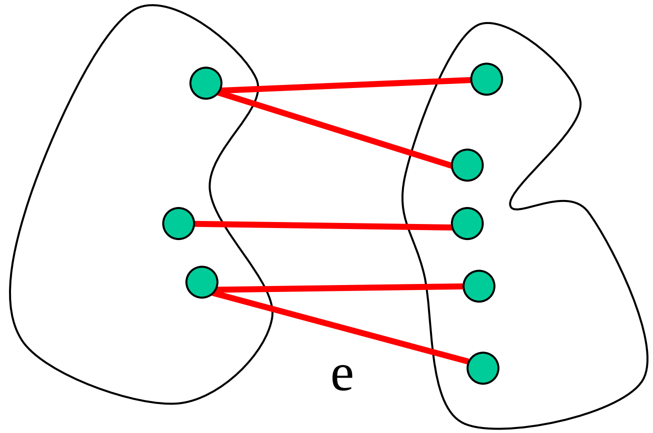
Si el grado mínimo se alcanza en el vértice a, $d(a)=\delta$, es claro que eliminando todas las aristas incidentes con a obtenemos un grafo disconexo. Luego $\lambda(G) \leq \delta(G)$.



Si G no es conexo entonces $\kappa(G)=\lambda(G)=0$
Si G es conexo y $\lambda(G)=1$, entonces tiene una arista puente ab, con lo que G-{a} es disconexo y $\kappa(G)=1$

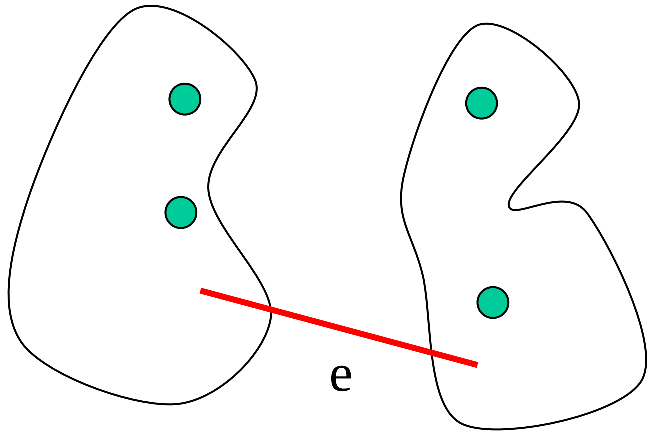


Si G es conexo y $\lambda(G)=p>1$, consideramos A', un conjunto corte (aristas cuya supresión desconecta G), y e=uv una arista de A'.



El grafo G – (A'– e) es un grafo con al menos una arista puente (la propia e).

Tomamos de cada arista de A' –e uno de sus extremos que no sea ni u ni v, formando así un conjunto de vértices U de cardinal p–1. En el grafo G'=G–U faltan todas las aristas de A' –e.

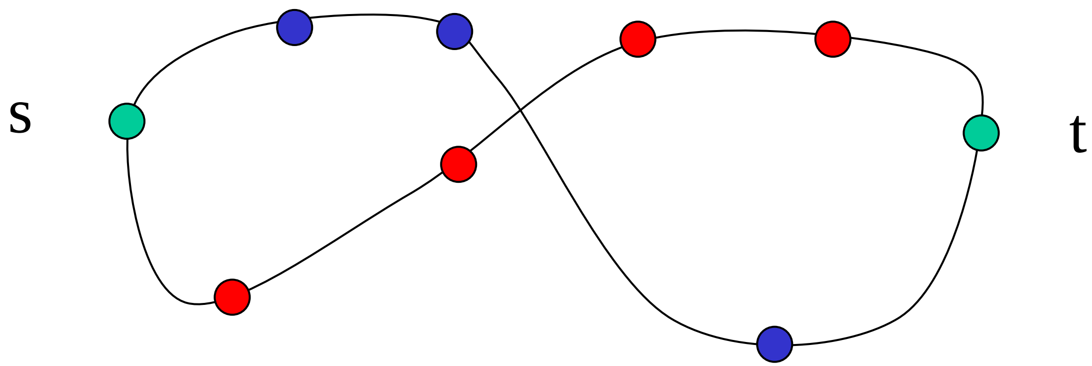


Si G' es disconexo entonces $\kappa(G) \leq p-1= \lambda(G) -1$

Si G' es conexo, entonces tiene un puente uv. Así el grafo G''=G' –{u} es disconexo, luego $\kappa(G) \leq p= \lambda(G)$

Teorema de Whitney

Sea G un grafo simple con n>2, entonces
G es un grafo 2-conexo ⇔ Para cada par de vértices distintos s, t de G hay dos caminos en G de s a t cuyos vértices internos son distintos (caminos internamente disjuntos)

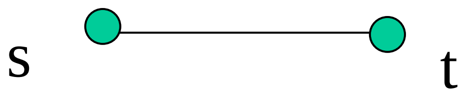


Teorema de Whitney

$\Leftarrow$) Si para cada par s,t hay dos caminos que los conectan resulta que G es conexo. Falta probar que no hay vértices-corte. Si v fuera vértices-corte existirían x,z tales que v estaría en todo camino de x a z, en contradicción con la hipótesis.

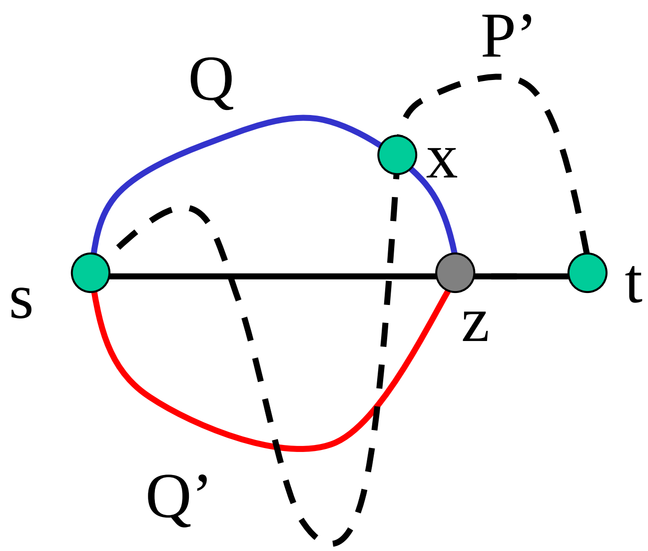
$\Rightarrow$) Supongamos que G es 2-conexo. Dados s,t probaremos por inducción sobre d(s,t) que hay dos caminos internamente disjuntos desde s hasta t.

Si d(s,t)=1 existe la arista st que no es puente (por la 2-conexión), luego existe otro camino de s a t



Si d(s,t)=d >1 suponemos válida la hipótesis de inducción. Es decir, que si a, b es un par de vértices con d(a,b)<d entonces hay dos camino disjuntos desde a hasta b.

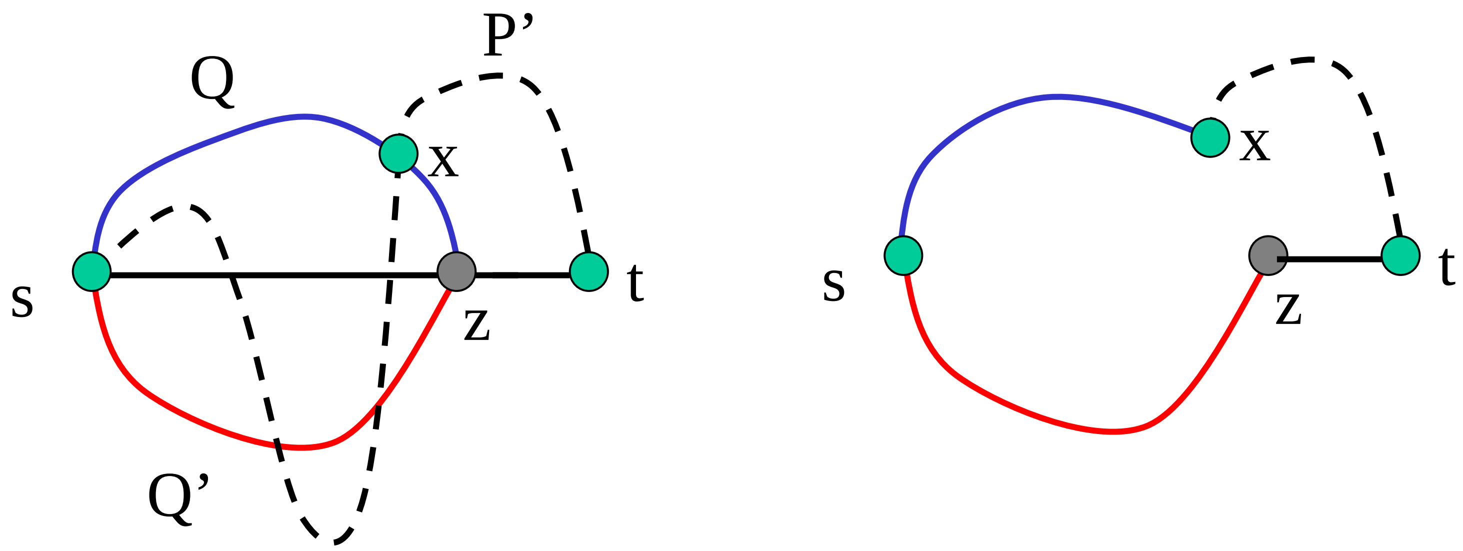
Sea P el camino s--t de longitud d y sea z el vértice anterior a t en P. Así d(s,z)=d-1 y hay dos caminos s--z internamente disjuntos Q y Q'.



Como G es 2-conexo, z no es vértice-corte y G-{z} es conexo. Así existe un camino P' en G-{z} desde s hasta t que no pasa por z

x es el último vértice de P' que pertenece a Q ó Q'

Si $x \in Q$ la figura muestra los dos caminos disjuntos P_1 y P_2 de s a t que podemos construir

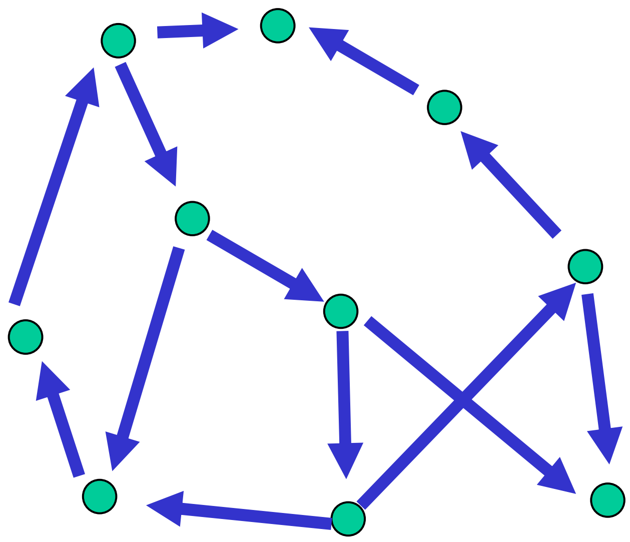


Teorema

Sea G un grafo simple con n>2, entonces son equivalentes

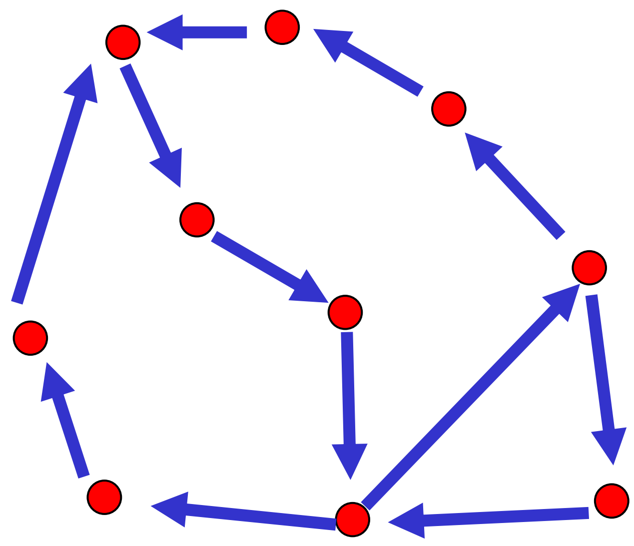
(1) G es un grafo 2-conexo
(2) Para cada par de vértices distintos s, t de G hay dos caminos en G de s a t cuyos vértices internos son distintos (caminos internamente disjuntos)
(3) Para cada par de vértices s, t de G hay un ciclo que pasa por ellos.
(4) Para cada par de aristas de G hay un ciclo de G que las contiene.

CONEXIÓN EN DIGRAFOS



DÉBILMENTE CONEXO

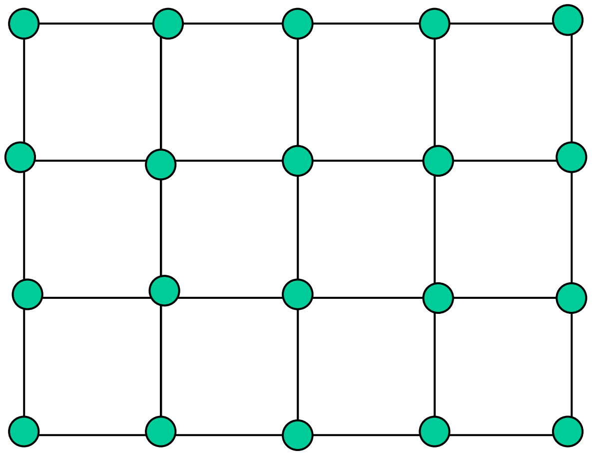
El grafo subyacente es conexo

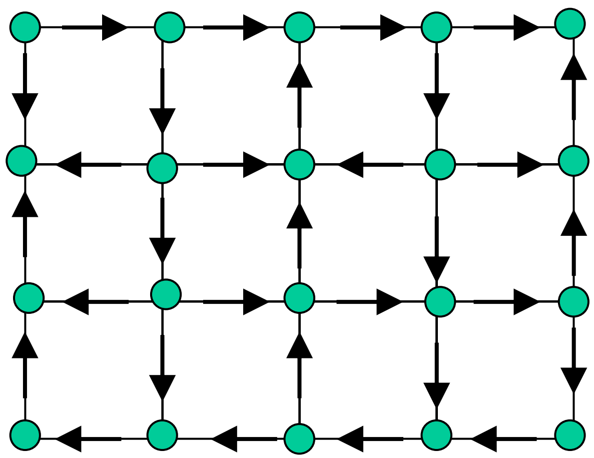


FUERTEMENTE CONEXO

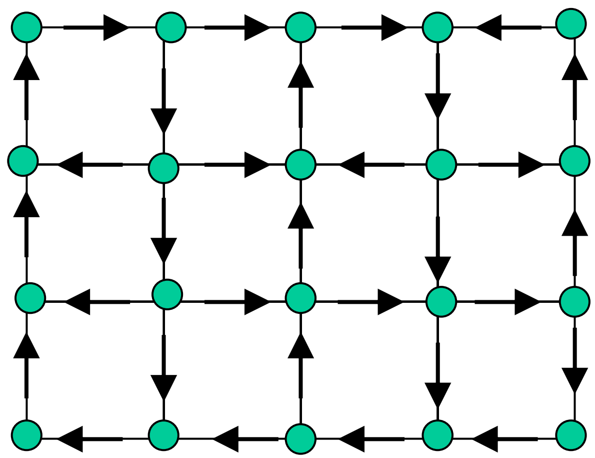
Para todo par de vértices u, v
hay camino dirigido de u hasta v

Asignación de sentido al tráfico en las calles de un barrio



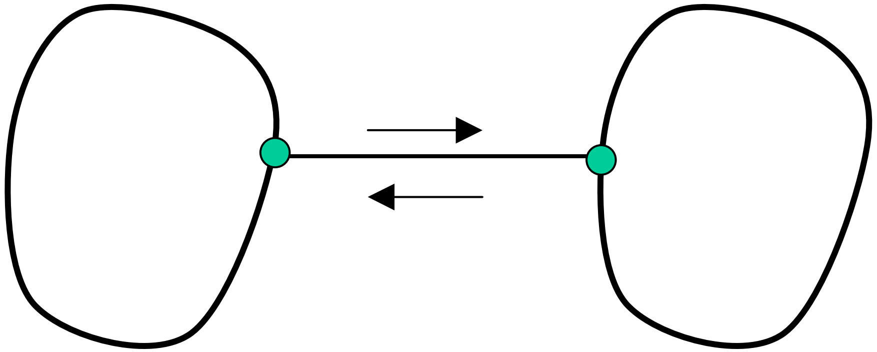


Un grafo es **orientable** si podemos asignar a cada una de sus aristas un sentido, de forma que el digrafo resultante sea fuertemente conexo



Condiciones para que un grafo sea orientable

- conexo
- ausencia de puentes

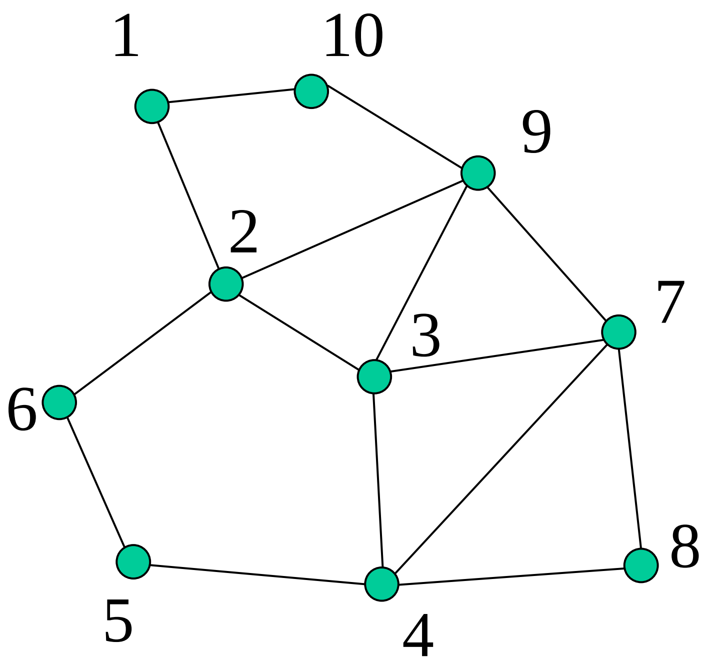


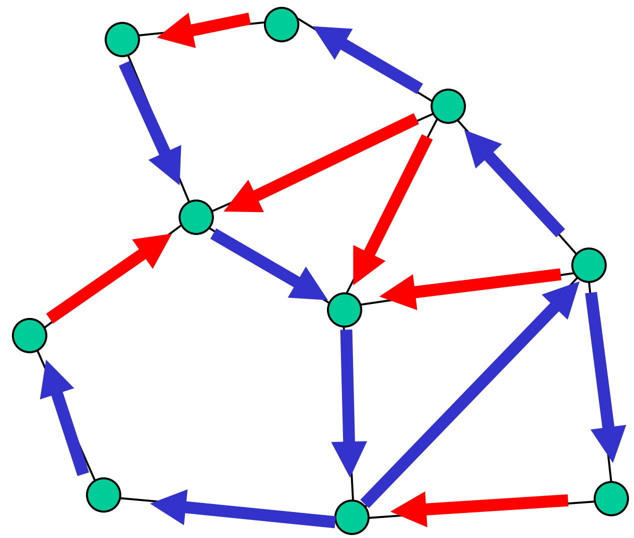
Teorema (Robbins)

Un grafo es orientable si y sólo si es conexo y no tiene puentes

Algoritmo para orientar un grafo conexo y sin puentes

Estrategia. Construir un árbol T de búsqueda en profundidad con raíz en un vértice cualquiera x. Orientar las aristas de T de la raíz a las hojas. Orientar el resto de aristas de modo inverso, de etiqueta mayor a etiqueta menor





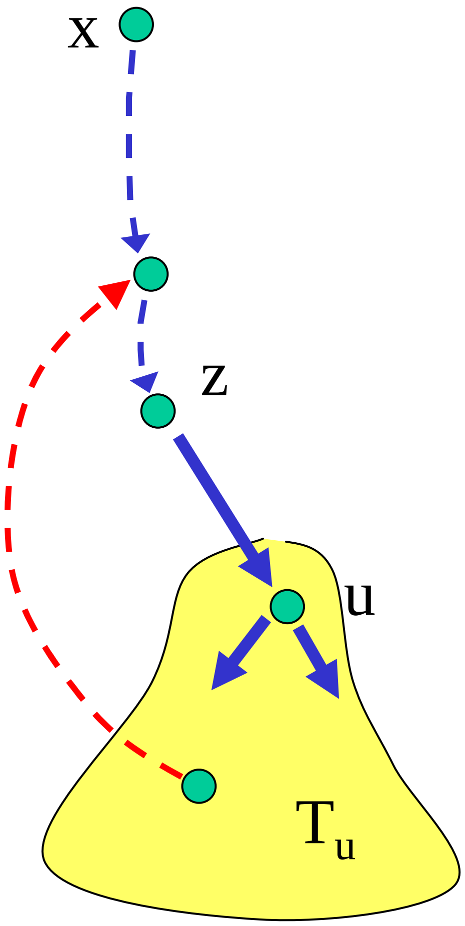
Complejidad O(q)

Algoritmo para orientar un grafo conexo y sin puentes

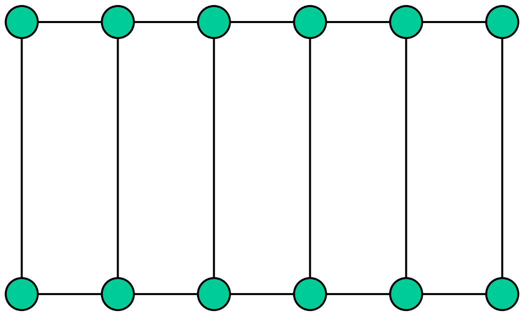
Justificación. Debemos demostrar que el digrafo obtenido con el algoritmo es fuertemente conexo, es decir, existe camino de u hasta v para cualquier par de vértices (u,v)

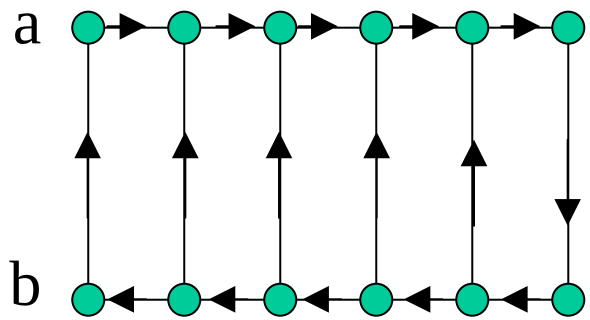
Por construcción SÍ hay camino desde x a cualquier vértice v. Falta justificar la existencia de camino de u hasta x.

Idea clave: Si zu es la arista (azul) en el árbol DFS con extremo final u, como zu NO es puente existe una arista "roja" ab, tal que a $\in T_u$ y b es un ascendiente de u

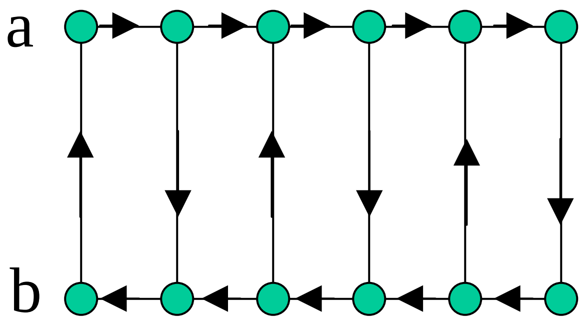


G





D



D'

$\text{Dist}_D(a,b)=11$

$\text{Dist}_{D'}(a,b)=3$

Orientar de forma óptima

Orientar G de forma que, en promedio, d(a,b) sea lo más pequeña posible

Orientar G de forma que se minimice $\max\{d(a,b) \ / \ a,b \in V(G)\}$ (el diámetro de D)

Orientar G de forma que se minimice $\max\{d_G(a,b) - d(a,b) \ / \ a,b \in V(G)\}$