COMBINATORIA

Gregorio Hernández

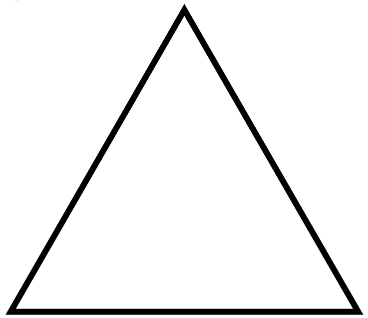
UPM

Matemática Discreta I

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio de las cajas (del palomar o de Dirichlet)
"Si tenemos **m** objetos que se distribuyen en **n** cajas, m>n, entonces una de las cajas recibe al menos dos objetos"

- En un conjunto de 13 personas, al menos dos han nacido en el mismo mes
- ¿Hay dos madrileños con el mismo número de cabellos?
- Se eligen 5 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1. Comprobar que siempre hay 2 que distan entre sí a lo sumo 1/2



- En cualquier conjunto de 8 enteros, siempre hay dos cuya diferencia es múltiplo de 7
- Sea A un conjunto de 23 enteros. Comprobar que siempre hay un subconjunto de A cuya suma es múltiplo de 23

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio de las cajas generalizado

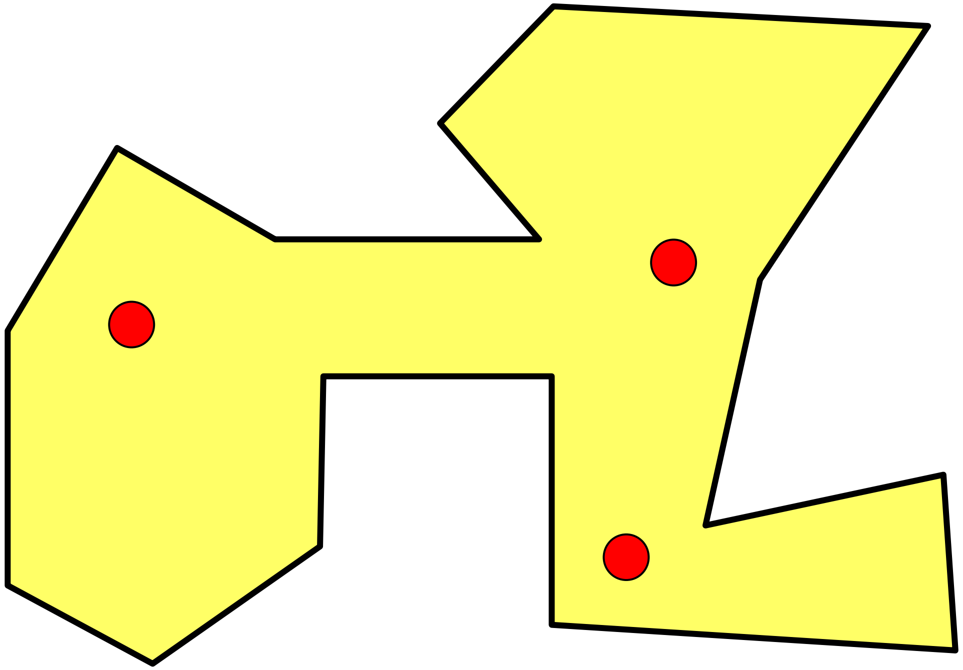
"Si se distribuyen **m** objetos en **n** cajas, entonces hay una caja que recibe al menos $\lceil m/n \rceil$ objetos; y hay una caja que recibe, a lo sumo, $\lfloor m/n \rfloor$ objetos."

- Si se resuelven 29 ejercicios en una semana, entonces habrá un día en el se resuelvan al menos 5 ejercicios.
  Y habrá un día en el que se resolvieron a lo sumo 4 ejercicios.
- En clase hay 40 alumnos. Podemos asegurar que al menos 4 han nacido en el mismo mes

- Todo recinto poligonal de 29 lados se puede vigilar con 10 guardias
- En general, todo recinto poligonal de n lados se puede vigilar

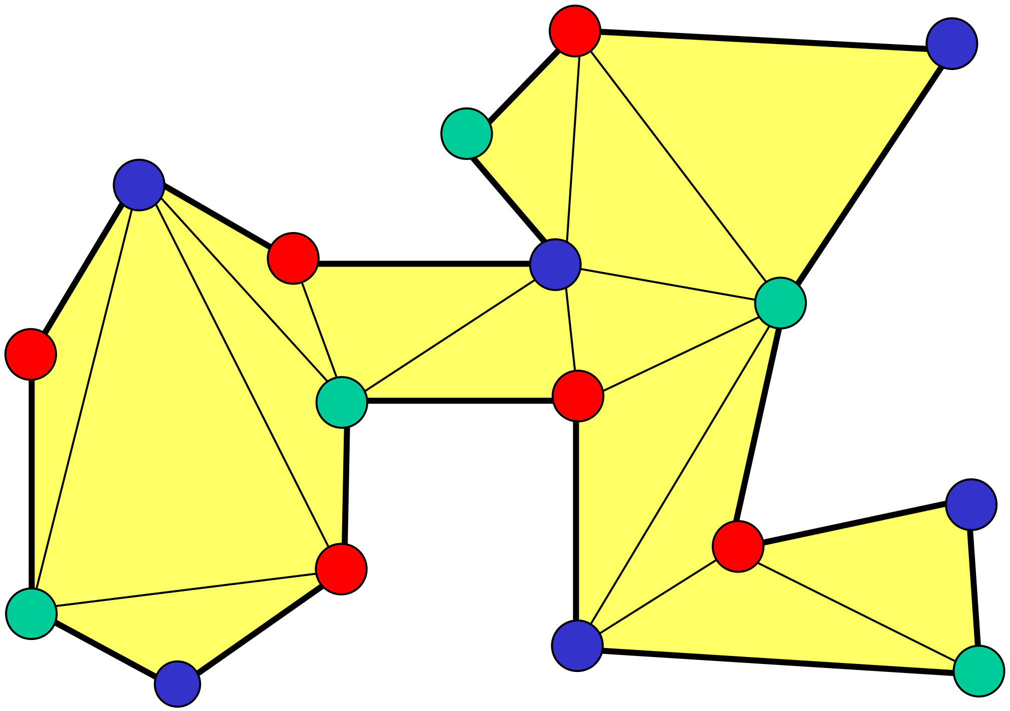
  con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias

Galerías de Arte (ART GALLERY PROBLEM)



Dado n, ¿cuál es el número de guardias suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados?

Galerías de Arte



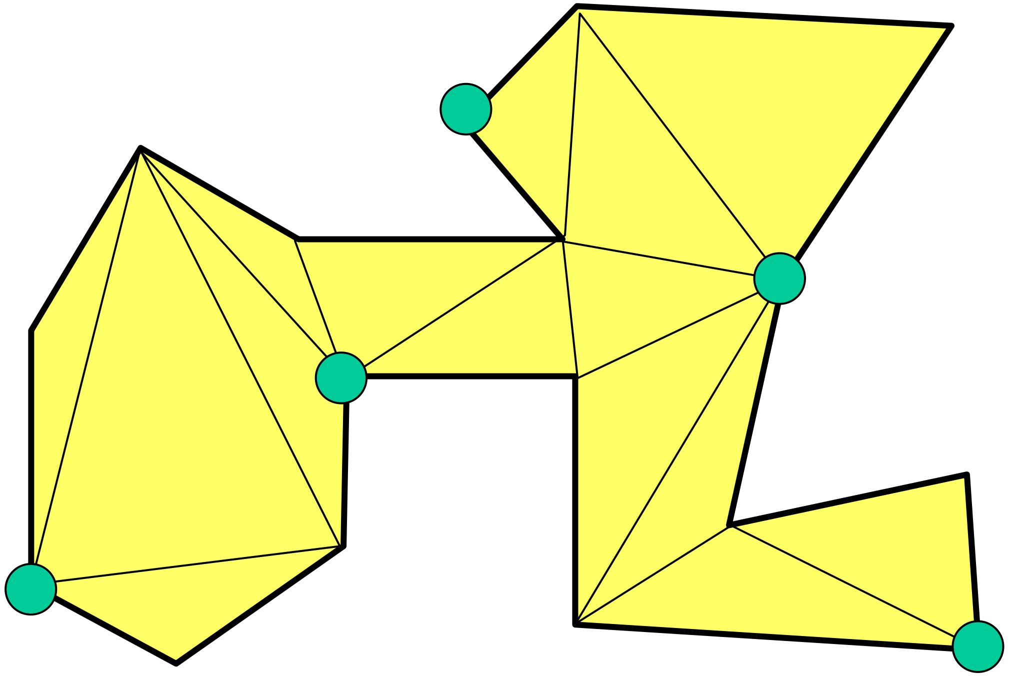
R + A + V = n

1) Triangular el polígono

2) Colorear los vértices con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



$$R + A + V = n$$

El verde es el color menos utilizado. Como máximo estará en

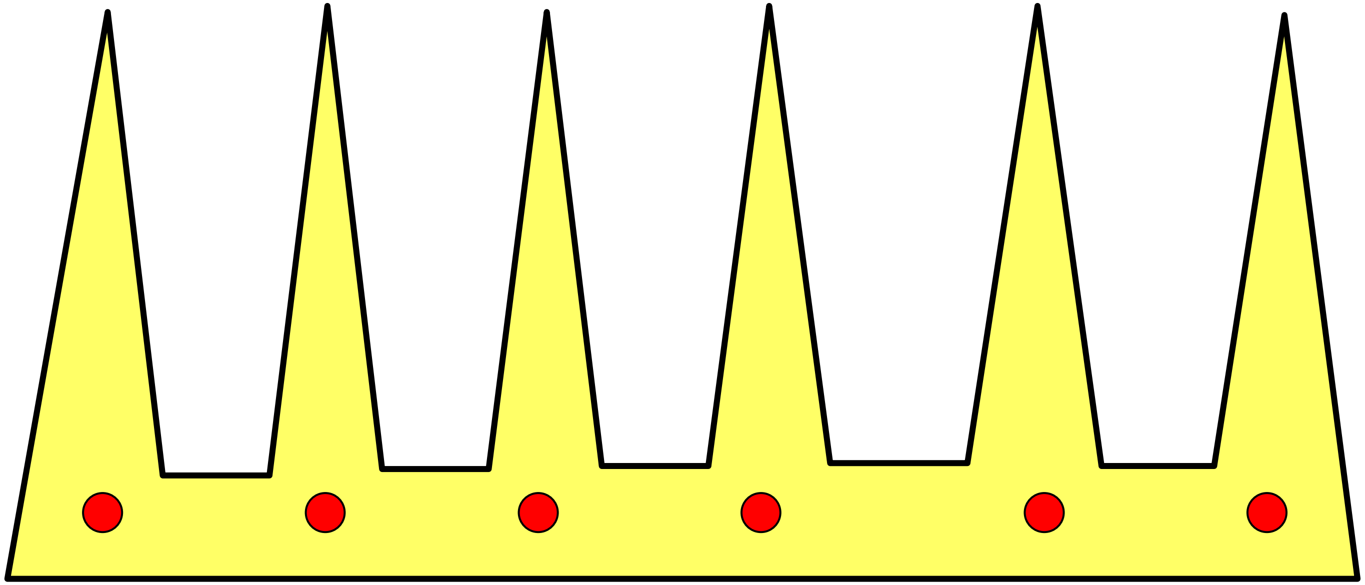
$$V \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

1) Triangular el polígono

2) Colorear el grafo con tres colores

3) Colocar guardias en el color menos utilizado

Galerías de Arte



Teorema

$\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono de n lados

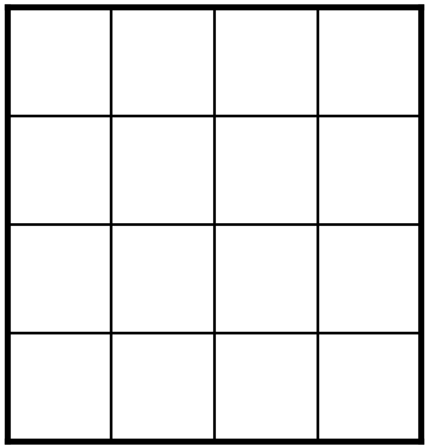
PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio de adición

Si un proceso de recuento puede descomponerse en 2 o más sucesos o casos mutuamente excluyentes, E_1, E_2, ... y el suceso E_1 se realiza de n_1 maneras, el suceso E_2 se realiza de n_2 maneras, ... , entonces el número de formas en que se realiza al menos uno de los sucesos o casos E_1, E_2, ... , es la suma $n_1 + n_2 + ...$

"Si A y B son conjuntos finitos, no vacíos, disjuntos entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$"

- ¿Cuántos alumnos llevan lentillas o gafas?
- ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?
  - De una pieza
  - De 4 piezas



PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio del producto

Si un proceso de recuento puede describirse como una sucesión de m pasos independientes entre sí, P_1, P_2, ... , P_m, con n_1 resultados posibles en el paso 1, n_2 resultados posibles en el paso 2, ... , n_m resultados posibles en el paso m, entonces el número total de resultados posibles en el proceso es

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$$

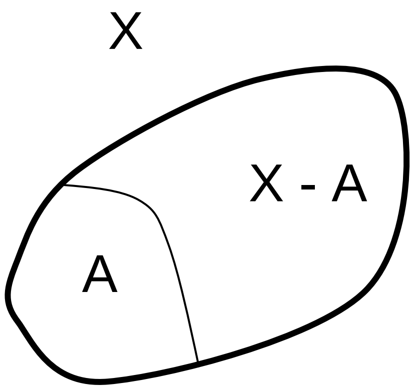
- ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras de LAPIZ ?
- ¿Cuántas son palíndromos?
- ¿Cuántos divisores tiene el número 64800?

- Se lanzan cuatro dados de distintos colores. ¿Cuántos resultados distintos se pueden producir? ¿Y si los dados son iguales?
- ¿Cuántos enteros hay de 4 cifras con sólo un ocho?

PRINCIPIOS BÁSICOS DE RECUENTO

Principio del complementario

"Si X es un conjunto finito, $A \subset X$, entonces entonces $|X - A| = |X| - |A|$".

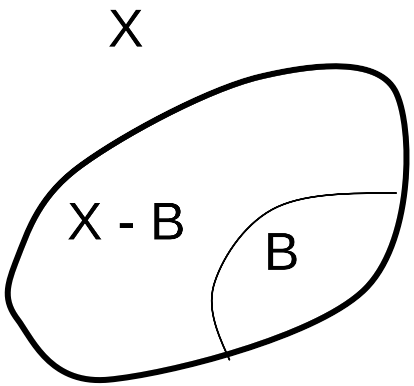


Se eligen 4 cartas de una baraja de 40
(con reemplazamiento)

(1) ¿En cuántas extracciones hay alguna repetición?

X = conjunto de todas las extracciones posibles

A = conjunto de extracciones sin repetición



(2) ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey?

X = conjunto de todas las extracciones posibles

B = conjunto de extracciones sin reyes

SELECCIONES

selección de **k objetos diferentes** elegidos entre los elementos de un conjunto de **n objetos distintos.**

LISTAS

Sea X un conjunto de **n** objetos diferentes. Una selección **ordenada** de **k** elementos de X se llama una **lista** de tamaño **k**.

El nº de listas de tamaño k es:

$$V_{n,k} = n(n-1)\,(n-2)....\,(n-k+1)$$

Cuando k=n hablamos de **permutaciones** de **n** elementos, $P_n = n!$

- ¿Cuántas palabras de 6 letras distintas se pueden formar con las letras de un alfabeto de 27 letras?
- ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?

SELECCIONES

selección de **k objetos diferentes** elegidos entre los elementos de un conjunto de **n objetos distintos.**

LISTAS con elementos repetidos

Son las selecciones **ordenadas** de **k** objetos elegidos entre **n** permitiendo **repeticiones.**

El nº de estas listas con repetición es: $V^R_{n,k} = n^k$

Es el nº de aplicaciones de A en B, siendo $|A|=k$, $|B|=n$

- ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar con las letras de un alfabeto de 27 letras?
- ¿Cuántos números de 4 cifras tienen todas sus cifras impares?

COMBINACIONES

Sea X un conjunto de **n** objetos diferentes. Una **combinación** de tamaño **k** es una selección **no ordenada** de **k** elementos de X.

El nº de combinaciones de k objetos elegidos entre n es:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este nº se designa con la notación $\binom{n}{k}$ y es el nº de subconjuntos de X de tamaño **k**

- Los 40 alumnos de una clase eligen 3 representantes. ¿Cuántos resultados diferentes puede haber?
- ¿Cuántas listas de ceros y unos de longitud 7 contienen exactamente 5 veces el cero?
- ¿Cuántos números de 4 cifras distintas tienen todas ellas en orden decreciente?

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Una combinación con repetición de tamaño **k** es una selección **no ordenada** de **k** objetos elegidos entre **n** tipos diferentes de objetos, habiendo una cantidad ilimitada de cada tipo.

En una heladería hay helados de 3 sabores: fresa, vainilla y chocolate. Se compran 4 helados. ¿Cuántas compras diferentes podemos hacer?

FFVF y FFFV son la misma compra

1 significa helado
0 significa cambio de sabor

FFFV $\longrightarrow$ 111010
FVVC $\longrightarrow$ 101101
VVVC $\longrightarrow$ 011101
FCCC $\longrightarrow$ 100111
FVCC $\longrightarrow$ 101011
VCCC $\longrightarrow$ 010111
…. ….

Hay tantas compras como cadenas con 2 ceros y 4 unos

$$\binom{6}{4}$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Una combinación con repetición de tamaño **k** es una selección **no ordenada** de **k** objetos elegidos entre **n** tipos diferentes de objetos, habiendo una cantidad ilimitada de cada tipo.

En una heladería hay helados de n sabores.
Se compran k helados. ¿Cuántas compras diferentes podemos hacer?

Cada compra se codifica con una cadena de ceros y unos.
Hay k unos (los helados) y n – 1 ceros (los cambios de sabor)

El número de compras diferentes es $C^R_{n,k} = \binom{n-1+k}{k}$

Una combinación con repetición puede describirse diciendo que elegimos x_1 objetos de tipo 1, x_2 objetos de tipo 2, ..., x_n objetos de tipo n.
Cada uno de los enteros $x_1,x_2,...,x_n$ es no negativo y
$x_1 + x_2 +...+ x_n = k$
Así pues cada combinación con repetición de tamaño **k** es una solución entera y no negativa de la ecuación

$$x_1 + x_2 +...+ x_n = k$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Una combinación con repetición de tamaño **k** es una selección **no ordenada** de **k** objetos elegidos entre **n** tipos diferentes de objetos, habiendo una cantidad ilimitada de cada tipo.

$$C^{R}_{n,k} = \binom{n-1+k}{k}$$

- Se lanzan 4 dados iguales. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?
- En una fiesta infantil se reparten 20 canicas iguales entre 4 niños. ¿De cuántas formas se pueden repartir?

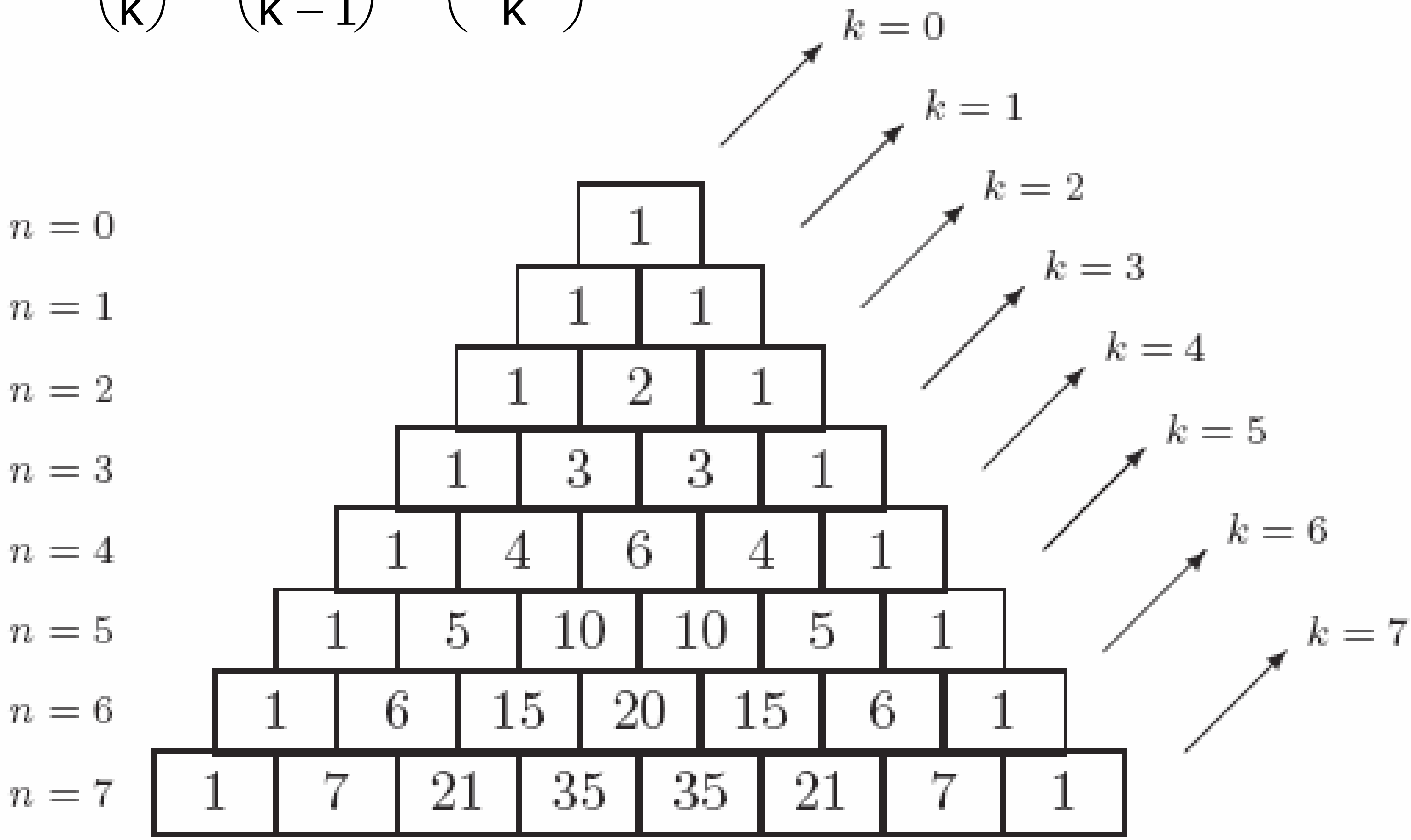
Propiedades de los números combinatorios

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$



Triángulo aritmético

						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

....

3) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

4) Teorema del binomio de Newton

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

PERMUTACIONES DE OBJETOS NO DISTINTOS

El número de sucesiones de **n** símbolos de **m** tipos diferentes donde hay k_1 símbolos de tipo 1, k_2 símbolos de tipo 2, ... , y k_m símbolos de tipo m es:

- ¿Cuántas palabras de su misma longitud se pueden formar con las letras de la palabra ABRACADABRA?
- Se ha rellenado una quiniela de fútbol con 8 unos, 3 doses y 4 equis. ¿De cuántas formas hemos podido hacerlo?

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\ldots\cdot\binom{k_m}{k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Nº multinómico

Principio de la criba (inclusión-exclusión)

1) A, B finitos $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos y llamamos

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|$

$\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

....

$\alpha_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

se cumple que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

3) **Desarreglos** (o desórdenes)

Un **desarreglo** de **n** objetos es una permutación de los mismos tal que ninguno queda en su posición natural.

$X=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $S_n=\{\text{permutaciones de } X\}$ $|S_n| = n!$

$A_1= \{\text{permutaciones que dejan fijo } 1\}$
$A_2= \{\text{permutaciones que dejan fijo } 2\}$
……………………………………………

D={desórdenes}= $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c$

$|D|= |S_n| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n)$

$\alpha_1 = n\,(n-1)!$ $\alpha_2 = \binom{n}{2}\,(n-2)!$ …. $\alpha_k = \binom{n}{k}\,(n-k)!$

$$|D| = n! - \left(n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)! \right)$$

$$|D| = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

4) Combinaciones con repetición limitada

¿Cuántos enteros positivos menores que 10000 tienen la suma de sus cifras igual a 25?

x_1 cifra unidades, x_2 cifra decenas, …, $x_1+x_2+x_3+x_4 = 25$

$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 9$

S = {soluciones con $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4$ }

A_1 = {soluciones con $x_1 \geq 10$ } análogamente A_2, A_3, y A_4

$$X = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)^c$$

$|X| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = C^R_{4,25} - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$

$\alpha_1 = 4\, C^R_{4,15}$ $\alpha_2 = 6\, C^R_{4,5}$ $\alpha_3 = 0$ $\alpha_4 = 0$

$|X| = C(28, 25) - 4C(18,15) + 6C(8, 5)$

Función de Euler

$\Phi(n) = \{ x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq n \text{ , m.c.d.}(x,n)=1\}$

Razonemos con un ejemplo, $\Phi(1200)$

Como $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, $\Phi(1200)$ es el cardinal del conjunto X, formado por los menores que 1200 que ni son múltiplos de 2, ni de 3, ni de 5.

Llamamos S ={1,2,3,…, 1200}

A_1 = {elementos de S múltiplos de 2}

A_2 = {elementos de S múltiplos de 3}

A_3 = {elementos de S múltiplos de 5}

Por tanto, $\Phi(1200) = |X| = |S - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 1200 - a_1 + a_2 - a_3$

$$a_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 1200 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$a_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 1200 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} \right)$$

$$a_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1200 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right)$$

$$\Phi(1200) = 1200 \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} \right) - \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right) \right) = 1200 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$\text{Si } \quad n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \quad \Rightarrow \quad \Phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

5) Nº de aplicaciones suprayectivas de A en B

$|A| = k$ $|B| = n$ $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

El nº total de aplicaciones $f : A \to B$ es n^k

Si $k \leq n$, el nº de aplicaciones inyectivas de A en B es $n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)$

Si $k \geq n$, el nº de aplicaciones suprayectivas de A en B es $T(k,n)$

$A_j = \{f: A \to B \,/\, b_j \notin Im(f)\}$ (aplicaciones que no tienen a b_i en su imagen)

$T(k,n) = n^k - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = n^k - (\alpha_1 - \alpha_2 + ... + (-1)^n \alpha_n)$

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$ $|A_j| = (n-1)^k$ luego $\alpha_1 = n\,(n-1)^k$

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-1} \cap A_n| = \binom{n}{2}\,(n-2)^k$

$\alpha_t = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_t$ (aplicaciones sin $b_1, b_2, ..., b_t$ en la imagen)

$\alpha_t = C(n,t)\,(n-t)^k$, ..., $\alpha_n = 0$ (pues $|A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_t| = 0$)

$$T(k,n) = n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^k$$

Principio de inclusión-exclusión en términos de propiedades

X conjunto total,
propiedades $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sobre los elementos de X
llamamos A_j = {elementos de X que cumplen la propiedad Q_j}

1. ¿Cuántos elementos de X cumplen al menos una de las propiedades?

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

2. ¿Cuántos elementos de X no cumplen ninguna de las propiedades?

$$\left|X - A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \left|X\right| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + (-1)^n \alpha_n$$

3. ¿Cuántos elementos de X cumplen exactamente k propiedades?

$$E(k) = \alpha_k - \binom{k+1}{k}\alpha_{k+1} + \binom{k+2}{k}\alpha_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha_n$$

4. ¿Cuántos elementos de X satisfacen k o más propiedades?

$$X(k) = \alpha_k - \binom{k}{k-1}\alpha_{k+1} + \binom{k+1}{k-1}\alpha_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\alpha_n$$

ALGORITMOS DE ENUMERACIÓN

Un algoritmo de enumeración permite describir, uno tras otro, todos los elementos de un conjunto.

Orden lexicográfico

Dadas las sucesiones de n dígitos $a_1a_2\ldots a_n$ y $b_1b_2\ldots b_n$, decimos que $a_1a_2\ldots a_n < b_1b_2\ldots b_n$ si $a_1<b_1$ o para algún $i\leq n$ se tiene que $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\ldots,a_{i-1}=b_{i-1}$, y $a_i<b_i$

Enumerando permutaciones

La permutación siguiente a $x_1x_2\ldots x_n$ se determina así: (3415762)

1. se halla el mayor j tal que $x_j<x_{j+1}$ $\quad$ j = 4
2. encontrar el mayor k tal que $x_k>x_j$ $\quad$ k = 6
3. la siguiente permutación se obtiene colocando x_k en la posición j y reordenando los dígitos después de la posición j en orden creciente

341 **6** *257*

Enumerando combinaciones

k-combinaciones del conjunto {1, 2, …, n}

Si n = 9, k = 6   la combinación 781349 $\rightarrow$ 134789

orden lexicográfico para ordenar las k-combinaciones.

1ª combinación es **123…k** y la última es   **(n-k+1)(n-k+2)…(n-1)n**

¿Cómo hallar la combinación siguiente a $c_1c_2 \ldots c_k$?

1. mayor j tal que $c_j < n-k+j$
2. la siguiente combinación es $c_1c_2 \ldots c_{j-1}(c_j+1)(c_j+2)\ldots(c_j+k-j+1)$

134789, donde n=9, k=6, tendremos que j=3 y la combinación siguiente es 13**5**678

Enumerando combinaciones con repetición

k-combinaciones de n tipos de elementos {1, 2, …, n}

Si n = 5, k = 6 la combinación 513353 $\rightarrow$ 133355

orden lexicográfico para ordenar las k-combinaciones.

1ª combinación es **111...11** y la última es **nnn...nn**

¿Cómo hallar la combinación siguiente a $c_1c_2\ldots c_k$?

1. mayor j tal que $c_j \neq n$
2. la siguiente combinación es $c_1c_2\ldots c_{j-1}(c_j+1)(c_j+1)\ldots(c_j+1)$

Para 133355, tendremos que j=4 y la combinación siguiente es 133**444**

Enumerando variaciones o listas

k-variaciones del conjunto {1, 2, …, n}

orden lexicográfico para ordenar las listas de tamaño k.

1ª lista es **123…k** y la última es **n(n-1)(n-2)…(n-k+1)**

n=9, k=6 la primera es 123456, la última es 987654

¿Cómo hallar la lista siguiente a $c=c_1c_2\ldots c_k$?

1. mayor i tal que $c_i<s$ donde $s=c_t$ con t>i ó s no está en c
   (el mayor índice i tal que c_i puede aumentar)
2. la siguiente lista es $c_1c_2\ldots c_{i-1}c^*_i c^*_{i+1}\ldots c^*_k$

con $c^*_i=\min\{s/$ s por detrás de c_i ó $s\notin c$ con $c_i<s\}$

$c^*_{i+1}\ldots c^*_k$ son, en orden, los elementos más pequeños de {1,2,...,n} que no están en $c_1c_2...c_{i-1}c^*_i$

En 725498, donde n=9, k=6, tendremos que i=4, s=6 y la lista siguiente es 725613

Enumerando listas con repetición

Listas de tamaño k con elementos de n tipos $\{1, 2, \ldots, n\}$

orden lexicográfico para ordenar las k-listas con repetición.

1ª lista es **111111** y la última es **nnnnnn**

Lista siguiente a $c_1c_2\ldots c_k$

1. mayor j tal que $c_j \neq n$
2. la siguiente lista es $c_1c_2\ldots c_{j-1}(c_j+1)1\ldots1$

Para n=5, k=7 y la lista 5534166,

tendremos que j=5

y la lista siguiente es 5534**211**

Enumerando permutaciones con repetición

¿Cómo enumerar las permutaciones de {1,2,2,3,4,4,5,6,7,7}?

orden lexicográfico para ordenar.

1ª permutación es 1223445677 y la última es 7765443221

¿Cómo hallar la permutación siguiente a $c_1c_2\ldots c_k$?

1. Se halla el mayor j para el que existe k>j con $c_j<c_k$
2. La permutación siguiente es $c_1c_2\ldots c_{j-1}c^*_j c^*_{j+1}\ldots c^*_k$
   donde c^*_j es el mínimo de $\{c_k / c_k>c_j , k>j\}$
   $c^*_{j+1}\ldots c^*_k$ son los restantes elementos ordenados.

En la permutación 7441576322 es j=5, c^*_j=6 y la permutación siguiente es 7441622357

Enumerando todos los subconjuntos de X

$X=\{x_{1,}\, x_2, \ldots, x_n\}$ $\quad\quad\quad$ $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\mathcal{P}(X) \leftrightarrow$ {suc. binarias longitud n}

$A \leftrightarrow a_1a_2\ldots a_n$ donde $a_j=1$ si $x_j \in A$ y $a_j=0$ si $x_j \notin A$

$\{1,3,6,7\} \leftrightarrow 1010011$

Estas sucesiones binarias empiezan en la 000…0 y terminan en la 111…1, corresponden a los números 0, 1, 2, … $,2^n-1$ en notación binaria.

¿Cuál es el subconjunto siguiente a {1, 3, 6, 7}?

¿Cómo obtener el siguiente a k = 1010011?

1. Si k termina en un 0, se cambia a 1
2. Si k termina en uno o más 1's, empezando por la derecha (y moviéndose a la izquierda) se cambia cada 1 a un 0 hasta alcanzar el primer 0, que se cambia a 1

$\{1,3,6,7\} \leftrightarrow 1010011$ siguiente $1010100 \leftrightarrow \{1,3,5\}$

SELECCIONES de k elementos elegidos en un conjunto de n elementos		**DISTRIBUCIONES** de k objetos en n cajas distintas
selecciones ordenadas sin repetición	$n(n-1)\,(n-2)\ldots.\,(n-k+1)$	k objetos distintos en cada caja no más de uno
selecciones no ordenadas sin repetición	$\binom{n}{k}$	k objetos idénticos en cada caja no más de uno
selecciones ordenadas con repetición	n^k	k objetos distintos (sin limitaciones)
selecciones no ordenadas con repetición	$\binom{n-1+k}{k}$	k objetos idénticos (sin limitaciones)
	$T(k,n)$	k objetos distintos cajas no vacías
	$\binom{k-1}{k-n}$	k objetos idénticos cajas no vacías

DISTRIBUCIONES DE OBJETOS EN CAJAS IGUALES

Si los objetos son distintos

Las distribuciones de **n** objetos distintos en **k** cajas idénticas, donde a cada caja se le asigna al menos un objeto, se corresponden con las particiones de un conjunto de **n** elementos en **k** subconjuntos no vacíos

PARTICIONES DE UN CONJUNTO

El nº de particiones de un conjunto X con **n** elementos, en **k** subconjuntos no vacíos, que designamos con **S(n,k)**, cumple que:

(*) $S(n,1)=1$, $S(n,n)=1$, $S(n,k)= S(n-1, k-1) + k\, S(n-1,k)$

y se denominan **números de Stirling** de segunda clase.

1				
1	1			
1	3	1		
1	7	6	1	
1	15	25	10	1

(*) ¿cuál es la siguiente fila?

(*) Se cumple que $T(n,k) = k!\, S(n,k)$

DISTRIBUCIONES DE OBJETOS EN CAJAS IGUALES

Si los objetos son iguales

Existe una correspondencia biyectiva entre las distribuciones de **n** objetos Iguales en **k** cajas idénticas y las particiones del número natural **n** en un número de sumandos menor o igual a **k**.

PARTICIONES DE UN ENTERO

Una partición de un entero positivo **n** es una colección no ordenada de enteros positivos que suman **n**. Se escribe tal colección como una suma en la que los sumandos aparecen en orden decreciente.

Las particiones de 4 son: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1

$[4], [3,1], [2^2], [2,1^2], [1^4]$

DISTRIBUCIONES DE OBJETOS EN CAJAS IGUALES

PARTICIONES DE UN ENTERO

Se designa por **p(n)** el número de particiones de **n**

Se designa por **$p_k(n)$** el número de particiones de **n** con **k** sumandos

1) **$p_k(n)$** coincide con el número de particiones de **n** en las que el mayor sumando es **k**
2) Si $1<k<n$ entonces $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

Valores de $p_k(n)$

	k =	1	2	3	4	5	6 ….
n = 1		1					
2		1	1				
3		1	1	1			
4		1	2	1	1		
5		1	2	2	1	1	
6		1	3	3	2	1	1
		……………………………					

DISTRIBUCIONES
(n objetos se distribuyen en k cajas)

	Distribución arbitraria	**Ninguna caja vacía**
n objetos diferentes **k cajas diferentes**	k^n	$S(n,k)\,k! = T(n,k)$
n objetos iguales **k cajas diferentes**	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k-1}$
n objetos diferentes **k cajas iguales**	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$	$S(n,k)$
n objetos iguales **k cajas iguales**	$\sum_{k=1}^{n} p_k(n)$	$p_k(n)$