RETÍCULOS

Gregorio Hernández

UPM

Matemática Discreta I

CONJUNTOS ORDENADOS

Una relación R en un conjunto A es una **relación de ORDEN** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Un conjunto ordenado es un par (A, R) donde R es un orden en A

(N, ≤),   (N, |) | es la relación de divisibilidad

(N, ≤) es un **conjunto totalmente ordenado**
La divisibilidad en N es un orden **parcial**

En (A,R) $S \subset A$
máximo, mínimo, cota superior, cota inferior, supremo, ínfimo, ….

RETÍCULO

Un conjunto ordenado es un retículo si para cada par $a,b \in A$, existen sup{a,b} e inf{a,b}

(N, ≤),   es un retículo

Todo conjunto totalmente ordenado es un retículo

Ejemplos de retículos

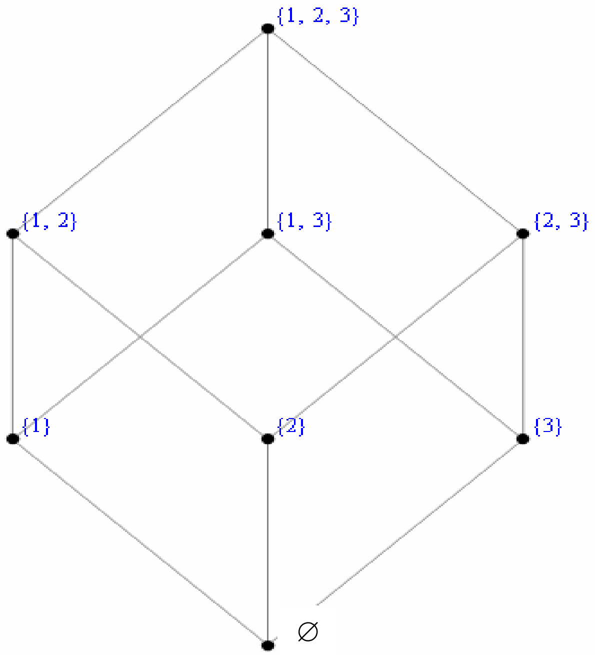
$(N, |)$ y $(D_n, |)$ son retículos

$\sup\{a,b\} = \mathrm{mcm}(a,b)$ $\inf\{a,b\} = \mathrm{mcd}(a,b)$

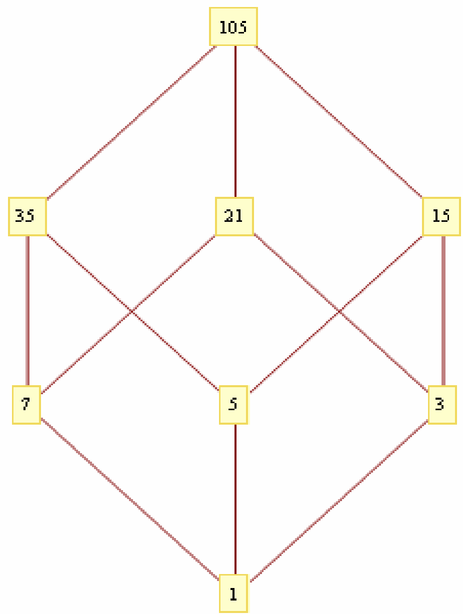
$(P(X), \subset)$ es retículo

$\sup\{A,B\} = A \cup B$ $\inf\{A,B\} = A \cap B$

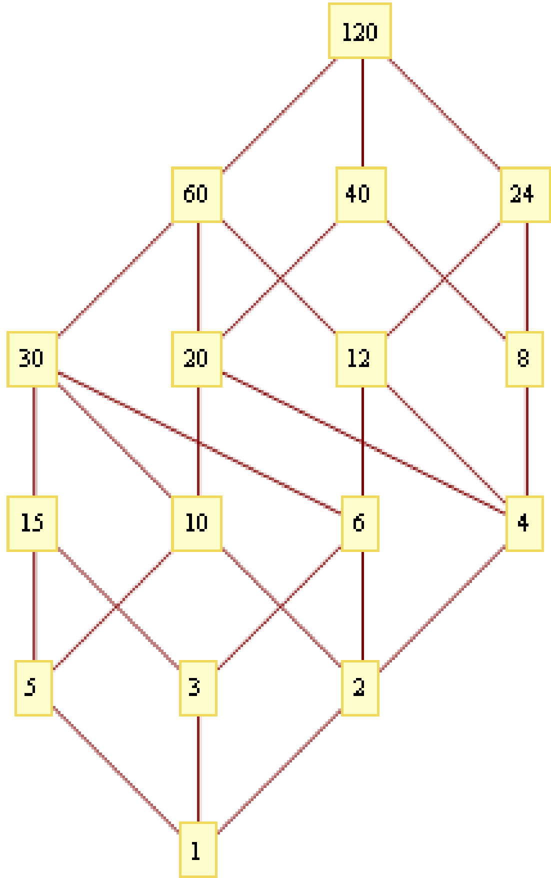
Si (A,R) y (B,S) son retículos , también lo son (A,R^{-1}), retículo inverso y $(A\times B, R\times S)$, retículo producto



$(P(\{1,2,3\}), \subset)$



$(D_{105}, |)$



$(D_{120}, |)$

RETÍCULO (segunda definición)

Un retículo es una terna $(A,\vee,\wedge)$ donde A es un conjunto y $\vee$, $\wedge$ son dos operaciones binarias en A, **disyunción** y **conjunción** que verifican las siguientes propiedades:

(1) Idempotente: $a \vee a = a \wedge a = a \qquad \forall a \in A$

(2) Conmutativa: $a \vee b = a \vee b$

$a \wedge b = a \wedge b \qquad \forall a,b \in A$

(3) Asociativa: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad \forall a,b,c \in A$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \qquad \forall a,b,c \in A$

(4) Absorción: $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a \qquad \forall a,b \in A$

Las dos definiciones son equivalentes

EQUIVALENCIA de las definiciones de retículo

Proposición

Las dos definiciones de retículo son equivalentes S

Demostración:
Si $(R, \leq)$ es un retículo con la definición 1, se definen en R las operaciones
$\forall a,b \in R, \quad a \vee b = \sup\{a,b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a,b\}$

Se comprueba con facilidad que estas operaciones cumplen las propiedades exigidas en la segunda definición

EQUIVALENCIA de las definiciones de retículo

Proposición

Las dos definiciones de retículo son equivalentes S

Demostración:

Si $(R, \vee, \wedge)$ es un retículo con la definición 2, se define en R la siguiente relación

$\forall a,b \in R, \quad a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \quad y \quad a \wedge b = a$

Se comprueba con facilidad que $\leq$ es una relación de orden en R.

Y que $\forall a,b \in R$, $\sup\{a,b\} = a \vee b$ e $\inf\{a,b\} = a \wedge b$

Luego $(R,\leq)$ es un retículo con la definición 1

Propiedades de los retículos

Si $(R,\leq)$ es un retículo, entonces $\forall a,b,c,d \in R$ se verifica que:

- $a \leq c$ y $b \leq c \Leftrightarrow \sup\{a,b\} \leq c$
  $c \leq a$ y $c \leq b \Leftrightarrow c \leq \inf\{a,b\}$
- $a \leq b$ y $c \leq d \Rightarrow \sup\{a,c\} \leq \sup\{b,d\}$, $\inf\{a,c\} \leq \inf\{b,d\}$
- $a \leq b \Rightarrow \sup\{a,c\} \leq \sup\{b,c\}$, $\inf\{a,c\} \leq \inf\{b,c\}$
- $a \leq b \Leftrightarrow \sup\{a,b\} = b \Leftrightarrow \inf\{a,b\} = a$

Si $A,B \subset R$, no vacíos,

- Si $a \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$ entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$,
  $\inf(A) \leq \inf(B)$ si existen

Propiedades de los retículos

Si $(R,\leq)$ es un retículo, entonces $\forall a,b,c,d \in R$ se verifica que:

$$a \leq b \Rightarrow \sup\{a,c\} \leq \sup\{b,c\}, \qquad \inf\{a,c\} \leq \inf\{b,c\}$$

Primera demostración:
Sea $z = \sup\{b,c\}$
Como $a \leq b$ y z es cota superior de b y c, también es cota superior de a y c luego $\sup\{a,c\} \leq z$

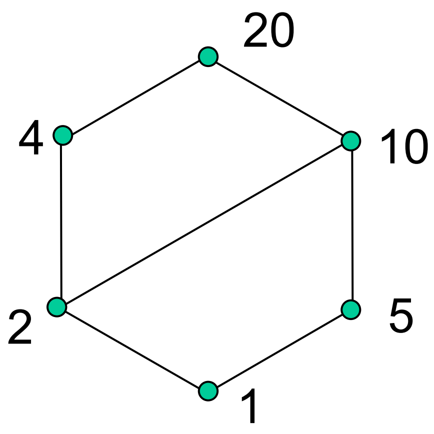
Segunda demostración (atendiendo a la segunda definición de retículo):
Hay que probar que si $a \vee b = b$ entonces $(a \vee c) \vee (b \vee c) = b \vee c$

$$(a \vee c) \vee (b \vee c) = a \vee ((c \vee b) \vee c)) = a \vee ((b \vee c) \vee c)) = a \vee (b \vee (c \vee c)) =$$
$$= a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c$$

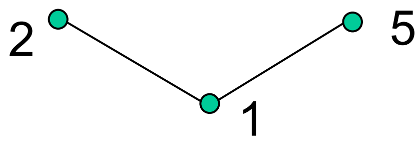
SUBRETÍCULOS

Si $(R,\leq)$ es un retículo, $A \subset R$, $(A,\leq)$ es un conjunto ordenado

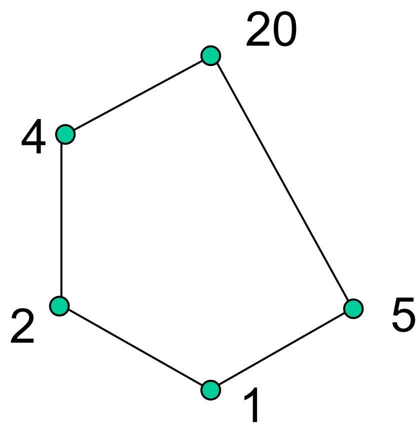
$(A,\leq)$ es subretículo si $(A,\leq)$ es retículo y $\forall a,b \in A$ se cumple que
$\sup_A\{a,b\} = \sup_R\{a,b\}$, $\inf_A\{a,b\} = \inf_R\{a,b\}$,



$(D_{20},|)$



$A=\{1,2,5\}$ no es retículo



$B=\{1,2,4,5,20\}$ es retículo pero no es subretículo de D_{20} porque
$\sup_B\{2,5\}= 20$
$\sup_D\{2,5\}= 10$

$C = \{1,2,5,10\}$ sí es subretículo de D_{20}

SUBRETÍCULOS

Si $(R,\vee, \wedge)$ y $(A,\vee', \wedge')$ son retículos, $A \subset R$, A es subretículo si
$\forall a,b \in A, \quad a \vee ' b = a \vee b \quad$ y $\quad a \wedge' b = a \wedge b$

Si $(R,\vee, \wedge)$ y $A \subset R$, $\quad (A,\vee, \wedge)$ es subretículo si
$\forall a,b \in A, \quad a \vee b \in A \quad$ y $\quad a \wedge b = \in A$

$(D_{20},|)$ es subretículo de $(N,|)$

ISOMORFISMO DE RETÍCULOS

Las aplicaciones entre retículos que conservan supremo e ínfimo (def. 1) o las operaciones de retículo (def. 2) se denominan **homomorfismos**

Si $(R,\leq)$ y $(S, \leq')$ son retículos, se dice que $f: R\rightarrow S$ es homomorfismo si

$\forall a, b \in R,$ $\quad f(\sup\{a,b\}) = \sup\{f(a),f(b)\}$

$\quad f(\inf\{a,b\}) = \inf\{f(a),f(b)\}$

Si $(R,\vee, \wedge)$ y $(S,\vee', \wedge')$ son retículos, $f: R\rightarrow S$ tal que

$\forall a,b\in R,$ $\quad f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$ y

$\quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$

ISOMORFISMO DE RETÍCULOS

Proposición

Un isomorfismo entre conjuntos ordenados conserva el supremo y el ínfimo

Dem.:

Sean $(A,\leq)$ y $(B, \leq')$ conjuntos ordenados, $f: A\to B$ isomorfismo.
$H\subset A$ tal que existe $\sup(H)$, debemos probar que $f(\sup(H)) = \sup(f(H))$ y análogamente para el ínfimo.

Sea $b = f(\sup(H))$, comprobemos que $b = \sup(f(H))$

1) b es cota superior de f(H)
2) b es la menor de las cotas superiores

ISOMORFISMO DE RETÍCULOS

Proposición

Un isomorfismo entre conjuntos ordenados conserva el supremo y el ínfimo

Dem.:

Sea $b = f(\sup(H))$, comprobemos que $b = \sup(f(H))$

1) b es cota superior de $f(H)$

$\forall a \in H$, $a \leq \sup(H)$, por ser f isomorfismo $f(a) \leq' f(\sup(H)) = b$

Luego b es cota superior de $f(H)$

ISOMORFISMO DE RETÍCULOS

Proposición

Un isomorfismo entre conjuntos ordenados conserva el supremo y el ínfimo

Dem.:

Sea b = f(sup(H)), comprobemos que b = sup(f(H))

2) b es la menor de las cotas superiores de f(H)

Sea c otra cota superior de f(H) con $c \leq' b$, comprobemos que c=b

$\forall a \in H$, $f(a) \leq' c \leq' f(\sup(H))$

Como f es isomorfismo de conjuntos ordenados, existe f^{-1} y

$a \leq f^{-1}(c) \leq \sup(H)$

Luego $f^{-1}(c) = \sup(H)$ y resulta $c = f(\sup(H)) = b$

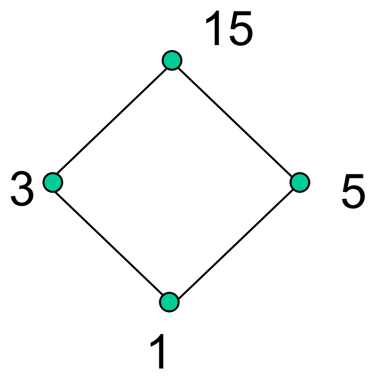
ISOMORFISMO DE RETÍCULOS

> **Teorema**
> Dos retículos isomorfos como conjuntos ordenados son también isomorfos como retículos.

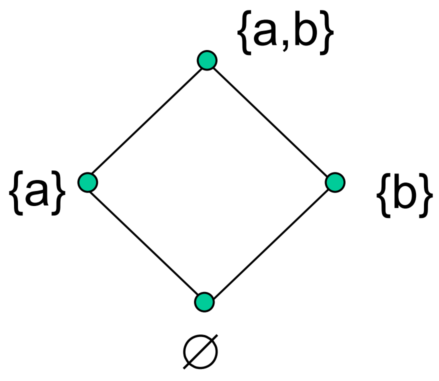
Los retículos $(D_{15},|)$ y $(P\{a,b\},\subset)$ son isomorfos

Basta construir una biyección que conserve el orden

$(D_{15}, |)$



$(P(\{a,b\}),\subset)$



$f: D_{15} \to P$

$1 \to \varnothing$

$3 \to \{a\}$

$5 \to \{b\}$

$15 \to \{a,b\}$

RETÍCULOS ACOTADOS

Un retículo es acotado si tiene máximo y mínimo

Máximo $\to$ Elemento unidad 1
Mínimo $\to$ Elemento nulo 0

Los retículos $(D_{15},|)$ y $(P\{a,b\},\subset)$ son acotados
El retículo $(N, \leq)$ no es acotado

> Proposición
> Todo retículo finito es acotado

Dem.: Si $R=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ entonces el máximo y el mínimo son
$1 = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$
$0 = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$

RETÍCULOS COMPLEMENTARIOS

Sea (R, $\leq$) un retículo acotado y $a \in A$. Se dice que el elemento a' es complementario de a si sup{a,a'}=1 e inf{a,a'}=0

Un retículo es complementario si es acotado y todo elemento tiene complementario

$(P(X), \subset)$ es retículo complementario

El complementario de A es el conjunto X – A

$(D_{15}, |)$ es retículo complementario

$(D_{12}, |)$ no es retículo complementario.
El 6 no tiene complementario

$(D_n, |)$ es retículo complementario si todos los factores primos de n son distintos

RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

El retículo $(R, \vee, \wedge)$ es distributivo si se cumplen las propiedades distributivas $\quad \forall a,b,c \in R$

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$
$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

Estas propiedades son ciertas si dos de los elementos a,b,c coinciden o al menos uno de ellos es 0 ó 1

$(P(X), \subset)$ es retículo distributivo

RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Proposición

En un retículo acotado y distributivo el complementario de un elemento, si existe, es único

Dem.:

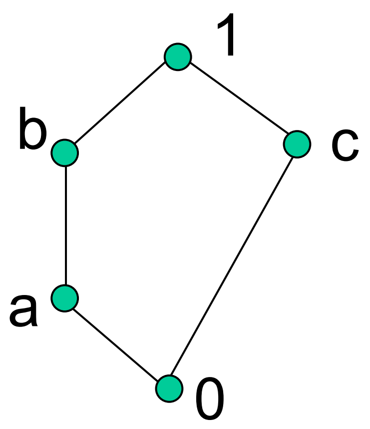
Si a y b son complementarios de c, entonces

$a = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge b \quad \Rightarrow \quad a \leq b$

$a = a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee b \quad \Rightarrow \quad b \leq a$

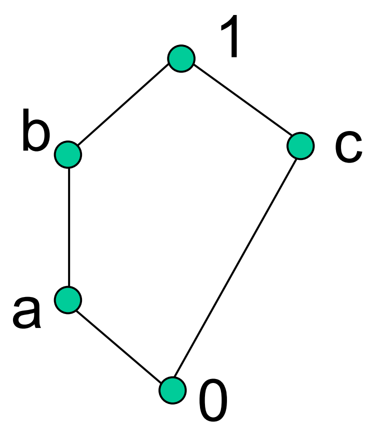
Luego, a = b

Ejemplo. El retículo de la figura NO es distributivo porque c tiene dos elementos complementarios a y b



RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Comprobemos directamente que el retículo NO es distributivo



$(a \vee c) \wedge b = 1 \wedge b = b$

pero $(a \wedge b) \vee (c \wedge b) = a \vee 0 = a$

$(b \wedge c) \vee a = 0 \vee a = a$

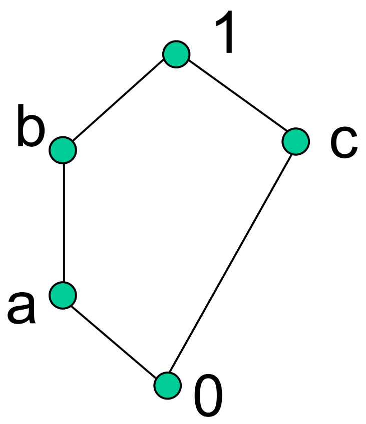
pero $(b \vee a) \wedge (c \vee a) = b \wedge 1 = b$

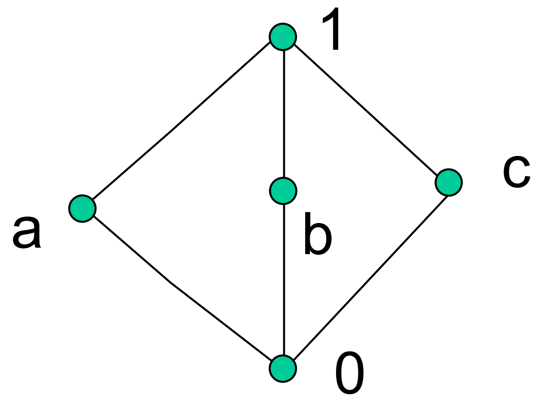
NO es cierto que si en un retículo acotado y complementario el complementario de cada elemento es único, entonces el retículo es distributivo.
Dilworth demostró que todo retículo es subretículo de otro en el que el complementario es único.

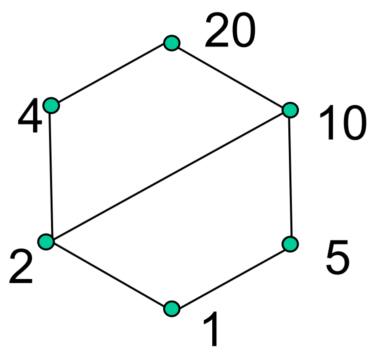
RETÍCULOS DISTRIBUTIVOS

Teorema

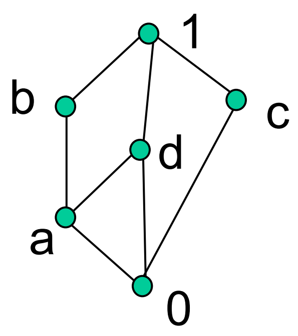
Un retículo es distributivo si, y sólo si, ningún subretículo suyo es isomorfo a uno de los dos retículos de la figura

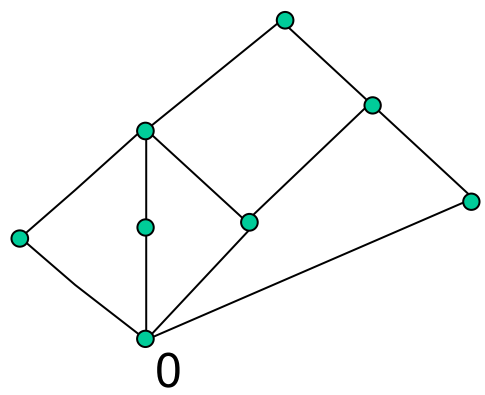






Distributivo





No distributivos