MATEMÁTICA DISCRETA II (MI)
TRABAJOS EN GRUPO

NÚMEROS DE STIRLING

Un polinomio f(t) habitualmente se expresa como una suma de potencias de t, por ejemplo:

$f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$

lo que significa realmente distinguir un sistema de polinomios $\{1, t, t^2, t^3, ...\}$ como polinomios base.

Pero, en ocasiones, resulta más interesante desarrollarlo según otro sistema de polinomios.
Por ejemplo:
los subfactoriales $\{1, (t)_1, (t)_2, (t)_3, ...\}$ donde $(t)_k = t(t-1)(t-2)(t-3) .... (t-k+1)$
o los combinatorios $\left\{\binom{t}{0}, \binom{t}{1}, \binom{t}{2}, \ldots, \binom{t}{k}, \ldots\right\}$

Ejemplo. $f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 = 2(t)_3 + (t)_2 + (t)_1 - 1 = 12\binom{t}{3} + 2\binom{t}{2} + \binom{t}{1} - \binom{t}{0}$

Los números de Stirling proporcionan la relación entre los sistemas de polinomios definidos por las potencias $\{1, t, t^2, t^3, ...\}$ y por los subfactoriales $\{1, (t)_1, (t)_2, (t)_3, ...\}$

$t = (t)_1$ $t^2 = (t)_2 + (t)_1$ $t^3 = (t)_3 + 3(t)_2 + (t)_1$ ……
$(t)_1 = t$ $(t)_2 = t(t-1) = t^2 - t$ $(t)_3 = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$ ……….

Los **números de Stirling de primera clase s(n,k),** k=1, .. , n
son los coeficientes de $(t)_n$ respecto de $\{1, t, t^2, t^3, ...\}$

Los **números de Stirling de segunda clase S(n,k),** k=1, .. , n
son los coeficientes de t^n respecto de $\{1, (t)_1, (t)_2, (t)_3, ...\}$

Los números de Stirling de segunda clase son todos positivos, mientras que los de primera clase pueden ser negativos.

NÚMEROS DE STIRLING EN COMBINATORIA

Los números de Stirling aparecen al estudiar las distribuciones de **objetos distintos** en **recipientes iguales**, de forma que ningún recipiente quede vacío.

Llamemos z(n,k) al número de formas en que se pueden disponer **n objetos distintos** alrededor de **k círculos** (indistinguibles) de forma que cada círculo reciba al menos un objeto. Este número es el valor absoluto del **número de Stirling de primera clase s(n,k)**
$z(n,k) = (-1)^{n-k}\, s(n,k)$

Demostrar las siguientes

Propiedades
- $z(n, 0) = 0$ $z(n, 1) = (n-1)!$ $z(n, n) = 1$
- $z(n, k) = z(n-1, k-1) + (n-1)\, z(n-1, k)$

para justificar los valores de la siguiente tabla

Algunos valores de los números de Stirling de primera clase

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=1	1					
n=2	– 1	1				
n=3	2	–3	1			
n=4	–6	11	–6	1		
n=5	24	–50	35	–10	1	
n=6	–120	274	–225	85	–15	1

El número de Stirling de segunda clase S(n,k) es el número de formas en que se pueden distribuir **n objetos distintos** en **k cajas idénticas** de forma que cada caja reciba al menos un objeto. Lo que coincide con el número de particiones de un conjunto de **n** elementos en **k** subconjuntos no vacíos.

Demostrar las siguientes

Propiedades:

a) $S(n, 1) = 1$ $\quad\quad$ $S(n, n) = 1$

b) $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k\, S(n-1, k)$

c) $T(n,k) = k!\, S(n,k)$ (nº de aplicaciones suprayectivas de $\mathbf{N}_n$ en $\mathbf{N}_k$)

para justificar los valores de la siguiente tabla y obtener una fórmula explícita para los números de Stirling de segunda especie.

Algunos valores de los números de Stirling de segunda clase

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=1	1					
n=2	1	1				
n=3	1	3	1			
n=4	1	7	6	1		
n=5	1	15	25	10	1	
n=6	1	31	90	65	15	1

Estudiar la relación entre los números de Stirling de primera y segunda especie
Presentar y demostrar otras propiedades de los números de Stirling.

Referencias

N. Biggs. "Matemática Discreta". Vicens Vives, 1990
R. Grimaldi. "Matemática Discreta y Combinatoria". Addison-Wesley

Páginas web
http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_number
MathWorld. Stirling number. http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html