Gregorio Hernández Peñalver
ETS Ingenieros Informáticos, UPM

MATEMÁTICA DISCRETA II
TRABAJOS EN GRUPO

PERFECTOS, AMIGOS Y PRIMOS. DISTRIBUCIÓN DE PRIMOS

En Teoría de Números hay numerosos resultados y conjeturas que se pueden enunciar de forma elemental, aunque algunos de ellos sean muy profundos y permanezcan sin demostración desde hace cientos de años. En el trabajo se presentarán algunos de los resultados elementales y se mostrarán conjeturas que resisten los esfuerzos de numerosos matemáticos por ser demostradas..

Cuestiones y temas que se deben presentar:

1. Números perfectos y amigos.

Un número es perfecto si coincide con la suma de sus divisores propios. Dos números son amigos si cada uno coincide con la suma de los divisores propios del otro.
¿Qué se sabe de los números perfectos? ¿Y de las parejas de amigos?
Demostrar que si " $2^k - 1$ es primo, entonces $(2^k - 1)\, 2^{k-1}$ es un número perfecto". Esta es la Proposición 36 del Libro IX de los Elementos de Euclides.

2. Primos en sucesiones e intervalos

Teorema de Dirichlet: En toda progresión aritmética $\{an + b \mid n \in N\}$ con a y b primos entre sí hay infinitos números primos. Demostrarlo para el caso particular $a = 4$, $b = -1$
Conjetura de Bertrand (demostrada por Chebysev y Erdös): Para todo n hay un número primo entre n y 2n
Mostrar los pasos fundamentales de la demostración de Erdös

3. Distribución de los números primos. Hipótesis de Riemann

El estudio de la distribución de los números primos, es decir, el estudio de la frecuencia de aparición entre los naturales y dónde es probable que aparezca el n-simo primo, fue iniciado por Gauss y Legendre en el siglo XVIII. Introdujeron la notación $\pi(n)$ para indicar la cantidad de primos menores que n y conjeturaron que su valor era aproximadamente $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$

La hipótesis de Riemann dice que los primos se distribuyen de la forma más regular posible. Si s es un número complejo con parte real mayor que 1, la función zeta de Riemann es

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

La hipótesis dice que la parte real de todos los ceros no triviales es ½. La demostración de este resultado es uno de los Problemas del Milenio propuestos por The Clay Mathematics Institute, con una recompensa de un millón de dólares.

4. Problemas no resueltos sobre primos.

- ¿Hay infinitas parejas de primos gemelos? (que difieren en 2)
- Conjetura de Goldbach. Todo entero mayor que 2 se puede expresar como suma de dos primos.
- ¿Hay infinitos primos de la forma $n^2 + 1$?
- ¿Hay infinitos primos de Fermat?
- ¿Hay infinitos primos en la sucesión de Fibonacci? ....

Referencias

T. Koshy, "Elementary Number Theory with applications", Academic Press, 2002
M. Aigner, G. Ziegler, "El libro de las demostraciones", Nivola, 2005

Páginas web
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Prime_numbers.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Perfect_numbers.html
The Prime Pages. http://primes.utm.edu/
http://es.wikipedia.org/wiki/Número_primo