MATEMÁTICA DISCRETA II (MI)
TRABAJOS EN GRUPO

MARAVILLOSAS DESIGUALDADES

En el ámbito del análisis abundan las desigualdades. Dos de las más básicas son la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la que relaciona las medias armónica, geométrica y aritmética.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Esta desigualdad fue demostrada para sumas por Cauchy en 1822 y para integrales por Buniakowski y Schwarz. Aparece en Álgebra Lineal, Análisis y Probabilidades. Se puede expresar en integrales y en términos de producto interno en un espacio vectorial y normas.

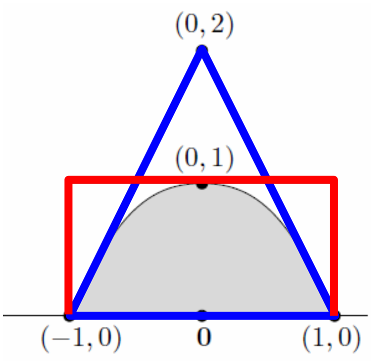
Media armónica, geométrica y aritmética

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Objetivos del trabajo:

- Presentar varias demostraciones de ambas desigualdades, incluyendo demostraciones "sin palabras", por inducción, algebraicas, etc.
- Explicar algunas de las aplicaciones de estas desigualdades:
  - Acotación de las raíces reales de un polinomio.
  - **Triángulo** y **rectángulo** tangencial de una curva.
  - "Todo grafo de orden n y sin triángulos tiene a lo sumo $n^2/4$ aristas".
  - …



Referencias

M. Aigner, G. Ziegler: "Proofs from THE BOOK", (cap. 18, 4th edition), Springer, 2010.
H. Alzer: "A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality". *Amer. Math. Monthly*, 103, pp. 585. (1996)
R. Nelsen: "Proofs without words", MAA, 1993